ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK

Digitized by Google

LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
FROM THE LIBRARY OF
PROFESSOR W. W. BEMAN
AND
PROFESSOR D. E. SMITH
1851-1929

Digitized by Google

Mathematics
QA
1
.A67

Digitized by Google

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Dritter Theil.

Mit fünf lithographirten Tafeln.

Greifswald.
Verlag von C. A. Koch.

1843.

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniss des dritten Theils.

Arithmetik.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
IV.	Ueber die rekurrirende Bestimmung der Bernoullischen Zahlen. Von Herrn O. Schlömilch zu Weimar.	I.	9
VI.	Berechnung der Grundzahl der natürlichen Logarithmen, so wie mehrerer anderer mit ihr zusammenhängender Zahlen. Von Herrn Professor C. A. Bretschneider zu Gotha.	I.	27
VIII.	Ueber die höhern Differentialquotienten der Functionen $P=\frac{\sin x}{1+2y\cos x+y^2}$ und $Q=\frac{y+\cos x}{1+2y\cos x+y^2}$ in Bezug auf x als veränderliche Grösse. Nach einer Abhandlung des Herrn Professor C. J. Malmsten zu Upsala frei bearbeitet von dem Herausgeber.	I.	41
XI.	Einige Bemerkungen zu der Abhandlung Nr. IV. im ersten Hefte über Recursionsformeln für die Bernoullischen Zahlen. Von Herrn A. Göpel zu Berlin.	I.	64
XIX.	Aufgaben zur Anwendung des Variationskalkuls. Von Herrn Dr. G. Strauch, Lehrer der Mathematik an der Erziehungsanstalt zu Lenzburg im Kanton Aargau.	II.	119
XX.	Neue Auflösung der die Bestimmung der Anzahl aller ganzen Zahlen, welche kleiner als eine gegebene Zahl und zu derselben relative Primzahlen sind, betreffenden Aufgabe. Von dem Herausgeber.	II.	196

409421

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XXI.	Ueber Cauchy's Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades zwischen zwei unbekannten Grössen in ganzen Zahlen. Von dem Herausgeber.	II.	203
XXII.	Beweis eines arithmetischen Lehrsatzes. Von Herrn F. Arndt, Candidaten des höhern Schulamts zu Greifswald.	II.	210
XXVI.	Ueber die höhern Differentiale der Function $y=\sqrt{a^2-b^2x^2}$. Von dem Herausgeber. . .	III.	236
XXVII.	Ueber Wurzelausziehung aus Binomien von der Form $A+\sqrt{B}$. Von Herrn A. Göpel zu Berlin.	III.	249
XXVIII.	Novi alicujus theorematis analytici commentatio analytica. Auctore Friderico Arndt, muneris schol. Cand. Gryph.	III.	256
XXXI.	Ueber die Methode der unbestimmten Coeffizienten und verwandte Gegenstände. Von Herrn Doctor O. Schlömilch zu Weimar.	III.	269
XXXII.	Ueber die Integration unendlicher Reihen. Von Demselben.	III.	278
XXXIV.	Ueber Reihenentwickelungen nach der Methode der unbestimmten Coefficienten. Von Herrn T. Wittstein, Lehrer am Lyceum zu Hannover.	III.	300
XXXV.	Beitrag zur Lösung des, im zweiten Bande des Archivs S. 220. angeregten, Euler-Pfaffschen Theorems über geometrische Progressionen. Von dem Herrn Doctor A. R. Luchterhandt zu Königsberg i. d. N.	III.	305
XXXVI.	Ueber die Entwickelung von $e=\lim(1+x)^{\frac{1}{x}}$. Von Herrn T. Wittstein, Lehrer am Lyceum zu Hannover.	III.	327
XXXIX.	Ueber das Integral $\int\frac{ydy}{(y^2+8)\sqrt{y^2-1}}$. Von Herrn Th. Clausen zu Dorpat. Mittheilung des Herausgebers.	III.	335
XLIV.	Anderer Beweis für die beiden Theoreme in Thl. III. Nr. XXXV. Von Herrn A. Göpel zu Berlin.	IV.	394
XLVII.	Allgemeines Theorem für die Verwandlung einer Funktion in eine unendliche Reihe. Von Herrn Doctor O. Schlömilch zu Weimar.	IV.	400
XLVIII.	Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn Strauch Nr. XIX. im zweiten Hefte S. 119. Von Herrn A. Göpel zu Berlin.	IV.	405
LII.	Algebraische Lehrsätze, welche zu beweisen sind. Von Herrn Doctor O. Schlömilch zu Weimar.	IV.	442

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Geometrie.		
IX.	Ueber die Bestimmung des Flächeninhalts einer Kugelzone. Von dem Herausgeber.	I.	56
XII.	Gleichung der geraden Linie und der Ebene, auf schiefwinklige Coordinaten bezogen. Von Herrn Doctor Hädenkamp, Oberlehrer der Mathematik und der Naturwissenschaften am Gymnasium zu Hamm.	I.	67
XIV.	Ueber die abgeleiteten Vierecke, welche von je vier merkwürdigen Punkten des geradlinigen Viereckes gebildet werden. Von Herrn Professor C. A. Bretschneider zu Gotha.	I.	85
XV.	Ueber die perspectivischen Lagen eines Strahlenbüschels auf einer projectivischen Geraden. Von Herrn A. Göpel zu Berlin.	I.	93
XVIII.	Vorschläge zu Vermeidung einiger fehlerhaften Ausdrücke in den mathematischen (geometrischen) Lehrbüchern. Von dem Herrn Conrector Beyer am Gymnasium zu Neustettin.	II.	113
XXIII.	Eine Formel für die dreiseitige Pyramide. Von Herrn R. Hoppe, Candidaten des höhern Schulamts zu Greifswald.	II.	213
XXIV.	Ein Satz von den Flächen des zweiten Grades, als Erweiterung eines schon früher bekannten Satzes von der Kugel. Von Herrn James Booth, Professor of Mathematics in Bristol College. Mitgetheilt von dem Herausgeber.	II.	217
XXV.	Neue Untersuchungen über die Bestimmung einer gleichseitigen Hyperbel vermittelst vier gegebener Bedingungen. Von Herrn Fr. Seydewitz, Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.	III.	225
XXIX.	Ueber eine Eigenschaft des Kreises. Von dem Herausgeber.	III.	259
XXX.	Ueber einen Reihenausdruck für den Umfang der Ellipse. Von Herrn R. Hoppe, Candidaten des höhern Schulamts zu Greifswald.	III.	265
XLII.	Ueber einige Sätze von Sechsecken, welche in oder um einen Kegelschnitt beschrieben sind. Von Herrn Doctor O. Schlömilch zu Weimar.	IV.	386
XLIII.	Ueber ausgezeichnete Sehnen im Kreise, die durch einen bestimmten Punkt gehen. Von dem Herrn Doctor Büchner, Lehrer der Mathematik am Gymnasium zu Hildburghausen.	IV.	388
XLV.	Bemerkung über eine von Ivori gefundene Eigenschaft convokaler Ellipsoide. Von dem Herrn		

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung		Heft.	Seite.
	Doctor Hädenkamp, Oberlehrer am Gymnasium zu Hamm in Westphalen.	IV.	397
XLVI.	Mechanische Construction des Lemniscate. Von Demselben.	IV.	400
XLVIII.	Bemerkungen zu dem Aufsatze Th. III. Nr. XXIX. des Herausgebers über eine Eigenschaft des Kreises. Von Herrn A. Göpel zu Berlin. . . .	IV.	403
XLIX.	Ueber Parabeln im Raume. Von dem Herausgeber.	IV.	408
L.	Besondere Umformungen der Gleichungen der Flächen des zweiten Grades, nebst einigen Anwendungen derselben. Von Herrn L. Mossbrugger, Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.	IV.	430
LI.	Synthetischer Beweis der Incommensurabilität zweier Geraden, die sich wie $\sqrt{3} : 1$ verhalten. Von Herrn Professor C. A. Bretschneider zu Gotha.	IV.	440
LIII.	Verschiedene Bemerkungen. Von Herrn R. Wolf, Lehrer der Mathem. an der Realschule zu Bern.	IV.	444
LIV.	Eine geometrische Aufgabe. Von Herrn G. D. E. Weyer, Assistenten a. d. Sternwarte zu Hamburg.	IV.	447

Trigonometrie.

I.	Ueber die Berechnung eines ebenen Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. Von Herrn Professor v. Schulten. Mitgetheilt von dem Herrn Doctor Stern zu Göttingen. .	I.	1
XVII.	Ueber die Neper'schen Analogieen. Aus dem Cambridge mathematical Journal. February. 1842. p. 96 mitgetheilt vom Herausgeber.	I.	104

Geodäsie.

VII.	Ueber eine geodätische Aufgabe. Von dem Herausgeber.	I.	35
XIII.	Neue Construction einer Lambert'schen Aufgabe aus der praktischen Geometrie. Von Herrn G. D. E. Weyer, Assistent. a. d. Sternwarte zu Hamburg.	I.	74
	Analytische Auflösung derselben Aufgabe. Von dem Herausgeber.	I.	75
XLI.	Rein geometrische Behandlung der im Archiv der Mathematik und Physik Thl. III. Heft I. S. 40 vorgelegten geodätischen Aufgabe. Von Herrn Fr. Seydewitz, Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.	IV.	383

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
LIII.	Geodätische Aufgabe. Von Herrn R. Wolf, Lehrer der Mathematik an der Realschule zu Bern. .	IV.	444

Statik und Mechanik.

I.	Bemerkungen zu einer Stelle in Poisson's Traité de Mécanique. Von Herrn James Booth, Professor der Mathematik in Bristol College. Mitgetheilt von Herrn Doctor Stern zu Göttingen.	I.	3
II.	Bestimmung des Schwerpunkts eines Polygons aus den Coordinaten seiner Ecken. Von Herrn T. J. Eschweiler, Director der höhern Bürgerschule in Köln a. R.	I.	3
III.	Bestimmung des Schwerpunkts im sphärischen Dreieck. Von Demselben.	I.	8
V.	Ueber den Schwerpunkt des körperlichen Sectors eines Ellipsoids mit drei Achsen. Von Herrn Lieutenant von Seydlitz im Königl. Preuss. 8. (Leib-) Infanterie-Regiment.	I.	18
X.	Ueber die Bestimmung des Schwerpunkts einer Kugelzone. Von dem Herausgeber.	I.	61
XXXVII.	Ueber den Satz vom Parallelogramme der Kräfte. Von Herrn Doctor Dippe, Oberlehrer am Gymn. Frider. zu Schwerin.	III.	329

Astronomie.

XVII.	Ueber des Herrn Doctor C. L. v. Littrow, Directors der Sternwarte zu Wien, neue Methode, die Breite zur See zu bestimmen. Von dem Herausgeber.	I.	107
XL.	Ueber die Berechnung der Parallaxen. Von dem Herausgeber.	IV.	337

Physik.

XVII.	Ueber die Electrisirmaschine des polytechnischen Instituts zu London und über gelben Regen. Mittheilung des Herausgebers.	I.	112
XXIV.	Ueber eine neue Methode, die Declination der Magnetnadel zu beobachten. Von Herrn Ivan Simonoff, Professor der Astronomie an der Universität zu Kasan. Mittheilung des Herausgebers.	II.	215
XXIV.	Physikalische Bemerkungen. Von Herrn Director Strehlke zu Danzig.	II.	220
LIII.	Ueber sphärische Hohlspiegel. Von Herrn R. Wolf, Lehrer der Mathem. an der Realschule zu Bern.	IV.	444

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Geschichte der Mathematik und Physik.		
XXXIII.	Die Algebra in Italien seit Fibonacci. Von Herrn Doctor Gerhardt, Lehrer am Gymnasium zu Salzwedel.	III.	284
	Uebungsaufgaben für Schüler.		
XVI.	Von dem Herausgeber.	I.	100
XVI.	Von Herrn Chasles.	I.	101
XVI.	Von Herrn Doctor Hädenkamp zu Hamm. ...	I.	101
XVI.	Von dem Herrn Conrector Beyer zu Neustettin.	I.	102
XVI.	Aus dem London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine. Sptbr. 1842. p. 179.	I.	103
XXXVIII.	Von dem Herausgeber.	III.	333
LII.	Von Herrn Doctor O. Schlömilch zu Weimar.	IV.	442
LIII.	Von Herrn R. Wolf zu Bern.	IV.	446
	Literarische Berichte *).		
IX.	.....	I.	135
X.	.....	II.	151
XI.	.....	III.	169
XII.	.....	IV.	177

*) Ich bemerke hierbei, dass die literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

I.

Mittheilungen

von dem

Herrn Doctor Stern

zu Göttingen.

Aus den Acta societatis scientiarum Fennicae T. 1. Auszug aus einer Abhandlung des Hrn. Prof. v. Schulten.

Um aus zwei Seiten a, b und dem eingeschlossenen Winkel C eines ebenen Dreieckes die dritte Seite c zu finden, nimmt man gewöhnlich die Formeln $\operatorname{tg} x = \frac{2\sqrt{ab}\,.\,\sin\frac{1}{2}C}{a-b}$,

$$c = \frac{a-b}{\cos x}.$$

Man kann aber folgende Formeln anwenden, die mehr Bequemlichkeit darbieten. Nennt man nemlich die halbe Differenz der zwei anderen Winkel φ, so ist bekanntlich

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a-b}{a+b}\cot\tfrac{1}{2}C \quad \ldots 1)$$

Die Formel

$$c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$$

kann man aber vermittelst der bekannten Relationen

$$\cos^2\tfrac{1}{2}C + \sin^2\tfrac{1}{2}C = 1$$
$$\cos^2\tfrac{1}{2}C - \sin^2\tfrac{1}{2}C = \cos C$$

in folgende verwandeln:

$$c = \sqrt{[a^2(\cos^2\tfrac{1}{2}C + \sin^2\tfrac{1}{2}C) + b^2(\cos^2\tfrac{1}{2}C + \sin^2\tfrac{1}{2}C) - 2ab(\cos^2\tfrac{1}{2}C - \sin^2\tfrac{1}{2}C)]}$$
$$= \sqrt{[(a-b)^2\cos^2\tfrac{1}{2}C + (a+b)^2\sin^2\tfrac{1}{2}C]}$$

also

$$c = (a-b)\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{1+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}C} \ldots 2)$$

oder

$$c = (a+b)\sin\tfrac{1}{2}C.\sqrt{1+\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\cot^2\tfrac{1}{2}C} \ldots 3)$$

Aus 1) folgt aber

$$\sqrt{1+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}C} = \sqrt{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sin\varphi} \ldots 4)$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\cot^2\tfrac{1}{2}C} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} \ldots 5)$$

also

$$c = \frac{(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C}{\sin\varphi} \ldots 6)$$

oder

$$c = \frac{(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C}{\cos\varphi} \ldots 7)$$

Um zu bestimmen, in welchen Fällen man der Gleichung 6) oder der Gleichung 7) den Vorzug zu geben hat, setze man die Gleichungen 1), 6) und 7) unter folgende Form:

$$\lg\operatorname{tg}\varphi = \lg(a-b) - \lg(a+b) + \lg\cot\tfrac{1}{2}C = \alpha$$

$$\lg c = \lg(a-b) + \lg\cos\tfrac{1}{2}C - \lg\sin\varphi = \beta - \lg\sin\gamma$$

$$\lg c = \lg(a+b) + \lg\sin\tfrac{1}{2}C - \lg\cos\varphi = \gamma - \lg\cos\varphi$$

wo das Zeichen lg sich auf die gewöhnlichen Logarithmen bezieht. Differenziirt man, und setzt den Modulus $0{,}434\ldots = m$, so erhält man

$$\frac{m\,d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = d\alpha$$

$$d\lg c = d\beta - m\,d\varphi\cot\varphi = d\beta - d\alpha\cos^2\varphi$$

$$d\lg c = d\gamma + m\,d\varphi\operatorname{tg}\varphi = d\gamma + d\alpha\sin^2\varphi$$

Bezeichnet man nun durch $\pm\alpha_1$, $\pm\beta_1$, $\pm\gamma_1$ die bekannten Gränzen der kleinen Fehler, die möglicherweise bei der Bestimmung von α, β, γ begangen sind und durch l_1, l_2 die davon abhängenden Gränzen der bei Bestimmung von lg c begangenen Fehler, je nachdem dieser Werth durch die Formel 6) oder die Formel 7) bestimmt worden ist, so hat man

$$l_1 = \pm(\beta_1 + \alpha_1\cos^2\varphi)$$

$$l_2 = \pm(\gamma_1 + \alpha_1\sin^2\varphi)$$

Da man nun $\beta_1 = \gamma_1$ setzen kann, so ist $l_2 > l_1$ oder $l_2 < l_1$, je nachdem $\sin^2\varphi > \cos^2\varphi$ oder $\sin^2\varphi < \cos^2\varphi$ ist, d. h. je nachdem $\varphi \gtrless 45°$ ist.

The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine, Oct. 1841.

Bemerkung zu einer Stelle in Poisson's Traité de mécanique von James Booth, Professor der Mathem. in Bristol College.

Bei der Bestimmung der Hauptdrehungsaxen eines Körpers bemerkt Poisson, dass eine Hauptaxe, die durch den Schwerpunkt geht, auch eine solche für jeden Punkt ist, den man längs dieser Linie annimmt. Wenn er aber hinzusetzt, dass die zwei anderen Hauptaxen ihre Richtung ändern können, je nachdem der Punkt sich ändert, so scheint dies auf einem Irrthum zu beruhen. Seine Worte lauten (T. 2. p. 91):

„Les intégrales que cette équation renferme pourront changer de valeur avec la position du point O; en sorte que le long de l'axe Ox, les deux autres axes principaux ne seront pas en général paralléles à eux mèmes.“

Bei Poisson heisst die Gleichung, durch welche der Winkel $\mathfrak{D}$ bestimmt wird,

$$(\cos^2\mathfrak{D}-\sin^2\mathfrak{D})\int xydm+\sin\mathfrak{D}\cos\mathfrak{D}\left(\int x^2dm-\int y^2dm\right)=0$$

welche aber in folgende einfachere verwandelt werden kann:

$$\operatorname{tg} 2\mathfrak{D}=\frac{2\int xydm}{\int(x^2-y^2)dm}.$$

Von den drei Coordinaten x, y, z des Elements dm ist aber z die einzige, welche sich ändert, wenn der Punkt z längs der Axe der z fortrückt. Da aber der obige Ausdruck für den Werth von tg $2\mathfrak{D}$ unabhängig von z ist, so folgt hieraus, dass der Winkel $\mathfrak{D}$ constant ist, d. h. dass die Hauptaxen für jeden Punkt längs der Linie sich parallel bleiben. — Herr Booth beweisst alsdann diesen Satz auch noch auf direktem Wege.

II.

Bestimmung des Schwerpunkts eines Polygons aus den Coordinaten seiner Ecken.

Von

Herrn T. J. Eschweiler

Director der höheren Bürgerschule in Köln a. R.

Der Abstand des Schwerpunkts eines beliebigen Dreiecks von einer in seiner Ebene angenommenen geraden Linie ist bekannt-

lich dem dritten Theile der Summe der Abstände seiner drei Ecken von dieser Linie gleich. Nun seien (Taf. I Fig. 1.) $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ die Eckpunkte irgend eines Polygons von n Seiten, und dasselbe sei durch Diagonallinien, die alle von A_1 ausgehen, in Dreiecke getheilt. Die Abscissen jener Ecken, in Beziehung auf zwei in der Ebene des Polygons willkührlich angenommene und auf einander senkrechte Coordinaten-Axen seien, der Ordnung nach, $x_1x_2x_3 \ldots x_n$, die Ordinaten derselben $y_1y_2y_3 \ldots y_n$, so ist die Abscisse des Schwerpunkts von $\Delta A_1A_2A_3 = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$, sein Flächeninhalt (d. i. Trapez $P_2A_2A_3P_3$ — Trpz $P_2A_2A_1P_1$ — Trpz $P_1A_1A_3P_3$) $= \frac{1}{2}(y_2+y_3)\,(x_3-x_2) - \frac{1}{2}(y_2+y_1)\,(x_1-x_2) - \frac{1}{2}(y_1+y_3)\,(x_3-x_1) = \frac{1}{2}[y_1(x_3-x_2) + y_2(x_3-x_1) + y_3(x_1-x_2)]$, daher das Produkt beider, oder das Moment des $\Delta A_1A_2A_3 = \frac{1}{6}(x_1+x_2+x_3)\;[y_1(x_2-x_3) + y_2(x_3-x_1) + y_3(x_1-x_2)]$; eben so ist das Moment des $\Delta A_1A_3A_4 = \frac{1}{6}(x_1+x_3+x_4)\;[y_1(x_3-x_4) + y_3(x_4-x_1) + y_4(x_1-x_3)]$, u. s. w. bis zum Moment des $\Delta A_1A_{n-1}A_n$, welches

$$= \tfrac{1}{6}(x_1+x_{n-1}+x_n)\,[y_1(x_{n-1}-x_n) + y_{n-1}(x_n-x_1) + y_n(x_1-x_{n-1})].$$

Addirt man diese Produkte so zusammen, dass Alles, was mit ein und derselben Ordinate multiplizirt ist, vereinigt wird, so erhält man als Summe der Momente aller Dreiecke:

$$\tfrac{1}{6}[y_1(x_2-x_n)\,(x_1+x_2+x_n) + y_2(x_3-x_1)\,(x_2+x_3+x_1) + y_3(x_4-x_2)\,(x_3+x_4+x_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + y_n(x_1-x_{n-1})\,(x_n+x_1+x_{n-1})]$$

oder in kürzerer Bezeichnung: $\frac{1}{6}\Sigma^n{}_1\, y_k(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k-1}+x_k+x_{k+1})$, wo für k alle ganzen Zahlen von 1 bis n zu setzen sind *) Der Flächeninhalt des ganzen Polygons ergiebt sich, wenn man auf gleiche Weise die obigen Ausdrücke für den Inhalt der einzelnen Dreiecke addirt,

$$= \tfrac{1}{2}[y_1(x_2-x_n) + y_2(x_3-x_1) + y_3(x_4-x_2) + \ldots\ldots + y_n(x_1-x_{n-1})]$$

oder kürzer: $\frac{1}{2}\Sigma_{n\,1}\, y_k(x_{k+1}-x_{k-1})$.

Dividirt man nun jene Momentensumme durch diesen Flächeninhalt, so erhält man für die Abscisse X des Schwerpunkts des ganzen Polygons den Ausdruck:

$$X = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{\Sigma^n{}_1\, y_k(x_{k+1}-x_{k-1})\,(x_{k-1}+x_k+x_{k+1})}{\Sigma^n{}_1\, y_k(x_{k+1}-x_{k-1})},$$

welcher zur Berechnung dieser Abscisse die einfache Regel enthält:

„Man multiplizire die Ordinate des mittlern von
„je drei aufeinander folgenden Eckpunkten des
„Polygons mit der Differenz der Abscissen der
„beiden übrigen und addire sämmtliche Produkte;
„multiplizire dann jedes von diesen noch mit der
„Summe der Abscissen aller drei genannten Ecken,
„und addire auch diese Produkte; dividire endlich

---

*) Dabei ist für $x_0 \ldots x_n$, für $x_{n+1} \ldots x_1$ zu nehmen.

„die erste Produktensumme in die letztere, so ist „der dritte Theil des erhaltenen Quotienten die „Abscisse des Schwerpunkts."

Der Ausdruck für die Ordinate Y dieses Punkts folgt gleich aus dem der Abscisse durch blosse Vertauschung der x und y, also

$$Y = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{\Sigma^n{}_1 x_k (y_{k+1} - y_{k-1})\ (y_{k-1} + y_k + y_{k+1})}{\Sigma^n{}_1 x_k (y_{k+1} - y_{k-1})}.$$

Die Nenner beider Ausdrücke sind identisch.

Beispiel. Für ein Sechseck sei gegeben:

$x_1 = 5$, $y_1 = 12$,	so ist	$y_1(x_2 - x_6) = +12 \,.\, 1 = +12$;
$x_2 = 14$, $y_2 = 19$		$y_2(x_3 - x_1) = +19 \,.\, 15 = +285$;
$x_3 = 20$, $y_3 = 14$		$y_3(x_4 - x_2) = +14 \,.\, 15 = +210$;
$x_4 = 29$, $y_4 = 17$		$y_4(x_5 - x_3) = +17 \,.\, 13 = +221$;
$x_5 = 33$, $y_5 = 6$		$y_5(x_6 - x_4) = -6 \,.\, 16 = -96$;
$x_6 = 13$, $y_6 = 2$		$y_6(x_1 - x_5) = -2 \,.\, 28 = -56$;
		$+576$

$12(x_6 + x_1 + x_2)$	$= +12 \,.\, 32$	$= +384$
$285(x_1 + x_2 + x_3)$	$= +285 \,.\, 39$	$= +11115$
$210(x_2 + x_3 + x_4)$	$= +210 \,.\, 63$	$= +13230$
$221(x_3 + x_4 + x_5)$	$= +221 \,.\, 82$	$= +18122$
$-96(x_4 + x_5 + x_6)$	$= -96 \,.\, 75$	$= -7200$
$-56(x_5 + x_6 + x_1)$	$= -56 \,.\, 51$	$= -2856$
		$+32795$

Daher die Abscisse des Schwerpunkts $= \tfrac{1}{3} \cdot \frac{32795}{576} = 18{,}978\ldots.$;

die Ordinate ergiebt sich eben so $= \tfrac{1}{3} \cdot \frac{17400}{576} = 10{,}069\ldots.$

III.

Bestimmung des Schwerpunkts im sphärischen Dreieck.

Von dem

Herrn T. J. Eschweiler

Director der höheren Bürgerschule in Köln a. R.

Der Abstand des Schwerpunkts irgend einer Fläche von einer angenommenen Ebene wird bekanntlich dadurch gefunden, dass man die Summe der Momente aller Elemente jener Fläche in Beziehung auf diese Ebene durch die Summe dieser Elemente selbst, d. h. durch den Inhalt der ganzen Fläche dividirt.

Nun sei (Taf. I. Fig. 2.) ABC ein sphärisches Dreieck, dessen Schwerpunkt bestimmt werden soll, O der Mittelpunkt der Kugel. Dieses Dreieck sei durch Bogen grösster Kreise, die alle durch A gehen. wie z. B. AD, in Elemente erster Ordnung, diese wieder durch Bogen kleiner Kreise, deren Ebenen alle auf AO senkrecht stehen, in Elemente zweiter Ordnung getheilt. F sei der Mittelpunkt eines dieser kleinen Kreise, und dieser schneide den Bogen AD in E, so ist das bei E liegende Element zweiter Ordnung als ein unendlich kleines Rechteck zu betrachten, dessen auf AD liegende Seite (wenn man $AO=EO=1$, $\sphericalangle AOE=\varphi$ setzt) $=d\varphi$, die andere Seite aber (wenn $\sphericalangle CAD=\omega$) $=\sin\varphi\,.\,d\omega$, so dass die Grösse dieses Elements selbst $=\sin\varphi\,.\,d\varphi\,.\,d\omega$. Der Abstand des Punktes (oder Elements) E von der auf dem Radius AO senkrechten Ebene HOK ist $OF=\cos\varphi$, daher das Moment des Elements bei E in Beziehung auf diese Ebene $=\sin\varphi\cos\varphi\,.\,d\varphi\,.\,d\omega$.

Dieser Ausdruck ist nun, um ihn auf die ganze Fläche des Dreiecks auszudehnen, zweimal zu integriren, indem dabei zuerst φ, dann ω als veränderlich betrachtet wird. Die erste zwischen den Grenzen 0 und AD ausgeführte Integration giebt das Moment des Elements erster Ordnung ADD', die zweite Integration, zwischen 0 und $\sphericalangle CAB$ ausgeführt, giebt das Moment des ganzen Dreiecks ABC. Es ist nun $\int\sin\varphi\,.\,\cos\varphi\,.\,d\varphi=\frac{1}{4}\int\sin 2\varphi\,.\,d(2\varphi)$ $=\text{Const}-\frac{1}{4}\cos 2\varphi$; und dieses Integral von $\varphi=0$ bis $\varphi=AD$ genommen, giebt $\frac{1}{4}(1-\cos 2AD)$ oder $\frac{1}{2}(\sin AD)^2$, so dass also das Moment des Elements ADD' in Beziehung auf die Ebene HOK $=\frac{1}{2}(\sin AD)^2\,.\,d\omega$.

Um diesen Ausdruck von Neuem zu integriren, ist es zweckmässig, statt ω und des davon abhängigen Bogens AD, den Bo-

gen CD als veränderliche Grösse einzuführen. Zu dem Ende sei Seite $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $\measuredangle BAC=\alpha$, $ABC=\beta$, $ACB=\gamma$ gesetzt; nach einer bekannten Relation ist im sphärischen Dreieck ABC: $\cos b\cos\gamma=\sin b\,.\,\operatorname{cotg} CD-\sin\gamma\,.\operatorname{cotg}\omega$, daher, wenn man differenziirt: $\sin b\sin\omega^2\,.\,d(CD)=\sin\gamma\,.\sin CD^2\,.\,d\omega$, oder da $\sin CD:\sin AD=\sin\omega:\sin\gamma$, auch $\sin b\sin\gamma\,d(CD)=(\sin AD)^2\,.\,d\omega$, folglich das zu integrirende Moment des Elements $ADD'=\frac{1}{2}\sin b\sin\gamma\,.\,d(CD)$. Das Integral hiervon giebt: $\frac{1}{2}\sin b\sin\gamma\,.\,CD+$ Const. und wird dasselbe von 0 bis $CB=a$, als Grenzen für CD, ausgedehnt, so ergiebt sich als Moment des ganzen Dreiecks ABC

$$\tfrac{1}{2}a\,.\sin b\sin\gamma.$$

Setzt man den sphärischen Winkelexcess dieses Dreiecks, d. i. $\alpha+\beta+\gamma-\pi=e$, so ist für den Halbmesser 1 auch der Flächeninhalt des Dreiecks $=e$, folglich der senkrechte Abstand seines Schwerpunkts von der auf OA senkrechten Ebene $HOK=\frac{a\sin b\sin\gamma}{2e}$, oder auch, da $\sin b:\sin c=\sin\beta:\sin\gamma$, derselbe Abstand $=\frac{a\sin c\sin\beta}{2e}$. Eben so ist der Abstand des Schwerpunkts von einer durch O gehenden und auf dem Radius OB senkrechten Ebene $=\frac{b\sin a\sin\gamma}{2e}=\frac{b\sin\alpha\sin c}{2e}$; endlich die Entfernung dieses Punktes von einer durch O senkrecht gegen OC gelegten Ebene $=\frac{c\sin a\sin\beta}{2e}=\frac{c\sin\alpha\sin b}{2e}$. Hierdurch ist die Lage des Schwerpunkts völlig bestimmt und kann auf folgende Weise leicht construirt werden:

ABC (Taf. I. Fig. 3.) sei das gegebene Dreieck, DEF das polare oder reciproke; die Kugelhalbmesser OD, OE, OF stehen also auf den respectiven Ebenen BOC, AOC, AOB, so wie die Halbmesser OA, OB, OC auf den Ebenen EOF, FOD, DOE senkrecht. Auf OD sei ein Stück OP genommen, dessen Länge sich zu $OD(=1)$ eben so verhält, wie die Seite BC (oder a) zum doppelten Ueberschuss der Peripherie eines grössten Kreises über die Summe der drei Seiten des Polardreiecks EDF, (oder, was dasselbe ist, dem doppelten Ueberschuss der drei Winkel des Dreiecks ABC über zwei Rechte, also, nach obiger Bezeichnung, zu $2e$, wodurch $OP=\frac{a}{2e}$. Desgl. seien auf OE und OF von O an die Stücke OQ und OR so genommen, dass $2e:b=OE:OQ$, $2e:c=OF:OR$, wodurch $OQ=\frac{b}{2e}$, $OR=\frac{c}{2e}$. Wird dann über diesen drei Stücken OP, OQ und OR, die sich demnach wie $a:b:c$ verhalten, ein Parallelepipedum construirt, so wird die dem Mittelpunkt der Kugel O gegenüberliegende Ecke G dieses Parallelepipedums der Schwerpunkt des Dreiecks ABC sein.

Denn da AO auf der Ebene EOF senkrecht steht, diese Ebene aber der Ebene PG parallel ist, so steht AO auch auf dieser letztern Ebene senkrecht, und wenn daher AO diese Ebene im Punkte p trifft, so ist Op dem senkrechten Abstande des in dieser Ebene liegenden Punkts G von der Ebene EOF gleich. Da nun

das Dreieck OPp bei p rechtwinkelig ist, so ist $Op = OP \cdot \cos DOA$; nach obiger Construction ist aber $OP = \frac{a}{2e}$, und im sphärischen Dreieck ADB, worin $BD = 90°$, ist $\cos AD$ oder $\cos AOD = \sin AB \cos ABD = \sin c \sin \beta$, daher $Op = \frac{a \sin c \sin \beta}{2e}$; daher liegt der Schwerpunkt in der Ebene PG. Auf gleiche Art wird bewiesen, dass er in den Ebenen QG und RG liegt; er ist also der Durchschnittspunkt G dieser drei Ebenen.

Da $\sin c \sin \beta$ die Länge des von A auf die Ebene BOC gefällt Lothes ausdrückt, so kann man auch noch auf folgende Art verfahren. Auf AO nehme man das Stück $Op =$ der vierten Proportionale zu $2e$, a und dem aus A auf die Ebene BOC gefällten Loth, lege hierauf durch p eine auf AO senkrechte Ebene; auf gleiche Weise verfahre man auf den Halbmessern BO und CO; so erhält man drei auf diesen Halbmessern senkrechte Ebenen, dieselben, welche in der vorigen Construction die Ecke G des Parallelepidums bildeten und deren Durchschnittspunkt G, also der Schwerpunkt ist.

Will man die Lage dieses Punkts durch schiefwinkelige Coordinaten in Bezug auf die drei Ebenen BOC, AOC, AOB bestimmen, so denke man sich durch G eine der BOC parallele, daher auf OD senkrechte Ebene gelegt. Das von ihr auf OA von O an abgeschnittene Stück ist die mit OA parallele Coordinate des Punkts G; sie sei durch x bezeichnet; das von derselben Ebene auf OD von O an abgeschnittene Stück ist $x \cdot \cos AOD$. Projizirt man auf dasselbe drei von O bis G aufeinander folgende Kanten des Parallelepipedums, so erhält man:

$$x \cdot \cos AOD = OP + OQ \cos EOD + OR \cos FOD \text{ oder}$$

$$x \sin c \sin \beta = \frac{a}{2e} - \frac{b}{2e} \cos \gamma - \frac{c}{2e} \cos \beta, \text{ daher}$$

$x = \frac{a - b \cos \gamma - c \cos \beta}{2e \sin c \sin \beta}$, oder, wenn man der Symmetrie wegen das constante Produkt aus dem Sinus einer Dreieckseite und den Sinus der beiden anliegenden Winkel:

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin b \sin \alpha \sin \gamma = \sin c \sin \alpha \sin \beta = K$$

setzt:

$$x = \frac{\sin \alpha}{2eK} (a - b \sin \gamma - c \cos \beta); \text{ eben so ist}$$

$$y = \frac{\sin \beta}{2eK} (b - c \cos \alpha - a \cos \gamma), \; z = \frac{\sin \gamma}{2eK} (c - a \cos \beta - b \cos \alpha).$$

Die Entfernung d des Schwerpunkts G vom Mittelpunkte der Kugel, d. i. die Diagonale OG des vorhin zur Construction angewandten Parallelepipedums, ist nach einem bekannten Lehrsatze

$$= \sqrt{(\overline{OP^2} + \overline{OQ^2} + \overline{OR^2} + 2OP \cdot OQ \cos POQ + 2OP \cdot OR \cos POR + 2OQ \cdot OR \cdot \cos QOR)}.$$

Substituirt man hierin die vorhin angegebenen Werthe von OP, OQ, OR, so kommt:

$$d=\frac{1}{2e}\sqrt{a^2+b^2+c^2-2bc\cos\alpha-2ac\cos\beta-2ab\cos\gamma}.$$

Um endlich noch die Winkel zu bestimmen, welche der durch den Schwerpunkt gehende Halbmesser der Kugel mit den Halbmessern OA, OB, OC macht, betrachte man das bei p rechtwinkelige Dreieck OpG; dasselbe giebt $Op = OG \cdot \cos AOG$ oder $\frac{aK}{2e\sin\alpha} = d \cdot \cos AOG$, woraus $\cos AOG = \frac{aK}{2ed\sin\alpha}$; eben so ist $\cos BOG = \frac{bK}{2ed\sin\beta}$, $\cos COG = \frac{cK}{2ed\sin\gamma}$. Diese Cosinus sind also direct den Seiten und umgekehrt den Sinus derselben proportionirt.

Der Schwerpunkt einer von einem sphärischen Dreieck begränzten Kugelpyramide ergiebt sich aus dem Obigen sehr leicht. Er liegt auf der geraden Linie, welche den Mittelpunkt der Kugel mit dem Schwerpunkte jenes sphärischen Dreiecks verbindet, aber um den 4ten Theil dieser Linie dem Mittelpunkte näher als der Schwerpunkt des Dreiecks.

IV.

Ueber die rekurrirende Bestimmung der Bernoullischen Zahlen.

Von

Herrn O. Schlömilch

zu Wien.

---

§. 1.

Wenn man die bekannten Formeln

$$\text{Log sin } \omega = \text{Log } \omega + \text{Log } (1-\tfrac{\omega^2}{\pi^2}) + \text{Log } (1-\tfrac{\omega^2}{4\pi^2}) + \text{Log } (1-\tfrac{\omega^2}{9\pi^2}) + \ldots\ldots$$

$$\text{Log cos } \tfrac{1}{2}\omega = \text{Log } (1-\tfrac{\omega^2}{\pi^2}) + \text{Log } (1-\tfrac{\omega^2}{9\pi^2}) + \text{Log } (1-\tfrac{\omega^2}{25\pi^2}) + \ldots\ldots$$

nach ω differenziirt, so erhält man leicht die beiden Reihen:

$$\frac{1}{2\omega} - \tfrac{1}{2}\cot\omega = \frac{\omega}{\pi^2-\omega^2} + \frac{\omega}{4\pi^2-\omega^2} + \frac{\omega}{9\pi^2-\omega^2} + \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\tfrac{1}{4}\tan\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\omega}{\pi^2-\omega^2} + \frac{\omega}{9\pi^2-\omega^2} + \frac{\omega}{25\pi^2-\omega^2} + \ldots\ldots \quad (2)$$

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, nachdem man diese mit 2 multiplizirt hat, und bemerkt, dass $\cot\omega = \frac{\cos\omega}{\sin\omega}$, $\tan\frac{1}{2}\omega = \frac{1-\cos\omega}{\sin\omega}$ ist, so kommt:

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{cosec}\omega - \frac{1}{2\omega} = \frac{\omega}{\pi^2-\omega^2} - \frac{\omega}{4\pi^2-\omega^2} + \frac{\omega}{9\pi^2-\omega^2} - \ldots\ldots \quad (3).$$

Diesen schon bekannten Summirungen lässt sich eine sehr vortheilhafte Seite abgewinnen. Drückt man nämlich dieselben Reihen durch bestimmte Integrale aus, so gelangt man, weil jene Summen schon bekannt sind, zur Kenntniss einiger bestimmten Integrale, welche sich unbestimmt nicht angeben lassen, und die sich hernach zur Entwickelung mehrerer rekurrirenden Eigenschaften der Bernoullischen Zahlen sehr nützlich erweisen werden.

Zu diesem Zwecke erinnere ich an die bekannte Integralformel:

$$\int e^{-k\Theta}\sin h\Theta\, d\Theta = \frac{-k\sin h\Theta - h\cos h\Theta}{k^2+h^2}\, e^{-k\Theta} + \text{Const.}$$

Nehmen wir $\Theta=\infty$, $\Theta=0$ und subtrahiren beide Werthe, so ergiebt sich das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty e^{-k\Theta}\sin h\Theta\, d\Theta = \frac{h}{k^2+h^2}.$$

Für $k=n\pi$, $h=\omega\sqrt{-1}$ geht dasselbe in das folgende über:

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-n\pi\Theta}\sin\omega\sqrt{-1}\,\Theta\, d\Theta = \frac{\omega}{(n\pi)^2-\omega^2} \ldots\ldots \quad (4)$$

worin das Imaginäre nur scheinbar ist, und sogleich verschwindet, wenn man den Sinus durch Exponenzialgrössen ausdrückt. Indessen werden wir doch diese Schreibart der Bequemlichkeit wegen beibehalten und $\sqrt{-1}$ kurz mit i bezeichnen. Betrachten wir die rechte Seite der Gleichung, so findet sich, dass dieselbe nichts Anderes ist, als das allgemeine Glied der Reihen (1), (2), (3). Giebt man also dem n die Werthe, die es dort hat, und addirt alle Glieder auf die nämliche Weise, wie es in jenen Reihen geschieht, so drückt man die nämliche Reihe durch eine Reihe bestimmter Integrale aus, die sich aber sehr leicht in eines zusammenziehen lassen.

1) Nehmen wir zuerst $n=1, 2, 3, 4, \ldots$, und addiren sämmtliche Glieder mit positivem Zeichen, so bekommen wir auf der rechten Seite die Reihe (1), für die wir gleich ihre Summe setzen wollen; also:

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty e^{-\pi\Theta}\sin\omega i\Theta\, d\Theta + \frac{1}{i}\int_0^\infty e^{-2\pi\Theta}\sin\omega i\Theta\, d\Theta$$

$$+\frac{1}{i}\int_0^\infty e^{-3\pi\Theta}\sin\omega i\Theta\, d\Theta + \ldots\ldots = \frac{1}{2\omega} - \tfrac{1}{2}\cot\omega.$$

Da aber diese Integrale den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{1}{i}$ und gleiche Gränzen besitzen, so können wir dieselben so vereinigen:

$$\frac{1}{i}\int[e^{-\pi\Theta}+e^{-2\pi\Theta}+e^{-3\pi\Theta}+\ldots\ldots]\sin\omega i\Theta d\Theta=\frac{1}{2\omega}-\tfrac{1}{2}\cot\omega.$$

Weil nun Θ eine positive Grösse ist, so bleibt $e^{-\pi\Theta}$ ein ächter Bruch, und die eingeklammerte Reihe lässt sich nach der Formel

$$x+x^2+x^3+\ldots\ldots=\frac{x}{1-x},\quad +1>x>-1$$

summiren. Die Summe ist nämlich:

$$\frac{e^{-\pi\Theta}}{1-e^{-\pi\Theta}}=\frac{1}{e^{\pi\Theta}-1}$$

also:

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty\frac{\sin\omega i\Theta d\Theta}{e^{\pi\Theta}-1}=\frac{1}{2\omega}-\tfrac{1}{2}\cot\omega.$$

Schreiben wir noch 2Θ für Θ, $\frac{\omega}{2}$ für ω, so ist

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty\frac{\sin\omega i\Theta d\Theta}{e^{2\pi\Theta}-1}=\frac{1}{2\omega}-\tfrac{1}{4}\cot\tfrac{1}{2}\omega\ldots.(5)$$

2) Eben so leicht ist es die Reihe (3) in ein bestimmtes Integral zu verwandeln. Man nimmt wieder in (4) $n=1, 2, 3, 4\ldots$ addirt aber alle Glieder mit wechselnden Zeichen. So erhält man ganz ähnlich wie vorhin:

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty[e^{-\pi\Theta}-e^{-2\pi\Theta}+e^{-3\pi\Theta}-\ldots\ldots]\sin\omega i\Theta d\Theta=\tfrac{1}{2}\operatorname{cosec}\omega-\frac{1}{2\omega}.$$

Die Summe der eingeklammerten Reihe ist

$$\frac{e^{-\pi\Theta}}{1+e^{-\pi\Theta}}=\frac{1}{e^{\pi\Theta}+1},$$

mithin auch:

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty\frac{\sin\omega i\Theta d\Theta}{e^{\pi\Theta}+1}=\tfrac{1}{2}\operatorname{cosec}\omega-\frac{1}{2\omega}\ldots.(6)$$

3) Für die Reihe (2) setzen wir in (4) $n=1, 3, 5\ldots$ und addiren alle Glieder mit positiven Zeichen. So wird

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty[e^{-\pi\Theta}+e^{-3\pi\Theta}+e^{-5\pi\Theta}+\ldots\ldots]\sin\omega i\Theta d\Theta=\tfrac{1}{4}\tan\tfrac{1}{2}\omega.$$

Nach der Formel

$$x+x^3+x^5+\ldots\ldots=\frac{x}{1-x^2},\quad +1>x>-1,$$

findet sich als die Summe der Reihe unter dem Integralzeichen:

$$\frac{e^{-\pi\Theta}}{1-e^{-2\pi\Theta}}=\frac{1}{e^{\pi\Theta}-e^{-\pi\Theta}},$$

folglich

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty\frac{\sin\omega i\Theta d\Theta}{e^{\pi\Theta}-e^{-\pi\Theta}}=\tfrac{1}{4}\tan\tfrac{1}{2}\omega$$

oder, wenn man $\frac{\Theta}{2}$ für Θ, 2ω für ω schreibt:

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty \frac{\sin \omega i\Theta d\Theta}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta} - e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}} = \tfrac{1}{2}\tan \omega. \quad \ldots . (7).$$

§. II.

Mittelst der eben gefundenen bestimmten Integrale ist es nun leicht, für irgend eine Bernoullische Zahl mehrere Integrale anzugeben, indem man nämlich beide Seiten von (5), (6), (7) nach Potenzen der willkührlichen Constante ω entwickelt, was auf der rechten Seite mittelst der Bernoullischen Zahlen bewerkstelligt wird, und dann die Coefficienten gleicher Potenzen von ω in eine Gleichung stellt.

1) So haben wir aus (5)

$$\frac{\omega}{1}\int_0^\infty \frac{\Theta d\Theta}{e^{2\pi}\Theta - 1} + \frac{\omega^3}{1.2.3}\int_0^\infty \frac{\Theta^3 d\Theta}{e^{2\pi}\Theta - 1} + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots.(2n-1)}\int_0^\infty \frac{\Theta^{2n-1} d\Theta}{e^{2\pi}\Theta - 1} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2\omega} - \frac{1}{2\omega} + \tfrac{1}{2}\left[\frac{\omega}{1.2}B_1 + \frac{\omega^3}{1.2.3.4}B_3 + \ldots\ldots\ldots\right.$$

$$\left. \ldots + \frac{\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots.(2n)}B_{2n-1} + \ldots.\right]$$

Vergleichen wir nun die Koeffizienten von ω^{2n-1}, so ergiebt sich auf der Stelle

$$\int_0^\infty \frac{\Theta^{2n-1} d\Theta}{e^{2\pi}\Theta - 1} = \frac{1}{4n}B_{2n-1}. \ldots . (8).$$

2) Entwickeln wir ebenso die Gleichung (6), so läuft die linke Seite ganz so, wie im vorigen Falle; rechts fängt die Reihe für $\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\omega$ mit $\frac{1}{2\omega}$ an, welches sich gegen $-\frac{1}{2\omega}$ hebt, und die allgemeinen Glieder sind:

$$\frac{\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n-1)}\int_0^\infty \frac{\Theta^{2n-1} d\Theta}{e^{\pi}\Theta + 1} \text{ und } \frac{(2^{2n-1}-1)\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots.(2n)}B_{2n-1},$$

folglich durch Vergleichung:

$$\int_0^\infty \frac{\Theta^{2n-1} d\Theta}{e^{\pi}\Theta + 1} = \frac{2^{2n-1}-1}{2n}B^{2n-1}. \ldots . (9)$$

3) Endlich giebt die beiderseitige Entwickelung von (7) die allgemeinen Glieder:

$$\frac{\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n-1)}\int_0^\infty \frac{\Theta^{2n-1} d\Theta}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta} - e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}} \text{ und } \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots.(2n)}B_{2n-1}$$

also wieder durch Gleichsetzen der Koeffizienten:

$$\int_0^\infty \frac{\Theta^{2n-1} d\Theta}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta} - e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}} = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{4n}B_{2n-1}. \ldots . (10).$$

Digitized by Google

Diese bestimmten Integrale für eine beliebige Bernoullische Zahl bieten den Vortheil dar, dass sie den Index $2n-1$ als Exponent enthalten und es dadurch leichter wird, den gegenseitigen Zusammenhang mehrerer auf einander folgenden Zahlen zu entdecken.

Wollte man die Nenner jener Integrale in Reihen verwandeln und die Integration eines einzelnen Gliedes nach bekannten Eigenschaften der Gammafunktionen ausführen, so würde man das schon bekannte Resultat finden, dass die Bernoullischen Zahlen die reziproken geraden Potenzen der natürlichen Zahlen summiren. Fruchtbarer ist es, die Zähler jener Integrale in eine Rechnung zu verflechten, wie die nachfolgenden Paragraphen zeigen.

§. III.

Wir beschäftigen uns zunächst mit den Formeln (5) und (8), welche wegen der Gleichheit der Nenner zusammengehören.

1) Wir multipliziren beide Theile von (5) mit der Constante $4\sin\omega$, welche wir unter das Integralzeichen thun, und zerlegen das doppelte Sinusprodukt in eine Cosinusdifferenz, so dass wir erhalten

$$\frac{2}{i}\int_0^\infty \frac{\cos(1-i\Theta)\omega - \cos(1+i\Theta)\omega}{e^{2\pi\Theta}-1}\,d\Theta = \frac{2\sin\omega}{\omega} - \cot\tfrac{1}{2}\omega\,\sin\omega$$

$$= \frac{2\sin\omega}{\omega} - (1+\cos\omega).$$

Entwickeln wir beide Ausdrücke in Reihen, welche nach Potenzen von ω fortschreiten, so sind die allgemeinen Glieder

$$\frac{2}{i}\cdot\frac{(-1)^n\omega^{2n}}{1.2.3.....(2n)}\int_0^\infty \frac{(1-i\Theta)^{2n}-(1+i\Theta)^{2n}}{e^{2\pi\Theta}-1}\,d\Theta \text{ und}$$

$$\frac{2(-1)^n\omega^{2n}}{1.2.3....(2n+1)} - \frac{(-1)^n\omega^{2n}}{1.2.3....(2n)}$$

und weil die Koeffizienten von ω^{2n} einander gleich sein müssen

$$\frac{2}{i}\int_0^\infty \frac{(1-i\Theta)^{2n}-(1+i\Theta)^{2n}}{e^{2\pi\Theta}-1}\,d\Theta = \frac{2}{2n+1} - 1 = -\frac{2n-1}{2n+1}.$$

Es ist aber

$$(1-i\Theta)^{2n}-(1+i\Theta)^{2n} = -2i[(2n)_1\Theta - (2n)_3\Theta^3 + (2n)_5\Theta^5 - .....$$

$$... + (-1)^{n+1}(2n)_{2n-1}\Theta^{2n-1}]$$

wobei $(2n)_1$, $(2n)_3$, ... die Binomialkoeffizienten ungerader Stelle für den Exponenten $2n$ bedeuten. Substituiren wir diess und bezeichnen den Nenner des Integrals kurz mit N, so wird

$$(2n)_1\cdot 4\int_0^\infty \frac{\Theta d\Theta}{N} - (2n)_3\cdot 4\int_0^\infty \frac{\Theta^3 d\Theta}{N} + (2n)_5\cdot 4\int_0^\infty \frac{\Theta^5 d\Theta}{N} + ...$$

$$... + (-1)^{n+1}(2n)_{2n-1}\cdot 4\int_0^\infty \frac{\Theta^{2n-1}d\Theta}{N} = \frac{2n-1}{2n+1}$$

Jedes dieser Integrale lässt sich aber nach (8) ausführen, und so erhalten wir:

$$(2n)_1 B_1 - \tfrac{1}{2}(2n)_3 B_3 + \tfrac{1}{3}(2n)_5 B_5 - \ldots\ldots$$
$$+ (-1)^{n+1}\frac{1}{n}(2n)_{2n-1} B_{2n-1} = \frac{2n-1}{2n+1}. \quad \ldots (11).$$

2) Eine zweite ganz ähnlich gebildete Eigenschaft der Bernoullischen Zahlen ergiebt sich so. Wir multipliciren (5) mit $4\cos\omega$ und zerlegen wieder unter dem Integralzeichen:

$$\frac{2}{i}\int_0^\infty \frac{\sin(1+i\Theta)\omega - \sin(1-i\Theta)\omega}{e^{2\pi\Theta}-1}\,d\Theta = \frac{2\cos\omega}{\omega} - \cot\tfrac{1}{2}\omega\cos\omega$$
$$= \frac{2\cos\omega}{\omega} - \cot\tfrac{1}{2}\omega + \sin\omega.$$

Verwandelt man beide Seiten in Reihen, so sind die allgemeinen Glieder

$$\frac{2}{i}\cdot\frac{(-1)^{n+1}\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n-1)}\int_0^\infty \frac{(1+i\Theta)^{2n-1}-(1-i\Theta)^{2n-1}}{e^{2\pi\Theta}-1}\,d\Theta \text{ und}$$
$$\frac{2(-1)^n\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots.(2n)} + \frac{2\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n)}B_{2n-1} + \frac{(-1)^{n+1}\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots.(2n-1)}$$

folglich durch Vergleichung der Koeffizienten von ω^{2n-1},

$$\frac{2}{i}\int_0^\infty \frac{(1+i\Theta)^{2n-1}-(1-i\Theta)^{2n-1}}{e^{2\pi\Theta}-1}\,d\Theta = -\frac{1}{n} + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}B_{2n-1} + 1$$
$$= \frac{n-1}{n} + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}B_{2n-1}.$$

Ferner ist:

$$(1+i\Theta)^{2n-1} - (1-i\Theta)^{2n-1}$$
$$= 2i[(2n-1)_1\Theta - (2n-1)_3\Theta^3 + (2n-1)_5\Theta^5 - \ldots\ldots$$
$$+ (-1)^{n+1}(2n-1)_{2n-1}\Theta^{2n-1}]$$

also, wenn wir diess in das Integral substituiren:

$$(2n-1)_1 . 4\int_0^\infty \frac{\Theta d\Theta}{N} - (2n-1)_3 . 4\int_0^\infty \frac{\Theta^3 d\Theta}{N} + (2n-1)_5 . 4\int_0^\infty \frac{\Theta^5 d\Theta}{N} - \ldots..$$
$$\ldots + (-1)^{n+1}(2n-1)_{2n-1} . 4\int_0^\infty \frac{\Theta^{2n-1}d\Theta}{N}$$
$$= \frac{n-1}{n} + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}B_{2n-1}.$$

Bestimmen wir den Werth jedes dieser Integrale nach (8), so ergiebt sich

$$(2n-1)_1 B_1 - \tfrac{1}{3}(2n-1)_3 B_3 + \tfrac{1}{3}(2n-1)_5 B_5 - \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}(2n-1)_{2n-1}B_{2n-1} = \frac{n-1}{n} + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}B_{2n-1}.$$

Dabei heben sich die mit B_{2n-1} behafteten Glieder und die Reihe bricht also bei dem Gliede $(-1)^n\frac{1}{n-1}(2n-1)_{2n-3}B_{2n-3}$ ab. Schreiben wir daher $n+1$ für n, so ist nun

$$(2n+1)_1 B_1 - \tfrac{1}{3}(2n+1)_3 B_2 + \tfrac{1}{5}(2n+1)_5 B_3 - \ldots\ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}(2n+1)_{2n-1} B_{2n-1} = \frac{n}{n+1}. \quad \ldots (12)$$

Diese Eigenschaft der Bernoullischen Zahlen ist der (11) ganz analog, auch in so fern, als $\frac{n}{n+1} = \frac{(2n+1)-1}{(2n+1)+1}$ gesetzt werden kann. Es lassen sich daher beide Gleichungen so zusammenfassen:

$$m_1 B_1 - \tfrac{1}{3} m_3 B_2 + \tfrac{1}{5} m_5 B_3 - \ldots\ldots \pm \frac{2}{m} m_{m-1} B_{m-1} = \left\{ \begin{matrix} \\ \frac{m-1}{m+1} \end{matrix} \right. \ldots (13)$$
$$m_1 B_1 - \tfrac{1}{3} m_3 B_2 + \tfrac{1}{5} m_5 B_3 - \ldots\ldots \pm \frac{2}{m-1} m_{m-2} B_{m-2} = \left\{ \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right.$$

wobei die obere Reihe für ein gerades, die untere für ein ungerades m gilt.

§. IV.

Auf gleiche Weise soll nun auch die Formel (6) mit Rücksicht auf (9) behandelt worden.

1) Multiplicirt man (6) mit 2 sin ω und zerlegt unter dem Integralzeichen das doppelte Produkt, so kommt:

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty \frac{\cos(1-i\Theta)\omega - \cos(1+i\Theta)\omega}{e^{\pi\Theta}+1}\, d\Theta = 1 - \frac{\sin\omega}{\omega}.$$

Die beiderseitige Entwickelung nach Potenzen von ω giebt die allgemeinen Glieder:

$$\frac{1}{i}\cdot\frac{(-1)^n\omega^{2n}}{1.2.3....(2n)}\int_0^\infty \frac{(1-i\Theta)^{2n}-(1+i\Theta)^{2n}}{e^{\pi\Theta}+1}\, d\Theta \text{ und}$$
$$\frac{(-1)^{n+1}\omega^{2n}}{1.2.3.....(2n+1)}$$

folglich:

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty \frac{(1-i\Theta)^{2n}-(1+i\Theta)^{2n}}{e^{\pi\Theta}+1}\, d\Theta = -\frac{1}{2n+1}.$$

Entwickeln wir die Potenzen unter dem Integralzeichen und bezeichnen den Nenner kurz mit M, so ergiebt sich ganz ähnlich wie in §. III. 1):

$$(2n)_1 . 2\int_0^\infty \frac{\Theta d\Theta}{M} - (2n)_3 . 2\int_0^\infty \frac{\Theta^3 d\Theta}{M} + (2n)_5 . 2\int_0^\infty \frac{\Theta^5 d\Theta}{M} - \ldots\ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+1}(2n)_{2n-1} . 2\int_0^\infty \frac{\Theta^{2n-1} d\Theta}{M} = \frac{1}{2n+1}.$$

Aus (9) findet sich aber der Werth jedes einzelnen Integrals, und so hat man:

$$\frac{2-1}{1}(2n)_1 B_1 - \frac{2^3-1}{2}(2n)_3 B_2 + \frac{2^5-1}{3}(2n)_5 B_3 - \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}-1}{n}(2n)_{2n-1} B_{2n-1} = \frac{1}{2n+1}. \quad \ldots (14)$$

2) Durch Multiplikation mit 2cos ω erhalten wir aus (6)

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty \frac{\sin(1+i\Theta)\omega - \sin(1-i\Theta)\omega}{e^{\pi\Theta}+1}\,d\Theta = \cot\omega - \frac{\cos\omega}{\omega}.$$

Daraus fliessen durch Verwandlung in Reihen die allgemeinen Glieder:

$$\frac{1}{i}\cdot\frac{(-1)^{n+1}\omega^{2n-1}}{1.2.3.....(2n-1)}\int_0^\infty \frac{(1+i\Theta)^{2n-1}-(1-i\Theta)^{2n-1}}{e^{\pi\Theta}+1}\,d\Theta \text{ und}$$

$$-\frac{2^{2n}\omega^{2n-1}}{1.2.3...(2n)}B_{2n-1} + \frac{(-1)^{n+1}\omega^{2n-1}}{1.2.3.....(2n)},$$

folglich:

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty \frac{(1+i\Theta)^{2n-1}-(1-i\Theta)^{2n-1}}{e^{\pi\Theta}+1}\,d\Theta = \frac{1}{2n}[1+(-1)^n 2^{2n}B_{2n-1}]$$

oder, wenn man die Potenzen wie in §. III. 2) entwickelt und den Nenner mit M bezeichnet:

$$(2n-1)_1.2\int_0^\infty\frac{\Theta d\Theta}{M} - (2n-1)_3.2\int_0^\infty\frac{\Theta^3 d\Theta}{M} + (2n-1)_5.2\int_0^\infty\frac{\Theta^5 d\Theta}{M} - .....$$

$$...+(-1)^{n+1}(2n-1)_{2n-1}.2\int_0^\infty\frac{\Theta^{2n-1}}{M}d\Theta = \frac{1}{2n}[1+(-1)^n 2^{2n}B_{2n-1}].$$

Führt man jedes dieser Integrale nach (9) aus, so ist:

$$\frac{2-1}{1}(2n-1)_1 B_1 - \frac{2^3-1}{2}(2n-1)_3 B_2 + \frac{2^5-1}{3}(2n-1)_5 B_3 - .....$$

$$...+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}-1}{n}(2n-1)_{2n-1}B_{2n-1} = \frac{1}{2n}[1+(-1)^n 2^{2n}B_{2n-1}]$$

Nimmt man auf beiden Seiten die mit B_{2n-1} behafteten Glieder zusammen und schreibt dann $n+1$ für n, so stellt sich diese Relation unter folgender Form dar:

$$\left.\begin{aligned}\frac{2-1}{1}(2n+1)_1 B_1 - \frac{2^3-1}{2}(2n+1)_3 B_2 + \frac{2^5-1}{3}(2n+1)_5 B_3 - .....\\ ...+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}-1}{n}(2n+1)_{2n-1}B_{2n-1}\\ = \frac{1}{n+1}[\tfrac{1}{2}+(-1)^{n+1}(2^{2n+2}-1)B_{2n+1}].\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

§. V.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung des letzten Paares zusammengehöriger Integrale, nämlich (7) und (10).

1) Durch Multiplikation mit 2 sin ω entsteht aus (7)

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty \frac{\cos(1-i\Theta)\omega - \cos(1+i\Theta)\omega}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta} - e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}}\,d\Theta = \tan\omega\sin\omega$$

$$= \sec\omega - \cos\omega.$$

Bekanntlich lässt sich nun sec ω in folgende Reihe verwandeln

$$B_0 + \frac{\omega^2}{1.2}B_2 + \frac{\omega^4}{1.2.3.4}B_4 + ...$$

worin B_0, B_2, B_4, ... gewisse Koeffizienten bedeuten, welche

einige Analogie zu den Bernoullischen Zahlen besitzen. Es sind die allgemeinen Glieder der Reihen:

$$\frac{1}{i}\cdot\frac{(-1)^n\omega^{2n}}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,.\,(2n)}\int_0^{\infty}\frac{(1-i\Theta)^{2n}-(1+i\Theta)^{2n}}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta}-e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}}\,d\Theta \text{ und}$$

$$\frac{\omega^{2n}B^{2n}}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(2n)}+\frac{(-1)^{n+1}\omega^{2n}}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,.\,(2n)};$$

folglich:

$$\frac{1}{i}\int_0^{\infty}\frac{(1-i\Theta)^{2n}-(1+i\Theta)^{2n}}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta}-e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}}\,d\Theta=(-1)^nB_{2n}-1.$$

Entwickelt man wieder die Potenzen unter dem Integralzeichen und bezeichnet den Nenner mit L, so ist nun:

$$(2n)_1\,.\,2\int_0^{\infty}\frac{\Theta d\Theta}{L}-(2n)_3\,.\,2\int_0^{\infty}\frac{\Theta^3d\Theta}{L}+(2n)_5\,.\,2\int_0^{\infty}\frac{\Theta^5d\Theta}{L}-\ldots.$$

$$\ldots+(-1)^{n+1}(2n)_{2n-1}\,.\,2\int_0^{\infty}\frac{\Theta^{2n-1}d\Theta}{L}=1-(-1)^nB_{2n}$$

$$=1+(-1)^{n+1}B_{2n}.$$

woraus sich vermöge der Formel (10) sogleich ergiebt:

$$\frac{2^2(2^2-1)}{2}(2n)_1B_1-\frac{2^4(2^4-1)}{4}(2n)_3B_3+\frac{2^6(2^6-1)}{6}(2n)_5B_5-\ldots\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}(2n)_{2n-1}B_{2n-1}=1+(-1)^{n+1}B_{2n}\ldots. \quad (16)$$

2) Multiplizirt man (7) mit $2\cos\omega$, so ist:

$$\frac{1}{i}\int_0^{\infty}\frac{\sin(1+i\Theta)\omega-\sin(1-i\Theta)\omega}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta}-e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}}\,d\Theta=\sin\omega.$$

Daraus entspringen die allgemeinen Glieder der Reihenentwickelung:

$$\frac{1}{i}\cdot\frac{(-1)^{n+1}\omega^{2n-1}}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,.\,(2n-1)}\int_0^{\infty}\frac{(1+i\Theta)^{2n-1}-(1-i\Theta)^{2n-1}}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta}-e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}}\,d\Theta \text{ und}$$

$$\frac{(-1)^{n+1}\omega^{2n-1}}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,.\,(2n-1)},$$

und so die Gleichung

$$\frac{1}{i}\int_0^{\infty}\frac{(1+i\Theta)^{2n-1}-(1-i\Theta)^{2n-1}}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta}-e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}}\,d\Theta=1.$$

Diese giebt durch Entwickelung:

$$(2n-1)_1\,.\,2\int_0^{\infty}\frac{\Theta d\Theta}{L}-(2n-1)_3\,.\,2\int_0^{\infty}\frac{\Theta^3d\Theta}{L}+(2n-1)_5\,.\,2\int_0^{\infty}\frac{\Theta^5d\Theta}{L}-\ldots.$$

$$\ldots+(-1)^{n+1}(2n-1)_{2n-1}\,.\,2\int_0^{\infty}\frac{\Theta^{2n-1}d\Theta}{L}=1$$

Digitized by Google

und durch Ausführung aller Integrale nach (10)

$$\frac{2^2(2^2-1)}{2}(2n-1)_1 B_1 - \frac{2^4(2^4-1)}{4}(2n-1)_3 B_3 + \frac{2^6(2^6-1)}{6}(2n-1)_5 B_5 - \ldots\ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}(2n-1)_{2n-1} B_{2n-1} = 1 \ldots\ldots (17).$$

Die bisher entwickelten Eigenschaften der Bernoullischen Zahlen, welche gar nicht bekannt zu sein scheinen, enthalten die Auflösung der Aufgabe von der rekurrirenden Bestimmung jener Zahlen; und zugleich führt die Formel (16) die Berechnung der Sekantenkoeffizienten auf die der Bernoullischen Zahlen zurück.

Die Anzahl der Rekursionsformeln für diese Zahlen liesse sich noch vermehren, indem man die bisher gefundenen Formeln durch Addition und Subtraktion combinirte. Diess will ich aber übergehen, da die Ableitung dieser Relationen leicht ist und ohnediess zu weniger einfachen Resultaten führt.

V.

Ueber den Schwerpunkt des körperlichen Sectors eines Ellipsoids mit drei Achsen.

Von

Herrn Lieutenant von Seydlitz

im Königl. Preuss. 8ten (Leib-) Infanterie Regiment.

Aufgabe I.

(Welche als Einleitung zur zweiten Aufgabe dient).

Es ist ein Ellipsoid mit drei Achsen a, b und c, welche den rechtwinklichen Coordinaten X, Y, Z entsprechen, gegeben. KS (Taf. I. Fig. 4.) sei der Schnitt durch den Mittelpunkt O, winkelrecht zur Coordinatenebene XZ. MT sei ein anderer zu derselben Ebene winkelrechter Schnitt durch den Punkt Q, in der Entfernung $OQ = x$ von O. Es soll der Schwerpunkt des körperlichen Sektors $MNQOLK$ bestimmt werden, dessen Centriwinkel $MQN = KOL = \alpha$ ist.

Die Coordinaten des zu bestimmenden Schwerpunktes s zu den respektiven Achsen seien:

$$OD = x',\ DU = y',\ SU = z'$$

so wird x' auch dasselbe x' des Schwerpunktes des Körpers $MKST$ sein, der zwischen den beiden Schnittellipsen liegt, und es ist daher nach einer bekannten Entwickelung:

$$x' = \frac{3}{4} \cdot \frac{2a^2 - x^2}{3a^2 - x^2}\, x.$$

Die Fläche MNQ sei gleich F und die Coordinaten des Schwerpunktes von F seien y'' und z'', so ist:

$$\int y'' F dx = y' \int F dx,$$

$$y' = \frac{\int y'' F dx}{\int F dx} \quad (1)$$

Eben so:

$$z' = \frac{\int z'' F dx}{\int F dx} \quad (2)$$

Bezeichnen wir in Taf. I. Fig. 5., welche die Schnittellipse MT vorstelle, die halbe grosse Achse MQ durch γ, und die halbe kleine Achse RQ durch β, ferner durch φ den Bogen für den Radius $= 1$, welcher dem Winkel HQM entspricht ($HQ = QM$ und NP, deren Verlängerung HQ in H schneidet, winkelrecht auf MQ), so ist nach Lehren der analytischen Geometrie

$$F = \tfrac{1}{2}\gamma\beta\varphi \quad (3)$$

$$F = \text{Fläche } NPM(F_{,}) + \Delta NQP(F_{,,}).$$

Bezeichnen wir die Coordinaten s, i und $s_{,,}$ h der Schwerpunkte s, und $s_{,,}$ der Flächen $F_{,}$ und $F_{,,}$ mit $y_{,}$ und $y_{,,}$ so ist

$$y'' F = y_{,} F_{,} + y_{,,} F_{,,}.$$

Nach den Lehren der Berechnung des Schwerpunktes ebener Flächen folgt, wenn wir einstweilen M als Anfangspunkt der Coordinaten betrachten und MP mit x, ferner NP mit y bezeichnen:

$$y_{,} F_{,} = \frac{\beta^2 (3\gamma - x) x^2}{6\gamma^2} \quad (4)$$

$$y_{,,} F_{,,} = \frac{y^2}{6} (\gamma - x) \quad (5)$$

$$y' F = \frac{\beta^2 (3\gamma - x) x^2}{6\gamma^2} + \frac{y^2}{6} (\gamma - x) \quad (6)$$

Statt x, $\gamma - QP = \gamma - \gamma \cos \varphi$ gesetzt und statt y, $NP = \beta \sin \varphi$ *) und diese Werthe in die Gleichung (6) substituirt, giebt:

---

*) Schlägt man nämlich um Q (Taf. I. Fig. 6.) mit der kleinen halben Achse RQ einen Kreis, so schneiden sich die Peripherie dieses Kreises, die Winkelrechte Np und der Radius HQ in einem Punkte o (laut analytischer Geometrie)

folglich $op = NP$
$= Qo \sin HQM$
$= \beta \sin \varphi$.

$$y''F = \frac{\frac{\beta^2}{\gamma^2}(2\gamma + \gamma\cos\varphi)(\gamma - \gamma\cos\varphi)^2 + \beta^2\sin\varphi^2 \cdot \gamma\cos\varphi}{6}.$$

Dies giebt nach gehöriger Auflösung

$$y''F = \frac{2\beta^2\gamma(1-\cos\varphi)}{6} \quad (7)$$

$$y'' \cdot \tfrac{1}{2}\gamma\beta\varphi = \frac{2\beta^2\gamma(1-\cos\varphi)}{6}$$

$$y'' = \frac{2\beta(1-\cos\varphi)}{3\varphi} \quad (8)$$

Bezeichnen wir nun eben so die Coordinaten Qi und Qh der Schwerpunkte $s_,$ und $s_{,,}$ mit $x_,$ und $x_{,,}$, so ist

$$x''F = x_,F_, + x_{,,}F_{,,}$$

Nach denselben Annahmen wie bei den Gleichungen (4) und (5) folgt:

$$x_,F_, = \gamma F_, - \frac{\gamma^2}{3\beta^2}y^3,$$

$F_, = \frac{1}{2}\gamma\beta(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi)$, nach Lehren der analytischen Geometrie.

$$x_,F_, = \tfrac{1}{2}\gamma^2\beta(\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi) - \frac{\gamma^2}{3\beta^2}y^3 \quad (9)$$

$$x_{,,}F_{,,} = \frac{(2x+\gamma)\,y(\gamma - x)}{6} \quad (10)$$

$$x''F = \tfrac{1}{2}\gamma^2\beta(\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi) - \frac{\gamma^2}{3\beta^2}y^3 + \frac{(2x+\gamma)\,y(\gamma-x)}{6}.$$

Für x und y die Werthe $\gamma - \gamma\cos\varphi$ und $\beta\sin\varphi$ substituirt, giebt nach gehöriger Auflösung:

$$x''F = \frac{2\gamma^2\beta\sin\varphi}{6} \quad (11)$$

$$x'' = \frac{2\gamma\sin\varphi}{3\varphi} \quad (12)$$

Aus der Mittelpunktsgleichung der Ellipse $AKBS$ (Taf. I. Fig. 4.) folgt:

$$MQ = \gamma = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

und aus der Mittelpunktsgleichung der Ellipse $ARHB$:

$$RQ = \beta = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Diese Werthe in die Gleichungen (7) und (11) substituirt, giebt:

$$y''F = \frac{\frac{2b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\frac{c}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}.(1-\cos\varphi)}{6}$$

$$= \frac{b^2c}{3a^3}(1-\cos\varphi)\sqrt{(a^2-x^2)^3} \quad (13)$$

und eben so:

$$x''F = \frac{c^3 b}{3a^3} \sin\varphi \sqrt{(a^2 - x^2)^3} \quad (14)$$

$$\int y'' F dx = \frac{b^3 c}{3a^3} (1 - \cos\varphi) \int \sqrt{(a^2 - x^2)^3}\, dx$$

$$\int \sqrt{(a^2 - x^2)^3}\, dx = (\frac{a^2 - x^2}{4} + \frac{3a^2}{8}) x \sqrt{(a^2 - x^2)} + \frac{3a^4}{8} \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

(Man sehe Meyer Hirsch Integraltafeln pag. 155.)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{\text{arc sin } x}{a}$$ (M. s. Meyer Hirsch Integraltafeln p. 141.)

$$\int F dx = \int \tfrac{1}{2}\gamma\beta\varphi dx = \tfrac{1}{2}\varphi \int (a^2 - x^2) \frac{bc}{a^2} dx$$

$$= \frac{bc\varphi}{2a^2} \int (a^2 - x^2) dx = \frac{bc\varphi x}{2a^2} (a^2 - \frac{x^2}{3}).$$

Es ist mithin nach Gleichung (1)

$$y' = \frac{2b(1 - \cos\varphi) \{(\frac{a^2 - x^2}{4} + \frac{3a^2}{8}) x \sqrt{(a^2 - x^2)} + \frac{3a^2}{8} \text{ arc sin } x\}}{3a\varphi x (a^2 - \frac{x^2}{3})} \quad (15)$$

Eben so ist nach Gleichung (2)

$$x' = \frac{2c \sin\varphi \{(\frac{a^2 - x^2}{4} + \frac{3a^2}{8}) x \sqrt{(a^2 - x^2)} + \frac{3a^2}{8} \text{ arc sin } x\}}{3a\varphi x (a^2 - \frac{x^2}{3})} \quad (16)$$

Wird in (15) und (16) $x = 0$, so erhält man, nachdem man Zähler und Nenner durch x dividirt hat:

$$y' = \frac{2b(1 - \cos\varphi)}{3a^2\varphi} \{(\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{8})\, a + \frac{\frac{3a^2}{8} \text{ arc sin } x}{x}\},$$

$$\frac{\frac{3a^2}{8} \text{ arc sin } x}{x} = \frac{0}{0} = \frac{3a^2}{8},$$

$$y' = \frac{2b(1 - \cos\varphi)}{3\varphi} \quad (17)$$

und eben so:

$$x' = \frac{2c(1 - \cos\varphi)}{3\varphi} \quad (18)$$

Die Gleichungen (17) und (18) sind mit (8) und (12) zu vergleichen. Es ist aber wohl zu beachten, dass der Werth von φ in (17) und (18) ein anderer ist, als in (8) und (12), indem φ eine Funktion von x ist.

Wird in (16) φ zu π, also der entsprechende Winkel $= 180°$, mithin auch Winkel $\alpha = 180°$, so wird $x' = 0$. Wird φ zu 2π,

also auch Winkel $\alpha = 360°$, so wird x' ebenfalls $= 0$. Werden endlich φ und α mit x gleichzeitig $= 0$, so erhält man aus (18)

$$x' = \frac{0}{0} = \frac{2}{3}c \quad (19).$$

Aufgabe II.

Den geometrischen Ort des in Aufgabe I. gesuchten Schwerpunktes s zu bestimmen, wenn Winkel α zwischen den Grenzen 0 und 360° sich stetig ändert.

Taf. I. Fig. 7. stelle die zur Koordinatenebene XZ (Taf. I. Fig. 4.) rechtwinkliche Schnittellipse vor, die von dem Mittelpunkte O des Ellipsoids um x' (siehe Aufgabe I.) entfernt ist, so wird die zu bestimmende Curve in der Ebene dieser Ellipse liegen, so lange x als constant betrachtet wird. Der geometrische Ort wird aber eine Curve doppelter Krümmung werden, wenn x mit α gleichzeitig als variabel eingeführt wird, wenn x z. B. alle Werthe von 0 bis a durchläuft, während α zwischen den Grenzen 0 und 360° sich stetig ändert.

Wir betrachten hier x aber nur als constant. Dann wird der Ausdruck:

$$\frac{(\frac{a^2 - x^2}{4} + \frac{3a^2}{8})x\sqrt{(a^2 - x^2)} + \frac{3a^2}{8} \text{ arc sin } x}{ax(a^2 - \frac{x^2}{3})} = \mathfrak{J}$$

(Siehe (15) und (16) der Aufgabe I.).

Es sei nun s (Taf. I. Fig. 7.) der Schwerpunkt, der in der Aufgabe I. bestimmt ist und der dem Winkel $EDF = \alpha$ entspricht, sC und CD seien die Coordinaten y' und z', W. sDC sei $= \eta$ und $sD = v'$, so ist:

(1) $v' \sin \eta = y' = \frac{2b(1 - \cos \varphi)}{3\varphi} \mathfrak{J}$ (Siehe Aufgabe I. Formel (15))

(2) $v' \cos \eta = z' = \frac{2c \sin \varphi}{3\varphi} \mathfrak{J}$ (Siehe Aufgabe I. Formel (16))

$$v' = \frac{z'}{\cos \eta}$$

$$y' = \frac{z'}{\cos \eta} \sin \eta = \frac{2b(1 - \cos \varphi)}{3\varphi} \mathfrak{J}$$

$$\sin \eta = \frac{b(1 - \cos \varphi) \cos \eta}{c \sin \varphi}$$

$$= \frac{b(1 - \cos \varphi)\sqrt{(1 - \sin \eta^2)}}{c \sin \varphi}$$

$$\sin \eta^2 = \frac{b^2(1 - \cos \varphi)^2 (1 - \sin \eta^2)}{c^2 \sin \varphi^2}.$$

Hieraus den Werth für $\sin \eta^2$ bestimmt giebt:

$$\sin \eta^2 = \frac{b^2(1 + \cos \varphi^2 - 2\cos \varphi)}{c^2 \sin \varphi^2 + b^2(1 + \cos \varphi^2 - 2\cos \varphi)}$$

$$= \frac{b^2(1-\cos\varphi)^2}{c^2\sin\varphi^2 + b^2(1-\cos\varphi)^2} \quad (3)$$

$$\sin\eta = \frac{b(1-\cos\varphi)}{\sqrt{\{c^2\sin\varphi^2 + b^2(1-\cos\varphi)^2\}}} \quad (4)$$

Aus Formel (1) folgt:

$$v' = \frac{2b(1-\cos\varphi)}{3\varphi\sin\eta}\,\mathfrak{J}.$$

Hierin den Werth von sin η aus Formel (4) gesetzt, giebt

$$v' = \frac{2\sqrt{\{c^2\sin\varphi^2 + b^2(1-\cos\varphi)^2\}}}{3\varphi}\,\mathfrak{J}. \quad (5)$$

(4) und (5) bestimmen die Curve vollständig, die nach der Form dieser beiden Gleichungen im Allgemeinen eine Spirale sein wird.

Nehmen wir $x = 0$ an, so wird der constante Faktor $\mathfrak{J} = 1$ und dann bestimmen die Gleichungen (4) und (5) die Curve, die der Schwerpunkt eines Ellipsensektors LOK (Taf. I. Fig. 8.) beschreibt, wenn α, also auch φ, von 0 bis 360° sich stetig ändert. Wir wollen (4) und (5) für $x = 0$ noch einmal neben einander stellen:

$$\sin\eta = \frac{b(1-\cos\varphi)}{\sqrt{\{c^2\sin\varphi^2 + b^2(1-\cos\varphi)^2\}}} \quad (6)$$

$$v' = \frac{2\sqrt{\{c^2\sin\varphi^2 + b^2(1-\cos\varphi)^2\}}}{3\varphi} \quad (7)$$

Wird $\varphi = 0$, so wird auch $\eta = 0$, v' wird dann $= \frac{0}{0} = \frac{2}{3}\,c$. (Vergleiche hiermit Formel (19) der vorigen Aufgabe).

Wird $\varphi = \frac{\pi}{2}$, also $\varphi = 90° = \alpha$, so wird nach (6)

$$\sin\eta = \frac{b}{\sqrt{(c^2+b^2)}} = \frac{b}{HK}$$ (Taf. I. Fig. 8.)

$HK \cdot \sin\eta = b$. Folglich $\eta = HKO$.

Halbirt man daher OK (Taf. I. Fig. 8.), errichtet in dem Halbirungspunkte B eine Winkelrechte, bis diese die Linie HK in G schneidet, und verbindet man G mit O, so ist GO ein geometrischer Ort für den Schwerpunkt s des Ellipsensektors HOK.

v' wird für $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90°$ nach Formel (7)

$$= \frac{2\sqrt{(c^2+b^2)}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\sqrt{(c^2+b^2)}}{\pi} = \frac{4HK}{\pi}$$ (Taf. I. Fig. 8.).

Wird $\varphi = \pi = 180°$, so wird sin $\eta = 1$, folglich $\eta = 90°$,

$$v' = \frac{4b}{3\pi}.$$

Wird $\varphi = 2\pi = 360°$, so wird

Digitized by Google

$$\eta = 360°,$$
$$v' = 0.$$

v' wird ein Maximum für $\varphi = 0$.

Nehmen wir nun an, α, also φ wachse über 360° hinaus, φ werde z. B. zu $\varphi + 2\pi$, so wird die Deutung dieser Annahme folgende sein:

Die ganze Ellipsenfläche KS (Taf. I. Fig. 8.), die wir hier als ein Körperdifferential ansehen, und die dadurch entstanden ist, dass α alle Werthe von 0 bis 360° durchlaufen hat, habe eine gewisse Dichtigkeit D, so wird, wenn α zu $\alpha + 2\pi$ wird, der Sektor LOK, der dem Winkel α entspricht, von noch einmal so grosser Dichtigkeit sein, als der übrige Theil der Ellipse. Hat α alle Werthe von 2π bis 4π durchlaufen, d. h. ist die 2te ganze Drehung vollendet, so wird der Sektor LOK abermals zur ganzen Ellipsenfläche geworden sein, die nun aber die Dichtigkeit $2D$ hat. Wird α zu $\alpha + 4\pi$, so wird der Sektor LOK, der dem Winkel α entspricht, eine Dichtigkeit haben, die sich zu dem übrigen Theile der Ellipse verhält wie 3 : 2. Nach Vollendung der 3ten ganzen Drehung wird die ganze Ellipsenfläche nur die Dichtigkeit $3D$ haben, u. s. w.

Wird α zu $\alpha + 2\pi$, so wird auch φ zu $\varphi + 2\pi$, und es bleibt in Formel (6) sin η ungeändert, in der 2ten Seite der Gleichung (7) ändert sich nur der Nenner.

Bezeichnen wir den Vektor (v) während der 2ten Drehung ($\varphi + 2\pi$) mit $v^{(2)}$, den Vektor während der 3ten Drehung ($\varphi + 4\pi$) mit $v^{(3)}$ u. s. w., so verhalten sich:

$$v^{(1)},\ v^{(2)},\ v^{(3)},\ v^{(4)}, \ldots . v^{(n)}$$

umgekehrt wie die Glieder der Reihe

$$\varphi,\ \varphi + 2\pi,\ \varphi + 4\pi,\ \varphi + 6\pi, \ldots . \varphi + 2(n-1)\pi.$$

Z. B.

$$v^{(2)} : v^{(1)} = \varphi : \varphi + 2\pi$$

$$\frac{v^{(1)}}{v^{(2)}} = \frac{\varphi + 2\pi}{\varphi} = 1 + \frac{2\pi}{\varphi}.$$

Wird hiernach $\varphi = \frac{\pi}{4} = 45°$, so wird:

$$v^{(2)} = \frac{1}{9}\, v^{(1)}.$$

Wird $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90°$, so wird:

$$v^{(2)} = \frac{1}{5}\, v^{(1)}.$$

Wird $\varphi = \pi = 180°$, so wird:

$$v^{(2)} = \frac{1}{3}\, v^{(1)}.$$

Wird $\varphi = 2\pi = 360°$, so würde hiernach $v^{(2)} = \frac{1}{2} v^{(1)}$ werden, nach Formel (7) werden aber beide Vektoren $= 0$. Es kommt also

$v^{(2)}$, je mehr φ sich 360° nähert, dem Werthe von $\frac{1}{2}v^{(1)}$ die Winkel auch immer näher, bis auf eine Differenz, die kleiner ist, als eine noch so kleine anzunehmende Grösse. Ist $\varphi=0$, so wird der Exponent des Verhältnisses, $v^{(2)}:v^{(1)}$, unendlich gross, $v^{(2)}$ macht demnach, während φ sich stetig zwischen den Grenzen 0 und 360° ändert, alle Werthe zwischen den Grenzen von $\frac{1}{\alpha}v^{(1)}$ und $\frac{1}{2}v^{(1)}$ durch.

Folgende Tafel giebt die Verhältnisse von $v^{(2)}$, $v^{(3)}$, $v^{(4)}$.... $v^{(n)}$ zu $v^{(1)}$ für gewisse Werthe von φ; sie wird ein ungefähres Bild davon geben, auf welche Art sich die verschiedenen Vektoren bei den respektiven Drehungen verändern.

Tafel I.

	Werthe in Theilen von $v^{(1)}$				
	$v^{(2)}$	$v^{(3)}$	$v^{(4)}$	$v^{(5)}$	$v^{(n)}$
$\varphi=22\frac{1}{2}°$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{65}$	$\frac{1}{16n-15}$
$\varphi=45°$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{8n-7}$
$\varphi=\alpha=90°$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{4n-3}$
$\varphi=\alpha=180°$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2n-1}$
Kommt bei der Annäherung von φ zu 360° unendlich nahe dem Werthe	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{n}$

Tafel II.

Verhältniss der Dichtigkeit des Sektors zu dem übrigen Theile der Ellipse.

Während der 1sten Drehung	Während der 2ten Drehung	Während der 3ten Drehung	Während der $n$ten Drehung
1 : 0	2 : 1	3 : 2	$n : n-1$

Nach diesen beiden Tafeln und mit Hülfe der Gleichungen (4) und (5) der Aufgabe II. lässt sich der Schwerpunkt des von den beiden Schnittellipsen MT und KS (Taf. I. Fig. 4.) eingeschlossenen Körpers bestimmen, wenn der Sektor $MNQOLK$ aus einer specifisch schwereren Masse besteht, als der übrige Theil des Kör-

pers, und wenn das Verhältniss der beiden Dichtigkeiten sich auf eins der in Tafel II. angegebenen Verhältnisse zurückführen lässt.

Der Sektor entspreche z. B. dem W. $\varphi = 45°$ und bestehe aus Platina, während der übrige Theil des Körpers aus Gold. Die Dichtigkeit des Platina zur Dichtigkeit des Goldes verhält sich wie 235 : 193, was dem Verhältniss von 5 : 4 ziemlich nahe kommt. Diesem Verhältniss entspricht nach Tafel II. die 5te Drehung und der Vektor $v^{(5)}$. In Tafel I. suche man nun den Werth von $v^{(5)}$ in Theilen von $v^{(1)}$ für $\varphi = 45°$

$$v^{(5)} = \frac{1}{33} v^{(1)}.$$

Wir können hiernach indessen nur den Schwerpunkt des in Rede stehenden Körpers bestimmen, wenn der Exponent des Verhältnisses der Dichtigkeit (D') des Sektors zur Dichtigkeit (D) des übrigen Theiles des Körpers $= \frac{D}{D'} = \frac{n-1}{n}$ ist, wobei n irgend eine ganze Zahl bedeutet. Zur Bestimmung des Schwerpunktes für jedes beliebige andere Verhältniss der beiden Dichtigkeiten zu einander diene folgende Betrachtung.

Hat der Sektor gleiche Dichtigkeit mit dem übrigen Theile des Körpers, so wird der Vektor (v) während jeder ($n$ten) Drehung $=0$.

$$v^{(n)} = 0, \text{ wenn } \frac{D}{D'} = 1.$$

Ist die Dichtigkeit des übrigen Theils des Körpers $=0$, so verschwindet eben dieser übrige Theil, es bleibt der Sektor allein zu betrachten übrig, also:

$$v^{(n)} = v^{(1)}, \text{ wenn } \frac{D}{D'} = 0.$$

Es ist nun offenbar, dass $v^{(n)}$ eine Funktion von $\frac{D}{D'}$ ist, und dass zwischen den Grenzen von $\frac{D}{D'} = 1$ und $\frac{D}{D'} = 0$, $v^{(n)}$ sich stetig zwischen den Grenzen 0 und $v^{(1)}$ ändert.

Hiernach und aus der Anschauung der beiden obigen Tafeln folgt:

$$\text{Für } \varphi = \alpha = 180° \text{ ist } v^{(n)} = \frac{1}{2n-1} v^{(1)} = f\left(\frac{D}{D'} = \frac{n-1}{n}\right)$$

$$\text{,, } = 90° \text{ ,, } = \frac{1}{4n-3} v^{(1)} = F\left(\frac{D}{D'} = \frac{n-1}{n}\right)$$

$$\text{Für } \varphi = 45° \text{ ,, } = \frac{1}{8n-7} v^{(1)} = \mathfrak{f}\left(\frac{D}{D'} = \frac{n-1}{n}\right).$$

Setzen wir statt 1, n; so wird $\frac{D}{D'} = 0$ und $v^{(n)}$ für alle Werthe von $\varphi = v^{(1)}$.

Setzen wir statt 1, 0; so wird $\frac{D}{D'} = 1$ und $v^{(n)}$ für alle Werthe von $\varphi = 0$.

Setzen wir nun statt 1, x; so wird:

$$\text{Für } \varphi = \alpha = 180°,\ v^{(n)} = \frac{x}{2n-x} v^{(1)} = f\left(\frac{n-x}{n}\right)$$

$$\text{„ } = 90°,\ v^{(n)} = \frac{x}{4n-3x} v^{(1)} = F\left(\frac{n-x}{n}\right)$$

$$\text{Für } \varphi = 45°,\ v^{(n)} = \frac{x}{8n-7x} v^{(1)} = f\left(\frac{n-x}{n}\right) \text{ u. s. w.}$$

Behalten wir unser obiges Beispiel mit dem Platina und Golde bei, so können wir jetzt den Schwerpunkt des ganzen Körpers so genau bestimmen, als das Verhältniss der Dichtigkeit des Platina zum Golde 235 : 193 genau bestimmt ist, indem wir $n = 235$ und $x = 235 - 193 = 42$ setzen. Dann ist:

$$\text{Für } \varphi = 45°,\ v^{(n)} = \frac{42}{8 \cdot 235 - 7 \cdot 42} v^{(1)} = \frac{21}{793} v^{(1)}.$$

VI.

Berechnung der Grundzahl der natürlichen Logarithmen, so wie mehrerer anderer mit ihr zusammenhängender Zahlwerthe.

Von

Herrn Prof. C. A. Bretschneider

in Gotha.

Die numerischen Constanten der Arithmetik haben in neuerer Zeit durch ihren Einfluss auf die Berechnung der begränzten Integrale einen höheren Werth erhalten, als man ihnen früher zuschrieb, und es ist daher doppelt nothwendig geworden, die wichtigsten derselben auf eine grosse Reihe von Decimalstellen mit vollkommenster Sicherheit zu kennen. Gleichwohl ist diese Forderung nur bei einer einzigen dieser Zahlen, nämlich bei der Zahl π, in aller Strenge erfüllt. Der Werth derselben ist durch wiederholte Berechnung bis auf 150 Decimalen sicher gestellt und jedes grössere Tafelwerk pflegt einen diplomatisch genauen Abdruck derselben zu enthalten. Nicht eben dasselbe kann man von den übrigen arithmetischen Constanten sagen, und schon die der Zahl π so nahe verwandte Grundzahl e der natürlichen Logarithmen

lässt Zweifel über ihre absolute Richtigkeit zu. Fast alle unsere mathematischen Tafelwerke haben die üble Gewohnheit, in einem Anhange die Zahlwerthe der am häufigsten vorkommenden numerischen Constanten aufzuführen, ohne auch nur mit einem Worte zu erwähnen, ob sie von den Verfassern neu berechnet oder aus anderen ähnlichen Werken entlehnt worden sind. Will man dann einen solchen Zahlwerth für irgend eine grössere numerische Rechnung zu Grunde legen, so findet man sich über die Zuverlässigkeit desselben in peinlicher Ungewissheit; ja man ist oft nicht einmal im Stande zu erkennen, ob die in der Tafel stehenden Ziffern von Druckfehlern frei sind.

Eine Vergleichung mehrerer Tafeln mit einander kann hier natürlich nicht zum Zwecke führen; denn wenn die aufgenommenen Data aus einer in die andere übergegangen sind, so sind alle Rechnungs- und Druckfehler ebenfalls copirt worden.

Aus diesem Grunde habe ich bereits vor längerer Zeit eine Revision der wichtigsten numerischen Constanten begonnen und theile hier die Resultate für die Zahl e und einige verwandte Grössen als Probe mit.

Es wurden zuvörderst die Summen der vier Reihen

$$\mathrm{I} = 1 + \frac{1}{4!} + \frac{1}{8!} + \ldots$$

$$\mathrm{II} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{9!} + \ldots$$

$$\mathrm{III} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{10!} + \ldots$$

$$\mathrm{IV} = \frac{1}{3!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{11!} + \ldots$$

gesucht und aus ihnen durch gehörige Verbindung die nachstehenden sechs Zahlwerthe abgeleitet:

$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352$
$66249\ 77572\ 47093\ 69995\ 95749\ 66967$
$62772\ 40766\ 30353\ 54759\ 45713\ 82178$
$52516\ 64274\ 27466$

$\frac{1}{e} = 0{,}36787\ 94411\ 71442\ 32159\ 55237\ 70161$
$46086\ 74458\ 11131\ 03176\ 78345\ 07836$
$80169\ 74614\ 95744\ 89980\ 33571\ 47274$
$34591\ 96437\ 46627$

$\mathfrak{Cos}\ 1 = 1{,}54308\ 06348\ 15243\ 77847\ 79056\ 20757$
$06168\ 26015\ 29112\ 36586\ 37047\ 37402$
$21471\ 07690\ 63049\ 22369\ 89642\ 64726$
$43554\ 30355\ 87046:$

Sin 1 = 1,17520 11936 43801 45688 23818 50595
60081 51557 17981 33409 58702 29565
41301 33075 67304 32389 56071 17452
08962 33918 40419:

cos 1 = 0,54030 23058 68139 71740 09366 07442
97660 37323 10420 61792 22276 70097
25538 11003 94774 47176 45179 51856
08718 30893 43571:

sin 1 = 0,84147 09848 07896 50665 25023 21630
29899 96225 63060 79837 10656 72751
70999 19104 04391 23966 89486 39743
54305 26958 54349

Die Funktionen Cos und Sin sind die von Gudermann eingeführten hyperbolischen Cosinus und Sinus. Vorstehende Resultate sind auf 115 Decimalstellen berechnet, die letzten zehn jedoch hier weggelassen worden. Uebrigens habe ich die letzte Ziffer stets ungeändert gelassen, jedoch in dem Falle, wenn die nächstfolgende 106te Ziffer eine 5, 6, 7, 8 oder 9 war, dies durch ein beigesetztes Colon angedeutet. Dass die ganze Rechnung, ohne alle Ausnahme doppelt geführt worden ist, versteht sich von selbst; und ich habe noch ausserdem die Wiederholung derselben ein ganzes Jahr später vorgenommen, als die erste Rechnung, da ich früherhin bei einer anderen Rechnung ähnlicher Art die Erfahrung gemacht hatte, dass ich bei unmittelbarer Wiederholung des Calculs zweimal den nämlichen zufälligen Fehler beging. Da übrigens die Resultate beider Berechnungen im vorliegenden Falle nur um 12 Einheiten der letzten 115ten Decimalstelle von einander abwichen, so dürfen die hier gegebenen Ziffern wohl als völlig sicher angesehen werden.

In der Einleitung zu Callet's tables portatives de logarithmes etc. pg. 112 findet sich der Werth von *e* auf 61 Decimalstellen, aus dem Modulus der briggischen Logarithmen abgeleitet. Die ersten 41 Decimalen sind richtig, die letzten 20 total falsch. Es ist nämlich der Werth von *e* von der 40sten Stelle an

nach Callet . . 46928 08355 51550 58417 2; dagegen

der wahre Werth 47093 69995 95749 66967 6.

Im Vega'schen thesaurus findet sich pg. 309 die Zahl *e* auf 44 Decimalen berechnet, nur um 3 Einheiten der letzten 44sten Stelle zu gross; denn Vega hat . . . 77572 4712 anstatt des wahren Werthes . . 77572 4709.

Gudermann, in seiner Theorie der Potenzialfunktionen, hat die Werthe von Sin 1, Cos 1, sin 1 und cos 1 auf 25 Decimalen gegeben. Mit Ausnahme der letzten Ziffern jeder dieser Zahlen sind die übrigen sämmtlich richtig. Nur in dem Werthe von cos 1 ist die 13te Decimale falsch, indem es statt . . 68039 . . vielmehr . . 68139 . . heissen muss.

Ganz eben so wie für e habe ich dann ferner die Summen der vier Reihen

$$1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots$$

$$\frac{x^1}{1!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots$$

$$\frac{x^2}{2!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^{10}}{10!} + \ldots$$

$$\frac{x^3}{3!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{11}}{11!} + \ldots$$

für alle Werthe von x, von 2 bis zu 10, auf 25 Decimalen berechnet und dadurch die Zahlen erhalten, welche unten in der ersten Tafel bis auf 20 Decimalen zusammengestellt sind. Die Probe der Richtigkeit der einzelnen Resultate wurde dadurch erhalten, dass die Summe der oben angeführten vier Reihen genau denselben Werth für e^x ergeben musste, der durch successive Multiplication von e gefunden worden war. Bei der grossen Leichtigkeit mit der sich aus den Gliedern der Reihe für e^x die Glieder der Reihe für $\int e^x d.(lx)$ finden lassen, habe ich auch die Werthe der Integralfunktionen

$$\int e^{\pm x}\frac{dx}{x} = li\ (\pm x)$$

$$\int \mathfrak{Cos}\ x\ .\ \frac{dx}{x} = \mathfrak{Ci}\ x;\quad \int \cos\ x\ .\ \frac{dx}{x} = \mathrm{ci}\ x$$

$$\int \mathfrak{Sin}\ x\ .\ \frac{dx}{x} = \mathfrak{Si}\ x;\quad \int \sin\ x\ .\ \frac{dx}{x} = \mathrm{si}\ x$$

in Rechnung genommen. Zu dem Ende wurden die Summen der vier Reihen

$$\gamma + lx + \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4!} + \frac{1}{8}\cdot\frac{x^8}{8!} + \ldots$$

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{x}{1!} + \frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{5!} + \frac{1}{9}\cdot\frac{x^9}{9!} + \ldots$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{6}\cdot\frac{x^6}{6!} + \frac{1}{10}\cdot\frac{x^{10}}{10!} + \ldots$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3!} + \frac{1}{7}\cdot\frac{x^7}{7!} + \frac{1}{11}\cdot\frac{x^{11}}{11!} + \ldots$$

für die Werthe von $x = 1$ bis $x = 10$ gesucht und aus ihnen die Werthe obiger Integralfunktionen abgeleitet. Eine Probe der Rechnung erhielt ich dadurch, dass ich den Werth li e^x unmittelbar aus der von mir früher entwickelten Formel (theoriae logarithmi integralis lineamenta nova in Crelle's Journal Bd. 17. pg. 284 Nr. 59.)

$$\mathrm{li}\ e^{x+1} = \mathrm{li}\ e^x + e^{x+1}\{K_0 - K_1 + K_2 - K_3 + \ldots\}$$

berechnete, in welcher die Grössen $K_0 K_1 K_2$ u. s. w. mittelst der Recursionsformeln

$$K_0 = \lg\,(1 + \frac{1}{x})$$

$$K_1 = (x+1)K_0 - \frac{1}{1}$$

$$K_2 = 1!(x+1)K_1 - \frac{1}{2}$$

$$K_3 = 2!(x+1)K_2 - \frac{1}{3} \text{ u. s. w.}$$

abgeleitet werden können. Da aber diese Formel den Werth von li e nothwendig voraussetzt, so wurde letzterer aus der Grundformel

$$\text{li } e = \gamma + 1 + \frac{1}{2\,.\,2!} + \frac{1}{3\,.\,3!} + \frac{1}{4\,.\,4!} + \ldots$$

durch zweimalige Berechnung auf 40 Decimalstellen entwickelt, woraus sich, mit Weglassung der 5 letzten Stellen, folgende Resultate ergaben:

$$\text{li } e = +\,1{,}89511\ 78163\ 55936\ 75546\ 65209\ 34331\ 63426:$$

$$\text{li } \frac{1}{e} = -\,0{,}21938\ 39343\ 95520\ 27367\ 71637\ 75460\ 12164:$$

$$\mathfrak{CJ}\ 1 = +\,0{,}83786\ 69409\ 80208\ 24089\ 46785\ 79435\ 75630:$$

$$\mathfrak{SJ}\ 1 = +\,1{,}05725\ 08753\ 75728\ 51457\ 18423\ 54895\ 87795:$$

$$\text{ci } 1 = +\,0{,}33740\ 39229\ 00968\ 13466\ 26462\ 03889\ 15076:$$

$$\text{fi } 1 = +\,0{,}94608\ 30703\ 67183\ 01494\ 13533\ 13823\ 17965:$$

Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, dass ich vor Kurzem einen ganz einfachen Weg aufgefunden habe, die bisher immer noch so mühsame Berechnung der Integrallogarithmen sehr grosser Zahlen ausnehmend leicht zu bewerkstelligen. Man hat nämlich allgemein folgende Formel:

$$\text{li } (e^n + x) = \text{li } e^n + \lg\,[\frac{\lg\,(e^n + x)}{n}]$$

$$+\, e^n \{\frac{\lg \nu}{1!}\, C_1^{-n} + \frac{(\lg \nu)^2}{2!}\, C_2^{-n} + \frac{(\lg \nu)^3}{3!}\, C_3^{-n} + \ldots\}$$

in welcher $\nu = 1 + \frac{x}{e^n}$ ist und die Coefficienten C_p^{-n} durch die Gleichung

$$C_p^{-n} = \frac{1}{p} - \frac{n}{p(p+1)} + \frac{n^2}{p(p+1)\,(p+2)} - + \ldots$$

bestimmt werden. Setzt man nun in obiger Formel z. B. $n = 10$, also $e^n = 22026{,}46579\,..$ so braucht man nur $x = -\,0{,}46579\,..$ d. h. gleich dem, mit der Potenz e^n verbundenen Decimalbruch, zu setzen, um sofort den Integrallogarithmen der hohen Zahl 22026 zu erhalten. Es ergiebt sich daraus der Werth von $\lg \nu = 0{,}00002113..$ so dass die zu berechnende Reihe ausserordentlich schnell convergirt. Man kann nun leicht weiter gehen und für x grössere

Werthe nehmen, und wird für lg v immer noch sehr kleine Werthe erhalten. So ist z. B. für

$x = -\ 1{,}46579\ldots\quad e^{10} + x = 22025$ und lg $v = 0{,}00006654$
$x = -\ 6{,}46579\ldots\quad e^{10} + x = 22020$ und lg $v = 0{,}00029357$
$x = -26{,}46579\ldots\quad e^{10} + x = 22000$ und lg $v = 0{,}00120226$

u. s. w. woraus sich die ungemeine Brauchbarkeit der zu Grunde gelegten Formel wohl sattsam ergiebt. Selbst bei weit niedrigeren Potenzen von e wird sie noch mit Vortheil angewendet werden können. Denn es ist z. B. für die dritte Potenz von e der Werth $e^3 = 20{,}08553\ldots$ und dies giebt

für $x = -0{,}08553\ldots\quad e^3 + x = 20$ und lg $v = 0{,}00426772$
für $x = -1{,}08553\ldots\quad e^3 + x = 19$ und lg $v = 0{,}05556101$
für $x = -2{,}08553\ldots\quad e^3 + x = 18$ und lg $v = 0{,}10962823$

ingleichen

für $x = +\ 0{,}91446\ldots\quad e^3 + x = 21$ und lg $v = 0{,}04452244$
für $x = +\ 1{,}91446\ldots\quad e^3 + x = 22$ und lg $v = 0{,}09104245$
für $x = +14{,}91446\ldots\quad e^3 + x = 35$ und lg $v = 0{,}55534806$

so dass selbst für $x > \frac{1}{2}e^n$ jedes folgende Glied der Reihe um mehr als die Hälfte kleiner ist, als das vorhergehende.

x	e^x	Cos x	cos x
1	2,71828 18284 59045 23536	1,54308 06348 15243 77847:	+ 0,54030 23058 68139 71740
2	7,38905 60989 30650 22723	3,76219 56910 83631 45956	— 0,41614 68365 47142 38699:
3	20,08553 69231 87667 74092:	10,06766 19957 77765 84195	— 0,98999 24966 00445 45727
4	54,59815 00331 44239 07811	27,30823 28360 16486 62920	— 0,65364 36208 63611 91463:
5	148,41315 91025 76603 42111:	74,20994 85247 87844 44410:	+ 0,28366 21854 63226 26446:
6	403,42879 34927 35122 60838:	201,71563 61224 55894 48340:	+ 0,96017 02866 50366 02054:
7	1096,63315 84284 58599 26372	548,31703 51552 12076 88996	+ 0,75390 22543 43304 63814
8	2980,95798 70417 28274 74359	1490,47916 12521 78088 62771:	— 0,14550 00338 08613 52586:
9	8103,08392 75753 84007 70999:	4051,54202 54925 94047 19477	— 0,91113 02618 84676 98836:
10	22026,46579 48067 16516 95790	11013,23292 01033 23139 72137:	— 0,83907 15290 76452 45225:
x	e^{-x}	Sin x	sin x
1	0,36787 94411 71442 32159:	1,17520 11936 43801 45688	+ 0,84147 09848 07896 50665
2	0,13533 52832 36612 69189	3,62686 04078 47018 76766	+ 0,90929 74268 25681 69539:
3	0,04978 70683 67863 94297:	10,01787 49274 09901 89897	+ 0,14112 00080 59867 22210
4	0,01831 56388 88734 18029	27,28991 71971 27752 44890:	— 0,75680 24953 07928 25137
5	0,00673 79469 99085 46709:	74,20321 05777 88758 97700:	— 0,95892 42746 63138 46889
6	0,00247 87521 76666 35842	201,71315 73702 79228 12498	— 0,27941 54981 98925 87281
7	0,00091 18819 65554 51620:	548,31612 32732 46522 37375:	+ 0,65698 65987 18789 09039:
8	0,00033 54626 27902 51183:	1490,47882 57895 50186 11587:	+ 0,98935 82466 23381 77780:
9	0,00012 34098 04086 67954:	4051,54190 20827 89960 51522	+ 0,41211 84852 41756 56975:
10	0,00004 53999 29762 48485	11013,23287 47033 93377 23652	— 0,54402 11108 89369 81340

x	$\mathrm{li}\,.\,e^x$	$\mathfrak{Ei}\,.\,x$	$\mathrm{ci}\,.\,x$
1	+ 1,89511 78163 55936 75546:	+ 0,83786 69409 80208 24089	+ 0,33740 39229 00968 13466
2	+ 4,95423 43560 01890 16337:	+ 2,45266 69226 46914 52190:	+ 0,42298 08287 74864 99569:
3	+ 9,93383 25706 25416 55800:	+ 4,96039 20947 65609 76029:	+ 0,11962 97860 08000 32762:
4	+ 19,63087 44700 56220 02264:	+ 9,81354 75588 23185 55808	− 0,14098 16978 86930 41163:
5	+ 40,18527 53558 03177 45509	+ 20,09206 35301 05951 06464:	− 0,19002 97496 56643 87861:
6	+ 85,98976 21424 39204 80358	+ 42,99470 10299 93521 07246	− 0,06805 72438 93247 12620
7	+ 191,50474 33355 01395 95306	+ 95,75231 39268 84892 80742	+ 0,07669 52784 82184 51838
8	+ 440 37989 95348 38268 99742	+ 220,18993 09346 07712 53626	+ 0,12243 38825 32009 55729
9	+ 1037,87829 07170 89587 65757	+ 518,93913 91348 67704 82565	+ 0,05534 75313 33133 60708:
10	+ 2492,22897 62418 77759 13844	+ 1246,11448 60424 54414 72655:	− 0,04545 64330 04455 37263
	$\mathrm{li}\,.\,e^{-x}$	$\mathfrak{Si}\,.\,x$	$\mathrm{si}\,.\,x$
1	− 0,21938 39343 95520 27367:	+ 1,05725 08753 75728 51457	+ 0,94608 30703 67183 01494
2	− 0,04890 05107 08061 11956:	+ 2,50156 74333 54975 64147	+ 1,60541 29768 02694 84857:
3	− 0,01304 83810 94197 03741	+ 4,97344 04758 59806 79771	+ 1,84865 25279 99468 25639:
4	− 0,00377 93524 09848 90647:	+ 9,81732 69112 33034 46456	+ 1,75820 31389 49053 05810:
5	− 0,00144 82955 91275 32579:	+ 20,09321 18256 97226 39044	+ 1,54993 12449 44674 13727
6	− 0,00036 00824 52162 65865:	+ 42,99506 11124 45683 73112	+ 1,42468 75512 80506 53576:
7	− 0,00011 54817 31610 33821:	+ 95,75242 94086 16503 14563:	+ 1,45459 66142 48093 59061
8	− 0,00003 76656 22843 92490	+ 220,18996 86002 30556 46116	+ 1,57418 68217 06942 05208
9	− 0,00001 24473 54178 00627	+ 518,93915 15822 21882 83192	+ 1,66504 00758 29602 49510:
10	− 0,00000 41569 68929 68532	+ 1246,11449 01994 23344 41188	+ 1,65834 75942 18874 04933

VII.

Ueber eine geodätische Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

Bei einer Triangulirung kann zuweilen der folgende Fall vorkommen. M und M_1 sind zwei Punkte, deren Lage aus einer frühern Messung bekannt ist. Man kann aber keinen dieser beiden Punkte von dem andern aus sehen. Dagegen sieht man sowohl von M, als auch von M_1 aus, drei andere ihrer Lage nach unbekannte Punkte A, B, C, und misst in M die 180° nicht übersteigenden Winkel AMB, BMC, CMA, in M_1 die 180° nicht übersteigenden Winkel AM_1B, BM_1C, CM_1A. Ist es dann noch möglich, die drei Winkel A, B, C des durch die eben so bezeichneten Punkte bestimmten Dreiecks ABC, dessen den Winkeln A, B, C gegenüberstehende Seiten wie gewöhnlich durch a, b, c bezeichnet werden sollen, zu messen, so kann man jederzeit die Lage der drei Punkte A, B, C bestimmen, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Man nehme eine Seite des Dreiecks ABC, etwa die Seite c, als Längeneinheit an, so hat man für die drei Seiten a, b, c des in Rede stehenden Dreiecks nach einem bekannten Elementarsatze der ebenen Trigonometrie die folgenden Ausdrücke:

$$1) \quad \ldots a = \frac{\sin A}{\sin C}, \; b = \frac{\sin B}{\sin C}, \; c = 1;$$

und kann also die drei Seiten a, b, c in Bezug auf die angenommene Längeneinheit aus den gemessenen Winkeln A, B, C leicht berechnen.

Da die Lage der Punkte M, M_1 als bekannt vorausgesetzt wird, so nehmen wir an, dass die Coordinaten dieser Punkte in Bezug auf ein gewisses rechtwinkliges Coordinatensystem, welches im Folgenden das primitive System genannt werden soll, gegeben sind. Nimmt man nun A als den Anfang, AB als den positiven Theil der Axe der ξ eines neuen rechtwinkligen Coordinatensystems der $\xi\eta$, und, was offenbar immer möglich ist, den positiven Theil der Axe der η so an, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der ξ durch den rechten Winkel $(\xi\eta)$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der η zu gelangen, ganz nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der ersten Axe des primitiven Systems durch den primitiven Coordinatenwinkel hindurch zu

dem positiven Theile der zweiten Axe des primitiven Systems zu gelangen; so sind in Bezug auf dieses angenommene neue rechtwinklige Coordinatensystem die Coordinaten der drei Punkte A, B, C offenbar respective:

$$0,\ 0;\ c,\ 0;\ b\cos A,\ \pm b\sin A;$$

oder nach dem Vorhergehenden:

$$0,\ 0;\ 1,\ 0;\ \frac{\cos A\sin B}{\sin C},\ \pm\frac{\sin A\sin B}{\sin C};$$

wo in dem Ausdrucke der zweiten Coordinate des Punktes C das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem der positive Theil der Axe der η auf derselben Seite von AB wie der Punkt C oder auf der entgegengesetzten Seite von AB liegt. Aus diesen so eben bestimmten Coordinaten der Punkte A, B, C und den in M und M_1 gemessenen, 180° nicht übersteigenden Winkeln AMB, BMC, CMA und AM_1B, BM_1C, CM_1A kann man nun nach dem Pothenot'schen oder vielmehr Snellius'schen Problem, etwa mittelst der Thl. I. S. 446 — S. 448 entwickelten Formeln, die Coordinaten ξ, η und ξ_1, η_1 der Punkte M und M_1 in dem Systeme der $\xi\eta$, so wie auch die Entfernungen MA, MB, MC und M_1A, M_1B, M_1C berechnen.

Denkt man sich jetzt durch den Punkt M als Anfang ein dem Systeme der $\xi\eta$ paralleles System der $\xi'\eta'$ gelegt, und bezeichnet die Coordinaten des Punktes M_1 in diesem Systeme durch ξ'_1, η'_1, die Länge der Linie MM_1 durch (ϱ), und den von dieser Linie mit dem positiven Theile der Axe der ξ' eingeschlossenen Winkel, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der ξ' an durch den rechten Winkel $(\xi'\eta')$ hindurch von 0 bis 360° zählt, durch Θ; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$2)\quad \ldots\ \xi'_1 = (\varrho)\cos\Theta,\ \eta'_1 = (\varrho)\sin\Theta.$$

Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten ist aber offenbar

$$\xi_1 = \xi + \xi'_1,\ \eta_1 = \eta + \eta'_1$$

oder

$$\xi'_1 = \xi_1 - \xi,\ \eta'_1 = \eta_1 - \eta;$$

d. i. nach dem Obigen

$$3)\quad \ldots\ (\varrho)\cos\Theta = \xi_1 - \xi,\ (\varrho)\sin\Theta = \eta_1 - \eta;$$

also

$$4)\quad \ldots.\ \text{tang}\,\Theta = \frac{\eta_1 - \eta}{\xi_1 - \xi}$$

und

$$5)\quad \ldots\ (\varrho) = \frac{\xi_1 - \xi}{\cos\Theta} = \frac{\eta_1 - \eta}{\sin\Theta},$$

mittelst welcher Formeln Θ und (ϱ) leicht berechnet werden können. Ob man den positiven Winkel oder Bogen Θ, welcher 360° nicht übersteigt, zwischen 0 und 180° oder zwischen 180° und 360° zu nehmen hat, entscheidet man dadurch, dass man für Θ im-

Digitized by Google

mer denjenigen der beiden in Rede stehenden Werthe zu setzen hat, welcher mittelst der Formeln 5) für (ϱ) einen positiven Werth liefert.

Wohl zu beachten hat man, dass bis jetzt immer die Seite AB oder c des Dreiecks ABC als Längeneinheit angenommen worden ist.

Da die Lage der Punkte M und M_1 als bekannt angenommen wird, so sind, wie schon vorher bemerkt worden ist, ihre Coordinaten x, y und x_1, y_1 in Bezug auf ein gewisses rechtwinkliges Coordinatensystem der xy und eine bestimmte Längeneinheit, welche durch μ bezeichnet werden mag, gegeben. Legen wir nun durch den Punkt M ein dem primitiven Systeme der xy paralleles Coordinatensystem der $x'y'$, und bezeichnen die Coordinaten des Punktes M_1 in diesem Systeme durch x'_1, y'_1, den numerischen Ausdruck der Länge der Linie MM_1 in Bezug auf die Längeneinheit μ durch ϱ, und den von der Linie MM_1 mit dem positiven Theile der Axe der x' eingeschlossenen, von dem positiven Theile der Axe der x' an durch den rechten Winkel $(x'y')$ hindurch von 0 bis 360° gezählten Winkel durch φ; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$6) \quad \ldots x'_1 = \varrho \cos \varphi, \; y'_1 = \varrho \sin \varphi,$$

und nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten ist

$$x_1 = x + x'_1, \; y_1 = y + y'_1,$$

oder

$$x'_1 = x_1 - x, \; y'_1 = y_1 - y,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$7) \quad \ldots . \varrho \cos \varphi = x_1 - x, \; \varrho \sin \varphi = y_1 - y,$$

folglich

$$8) \quad \ldots \operatorname{tang} \varphi = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

und

$$9) \quad \ldots \varrho = \frac{x_1 - x}{\cos \varphi} = \frac{y_1 - y}{\sin \varphi},$$

mittelst welcher Formeln φ und ϱ berechnet werden können. Ob man den positiven, 360° nicht übersteigenden Winkel oder Bogen φ zwischen 0 und 180° oder zwischen 180° und 360° zu nehmen hat, wird dadurch jederzeit leicht entschieden, dass man für φ immer denjenigen der beiden in Rede stehenden Werthe zu setzen hat, welcher mittelst der Formeln 9) für ϱ einen positiven Werth liefert.

Nach dem Vorhergehenden sind (ϱ) und ϱ die numerischen Ausdrücke derselben Linie MM_1 in Bezug auf verschiedene Längeneinheiten, nämlich respective in Bezug auf die Längeneinheiten c und μ, und es ist also eigentlich

$$MM_1 = (\varrho)c, \; MM_1 = \varrho\mu,$$

folglich

$$(\varrho)c = \varrho\mu,$$

woraus sogleich

$$10) \quad \ldots c = \frac{\varrho}{(\varrho)}\,\mu$$

folgt, oder auch

$$11) \quad \ldots c = \frac{\varrho}{(\varrho)},$$

wenn man nur den Ausdruck auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens auf die Längeneinheit μ bezieht, wodurch also die wahre Grösse von c in Bezug auf die der ursprünglichen Messung, aus welcher die Lage der Punkte M und M_1 hergeleitet wurde, zum Grunde gelegte Längeneinheit μ gefunden ist. Die numerischen Ausdrücke aller im Vorhergehenden in Bezug auf die Längeneinheit c berechneten Längen in Bezug auf die Längeneinheit μ erhält man, wenn man die in Rede stehenden Längen in Bezug auf die Längeneinheit c sämmtlich mit dem Bruche $\frac{\varrho}{(\varrho)}$ multiplicirt, wie auf der Stelle erhellen wird, so dass also hiernach auch die numerischen Ausdrücke aller dieser Längen in Bezug auf die der ursprünglichen Messung, aus welcher die Lage der Punkte M und M_1 hergeleitet wurde, zum Grunde gelegte Längeneinheit μ ohne Schwierigkeit gefunden werden kann.

Endlich wollen wir nun noch zeigen, wie, indem wir von jetzt an natürlich immer die Längeneinheit μ zum Grunde legen, die Coordinaten X, Y; X_1, Y_1; X_2, Y_2 der drei Punkte A, B, C, deren Lage zu bestimmen unsere eigentliche Aufgabe ist, in Bezug auf das primitive System der xy gefunden werden können.

Zu dem Ende bemerken wir zuvörderst, dass aus den bekannten Winkeln Θ und φ immer leicht der Winkel ψ abgeleitet werden kann, welchen der positive Theil der Axe der ξ' mit dem positiven Theile der Axe der x' einschliesst, wobei man diesen Winkel wie gewöhnlich von dem positiven Theile der Axe der x' an durch den rechten Winkel $(x'y')$ hindurch von 0 bis 360° zählt. Bei der Aufstellung der an sich übrigens sehr einfachen allgemeinen Regeln für die Ableitung des Winkels ψ aus den Winkeln Θ und φ wollen wir uns hier jedoch nicht aufhalten, weil man sich, wenn nicht auf andere Weise, doch immer durch eine leicht zu entwerfende Figur bei diesem Geschäft wird helfen können.

Die Coordinaten der Punkte A. B, C im Systeme der $x'y'$, dessen Anfang M ist, seien X', Y'; X'_1, Y'_1; X'_2, Y'_2; und $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$; $\mathfrak{X}'_1$, $\mathfrak{Y}'_1$; $\mathfrak{X}'_2$, $\mathfrak{Y}'_2$ seien die Coordinaten der Punkte A, B, C im Systeme der $\xi'\eta'$, dessen Anfang ebenfalls M ist.

Da das System der $\xi'\eta'$ dem Systeme der $\xi\eta$ parallel ist, und ξ, η die Coordinaten des Punktes M in dem letztern Systeme in Bezug auf die Längeneinheit c sind; so ist, weil nach dem Obigen

$$0,\ 0;\ \frac{\varrho}{(\varrho)},\ 0;\ \frac{b\varrho}{(\varrho)}\cos A,\ \pm\frac{b\varrho}{(\varrho)}\sin A\ ^*)$$

die Coordinaten der Punkte A, B, C in dem Systeme der $\xi\eta$

---

*) Wegen des Vorzeichens ist schon oben die nöthige Bestimmung gegeben worden.

(jetzt natürlich immer in Bezug auf die Längeneinheit μ) sind, nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten

$$0 = \frac{\varrho}{(\varrho)}\xi + \mathfrak{X}',\ 0 = \frac{\varrho}{(\varrho)}\eta + \mathfrak{Y}';$$

$$\frac{\varrho}{(\varrho)} = \frac{\varrho}{(\varrho)}\xi + \mathfrak{X}'_1,\ 0 = \frac{\varrho}{(\varrho)}\eta + \mathfrak{Y}'_1;$$

$$\frac{b\varrho}{(\varrho)}\cos A = \frac{\varrho}{(\varrho)}\xi + \mathfrak{X}'_2,\ \pm\frac{b\varrho}{(\varrho)}\sin A = \frac{\varrho}{(\varrho)}\eta + \mathfrak{Y}'_2;$$

also

$$12)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}' = -\frac{\varrho}{(\varrho)}\xi,\ \mathfrak{Y}' = -\frac{\varrho}{(\varrho)}\eta; \\ \mathfrak{X}'_1 = \frac{\varrho}{(\varrho)}(1-\xi),\ \mathfrak{Y}'_1 = -\frac{\varrho}{(\varrho)}\eta; \\ \mathfrak{X}'_2 = \frac{\varrho}{(\varrho)}(b\cos A - \xi),\ \mathfrak{Y}'_2 = \pm\frac{\varrho}{(\varrho)}(b\sin A \mp \eta); \end{cases}$$

mittelst welcher Formeln die Coordinaten $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$; $\mathfrak{X}'_1$, $\mathfrak{Y}'_1$; $\mathfrak{X}'_2$, $\mathfrak{Y}'_2$ berechnet werden können.

Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten ist nun ferner

$$12)\quad \begin{cases} X' = \mathfrak{X}'\cos\psi - \mathfrak{Y}'\sin\psi,\ Y' = \mathfrak{X}'\sin\psi + \mathfrak{Y}'\cos\psi; \\ X'_1 = \mathfrak{X}'_1\cos\psi - \mathfrak{Y}'_1\sin\psi,\ Y'_1 = \mathfrak{X}'_1\sin\psi + \mathfrak{Y}'_1\cos\psi; \\ X'_2 = \mathfrak{X}'_2\cos\psi - \mathfrak{Y}'_2\sin\psi,\ Y'_2 = \mathfrak{X}'_2\sin\psi + \mathfrak{Y}'_2\cos\psi; \end{cases}$$

und

$$(14\quad \begin{cases} X = x + X',\ Y = y + Y', \\ X_1 = x + X'_1,\ Y = y + Y'_1; \\ X_2 = x + X'_2,\ Y = y + Y'_2; \end{cases}$$

mittelst welcher Formeln also jetzt die gesuchten Coordinaten X, Y; X_1, Y_1; X_2, Y_2 der Punkte A, B, C in Bezug auf das primitive System der xy gefunden werden können, und die Lage dieser Punkte daher bestimmt ist, wie verlangt wurde.

Bezeichnet man die von den Linien MA, MB, MC mit dem positiven Theile der Axe der ξ' eingeschlossenen und auf gewöhnliche Weise von 0 bis 360° gezählten Winkel durch ζ, ζ_1, ζ_2 und setzt $MA = r$, $MB = r_1$, $MC = r_2$; so ist offenbar

$$\mathfrak{X}' = r\cos\zeta,\ \mathfrak{Y}' = r\sin\zeta;$$

$$\mathfrak{X}'_1 = r_1\cos\zeta_1,\ \mathfrak{Y}'_1 = r_1\sin\zeta_1;$$

$$\mathfrak{X}'_2 = r_2\cos\zeta_2,\ \mathfrak{Y}'_2 = r_2\sin\zeta_2;$$

also

$$15)\quad \begin{cases} \cos\zeta = \frac{\mathfrak{X}'}{r},\ \sin\zeta = \frac{\mathfrak{Y}'}{r},\ \operatorname{tang}\zeta = \frac{\mathfrak{Y}'}{\mathfrak{X}'}; \\ \cos\zeta_1 = \frac{\mathfrak{X}'_1}{r_1},\ \sin\zeta_1 = \frac{\mathfrak{Y}'_1}{r_1},\ \operatorname{tang}\zeta_1 = \frac{\mathfrak{Y}'_1}{\mathfrak{X}'_1}; \\ \cos\zeta_2 = \frac{\mathfrak{X}'_2}{r_2},\ \sin\zeta_2 = \frac{\mathfrak{Y}'_2}{r_2},\ \operatorname{tang}\zeta_2 = \frac{\mathfrak{Y}'_2}{\mathfrak{X}'_2}; \end{cases}$$

mittelst welcher Formeln die Winkel ζ, ζ_1, ζ_2 berechnet werden können *). Hat man aber diese Winkel, so ist nach 13)

$$16)\begin{cases} X'=r\cos(\psi+\zeta),\ Y'=r\sin(\psi+\zeta); \\ X'_1=r_1\cos(\psi+\zeta_1),\ Y'_1=r_1\sin(\psi+\zeta_1); \\ X'_2=r_2\cos(\psi+\zeta_2),\ Y'_2=r_2\sin(\psi+\zeta_2); \end{cases}$$

und also nach 14)

$$17)\begin{cases} X=x+r\cos(\psi+\zeta),\ Y=y+r\sin(\psi+\zeta); \\ X_1=x+r_1\cos(\psi+\zeta_1),\ Y_1=y+r_1\sin(\psi+\zeta_1); \\ X_2=x+r_2\cos(\psi+\zeta_2),\ Y_2=y+r_2\sin(\psi+\zeta_2). \end{cases}$$

Die vorhergehende Auflösung unserer Aufgabe, obgleich dieselbe eine doppelte Anwendung des Pothenot'schen oder vielmehr Snellius'schen Problems in Anspruch nimmt, scheint uns dessenungeachtet für die wirkliche Anwendung die meisten Vortheile zu gewähren, weshalb wir für jetzt andere Auflösungen derselben nicht geben, und mit der Bemerkung schliessen wollen, dass man diese Aufgabe, unter einem rein-geometrischen Gesichtspunkte aufgefasst, auch auf folgende Art ausdrücken kann:

Es seien zwei Punkte M und M_1 gegeben; man soll durch den Punkt M drei unter gegebenen Winkeln gegen einander geneigte gerade Linien (1), (2), (3), durch den Punkt M_1 drei ebenfalls unter gegebenen Winkeln gegen einander geneigte gerade Linien (1_1), (2_1), (3_1) so legen, dass das durch die Durchschnittspunkte der Linien (1) und (1_1), der Linien (2) und (2_1), und der Linien (3) und (3_1) bestimmte Dreieck einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist.

Wir möchten uns wohl erlauben, dieses Problem den Lesern des Archivs zur weiteren Untersuchung zu empfehlen, da dasselbe, so viel uns wenigstens bekannt ist, sonst noch keine Behandlung gefunden hat.

---

*) Die Grössen $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$; $\mathfrak{X}'_1$, $\mathfrak{Y}'_1$; $\mathfrak{X}'_2$, $\mathfrak{Y}'_2$ und r, r_1, r_2 sind aus dem Vorhergehenden bekannt.

VIII.

Ueber die höhern Differentialquotienten der Functionen

$$P=\frac{\sin x}{1+2y\cos x+y^2},\quad Q=\frac{y+\cos x}{1+2y\cos x+y^2}$$

in Bezug auf x als veränderliche Grösse.

Nach Theoremata nova de integralibus definitis, summatione serierum earumque in alias series transformatione. Auctore C. J. Malmsten, Phil. Mag. ad Reg Acad. Upsal. Math. infer. Doc. Upsaliae. MDCCCXLII. p. 26—35 frei bearbeitet von

dem Herausgeber.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass die Lehre von den höhern Differentialquotienten zu noch manchen interessanten neuen Untersuchungen Gelegenheit darbieten kann, und es ist nach unserer Ueberzeugung jedenfalls sehr wünschenswerth, dass man sich noch mehr als bisher geschehen ist mit der Entwickelung allgemeiner Ausdrücke für die höhern Differentialquotienten der Functionen beschäftige, da ja dieselben bekanntlich für die Entwickelung der Functionen in Reihen, für die Theorie der bestimmten Integrale und für viele andere Untersuchungen von sehr grosser Wichtigkeit sind. Ein schönes Beispiel einer solchen Untersuchung über höhere Differentialquotienten hat neuerlichst Herr C. J. Malmsten zu Upsala in der oben genannten, noch viele andere bemerkenswerthe Resultate enthaltenden Abhandlung gegeben, und wir glauben, um so mehr, weil diese Abhandlung wohl schwerlich in die Hände vieler deutschen Mathematiker gelangen wird, den Lesern des Archivs einen Dienst zu leisten, wenn wir ihnen die in Rede stehende Untersuchung des Herrn C. J. Malmsten ihrem wesentlichen Inhalte nach im Folgenden mittheilen.

Die beiden gegebenen Functionen sind

$$P=\frac{\sin x}{1+2y\cos x+y^2},$$

$$Q=\frac{y+\cos x}{1+2y\cos x+y^2};$$

und die Aufgabe ist, allgemeine Ausdrücke für die höhern Differentialquotienten dieser beiden Functionen zu finden, wenn man in ihnen x als veränderliche Grösse, y dagegen als constant betrachtet.

Wenn das Symbol e seine gewöhnliche Bedeutung hat und der Kürze wegen i für $\sqrt{-1}$ geschrieben wird, so setzen wir im Folgenden

$$U_0 = (1 + ye^{-ix})^{-1} = e^{ix}(y + e^{ix})^{-1},$$
$$V_0 = (1 + ye^{ix})^{-1} = e^{-ix}(y + e^{-ix})^{-1}$$

und

$$U_r = \frac{d^r U_0}{dx^r}, \quad V_r = \frac{d^r V_0}{dx^r}.$$

Aus den beiden obigen Ausdrücken von U_0 und V_0 erhält man durch ganz elementare Rechnungen

$$U_0 V_0 = \{1 + y(e^{ix} + e^{-ix}) + y^2\}^{-1},$$
$$U_0 - V_0 = \frac{y(e^{ix} - e^{-ix})}{1 + y(e^{ix} + e^{-ix}) + y^2},$$
$$U_0 + V_0 = \frac{2 + y(e^{ix} + e^{-ix})}{1 + y(e^{ix} + e^{-ix}) + y^2}.$$

Weil nun bekanntlich

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};$$

also

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x, \quad e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$$

ist; so ist

$$U_0 V_0 = (1 + 2y \cos x + y^2)^{-1},$$
$$U_0 - V_0 = \frac{2iy \sin x}{1 + 2y \cos x + y^2},$$
$$U_0 + V_0 = \frac{2 + 2y \cos x}{1 + 2y \cos x + y^2};$$

oder

$$\frac{U_0 - V_0}{2i} = yP,$$
$$\frac{U_0 + V_0}{2} = \frac{1 + y \cos x}{1 + 2y \cos x + y^2}.$$

Durch Differentiation von U_0 und V_0 nach x erhält man ohne Schwierigkeit

$$U_1 = \frac{dU_0}{dx} = \frac{iye^{-ix}}{(1 + ye^{-ix})^2},$$
$$V_1 = \frac{dV_0}{dx} = -\frac{iye^{ix}}{(1 + ye^{ix})^2};$$

also, wie man durch leichte Rechnung findet,

$$U_1+V_1=-\frac{iy(1-y^2)\,(e^{ix}-e^{-ix})}{\{1+y(e^{ix}+e^{-ix})+y^2\}^2},$$

oder nach dem Obigen

$$\frac{U_1+V_1}{2}=\frac{y(1-y^2)\sin x}{(1+2y\cos x+y^2)^2}.$$

Differentiirt man ferner die Function Q nach x, so erhält man

$$\frac{dQ}{dx}=-\frac{(1-y^2)\sin x}{(1+2y\cos x+y^2)^2},$$

und nach dem Vorhergehenden ist folglich

$$\frac{U_1+V_1}{2}=-y\frac{dQ}{dx}.$$

Daher haben wir jetzt die beiden folgenden Relationen

$$1)\ \ldots\ \frac{U_1+V_1}{2}=-y\frac{dQ}{dx},\quad \frac{U_0-V_0}{2i}=yP;$$

aus denen sich durch fortgesetzte Differentiation, unter Anwendung der oben eingeführten Bezeichnung, unmittelbar die beiden folgenden Relationen ergeben:

$$2)\ \ldots\ \frac{U_r+V_r}{2}=-y\frac{d^rQ}{dx^r},\quad \frac{U_r-V_r}{2i}=y\frac{d^rP}{dx^r},$$

deren erste, wie aus dem Obigen hervorgeht, für $r=0$ nicht, sondern bloss für $r>0$, die zweite dagegen für $r\geqq 0$ gilt.

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, dass es, um $\frac{d^rP}{dx^r}$ und $\frac{d^rQ}{dx^r}$ zu finden, darauf ankommt, U_r und V_r zu finden. Weil aber V_0 aus U_0 erhalten wird, wenn man in der letztern Grösse $-x$ für x setzt, so geht offenbar $U_r=\frac{d^rU_0}{dx^r}$, wenn man darin $-x$ für x setzt, in

$$\frac{d^rV_0}{(d(-x))^r}=\frac{d^rV_0}{(-1)^r dx^r},$$

d. i. in

$$(-1)^r\frac{d^rV_0}{dx^r}=(-1)^rV_r$$

über, und es wird also jetzt bloss darauf ankommen, die Grösse U_r zu finden, aus welcher sich dann V_r durch die in Rede stehende Substitution leicht herleiten lassen wird.

Nach dem Obigen ist

$$U_1=\frac{iye^{-ix}}{(1+ye^{-ix})^2},$$

und wegen der Gleichung

$$U_0=(1+ye^{-ix})^{-1}$$

ist

$$1+ye^{-ix}=\frac{1}{U_0},\quad ye^{-ix}=\frac{1-U_0}{U_0},$$

woraus sich leicht

$$U_1 = i\ U_0(1 - U_0) = i(U_0 - U_0^2)$$

ergiebt. Weil nun überhaupt

$$U_{r+1} = \frac{dU_r}{dx}$$

ist, so erhält man leicht nach und nach

$$U_0 = U_0,$$

$$\frac{U_1}{i} = U_0 - U_0^2,$$

$$\frac{U_2}{i^2} = U_0 - 3U_0^2 + 2U_0^3,$$

$$\frac{U_3}{i^3} = U_0 - 7U_0^2 + 12U_0^3 - 6U_0^4,$$

u. s. w.

Bezeichnet man also überhaupt den numerischen Coefficienten von U_0^k in der Entwickelung von $\frac{U_r}{i^r}$ nach den Potenzen von U_0 durch das Symbol $\overset{(r,\,k)}{a}$; so ist nach dem Vorhergehenden offenbar

$$3) \ldots \frac{U_r}{i^r} = \sum_{k=1}^{k=r+1}(-1)^{k-1}\overset{(r,\,k)}{a}\,U_0^k,$$

folglich, wie sogleich in die Augen fallen wird,

$$4) \ldots \frac{U_{r+1}}{i^{r+1}} = \sum_{k=0}^{k=r+1}(-1)^k\overset{(r+1,\,k+1)}{a}\,U_0^{k+1}.$$

Differentiirt man die Gleichung 3), natürlich in Bezug auf x als veränderliche Grösse, so erhält man mit Hülfe der aus dem Obigen bekannten Gleichung

$$U_1 = i(U_0 - U_0^2)$$

ohne Schwierigkeit

$$\frac{U_{r+1}}{i^{r+1}} = \overset{(r,\,1)}{a}\,U_0$$

$$- \{2\overset{(r,\,2)}{a} + \overset{(r,\,1)}{a}\}U_0^2$$

$$+ \{3\overset{(r,\,3)}{a} + 2\overset{(r,\,2)}{a}\}U_0^3$$

$$- \{4\overset{(r,\,4)}{a} + 3\overset{(r,\,3)}{a}\}U_0^4$$

u. s. w.

$$+ (-1)^r\{(r+1)\overset{(r,\,r+1)}{a} + r\overset{(r,\,r)}{a}\}U_0^{r+1}$$

$$+ (-1)^{r+1}(r+1)\overset{(r,\,r+1)}{a}\,U_0^{r+2}.$$

Vergleicht man dies mit der Gleichung 4), nämlich mit der Gleichung

$$\frac{U_{r+1}}{i^{r+1}} = {}^{(r+1,\,1)}\mathfrak{a}\; U_0$$
$$- {}^{(r+1,\,2)}\mathfrak{a}\; U_0^{\,2}$$
$$+ {}^{(r+1,\,3)}\mathfrak{a}\; U_0^{\,3}$$
$$- {}^{(r+1,\,4)}\mathfrak{a}\; U_0^{\,4}$$

u. s. w.

$$+ (-1)^r\, {}^{(r+1,\,r+1)}\mathfrak{a}\; U_0^{\,r+1}$$
$$+ (-1)^{r+1}\, {}^{(r+1,\,r+2)}\mathfrak{a}\; U_0^{\,r+2};$$

so erhält man zwischen den numerischen Coefficienten von $\frac{U_r}{i^r}$ und $\frac{U_{r+1}}{i^{r+1}}$ die folgenden Gleichungen:

$${}^{(r+1,\,1)}\mathfrak{a} = {}^{(r,\,1)}\mathfrak{a},$$
$${}^{(r+1,\,2)}\mathfrak{a} = 2\,{}^{(r,\,2)}\mathfrak{a} + {}^{(r,\,1)}\mathfrak{a},$$
$${}^{(r+1,\,3)}\mathfrak{a} = 3\,{}^{(r,\,3)}\mathfrak{a} + 2\,{}^{(r,\,2)}\mathfrak{a},$$
$${}^{(r+1,\,4)}\mathfrak{a} = 4\,{}^{(r,\,4)}\mathfrak{a} + 3\,{}^{(r,\,3)}\mathfrak{a},$$

u. s. w.

$${}^{(r+1,\,r+1)}\mathfrak{a} = (r+1)\,{}^{(r,\,r+1)}\mathfrak{a} + r\,{}^{(r,\,r)}\mathfrak{a},$$
$${}^{(r+1,\,r+2)}\mathfrak{a} = (r+1)\,{}^{(r,\,r+1)}\mathfrak{a}.$$

Berücksichtigt man, dass in der Reihe

$${}^{(r,\,1)}\mathfrak{a},\quad {}^{(r,\,2)}\mathfrak{a},\quad {}^{(r,\,3)}\mathfrak{a},\quad {}^{(r,\,4)}\mathfrak{a},\ \text{u. s. w.}$$

alle Glieder von dem Gliede ${}^{(r,\,r+2)}\mathfrak{a}$ an verschwinden, so kann man in völliger Allgemeinheit

$$5)\ \ldots\quad {}^{(r+1,\,k)}\mathfrak{a} = k\,{}^{(r,\,k)}\mathfrak{a} + (k-1)\,{}^{(r,\,k-1)}\mathfrak{a}$$

setzen.

Mittelst dieser Gleichung kann man nun mit Hülfe der bekannten Bernoulli'schen Schlussart und einiger einfachen Sätze von den Binomial-Coefficienten sehr leicht zeigen, dass allgemein

$$6)\ \ldots\, {}^{(r,\,k)}\mathfrak{a} = k^r - \frac{k-1}{1}(k-1)^r$$
$$+ \frac{(k-1)\,(k-2)}{1\,.\,2}(k-2)^r$$
$$- \frac{(k-1)\,(k-2)\,(k-3)}{1\,.\,2\,.\,3}(k-3)^r$$

u. s. w.

$$+(-1)^{k-1}\cdot\frac{(k-1)\,(k-2)\ldots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k-1)}\cdot 1^r$$

oder, in der bekannten Bezeichnung der Binomial-Coefficienten,

$$7)\quad \ldots {}^{(r,\,k)}a = k^r-(k-1)_1\,(k-1)^r+(k-1)_2\,(k-2)^r-(k-1)_3\,(k-3)^r+\ldots$$
$$\ldots\ldots+(-1)^{k-1}\,(k-1)_{k-1}\cdot 1^r$$

ist, welches weitläufiger aus einander zu setzen hier unnöthig ist, und die Grösse $\frac{U_r}{i^r}$ ist also jetzt als mittelst des Ausdrucks 3) vollständig entwickelt zu betrachten.

Setzt man in der Gleichung 3) statt x die Grösse $-x$, so geht dieselbe nach dem Obigen in

$$\frac{(-1)^r V_r}{i^r} = \sum_{k=1}^{k=r+1}(-1)^{k-1}\,{}^{(r,\,k)}a\,V_0{}^k$$

oder in die Gleichung

$$8)\quad \ldots \frac{V_r}{i^r} = (-1)^r \sum_{k=1}^{k=r+1}(-1)^{k-1}\,{}^{(r,\,k)}a\,V_0{}^k$$

über, wodurch nun also auch $\frac{V_r}{i^r}$ gefunden ist.

Aus den Gleichungen 3) und 8) ergiebt sich durch Addition und Subtraction

$$9)\quad \begin{cases} \frac{U_r+V_r}{i^r} = \sum_{k=1}^{k=r+1}(-1)^{k-1}\,{}^{(r,\,k)}a\,\{U_0{}^k+(-1)^r V_0{}^k\}, \\ \frac{U_r-V_r}{i^r} = \sum_{k=1}^{k=r+1}(-1)^{k-1}\,{}^{(r,\,k)}a\,\{U_0{}^k-(-1)^r V_0{}^k\}. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln und aus 2) erhält man nun leicht die folgenden Ausdrücke:

$$10)\quad \begin{cases} y\frac{d^{2n+1}P}{dx^{2n+1}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}\,{}^{(2n+1,\,k)}a\,\frac{U_0{}^k+V_0{}^k}{2}, \\ y\frac{d^{2n}P}{dx^{2n}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\,{}^{(2n,\,k)}a\,\frac{U_0{}^k-V_0{}^k}{2i}, \\ y\frac{d^{2n+1}Q}{dx^{2n+1}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}\,{}^{(2n+1,\,k)}a\,\frac{U_0{}^k-V_0{}^k}{2i}, \\ y\frac{d^{2n}Q}{dx^{2n}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\,{}^{(2n,\,k)}a\,\frac{U_0{}^k+V_0{}^k}{2}. \end{cases}$$

Setzen wir jetzt in U_0 und V_0

$$1+y\cos x=\mu\cos\varphi,\quad y\sin x=\mu\sin\varphi;$$

so erhalten wir

$$\varphi=\text{Arctang}\,\frac{y\sin x}{1+y\cos x},\quad \mu=\sqrt{1+2y\cos x+y^2},$$

wobei man jedoch zu bemerken hat, dass man den Bogen

$$\text{Arctang}\,\frac{y\sin x}{1+y\cos x},$$

insofern nämlich die Grösse μ immer positiv sein soll, so nehmen muss, dass er sich, jenachdem von den Grössen $1+y\cos x$ und $y\sin x$ die erste positiv und auch die zweite positiv, die erste negativ und die zweite positiv, die erste negativ und auch die zweite negativ, die erste positiv und die zweite negativ ist, respective im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten endigt, welche Bedingung sich auch leicht analytisch ausdrücken lassen würde, wobei wir uns jedoch jetzt nicht aufhalten wollen.

Weil nun nach dem Obigen

$$U_0=(1+ye^{-ix})^{-1},\quad V_0=(1+ye^{ix})^{-1},$$

also

$$U_0^k=(1+ye^{-ix})^{-k},\quad V_0^k=(1+ye^{ix})^{-k};$$

und

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},$$

also

$$e^{\pm ix}=\cos x\pm i\sin x$$

ist; so ist

$$U_0^k=\{1+y(\cos x-i\sin x)\}^{-k},$$
$$V_0^k=\{1+y(\cos x+i\sin x)\}^{-k}$$

oder

$$U_0^k=(1+y\cos x-iy\sin x)^{-k},$$
$$V_0^k=(1+y\cos x+iy\sin x)^{-k};$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$U_0^k=\mu^{-k}(\cos\varphi-i\sin\varphi)^{-k},$$
$$V_0^k=\mu^{-k}(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-k};$$

folglich nach den Moivre'schen Formeln:

$$U_0^k=\mu^{-k}(\cos k\varphi+i\sin k\varphi),$$
$$V_0^k=\mu^{-k}(\cos k\varphi-i\sin k\varphi);$$

also

$$\frac{U_0^k+V_0^k}{2}=\frac{\cos k\varphi}{\mu^k},$$
$$\frac{U_0^k-V_0^k}{2i}=\frac{\sin k\varphi}{\mu^k};$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\frac{U_0^k+V_0^k}{2}=\frac{\cos k\,\text{Arctang}\,\frac{y\sin x}{1+y\cos x}}{(1+2y\cos x+y^2)^{\frac{k}{2}}},$$

$$\frac{U_0{}^k - V_0{}^k}{2i} = \frac{\sin k \operatorname{Arctang} \frac{y \sin x}{1+y\cos x}}{(1+2y\cos x+y^2)^{\frac{k}{2}}}.$$

Führt man dies in die Formeln 10) ein, so erhält man:

$$11)\begin{cases} \frac{d^{2n+1}P}{dx^{2n+1}} = \frac{(-1)^n}{y}\sum_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}\frac{\mathfrak{a}^{(2n+1,\,k)}\cos k \operatorname{Arctang}\frac{y\sin x}{1+y\cos x}}{(1+2y\cos x+y^2)^{\frac{k}{2}}}, \\ \frac{d^{2n}P}{dx^{2n}} = \frac{(-1)^n}{y}\sum_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\frac{\mathfrak{a}^{(2n,\,k)}\sin k \operatorname{Arctang}\frac{y\sin x}{1+y\cos x}}{(1+2y\cos x+y^2)^{\frac{k}{2}}}, \\ \frac{d^{2n+1}Q}{dx^{2n+1}} = \frac{(-1)^n}{y}\sum_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}\frac{\mathfrak{a}^{(2n+1,\,k)}\sin k \operatorname{Arctang}\frac{y\sin x}{1+y\cos x}}{(1+2y\cos x+y^2)^{\frac{k}{2}}}, \\ \frac{d^{2n}Q}{dx^{2n}} = \frac{(-1)^n}{y}\sum_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\frac{\mathfrak{a}^{(2n,\,k)}\cos k \operatorname{Arctang}\frac{y\sin x}{1+y\cos x}}{(1+2y\cos x+y^2)^{\frac{k}{2}}}. \end{cases}$$

Aus der ersten und vierten der vorhergehenden Gleichungen folgt, wenn man dieselben auf beiden Seiten mit y multiplicirt, und dann $y=0$ setzt, unmittelbar:

$$12)\begin{cases} \sum_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}\,\mathfrak{a}^{(2n+1,\,k)} = 0, \\ \sum_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\,\mathfrak{a}^{(2n,\,k)} = 0. \end{cases}$$

Die Differentialquotienten von

$$\sin k \operatorname{Arctang}\frac{y\sin x}{1+y\cos x} \text{ und } y(1+2y\cos x+y^2)^{\frac{k}{2}}$$

in Bezug auf y als veränderliche Grösse sind, wie man leicht findet, respective

$$\frac{k\sin x}{1+2y\cos x+y^2}\cos k \operatorname{Arctang}\frac{y\sin x}{1+y\cos x}$$

und

$$(1+2y\cos x+y^2)^{\frac{k}{2}} + ky(y+\cos x)(1+2y\cos x+y^2)^{\frac{k}{2}-1}.$$

Nimmt man hierzu, dass für $y=0$

$$\frac{d^{2n}P}{dx^{2n}} = \frac{d^{2n}\sin x}{dx^{2n}} = (-1)^n \sin x,$$

$$\frac{d^{2n+1}Q}{dx^{2n+1}} = \frac{d^{2n+1}\cos x}{dx^{2n+1}} = (-1)^{n+1}\sin x$$

ist; so ergiebt sich nach bekannten Sätzen der Differentialrechnung aus der zweiten und dritten der Gleichungen 11) leicht, dass

$$13)\begin{cases}\sum_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}k\,{}^{(2n,\,k)}_{\mathfrak{a}} = 1,\\ \sum_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}k\,{}^{(2n+1,\,k)}_{\mathfrak{a}} = -1\end{cases}$$

ist.

Aus den aus dem Obigen bekannten Relationen

$${}^{(r+1,\,1)}_{\mathfrak{a}} = {}^{(r,\,1)}_{\mathfrak{a}} \text{ und } {}^{(r+1,\,r+2)}_{\mathfrak{a}} = (r+1)\,{}^{(r,\,r+1)}_{\mathfrak{a}}$$

ergiebt sich leicht

$$14)\ \ldots\ {}^{(r,\,1)}_{\mathfrak{a}} = 1 \text{ und } {}^{(r,\,r+1)}_{\mathfrak{a}} = 1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,r = \Gamma(r+1)\ ^{*}).$$

Für $y=1$ ist

$$P = \tfrac{1}{2}\text{tang}\,\tfrac{1}{2}x,\quad Q = \tfrac{1}{2}.$$

Also ist nach der ersten und zweiten der Gleichungen 11), wenn man in denselben $y=1$ setzt,

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{d^{2n+1}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}x}{dx^{2n+1}} = (-1)^n\sum_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}\,\frac{{}^{(2n+1,\,k)}_{\mathfrak{a}}\ \cos k\ \text{Arctangtang}\,\frac{1}{2}x}{2^k\cos\frac{1}{2}x^k},$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{d^{2n}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}x}{dx^{2n}} = (-1)^n\sum_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\,\frac{{}^{(2n,\,k)}_{\mathfrak{a}}\ \sin k\ \text{Arctangtang}\,\frac{1}{2}x}{2^k\cos\frac{1}{2}x^k}$$

oder

$$\frac{d^{2n+1}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}x}{dx^{2n+1}} = (-1)^n\,.\,2\sum_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}\,\frac{{}^{(2n+1,\,k)}_{\mathfrak{a}}\ \cos k\ \text{Arctangtang}\,\frac{1}{2}x}{2^k\cos\frac{1}{2}x^k},$$

$$\frac{d^{2n}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}x}{dx^{2n}} = (-1)^n\,.\,2\sum_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\,\frac{{}^{(2n,\,k)}_{\mathfrak{a}}\ \sin k\ \text{Arctangtang}\,\frac{1}{2}x}{2^k\cos\frac{1}{2}x^k};$$

wo nach dem Obigen, weil $1+\cos x = 2\cos\frac{1}{2}x^2$ immer positiv ist, der Bogen Arctangtang $\frac{1}{2}x$ so genommen werden muss, dass er sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, jenachdem sin x positiv oder negativ ist.

Setzt man $2x$ für x, so erhält man

$$15)\begin{cases}\dfrac{d^{2n+1}\,\text{tang}\,x}{dx^{2n+1}} = (-1)^n\,.\,2^{2n+2}\sum_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}\,\dfrac{{}^{(2n+1,\,k)}_{\mathfrak{a}}\ \cos k\ \text{Arctangtang}\,x}{2^k\cos x^k},\\ \dfrac{d^{2n}\,\text{tang}\,x}{dx^{2n}} = (-1)^n\,.\,2^{2n+1}\sum_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\,\dfrac{{}^{(2n,\,k)}_{\mathfrak{a}}\ \sin k\ \text{Arctangtang}\,x}{2^k\cos x^k};\end{cases}$$

wo der Bogen Arctangtang x so genommen werden muss, dass

---

*) Thl. II. S. 304.

er sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, jenachdem sin $2x$ positiv oder negativ ist.

Ist der absolute Werth von x nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$, so ist offenbar immer sin $2x$ positiv oder negativ, jenachdem x positiv oder negativ ist, oder sin $2x$ hat mit sin x immer einerlei Vorzeichen, und in diesem Falle kann man also, wie sogleich in die Augen fallen wird, immer Arctang tang $x = x$, folglich nach 15)

$$16)\begin{cases} \frac{d^{2n+1}\,\text{tang}\,x}{dx^{2n+1}} = (-1)^n \cdot 2^{2n+2} \sum_{k=1}^{k=2n+2} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n+1,\,k)}{\mathfrak{a}}\cos kx}{2^k \cos x^k} \\ \frac{d^{2n}\,\text{tang}\,x}{dx^{2n}} = (-1)^n \cdot 2^{2n+1} \sum_{k=1}^{k=2n+1} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n,\,k)}{\mathfrak{a}}\sin kx}{2^k \cos x^k} \end{cases}$$

setzen.

Für $y = -1$ ist

$$P = \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}x, \quad Q = -\tfrac{1}{2}.$$

Also ist wieder nach der ersten und zweiten der Gleichungen 11), wenn man $y = -1$ setzt,

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{d^{2n+1}\cot\frac{1}{2}x}{dx^{2n+1}} = -(-1)^n \sum_{k=1}^{k=2n+2} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n+1,\,k)}{\mathfrak{a}}\cos k\,\text{Arctang}\,(-\cot\frac{1}{2}x)}{2^k \sin\frac{1}{2}x^k},$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{d^{2n}\cot\frac{1}{2}x}{dx^{2n}} = -(-1)^n \sum_{k=1}^{k=2n+1} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n,\,k)}{\mathfrak{a}}\sin k\,\text{Arctang}\,(-\cot\frac{1}{2}x)}{2^k \sin\frac{1}{2}x^k}$$

oder

$$\frac{d^{2n+1}\cot\frac{1}{2}x}{dx^{2n+1}} = -(-1)^n \cdot 2\sum_{k=1}^{k=2n+2} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n+1,\,k)}{\mathfrak{a}}\cos k\,\text{Arctang}\,(-\cot\frac{1}{2}x)}{2^k \sin\frac{1}{2}x^k},$$

$$\frac{d^{2n}\cot\frac{1}{2}x}{dx^{2n}} = -(-1)^n \cdot 2\sum_{k=1}^{k=2n+1} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n,\,k)}{\mathfrak{a}}\sin k\,\text{Arctang}\,(-\cot\frac{1}{2}x)}{2^k \sin\frac{1}{2}x^k};$$

wo nach dem Obigen, weil $1 - \cos x = 2\sin\frac{1}{2}x^2$ immer positiv ist, der Bogen Arctang $(-\cot\frac{1}{2}x)$ so zu nehmen ist, dass er sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, jenachdem $-\sin x$ positiv oder negativ, d. i. jenachdem sin x negativ oder positiv ist. Offenbar kann man aber auch

$$\frac{d^{2n+1}\cot\frac{1}{2}x}{dx^{2n+1}} = -(-1)^n \cdot 2\sum_{k=1}^{k=2n+2} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n+1,\,k)}{\mathfrak{a}}\cos k\,\text{Arctangcot}\,\frac{1}{2}x}{2^k \sin\frac{1}{2}x^k},$$

$$\frac{d^{2n}\cot\frac{1}{2}x}{dx^{2n}} = (-1)^n \cdot 2\sum_{k=1}^{k=2n+1} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n,\,k)}{\mathfrak{a}}\sin k\,\text{Arctangcot}\,\frac{1}{2}x}{2^k \sin\frac{1}{2}x^k}$$

setzen, wo nun der Bogen Arctang cot $\frac{1}{2}x$ so genommen werden muss, dass er sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, jenachdem sin x positiv oder negativ ist.

Setzt man $2x$ für x, so erhält man

$$17)\begin{cases}\dfrac{d^{2n+1}\cot x}{dx^{2n+1}} \\ \qquad = -(-1)^n \cdot 2^{2n+2} \sum_{k=1}^{k=2n+2} (-1)^{k-1} \dfrac{\overset{(2n+1,\,k)}{a} \cos k \operatorname{Arctangcot} x}{2^k \sin x^k}, \\ \dfrac{d^{2n}\cot x}{dx^{2n}} \\ \qquad = (-1)^n \cdot 2^{2n+1} \sum_{k=1}^{k=2n+1} (-1)^{k-1} \dfrac{\overset{(2n,\,k)}{a} \sin k \operatorname{Arctangcot} x}{2^k \sin x^k}; \end{cases}$$

wo der Bogen Arctang cot x so genommen werden muss, dass er sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, jenachdem sin $2x$ positiv oder negativ ist.

Wenn x positiv und nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist, so ist offenbar sin $2x$ positiv, und man kann also, wie sogleich in die Augen fällt, unter dieser Voraussetzung immer Arctang cot $x = \frac{1}{2}\pi - x$, also

$$18)\begin{cases}\dfrac{d^{2n+1}\cot x}{dx^{2n+1}} = -(-1)^n \cdot 2^{2n+2} \sum_{k=1}^{k=2n+2} (-1)^{k-1} \dfrac{\overset{(2n+1,\,k)}{a} \cos k(\frac{1}{2}\pi - x)}{2^k \sin x^k}, \\ \dfrac{d^{2n}\cot x}{dx^{2n}} = (-1)^n \cdot 2^{2n+1} \sum_{k=1}^{k=2n+1} (-1)^{k-1} \dfrac{\overset{(2n,\,k)}{a} \sin k(\frac{1}{2}\pi - x)}{2^k \sin x^k} \end{cases}$$

setzen, weil unter der gemachten Voraussetzung der Bogen $\frac{1}{2}\pi - x$ sich im ersten Quadranten endigt, wie es erforderlich ist.

Aus der dritten und vierten der Gleichungen 11) erhält man für $y = 1$

$$\sum_{k=1}^{k=2n+2} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n+1,\,k)}{a} \sin k \operatorname{Arctangtang} \frac{1}{2}x}{2^k \cos \frac{1}{2}x^k} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{k=2n+1} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n,\,k)}{a} \cos k \operatorname{Arctangtang} \frac{1}{2}x}{2^k \cos \frac{1}{2}x^k} = 0,$$

wo der Bogen Arctang tang $\frac{1}{2}x$ so zu nehmen ist, dass er sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, jenachdem sin x positiv oder negativ ist; oder, wenn man $2x$ für x setzt,

$$19)\begin{cases} \sum_{k=1}^{k=2n+2} (-1)^{k-1} \dfrac{\overset{(2n+1,\,k)}{a} \sin k \operatorname{Arctangtang} x}{2^k \cos x^k} = 0, \\ \sum_{k=1}^{k=2n+1} (-1)^{k-1} \dfrac{\overset{(2n,\,k)}{a} \cos k \operatorname{Arctangtang} x}{2^k \cos x^k} = 0; \end{cases}$$

wo der Bogen Arctangtang x so genommen werden muss, dass er sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, jenachdem sin $2x$ positiv oder negativ ist.

Wenn der absolute Werth von x nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist, so kann Arctangtang $x = x$ gesetzt werden, und es ist folglich unter dieser Voraussetzung

$$20)\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}\dfrac{\mathfrak{a}^{(2n+1,\,k)}\sin kx}{2^k\cos x^k}=0,\\ \sum\limits_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\dfrac{\mathfrak{a}^{(2n,\,k)}\cos kx}{2^k\cos x^k}=0.\end{cases}$$

Für $x=0$ giebt die zweite dieser Gleichungen

$$20^*)\ldots\sum_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\frac{\mathfrak{a}^{(2n,\,k)}}{2^k}=0.$$

Aus denselben Gleichungen erhält man für $y=-1$

$$\sum_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}\frac{\mathfrak{a}^{(2n+1,\,k)}\sin k\,\text{Arctang}\,(-\cot\frac{1}{2}x)}{2^k\sin\frac{1}{2}x^k}=0,$$

$$\sum_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\frac{\mathfrak{a}^{(2n,\,k)}\cos k\,\text{Arctang}\,(-\cot\frac{1}{2}x)}{2^k\sin\frac{1}{2}x^k}=0,$$

wo der Bogen Arctang $(-\cot\frac{1}{2}x)$ so genommen werden muss, dass er sich im ersten oder vierten Quadanten endigt, jenachdem $-\sin x$ positiv oder negativ, d. i. jenachdem sin x negativ oder positiv ist. Offenbar kann man aber auch

$$\sum_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}\frac{\mathfrak{a}^{(2n+1,\,k)}\sin k\,\text{Arctang}\cot\frac{1}{2}x}{2^k\sin\frac{1}{2}x^k}=0,$$

$$\sum_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\frac{\mathfrak{a}^{(2n,\,k)}\cos k\,\text{Arctang}\cot\frac{1}{2}x}{2^k\sin\frac{1}{2}x^k}=0$$

setzen, wo der Bogen Arctang cot $\frac{1}{2}x$ so genommen werden muss, dass er sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, jenachdem sin x positiv oder negativ ist.

Folglich ist

$$21)\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}\dfrac{\mathfrak{a}^{(2n+1,\,k)}\sin k\,\text{Arctang}\cot x}{2^k\sin x^k}=0,\\ \sum\limits_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\dfrac{\mathfrak{a}^{(2n,\,k)}\cos k\,\text{Arctang}\cot x}{2^k\sin x^k}=0,\end{cases}$$

wo der Bogen Arctangcot x so genommen werden muss, dass er sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, jenachdem sin $2x$ positiv oder negativ ist.

Wenn x positiv und nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist, so kann man Arctangcot $x=\frac{1}{2}\pi-x$ setzen, und es ist also nach den vorhergehenden Formeln unter dieser Voraussetzung

$$22)\begin{cases} \sum_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}\frac{a^{(2n+1,\,k)}\sin k(\frac{1}{2}\pi-x)}{2^k\sin x^k}=0, \\ \sum_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\frac{a^{(2n,\,k)}\sin k(\frac{1}{2}\pi-x)}{2^k\sin x^k}=0. \end{cases}$$

Zwischen den Grössen

$$23)\begin{cases} M_r=\frac{yd(yd(yd(\ldots yd(yQ)}{dy^r}, \\ N_r=\frac{yd(yd(yd(\ldots yd(yP)}{dy^r} \end{cases}$$

und den Differentialquotienten $\frac{d^rP}{dx^r}$, $\frac{d^rQ}{dx^r}$ finden die folgenden merkwürdigen Relationen Statt:

$$24)\begin{cases} y\frac{d^{2n+1}P}{dx^{2n+1}}=(-1)^nM_{2n+1}, \\ y\frac{d^{2n+1}Q}{dx^{2n+1}}=(-1)^{n+1}N_{2n+1}; \\ y\frac{d^{2n}P}{dx^{2n}}=(-1)^nN_{2n}; \\ y\frac{d^{2n}Q}{dx^{2n}}=(-1)^nM_{2n}; \end{cases}$$

zu denen Herr Malmsten auf folgende Art gelangt.

Man setze

$$J_r=\frac{yd(yd(yd(\ldots yd(y(y+e^{-ix})^{-1})}{dy^r},$$

$$K_r=\frac{yd(yd(yd(\ldots yd(y(y+e^{ix})^{-1})}{dy^r}.$$

Weil nun

$$(y+e^{-ix})^{-1}+(y+e^{ix})^{-1}=\frac{2y+e^{ix}+e^{-ix}}{1+y(e^{ix}+e^{-ix})+y^2},$$

$$(y+e^{-ix})^{-1}-(y+e^{ix})^{-1}=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{1+y(e^{ix}+e^{-ix})+y^2};$$

d. i.

$$(y+e^{-ix})^{-1}+(y+e^{ix})^{-1}=\frac{2(y+\cos x)}{1+2y\cos x+y^2},$$

$$(y+e^{-ix})^{-1}-(y+e^{ix})^{-1}=\frac{2i\sin x}{1+2y\cos x+y^2}$$

oder nach dem Obigen

$$(y+e^{-ix})^{-1}+(y+e^{ix})^{-1}=2Q,$$
$$(y+e^{-ix})^{-1}-(y+e^{ix})^{-1}=2Pi$$

ist; so ist nach dem Vorhergehenden offenbar

$$25)\begin{cases} J_r + K_r = 2M_r, \\ J_r - K_r = 2iN_r. \end{cases}$$

Kann man also J_r und K_r finden, so kann man auch M_r und N_r entwickeln. Weil aber offenbar K_r aus J_r erhalten wird, wenn man in letzterer Grösse $-x$ für x setzt, so kommt es bloss darauf an, J_r zu finden, und mit der Entwickelung dieser Grösse wollen wir uns daher jetzt zunächst beschäftigen.

Zuvörderst leuchtet sogleich die Richtigkeit der folgenden Ausdrücke ein:

$$J_0 = y(y + e^{-ix})^{-1}, \; J_{r+1} = y\frac{dJ_r}{dy}.$$

Setzen wir aber

$$y + e^{-ix} = u, \; dy = du;$$

so wird, wie man leicht findet,

$$J_0 = 1 - \frac{e^{-ix}}{u}, \; J_{r+1} = (u - e^{-ix})\frac{dJ_r}{du};$$

und durch Anwendung dieser Relationen erhält man nun leicht:

$$J_0 = 1 - \frac{e^{-ix}}{u},$$

$$J_1 = \frac{e^{-ix}}{u} - \frac{e^{-2ix}}{u^2},$$

$$J_2 = -\frac{e^{-ix}}{u} + \frac{3e^{-2ix}}{u^2} - \frac{2e^{-3ix}}{u^3},$$

$$J_3 = \frac{e^{-ix}}{u} - \frac{7e^{-2ix}}{u^2} + \frac{12e^{-3ix}}{u^3} - \frac{6e^{-4ix}}{u^4},$$

u. s. w.

oder, wenn wir den numerischen Coefficienten von $\frac{e^{-kix}}{u^k}$ in J_r durch $\overset{(r,\,k)}{\mathfrak{c}}$ bezeichnen, allgemein:

$$26) \ldots J_r = (-1)^{r-1}\sum_{k=1}^{k=r+1}(-1)^{k-1}\overset{(r,\,k)}{\mathfrak{c}}\frac{e^{-kix}}{u^k}$$

Auf einem ganz ähnlichen Wege, wie wir oben zu der Gleichung 5) gelangten, gelangt man nun mittelst der vorhergehenden Gleichungen leicht zu der Gleichung

$$27) \ldots \overset{(r+1,\,k)}{\mathfrak{c}} = k\overset{(r,\,k)}{\mathfrak{c}} + (k-1)\overset{(r,\,k-1)}{\mathfrak{c}},$$

und schliesst hieraus, wenn man dies mit dem Obigen, insbesondere mit der Gleichung 5) vergleicht, unmittelbar, dass überhaupt

$$28) \ldots \overset{(r,\,k)}{\mathfrak{c}} = \overset{(r,\,k)}{\mathfrak{a}}$$

ist. Also ist nach 26)

$$29) \ldots J_r = (-1)^{r-1}\sum_{k=1}^{k=r+1}(-1)^{k-1}\overset{(r,\,k)}{\mathfrak{a}}\frac{e^{-kix}}{u^k},$$

oder, wenn man für ω wieder den Werth $y + e^{-ix}$ einführt,

$$30) \ldots J_r = (-1)^{r-1} \sum_{k=1}^{k=r+1} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(r,\,k)}{a}}{(1+ye^{ix})^k}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $-x$ für x, so erhält man

$$31) \ldots K_r = (-1)^{r-1} \sum_{k=1}^{k=r+1} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(r,\,k)}{a}}{(1+ye^{-ix})^k}.$$

Folglich ist nach 25)

$$2M_r = (-1)^{r-1} \sum_{k=1}^{k=r+1} (-1)^{k-1} \overset{(r,\,k)}{a} \{(1+ye^{ix})^{-k} + (1+ye^{-ix})^{-k}\},$$

$$2iN_r = (-1)^{r-1} \sum_{k=1}^{k=r+1} (-1)^{k-1} \overset{(r,\,k)}{a} \{(1+ye^{ix})^{-k} - (1+ye^{-ix})^{-k}\}.$$

Nach dem Obigen ist

$$(1+ye^{ix})^{-k} + (1+ye^{-ix})^{-k} = V_0^k + U_0^k = \frac{2\cos k\varphi}{\mu^k},$$

$$(1+ye^{ix})^{-k} - (1+ye^{-ix})^{-k} = V_0^k - U_0^k = -\frac{2i\sin k\varphi}{\mu^k};$$

und folglich, wenn man für φ und μ ihre aus dem Obigen bekannten Werthe einführt:

$$32) \begin{cases} M_r = (-1)^{r-1} \sum_{k=1}^{k=r+1} (-1)^{k-1} \dfrac{\overset{(r,\,k)}{a} \cos k \operatorname{Arctang} \dfrac{y\sin x}{1+y\cos x}}{(1+2y\cos x+y^2)^{\frac{k}{2}}}, \\ N_r = (-1)^{r} \sum_{k=1}^{k=r+1} (-1)^{k-1} \dfrac{\overset{(r,\,k)}{a} \sin k \operatorname{Arctang} \dfrac{y\sin x}{1+y\cos x}}{(1+2y\cos x+y^2)^{\frac{k}{2}}}; \end{cases}$$

wo wegen des Bogens

$$\operatorname{Arctang} \frac{y\sin x}{1+y\cos x}$$

die oben gegebenen Bestimmungen auch jetzt noch gelten.

Vergleicht man diese Formeln mit den Formeln 11), so erhält man die zu beweisenden Relationen 24).

Setzt man in den Formeln 32) die Grösse $y = 1$, und bezeichnet die diesem Werthe von y entsprechenden Werthe von M_r und N_r respective durch $M'_r(x)$ und $N'_r(x)$, so erhält man:

$$33) \begin{cases} M'_r(x) = (-1)^{r-1} \sum_{k=1}^{k=r+1} (-1)^{k-1} \dfrac{\overset{(r,\,k)}{a} \cos k \operatorname{Arctang tang} \frac{1}{2}x}{2^k \cos \frac{1}{2}x^k}, \\ N'_r(x) = (-1)^{r} \sum_{k=1}^{k=r+1} (-1)^{k-1} \dfrac{\overset{(r,\,k)}{a} \sin k \operatorname{Arctang tang} \frac{1}{2}x}{2^k \cos \frac{1}{2}x^k}. \end{cases}$$

Wenn der absolute Werth von x nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist, so kann man, wie aus dem Obigen geschlossen wird, immer Arctang tang $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$ setzen, und in diesem Falle ist also nach 33) jederzeit

$$34)\quad \begin{cases} M'_r(x) = (-1)^{r-1} \sum_{k=1}^{k=r+1} (-1)^{k-1} \frac{^{(r,k)}a \cos \frac{1}{2}kx}{2^k \cos \frac{1}{2}x^k}, \\ N'_r(x) = (-1)^r \sum_{k=1}^{k=r+1} (-1)^{k-1} \frac{^{(r,k)}a \sin \frac{1}{2}kx}{2^k \cos \frac{1}{2}x^k}. \end{cases}$$

Verbindet man hiermit die Formeln 20), so erhält man

$$35)\quad M'_{2n}(x) = 0,\quad N'_{2n+1}(x) = 0.$$

IX.

Ueber die Bestimmung des Flächeninhalts einer Kugelzone.

Von

dem Herausgeber.

Die folgende Entwickelung der bekannten Formel für den Flächeninhalt einer Kugelzone scheint mir durch ihre besondere Strenge und Evidenz empfehlenswerth zu sein.

Wenn O in Fig. 9. auf Taf. I. der Mittelpunkt der Kugel ist und AC, BD die Halbmesser der die Zone begränzenden Kugelkreise sind, so ziehe man AB, fälle von O auf AB das Perpendikel OE, von A auf BD das Perpendikel AG, und ziehe durch den Mittelpunkt E von AB mit AC und BD die Parallele EF. Weil nun die Winkel BAG und OEF offenbar einander gleich sind, so sind die rechtwinkligen Dreiecke BAG und OEF einander ähnlich, und wir haben also die Proportion

$$AB : AG = OE : EF,$$

oder, weil nach einem Satze, der hier füglich als bekannt vorausgesetzt werden kann,

$$EF = \frac{AC + BD}{2}$$

ist, die Proportion

$$AB : AG = OE : \frac{AC+BD}{2},$$

von welcher nachher mehrfacher Gebrauch gemacht werden wird.

Man bezeichne nun den Halbmesser der Kugel durch r, die sogenannte Höhe der Kugelzone durch h, und theile letztere in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, z. B. in n gleiche Theile. Durch alle Theilpunkte lege man Ebenen, welche mit den Ebenen der die Zone begränzenden Kreise parallel sind, und stelle sich die Seitenflächen der Kegel, deren Grundflächen die durch die in Rede stehenden Ebenen bestimmten Kugelkreise sind, in die Kugelzone beschrieben vor. Die Seiten dieser n Kegelflächen seien nach der Reihe

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots . s_n$$

und

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots . r_n$$

seien die auf diese Seiten von dem Mittelpunkte der Kugel gefällten Perpendikel. Die Halbmesser der Grundflächen der in Rede stehenden Kegel seien

$$\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots \varrho_n.$$

Nach einem bekannten Satze sind die Seitenflächen dieser Kegel nach der Reihe

$$\begin{gathered} s_1(\varrho+\varrho_1)\pi, \\ s_2(\varrho_1+\varrho_2)\pi, \\ s_3(\varrho_2+\varrho_3)\pi, \\ \text{u. s. w.} \\ s_n(\varrho_{n-1}+\varrho_n)\pi; \end{gathered}$$

und wenn wir nun

$$\begin{aligned} \Sigma = \quad & s_1(\varrho+\varrho_1)\pi \\ & + s_2(\varrho_1+\varrho_2)\pi \\ & + s_3(\varrho_2+\varrho_3)\pi \\ & \text{u. s. w.} \\ & + s_n(\varrho_{n-1}+\varrho_n)\pi \end{aligned}$$

setzen, den gesuchten Flächeninhalt der Kugelzone aber durch Z bezeichnen; so ist offenbar Z die Gränze, welcher sich Σ bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn n in's Unendliche wächst, wodurch also unsere Aufgabe auf die Bestimmung dieser Gränze zurückgeführt ist.

Nach der im Obigen bewiesenen Proportion ist nun

$$s_1 : \frac{h}{n} = r_1 : \frac{\varrho+\varrho_1}{2},$$

$$s_2 : \frac{h}{n} = r_2 : \frac{\varrho_1+\varrho_2}{2},$$

$$s_1 : \frac{h}{n} = r_1 : \frac{\varrho_2 + \varrho_1}{2},$$

u. s. w.

$$s_n : \frac{h}{n} = r_n : \frac{\varrho_{n-1} + \varrho_n}{2};$$

also

$$s_1(\varrho + \varrho_1) = \frac{2hr_1}{n},$$

$$s_2(\varrho_1 + \varrho_2) = \frac{2hr_2}{n},$$

$$s_3(\varrho_2 + \varrho_3) = \frac{2hr_3}{n},$$

u. s. w.

$$s_n(\varrho_{n-1} + \varrho_n) = \frac{2hr_n}{n};$$

und folglich nach dem Obigen

$$\Sigma = \frac{2h\pi}{n}(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + \ldots + r_n).$$

Lässt man n in's Unendliche wachsen, so nähern sich die Grössen $r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots r_n$ offenbar sämmtlich dem Halbmesser r der Kugel als ihrer Gränze bis zu jedem beliebigen Grade, und wenn wir folglich

$$r_1 = r - \delta_1,$$

$$r_2 = r - \delta_2,$$

$$r_3 = r - \delta_3,$$

u. s. w.

$$r_n = r - \delta_n,$$

also

$$\Sigma = \frac{2h\pi}{n}(nr - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - \ldots - \delta_n)$$

oder

$$\Sigma = 2hr\pi\left(1 - \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n}{nr}\right)$$

setzen, so nähern sich, wenn n in's Unendliche wächst, die Grössen $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_n$ sämmtlich der Null als ihrer Gränze bis zu jedem beliebigen Grade.

Wir wollen nun voraussetzen, dass der Mittelpunkt der Kugel nicht in der Höhe der Zone liege, so dass also letztere jedenfalls nicht grösser als die Halbkugel ist, und wollen, was offenbar verstattet ist, annehmen, dass die Halbmesser

$$\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots \varrho_n$$

nach ihrer Grösse aufsteigend geordnet seien, wobei unter der gemachten Voraussetzung zugleich erhellet, dass diese Halbmesser fortwährend wachsen. Bezeichnen wir nun durch q die Entfernung

des Halbmessers ϱ von dem höchsten Punkte der Halbkugel, in welcher die Zone liegt; so ist nach einer bekannten Eigenschaft des Kreises

$$\varrho^2 = q(2r - q),$$

$$\varrho_1^2 = (q + \frac{h}{n})\ (2r - q - \frac{h}{n}),$$

$$\varrho_2^2 = (q + \frac{2h}{n})\ (2r - q - \frac{2h}{n});$$

also, wie man leicht findet,

$$\varrho_1^2 - \varrho^2 = \frac{h}{n}(2r - 2q - \frac{h}{n}),$$

$$\varrho_2^2 - \varrho_1^2 = \frac{h}{n}(2r - 2q - \frac{3h}{n});$$

folglich

$$\varrho_2^2 - \varrho_1^2 < \varrho_1^2 - \varrho^2$$

oder

$$(\varrho_2 - \varrho_1)\ (\varrho_2 + \varrho_1) < (\varrho_1 - \varrho)\ (\varrho_1 + \varrho),$$

also

$$\varrho_2 - \varrho_1 < \frac{\varrho + \varrho_1}{\varrho_1 + \varrho_2}\ (\varrho_1 - \varrho).$$

Weil nun

$$\varrho < \varrho_1 < \varrho_2,$$

und folglich auch

$$\varrho + \varrho_1 < \varrho_1 + \varrho_2,$$

also

$$\frac{\varrho + \varrho_1}{\varrho_1 + \varrho_2} < 1$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\varrho_2 - \varrho_1 < \varrho_1 - \varrho.$$

Offenbar ist

$$s_1^2 = (\frac{h}{n})^2 + (\varrho_1 - \varrho)^2,\ s_2^2 = (\frac{h}{n})^2 + (\varrho_2 - \varrho_1)^2,$$

also $s_2^2 < s_1^2$, und folglich auch $\frac{1}{4}s_2^2 < \frac{1}{4}s_1^2$. Weil nun, wie sogleich erhellet,

$$\frac{1}{4}s_1^2 = r^2 - r_1^2,\ \frac{1}{4}s_2^2 = r^2 - r_2^2$$

ist, so ist

$$r^2 - r_2^2 < r^2 - r_1^2,$$

also $r_2^2 > r_1^2$, und folglich auch $r_2 > r_1$, woraus sich ferner

$$r - r_2 < r - r_1,$$

d. i. nach dem Obigen $\delta_2 < \delta_1$ oder $\delta_1 > \delta_2$ ergiebt, und ganz eben so ist nun überhaupt

Digitized by Google

$$\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \delta_4 \ldots > \delta_{n-1} > \delta_n;$$

folglich

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n < n\delta_1$$

oder

$$\frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n}{n} < \delta_1.$$

Wenn n in's Unendliche wächst, so nähert sich δ_1 bis zu jedem beliebigen Grade der Null als seiner Gränze, und dies gilt daher nach dem Vorhergehenden um so mehr von der Grösse

$$\frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n}{n}.$$

Lässt man also in der oben gefundenen Gleichung

$$\Sigma = 2hr\pi\left(1 - \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n}{nr}\right)$$

oder

$$\Sigma = 2hr\pi - 2h\pi\,\frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n}{n}$$

die Grösse n in's Unendliche wachsen, so nähert sich offenbar Σ der Grösse $2hr\pi$ als seiner Gränze bis zu jedem beliebigen Grade, und da nun nach dem Obigen diese Gränze der Inhalt Z der Kugelzone ist, so ist

$$Z = 2hr\pi.$$

Bis jetzt ist angenommen worden, dass der Mittelpunkt der Kugel nicht in der Höhe h der Kugelzone liegt. Liegt aber der Mittelpunkt der Kugel in der Höhe h, so wird letztere durch ersteren in zwei Theile h' und h'' getheilt, und es ist nun nach dem Vorhergehenden, wenn wir die diesen Höhen entsprechenden Kugelzonen durch Z' und Z'' bezeichnen,

$$Z' = 2h'r\pi, \quad Z'' = 2h''r\pi.$$

Weil nun $Z = Z' + Z''$ ist, so ist

$$Z = 2(h' + h'')r\pi,$$

und folglich, weil $h = h' + h''$ ist, wieder

$$Z = 2hr\pi,$$

so dass also diese Formel für jede Kugelzone gilt.

Will man den Inhalt K der ganzen Kugelfläche haben, so muss man in der vorhergehenden Formel $h = 2r$ setzen, wodurch sich

$$K = 4r^2\pi$$

ergiebt.

Dass für dieselbe Kugel Kugelzonen von gleicher Höhe gleiche Flächenräume haben, ergiebt sich aus der Formel $Z = 2hr\pi$ auf der Stelle. Ueberhaupt erhält man den Flächeninhalt einer jeden Kugelzone, wenn man die Peripherie eines grössten Kugelkreises mit der Höhe der Zone multiplicirt. Die ganze Kugelfläche ist vier Mal so gross als der Flächeninhalt eines grössten Kugelkreises.

X.

Ueber die Bestimmung des Schwerpunkts einer Kugelzone.

Von

dem Herausgeber.

Der folgende elementare Beweis eines bekannten Satzes der Statik scheint sich uns durch seine Strenge und Evidenz, und daher für elementare Vorträge der Statik zu empfehlen.

Lehrsatz. Der Schwerpunkt einer Kugelzone, worunter wir wie gewöhnlich jeden von zwei Kugelkreisen, deren Ebenen einander parallel sind, begränzten Theil der Oberfläche einer Kugel verstehen, liegt in der Mitte der die Mittelpunkte der beiden die Zone begränzenden Kreise verbindenden Axe der Zone.

Beweis. Man denke sich die Mittelpunkte der beiden die Zone begränzenden Kreise durch A und B, die Axe der Zone also durch AB bezeichnet, setze der Kürze wegen im Folgenden $AB = a$, theile die Axe AB in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, z. B. in n gleiche Theile, und lege durch jeden Theilpunkt eine auf der Axe AB senkrechte, also mit den Ebenen der die Zone begränzenden Kreise parallele Ebene; so theilen diese Ebenen die gegebene Zone in n Zonen von gleicher Höhe, die also nach einem bekannten Satze *) sämmtlich gleiche Flächenräume haben.

*) M. s. z. B. den vorhergehenden Aufsatz oder Elem. de Géom. par Legendre. Onz. éd. Livre VIII. Prop. XI.

Digitized by Google

Lässt man n in's Unendliche wachsen, so nähern sich diese Zonen sämmtlich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade den Peripherieen von Kreisen, deren Ebenen alle auf der Axe AB senkrecht stehen, und da nun die Schwerpunkte der Peripherieen aller dieser Kreise nach der Lehre vom Schwerpunkte in ihren Mittelpunkten, also sämmtlich in der Axe AB liegen; so muss offenbar nach der Lehre vom Schwerpunkte auch der gesuchte Schwerpunkt der gegebenen Zone in deren Axe AB liegen.

Um nun die Lage des Schwerpunkts der gegebenen Zone in der Axe AB zu bestimmen, bezeichne man dessen Entfernung von dem Punkte A durch x, und auf ähnliche Art seien

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ x_n$$

die Entfernungen der Schwerpunkte der n gleichen Zonen, in welche die gegebene Zone getheilt worden ist, von dem Punkte A nach der Ordnung dieser Zonen, von dem Punkte A an gerechnet. Dann ist, wenn wir den Flächeninhalt der gegebenen Zone durch Z, also den Flächeninhalt jeder der n gleichen Zonen, in welche die erstere getheilt worden ist, durch $\frac{Z}{n}$ bezeichnen, nach der Lehre vom Schwerpunkte

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)\frac{Z}{n} = xZ,$$

und folglich

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}.$$

Nun ist aber, wie aus der Lehre vom Schwerpunkte leicht erhellet, weil oben $AB = a$ gesetzt worden ist,

$$x_1 > 0,$$

$$x_2 > \frac{a}{n},$$

$$x_3 > \frac{2a}{n},$$

$$x_4 > \frac{3a}{n},$$

u. s. w.

$$x_n > \frac{(n-1)a}{n};$$

also nach der Lehre von den arithmetischen Progressionen

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n > \frac{n(n-1)}{2n}a;$$

und ganz eben so ist

$$x_1 < \frac{a}{n},$$

$$x_2 < \frac{2a}{n},$$

$$x_3 < \frac{3a}{n},$$

$$x_4 < \frac{4a}{n},$$

u. s. w.

$$x_n < \frac{na}{n};$$

also nach der Lehre von den arithmetischen Progressionen

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n < \frac{n(n+1)}{2n}\, a.$$

Folglich ist für jedes positive ganze n

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} > (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2n})\, a,$$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} < (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2n})\, a;$$

also nach dem Obigen für jedes positive ganze n

$$(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2n})\, a < x < (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2n})\, a.$$

Wäre nun nicht $x = \frac{1}{2}a$, so könnte nur

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \delta$$

sein. Wäre zuvörderst

$$x = \tfrac{1}{2}a + \delta,$$

so nehme man, was offenbar immer möglich ist, die positive ganze Zahl n so, dass

$$n > \frac{a}{2\delta}, \text{ also } \frac{a}{2n} < \delta$$

ist; dann ist offenbar

$$(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2n})\, a < \tfrac{1}{2}a + \delta,$$

d. i. $x > (\frac{1}{2} + \frac{1}{2n})\, a$, da doch nach dem Obigen für jedes positive ganze n

$$x < (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2n})\, a$$

ist. Wäre ferner

$$x = \tfrac{1}{2}a - \delta,$$

so nehme man die positive ganze Zahl n wieder so, dass

$$n > \frac{a}{2\delta}, \text{ also } \frac{a}{2n} < \delta$$

ist; dann ist offenbar

$$(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2n})\, a > \tfrac{1}{2}a - \delta,$$

d. i. $x < (\frac{1}{2} - \frac{1}{2n})\,a$, da doch nach dem Obigen für jedes positive ganze n

$$x > (\frac{1}{2} - \frac{1}{2n})\,a$$

ist. Also kann weder $x = \frac{1}{2}a + \delta$, noch $x = \frac{1}{2}a - \delta$ sein, und es ist folglich $x = \frac{1}{2}a$, wie behauptet wurde.

Der Schwerpunkt einer Halbkugelfläche liegt also in der Mitte ihrer Höhe, d. h. in der Mitte ihres auf der Ebene des sie begränzenden grössten Kugelkreises senkrecht stehenden Halbmessers.

XI.

Einige Bemerkungen zu der Abhandlung Nr. IV. in diesem Hefte über Recursionsformeln für die Bernoullischen Zahlen.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin*).

Die in dieser Abhandlung entwickelten recurrenten Formeln (11—17) lassen sich aus derselben Quelle etwas einfacher ableiten, wenn man aus der dort gebrauchten Methode alle ausserwesentlichen Elemente ausscheidet. So z. B. gelangt man zu der Formel (11), wenn man die Gleichung (5)

$$\frac{1}{2\omega} - \frac{1}{4}\cot\tfrac{1}{2}\omega = \tfrac{1}{4}B_1\omega + \tfrac{1}{8}B_2\frac{\omega^2}{3!} + \tfrac{1}{12}B_4\frac{\omega^4}{5!} + \ldots$$

mit der Gleichung

$$\sin\omega = \omega - \frac{\omega^3}{3!} + \frac{\omega^5}{5!} - \ldots.$$

---

*) Herr Göpel in Berlin hat die Güte, die erste Correctur des Archivs zu besorgen, wodurch es erklärlich wird, dass Herr Göpel die Abhandlung Nr. IV. in diesem Hefte kennen konnte, bevor dasselbe ausgegeben wurde. G.

Digitized by Google

multiplicirt. Man erhält dann

$$\frac{\sin\omega}{2\omega} - (1+\cos\omega) = \tfrac{1}{4}B_1\omega^2 - (\frac{1}{4\,.\,3!}B_1 - \frac{1}{8\,.\,3!}B_2)\omega^4 + \ldots$$

Entwickelt man jetzt auch die linke Seite, so giebt die Vergleichung der beiderseitigen allgemeinen Glieder nach Hinwegschaffung der überflüssigen Factoren unmittelbar die Formel (11). Ein ähnliches gilt für die übrigen.

Bezeichnet im allgemeinen

$$F(\omega) = a_1 B_1 \omega + a_2 B_2 \omega^2 + a_4 B_4 \omega^4 + \ldots.$$

irgend eine der Gleichungen (5)—(7) oder irgend eine andere Entwickelung, deren Coefficienten einfach durch die Bernoullischen oder Secanten-Zahlen bestimmt sind, und multiplicirt man dieselbe mit irgend einer andern Entwickelung

$$f(\omega) = b_0 + b_1\omega + b_2\omega^2 + \ldots.,$$

so erhält man $F(\omega).f(\omega)$ gleich einer Reihe, deren allgemeines Glied leicht darstellbar ist. Ist nun die Function $f(\omega)$ so beschaffen, dass sich das Product $F(\omega).f(\omega)$ vermittelst trigonometrischer Relationen in ein Aggregat einfacher trigonometrischer Functionen umformen lässt die sich mit oder ohne Hülfe der Bernoullischen und Secanten-Zahlen entwickeln lassen, so ergiebt sich durch Vergleichung der allgemeinen Glieder immer eine Recursionsformel für die genannten Zahlen; untermischt oder gesondert, je nachdem man die Functionen F und f wählt. Enthält die Entwickelung von $f(\omega)$ die Bernoullischen Zahlen nicht, so wird die Formel in Bezug auf sie linear; dergleichen $f(\omega)$ sind $\sin\omega$, $\sin 2\omega$, ... $\cos\omega$, $\cos 2\omega$, ... $\sin\omega^2$, u. s. w. Lässt sich $f(\omega)$ nicht ohne diese Zahlen entwickeln, so wird die Formel in Bezug auf sie von der 2ten Dimension. Man erhält z. B. die bekannten Relationen, wenn die Gleichung (5) mit sich selbst multiplicirt und dabei die Formel

$$\cot\tfrac{1}{2}\omega^2 = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\omega^2} - 1 = -2\frac{d\cot\frac{1}{2}\omega}{d\omega} - 1$$

angewandt wird.

Hiebei versteht es sich von selbst, dass man auch, anstatt $F(\omega)$ mit $f(\omega)$ unmittelbar zu multipliciren, vorher die eine Entwickelung, wie in der citirten Abhandlung geschehen ist, oder wenn man will beide Entwickelungen in bestimmte Integrale zusammenfassen und darauf deren Product wieder entwickeln kann, und auf diese Art mit etwas mehr Rechnung dasselbe Resultat erreichen wird.

Da man sich dem Obigen zufolge Recursionsformeln in beliebiger Menge verschaffen kann, so möchte es nicht von grosser Erheblichkeit sein, deren neue aufzusuchen; es gelänge denn eine solche aufzufinden, die einen tieferen Blick in den Bau dieser Zahlen verstattete. Indessen mag hier noch erwähnt werden, dass die Formeln (11) und (12) durch die einzige Formel

$$1 + m_1 A_1 + m_2 A_2 + \ldots = A_m,\ m > 1$$

ausgedrückt werden können, welche unter andern von Ettings-

Digitized by Google

hausen in seinen Vorlesungen über höhere Mathematik p. 282 aufführt und aus welcher jene für m unpaar und paar hervorgehen. In derselben bedeuten A_2, A_4, A_6, ... die Bernoullischen Zahlen mit abwechselnden Zeichen und es wird $A_1 = -\frac{1}{2}$, $A_3 = A_5 = \ldots = 0$. Die in Grunerts Mathematischen Abhandlungen. Altona 1822. 4. p. 57 ff. entwickelte Formel

$$\frac{2^{2n-1}B_{2n-1}}{(2n)!} - \frac{2^{2n-3}B_{2n-3}}{(2n-2)!\,3!} + \ldots + \frac{2B_1(-1)^{n+1}}{2!\,(2n-1)!} + \frac{n(-1)^n}{(2n+1)!} = 0$$

oder

$$2^2(2n+1)_2 B_1 - 2^4(2n+1)_4 B_3 + \ldots . + (-1)^{n+1}2^{2n}(2n+1)_{2n}B_{2n-1} = 2n$$

nebst ihrer Supplementarformel

$$2^2(2n)_2 B_1 - 2^4(2n)_4 B_3 + \ldots . + (-1)^{n+1}2^{2n}(2n)_{2n}B_{2n-1} = 2n - 1 + (-1)^n(2^{2n}-2)B_{2n-1}$$

ergiebt die Formeln (14) und (15), nachdem man letztere durch Addition von beziehlich (12) und (13) etwas vereinfacht hat *), wonach die Differenzen in den einzelnen Gliedern herausfallen. Sie lassen sich beide in die eine Gleichung

$$1 + 2m_1 A_1 + 2^3 m_3 A_2 + 2^5 m_5 A_3 + \ldots . = -(2^m - 2)A_m$$

zusammenfassen. Die Formel (17) endlich hat unter andern Bartels in seinen Vorlesungen über mathematische Analysis Dorpat. 1837. p. 203 gegeben. Nach gehöriger Vereinfachung lässt sie sich mit der (16) in die folgende vereinigen:

$$1 + 2^2 m_1 A_1 + 2^4 m_2 A_2 + 2^6 m_3 A_3 + \ldots . = -mC_{m-1} - (2^m - 2)A_m,$$

wo C_1, C_3, ... $= 0$ und C_0, C_2, C_4, ... die Secantencoefficienten mit abwechselnden Zeichen sind.

Am leichtesten erhält man alle drei, wenn man in die Grundformel (5) imaginäre Argumente einführt, woraus

$$\tfrac{1}{2}\omega \operatorname{Cot} \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{2}\omega = \tfrac{1}{2}\omega \frac{e^{-\frac{1}{2}\omega}}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}\omega} = 1 + A_1\omega + A_2\frac{\omega^2}{2!} + A_3\frac{\omega^3}{3!} + \ldots$$

entsteht, und diese der Reihe nach mit

$$e^{\omega} = 1 + \omega + \frac{\omega^2}{2!} + \ldots$$

$$e^{\frac{1}{2}\omega} = 1 + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega^2}{2^2 \cdot 2!} + \ldots$$

$$e^{\frac{1}{4}\omega} = 1 + \frac{\omega}{2^2} + \frac{\omega^2}{2^4 \cdot 2!} + \ldots$$

---

*) Wodurch aber der Werth der Abhandlung Nr. IV. keineswegs geschmälert wird. G.

multiplicirt, wobei die Relation $\frac{1}{\mathfrak{Sin}\frac{1}{2}\omega} = \mathfrak{Cot}\frac{1}{4}\omega - \mathfrak{Cot}\frac{1}{2}\omega$ zu berücksichtigen ist. Dass die obigen Formeln auch mit abwechselnden Zeichen dargestellt werden können, bedarf hienach kaum einer besonderen Erwähnung.

XII.

Gleichung der graden Linie und der Ebene, auf schiefwinklige Coordinaten bezogen.

Von

Herrn Dr. Haedenkamp

Oberlehrer der Mathem. und der Naturwissensch. am Gymnasium zu Hamm.

Kristallographische Untersuchungen, die mich seit einiger Zeit beschäftigen, machten es nothwendig, die Gleichung der Graden und der Ebene auf schiefwinklige Coordinaten zu beziehen, wodurch in gewissen Fällen die Kristallflächen zu den Axen des Kristalls einfachere Beziehungen erhalten. Da die hieher gehörigen Sätze auch noch wohl anderweitiges Interesse haben, so theile ich hier Einiges, die grade Linie und Ebene betreffend, im Zusammenhange mit.

Die drei Coordinaten-Axen bilden bei einem schiefwinkligen Axen-System eine dreiseitige Raumecke, deren Spitze wir mit O die drei Seiten durch A, B, C und die des Polardreiecks durch A', B', C' bezeichnen. Denkt man sich nun durch einen Punkt P im Raume mit den Coordinaten-Ebenen parallele Ebenen gelegt, so schneiden diese von den Axen Längen ab, die die Coordinaten des Punktes P genannt werden, und die wir durch x, y, z bezeichnen wollen; die Cosinus der Winkel, die OP mit den drei Axen bildet, sollen durch α, β, γ bezeichnet werden; eben so wollen wir, wenn die Entfernung OP gleich der Einheit ist, x, y, z durch a, b, c bezeichnen.

1) Der Zusammenhang der Grössen a, b, c und α, β, γ ist nun folgender, wie man sich leicht deutlich macht:

$$\alpha = a + b\cos C + c\cos B,$$
$$\beta = b + c\cos B + a\cos C,$$
$$\gamma = c + a\cos B + b\cos A,$$

oder auch:

$$a\Pi^2 = (\alpha \sin A + \beta \sin B \cos C' + \gamma \sin C \cos B') \sin A$$
$$b\Pi^2 = (\beta \sin B + \gamma \sin C \cos A' + \alpha \sin A \cos C') \sin B$$
$$c\Pi^2 = (\gamma \sin C + \alpha \sin A \cos B' + \beta \sin B \cos A') \sin C;$$

wo

$$\Pi^2 = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C.$$

2) Die Entfernung des Punktes P von O, die wir durch r bezeichnen, wird so ausgedrückt:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy \cos C + 2xz \cos B + 2yz \cos A;$$

setzt man $r = 1$, so wird unserer Bezeichnung zufolge:

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos C + 2ac \cos B + 2bc \cos A,$$

oder auch, für a, b, c die Werthe aus (1) gesetzt:

$$\Pi^2 = \alpha^2 \sin^2 A + \beta^2 \sin^2 B + \gamma^2 \sin^2 C + 2\alpha\beta \sin A \sin B \cos C'$$
$$+ 2\alpha\gamma \sin A \sin C \cos B' + 2\beta\gamma \sin B \sin C \cos A'.$$

Hieraus erhält man auch noch leicht folgende Relation:

$$1 = \alpha a + \beta b + \gamma c.$$

3) Die Entfernung zweier Punkte (xyz) und $(x'y'z')$ ist, wenn wir dieselbe durch ϱ bezeichnen:

$$\varrho^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 + 2(x-x')(y-y') \cos C$$
$$+ 2(x-x')(z-z') \cos B + 2(y-y')(z-z') \cos A$$
$$= r^2 + r'^2 - 2[(xy' + x'y) \cos C + (xz' + x'z) \cos B$$
$$+ (yz' + z'y) \cos A]$$
$$= (yz' - y'z)^2 \sin^2 A + (x'z - xz')^2 \sin^2 B + (x'y - y'x)^2 \sin^2 C$$
$$+ 2(yz' - y'z)(x'z - xz') \sin A \sin B \cos C'$$
$$+ 2(yz' - y'z)(x'y - y'x) \sin A \sin C \cos B'$$
$$+ 2(x'z - xz')(x'y - y'x) \sin B \sin C \cos A',$$

wenn r und r' die Entfernungen der Punkte (xyz) und $(x'y'z')$ von O sind.

4) Die Gleichung einer Graden, die durch den Mittelpunkt der Coordinaten geht, ist folgende:

$$x = \frac{a}{c} z, \quad y = \frac{b}{c} z;$$

wo a, b, c die Coordinaten des Punktes der Linie sind, dessen Entfernung von O der Einheit gleich ist, und die Determinanten der Linie genannt werden; eben so nennen wir auch die Cosinus der Winkel, die die Grade mit den Axen bildet, die Determinanten der Linie, und bezeichnen sie durch die respectiven griechischen Buchstaben α, β, γ, wodurch man also für eine Grade ein Determinanten-Paar erhält. Bei rechtwinkligen Coordinaten-Axen ist $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$.

Die Gleichungen zweier Linien, die parallel sind, werden:

$$x = Az + B,\ y = A'z + B'$$
$$x = Az + C,\ y = A'z + C'.$$

Geht eine Linie durch zwei Punkte $(x'y'z')$, $(x''y''z'')$, so ist deren Gleichung:

$$x = \frac{x' - x''}{z' - z''}\,z + \frac{x''z' - z''x'}{z' - z''},\ y = \frac{y' - y''}{z' - z''}\,z + \frac{z'y'' - y'z''}{z' - z''}.$$

5) Sind die Determinanten-Paare zweier Linien a, b, c, α, β, γ und a', b', c', α', β', γ'; so findet man den Neigungswinkel ν dieser Linien mit Hülfe der Formeln (3), wenn man für die dortigen r und r' die Einheit setzt:

$$\cos\nu = aa' + bb' + cc' + (bc' + b'c)\cos A + (ac' + ca')\cos B + (ab' + a'b)\cos C,$$

oder mit Hülfe der Relationen in (1):

$$\cos\nu = a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma.$$

Nennt man die Projectionen des Dreiecks auf die drei Coordinaten-Ebenen, dessen Seiten 1, 1, ϱ sind: $\frac{D}{2}$, $\frac{D'}{2}$, $\frac{D''}{2}$; wo dann ν der der Seite ϱ gegenüberstehende Winkel ist, so wird auch nach (3):

$$\sin^2\nu = D^2 + D'^2 + D''^2 + 2DD'\cos C' + 2DD''\cos B' + 2D'D''\cos A'.$$

Es ist nemlich:

$$D = (bc' - b'c)\sin A,\ D' = (ca' - ac')\sin B,$$
$$D'' = (ab' - a'b)\sin C;$$

setzt man nun noch:

$$\Delta = \beta\gamma' - \gamma\beta',\ \Delta' = \gamma\alpha' - \alpha\gamma',\ \Delta'' = \alpha\beta' - \alpha'\beta,$$

so erhält man noch folgende Relationen:

$$\Delta = (D + D'\cos C' + D''\cos B')\sin A$$
$$\Delta' = (D' + D''\cos A' + D\cos C')\sin B$$
$$\Delta'' = (D'' + D\cos B' + D'\cos A')\sin C$$
$$D\Pi^2 = (\Delta + \Delta'\cos C + \Delta''\cos B)\sin A$$
$$D'\Pi^2 = (\Delta' + \Delta\cos C + \Delta''\cos A)\sin B$$
$$D''\Pi^2 = (\Delta'' + \Delta\cos B + \Delta'\cos A)\sin C$$

$$\Pi^2\sin^2\nu = \Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + 2\Delta\Delta'\cos C + 2\Delta\Delta''\cos B + 2\Delta'\Delta''\cos A.$$

Die Bedingung, dass zwei Linien auf einander senkrecht sind, ist:

$$o = aa' + bb' + cc' + (cb' + c'b)\cos A + (ac' + a'c)\cos B + (ab' + a'b)\cos C,$$

oder

$$1 = D^2 + D'^2 + D''^2 + 2DD'\cos C' + 2DD''\cos B' + 2D''D'\cos A'.$$

6) Die Lage einer Ebene gegen die Coordinaten-Axen ist bestimmt durch die Lage und Länge des auf die Ebene gefällten Perpendikels. Wir werden auch das Determinanten-Paar dieses Lothes das Determinanten-Paar der Ebene nennen. Wird das Determinanten-Paar einer Ebene durch a, b, c, α, β, γ bezeichnet, das Perpendikel durch p, so ist die Gleichung der Ebene:

$$ax + \beta y + \gamma z = p,$$

die Gleichung des Lothes:

$$x = \frac{a}{c} z, \quad y = \frac{b}{c} z;$$

die Coordinaten $x'y'z'$ des Fusspunktes des Lothes sind

$$x' = ap, \quad y' = bp, \quad z' = cp.$$

Bezeichnet man die Längen der Linien, welche die Ebene von den Coordinaten-Axen abschneidet, durch $l'l''$, dann ist auch die Gleichung der Ebene:

$$\frac{x}{l} + \frac{y}{l'} + \frac{z}{l''} = 1.$$

7) Die Determinanten-Paare einer Ebene zu finden, die durch zwei, im Mittelpunkt des Coordinaten-Systems sich schneidende Grade gelegt ist. Seien die Determinanten-Paare der gegebenen Linien a', b', c', α', β', γ' und a'', b'', c'', α'', β'', γ'', und die der gesuchten Ebene a, b, c, α, β, γ; so findet man nach einigen Reductionen:

$$\Pi a = \frac{\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'}{\sin \nu}, \quad \Pi b = \frac{\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha'}{\sin \nu}, \quad \Pi c = \frac{\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'}{\sin \nu};$$

$$\alpha = \frac{(b'c'' - b''c')\Pi}{\sin \nu}, \quad \beta = \frac{(c'a'' - a'c'')\Pi}{\sin \nu} \quad \gamma = \frac{(a'b'' - a''b')\Pi}{\sin \nu};$$

wo ν die Neigung der beiden Linien ist und Π die oben angegebene Bedeutung hat. Die hier gefundenen Determinanten sind zugleich die Determinanten der Durchschnittslinie zweier Ebenen, deren Determinanten die der gegebenen Linien sind.

8) Der Neigungswinkel zweier Ebenen ist das Supplement des Winkels, den die auf die Ebenen gefällten Lothe mit einander bilden, und wird also nach (5) bestimmt.

9) Will man die Determinanten-Paare einer Ebene finden, die den Neigungswinkel zweier Ebenen halbirt, so dienen dazu nach (5) folgende Gleichungen, wenn ν der Neigungswinkel ist, a', b', c', α', β', γ' und a'', b'', c'', α'', β'', γ'' die gegebenen und a, b, c, α, β, γ die gesuchten Determinanten-Paare sind:

$$\sin \frac{\nu}{2} = a'a + \beta'b + \gamma'c = \alpha a' + \beta b' + \gamma c',$$

$$\sin \frac{\nu}{2} = a''a + \beta''b + \gamma''c = \alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'';$$

denen noch nach (7) diese hinzugefügt werden können:

$$0 = a(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') + b(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha') + c(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')$$

$$0 = \alpha(b'c'' - b''c') + \beta(c'a'' - a'c'') + \gamma(a'b'' - a''b').$$

Aus diesen Gleichungen erhält man nach einigen Reductionen:

$$\alpha = \frac{a' + a''}{2 \sin \frac{\nu}{2}}, \quad \beta = \frac{b' + b''}{2 \sin \frac{\nu}{2}}, \quad \gamma = \frac{c' + c''}{2 \sin \frac{\nu}{2}};$$

$$a = \frac{\alpha' + \alpha''}{2 \sin \frac{\nu}{2}}, \quad b = \frac{\beta' + \beta''}{2 \sin \frac{\nu}{2}}, \quad c = \frac{\gamma' + \gamma''}{2 \sin \frac{\nu}{2}}.$$

10) Um die Determinanten-Paare der Ebene zu erhalten, welche den Nebenwinkel von ν halbirt, braucht man nur in den vorhergehenden Formeln $-a''$, $-b''$, $-c''$ statt a'', b'', c'' und $\pi - \nu$ statt ν zu setzen, und man erhält die Determinanten-Paare a_1, b_1, c_1, α_1, β_1, γ_1:

$$\alpha_1 = \frac{a' - a''}{2 \cos \frac{\nu}{2}}, \quad \beta_1 = \frac{b' - b''}{2 \cos \frac{\nu}{2}}, \quad \gamma_1 = \frac{c' - c''}{2 \cos \frac{\nu}{2}};$$

$$a_1 = \frac{\alpha' - \alpha''}{2 \cos \frac{\nu}{2}}, \quad b_1 = \frac{\beta' - \beta''}{2 \cos \frac{\nu}{2}}, \quad c_1 = \frac{\gamma' - \gamma''}{2 \cos \frac{\nu}{2}}.$$

11) Eben so leicht kann man auch noch das Determinanten-Paar der Ebene finden, die mit den gegebenen Ebenen die Winkel φ' und φ bildet, so dass $\varphi' + \varphi = \nu$ ist. Man findet auf gleiche Weise, wenn dieselben Bezeichnungen wie die Vorigen beibehalten werden, folgende Formeln:

$$\alpha = \frac{a' \cos \varphi + a'' \cos \varphi'}{\sin \nu}, \quad \beta = \frac{b' \cos \varphi + b'' \cos \varphi'}{\sin \nu},$$

$$\gamma = \frac{c' \cos \varphi + c'' \cos \varphi'}{\sin \nu},$$

$$a = \frac{\alpha' \cos \varphi + \alpha'' \cos \varphi'}{\sin \nu}, \quad b = \frac{\beta' \cos \varphi + \beta'' \cos \varphi'}{\sin \nu},$$

$$c = \frac{\gamma' \cos \varphi + \gamma'' \cos \varphi'}{\sin \nu};$$

$$\alpha_1 = \frac{a' \sin \varphi - a'' \sin \varphi'}{\sin \nu}, \quad \beta_1 = \frac{b' \sin \varphi - b'' \sin \varphi'}{\sin \nu},$$

$$\gamma_1 = \frac{c' \sin \varphi - c'' \sin \varphi'}{\sin \nu},$$

$$a_1 = \frac{\alpha' \sin \varphi - \alpha'' \sin \varphi'}{\sin \nu}, \quad b_1 = \frac{\beta' \sin \varphi - \beta'' \sin \varphi'}{\sin \nu},$$

$$c_1 = \frac{\gamma' \sin \varphi - \gamma'' \sin \varphi'}{\sin \nu}.$$

Der Fall, wo $\varphi - \varphi' = \nu$, kann hieraus auch leicht abgeleitet werden.

12) Die Determinanten-Paare einer Ebene zu finden, die durch die 3 Punkte $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$, $(x_3 y_3 z_3)$ gelegt wird. Sind die gesuchten Determinanten-Paare a, b, c, α, β, γ, so erhält man zu ihrer Bestimmung folgende drei Gleichungen nach (6):

$$\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 = p$$
$$\alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2 = p$$
$$\alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma z_3 = p,$$

aus denen man durch Elimination zweier Unbekannten, z. B. β, γ, erhält:

$$\frac{\alpha}{p} = \frac{y_2z_3 - z_2y_3 + z_1y_3 - z_3y_1 + y_1z_2 - y_2z_1}{x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + x_2(z_1y_3 - y_1z_3) + x_3(y_1z_2 - z_1y_2)}.$$

Multiplizirt man den Zähler mit sin A, so wird derselbe der doppelte Flächenraum der Projection des durch die drei Punkte gelegten Dreiecks auf die Coordinaten-Ebene (yx); nennt man daher diese Δ und den Nenner K, so erhält man, wenn noch Δ', Δ'' die Projectionen desselben Dreiecks auf die beiden andern Ebenen genannt werden, diese drei Gleichungen:

$$\alpha \sin A = \frac{p\Delta}{K},\ \beta \sin B = \frac{p\Delta'}{K},\ \gamma \sin C = \frac{p\Delta''}{K}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (1):

$$\Pi^2 = \alpha^2 \sin^2 A + \beta^2 \sin^2 B + \gamma^2 \sin^2 C + 2\alpha\gamma \sin A \sin C \cos B'$$
$$+ 2\alpha\beta \sin A \sin B \cos C' + 2\beta\gamma \sin B \sin C \cos A'$$

und bemerkt, dass wenn durch D der Flächenraum des durch die drei Punkte gelegten Dreiecks bezeichnet wird,

$$D^2 = \Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + 2\Delta\Delta' \cos C' + 2\Delta\Delta'' \cos B'$$
$$+ 2\Delta'\Delta'' \cos A'$$

ist, und daher

$$\Pi = \frac{pD}{K} \text{ oder } K\Pi = pD;$$

$$\alpha \sin A = \frac{\Delta}{D}\Pi,\ \beta \sin B = \frac{\Delta'}{D}\Pi,\ \gamma \sin C = \frac{\Delta''}{D}\Pi;$$

$$a\Pi D = \Delta + \Delta' \cos C' + \Delta'' \cos B',$$
$$b\Pi D = \Delta' + \Delta'' \cos A' + \Delta' \cos C',$$
$$c\Pi D = \Delta'' + \Delta \cos B' + \Delta' \cos A'.$$

13) Wir wollen jetzt noch die Coordinaten x, y, z eines Punktes P auf ein anderes Coordinaten-System von demselben Mittelpunkte übertragen. Wir bezeichnen die Coordinaten eines Punktes, auf die neuen Axen bezogen, durch x', y', z'; die Winkel, die die neuen Axen mit einander bilden, seien A_0, B_0, C_0; die Winkel des durch A_0, B_0, C_0 gegebenen Polardreiecks A'_0, B'_0, C'_0; ferner die Determinanten-Paare der Axe der x', auf das ursprüngliche Axen-System bezogen: a, b, c, α, β, γ; die der Axe der y': a', b', c', α', β', γ' und endlich die der Axe der z': a'', b'', c'', α'', β'', γ'', und

$$\Pi_0^2 = 1 - \cos^2 A_0 - \cos^2 B_0 - \cos^2 C_0 + 2\cos A_0 \cos B_0 \cos C_0.$$

Hält man diese Bezeichnungen fest, so findet man:

Digitized by Google

$$x' = ax + by + cz,$$
$$y' = a'x + b'y + c'z,$$
$$z' = a''x + b''y + c''z;$$

und umgekehrt:

$$\lambda x = (b'c'' - c'b'')x' + (cb'' - c''b)y' + (bc' - b'c)z'$$
$$\lambda y = (c'a'' - c''a')x' + (ac'' - ca'')y' + (ca' - ac')z'$$
$$\lambda z = (a'b'' - a''b')x' + (ba'' - ab'')y' + (ab' - a'b)z';$$

wo

$$\lambda = a(b'c'' - c'b'') + a'(cb'' - c''b) + a''(bc' - b'c) = \frac{\Pi}{\Pi_0}.$$

Der Zusammenhang der Grössen a, b, c und α, β, γ u. s. w. ist nach den Gleichungen in (1) dieser:

$$\alpha = a + a' \cos C_0 + a'' \cos B_0,$$
$$\alpha' = a' + a'' \cos A_0 + a' \cos C_0,$$
$$\alpha'' = a'' + a' \cos A_0 + a \cos B_0,$$
$$\beta = b + b' \cos C_0 + b'' \cos B_0,$$
$$\beta' = b' + b'' \cos A_0 + b' \cos C_0,$$
$$\beta'' = b'' + b' \cos A_0 + b \cos B_0,$$
$$\gamma = c + c' \cos C_0 + c'' \cos B_0,$$
$$\gamma' = c' + c'' \cos A_0 + c \cos C_0,$$
$$\gamma'' = c'' + c \cos B_0 + c' \cos A_0.$$

Es finden noch eine Menge anderer Relationen zwischen den Constanten der beiden Axen-Systeme statt, wovon noch folgende hier ihren Platz haben mögen. Nennt man die Determinanten-Paare der drei neuen Coordinaten-Ebenen nach einander: m, n, p, μ, ν, π u. s. w., so erhält man nach (7):

$$\Pi m = \frac{\beta'\gamma'' - \gamma''\beta'}{\sin A_0}, \quad \Pi n = \frac{\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma''}{\sin A_0}, \quad \Pi p = \frac{\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'}{\sin A_0}$$
$$\mu = \frac{(b'c'' - c'b'')\Pi}{\sin A_0}, \quad \nu = \frac{c'a'' - a'c''}{\sin A_0}\Pi, \quad \pi = \frac{a'b'' - a''b'}{\sin A_0}\Pi$$
$$\Pi m' = \frac{\gamma\beta'' - \beta\gamma''}{\sin B_0}, \quad \Pi n' = \frac{\alpha\gamma'' - \alpha''\gamma}{\sin B_0}, \quad \Pi p' = \frac{\beta\alpha'' - \alpha\beta''}{\sin B_0}$$
$$\mu' = \frac{(cb'' - c''b)\Pi}{\sin B_0}, \quad \nu' = \frac{(c''a - a''c)}{\sin B_0}\Pi, \quad \pi' = \frac{(ba'' - b''a)}{\sin B_0}\Pi$$
$$\Pi m'' = \frac{\beta\gamma' - \beta'\gamma}{\sin C_0}, \quad \Pi n'' = \frac{\gamma\alpha' - \alpha\gamma'}{\sin C_0}, \quad \Pi p'' = \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\sin C_0}$$
$$\mu'' = \frac{(bc' - cb')}{\sin C_0}\Pi, \quad \nu'' = \frac{ca' - ac'}{\sin C_0}\Pi, \quad \pi'' = \frac{ab' - a'b}{\sin C_0}\Pi.$$

$$\cos A_0 = a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' = a''\alpha' + b''\beta' + c''\gamma',$$
$$\cos B_0 = a''\alpha + b''\beta + c''\gamma = a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'',$$
$$\cos C_0 = a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma.$$

$$\cos A'_0 = m'\mu'' + n'\nu'' + p'\pi'' = m''\mu' + n''\nu' + p''\pi',$$
$$\cos B'_0 = m\mu'' + n\nu'' + p\pi'' = m''\mu + n''\nu + p''\pi,$$
$$\cos C'_0 = m\mu' + n\nu' + p\pi' = m'\mu + n'\nu + p'\pi.$$

$$\Pi a = \frac{\nu'\pi'' - \nu''\pi'}{\sin A'_0},\quad \Pi b = \frac{\pi'\mu'' - \pi''\mu'}{\sin A'_0},\quad \Pi c = \frac{\mu'\nu'' - \mu''\nu'}{\sin A'_0},$$

$$\alpha = \frac{n'p'' - n''p'}{\sin A'_0}\Pi,\ \beta = \frac{p'm'' - p''m'}{\sin A'_0}\Pi,\ \gamma = \frac{m'n'' - n'm''}{\sin A'_0}\Pi,$$

$$\Pi a' = \frac{\pi\nu'' - \nu\pi''}{\sin B'_0},\quad \Pi b' = \frac{\mu\pi'' - \pi\mu''}{\sin B'_0},\quad \Pi c' = \frac{\nu\mu'' - \nu''\mu}{\sin B'_0}$$

$$\alpha' = \frac{pn'' - p''n}{\sin B'_0}\Pi,\ \beta' = \frac{mp'' - m''p}{\sin B'_0}\Pi,\ \gamma' = \frac{nm'' - n''m}{\sin B'_0}\Pi$$

$$\Pi a'' = \frac{\pi'\nu - \pi\nu'}{\sin C''_0},\quad \Pi b'' = \frac{\pi\mu' - \pi'\mu}{\sin C''_0},\quad \Pi c'' = \frac{\mu\nu' - \mu'\nu}{\sin C''_0}$$

$$\alpha'' = \frac{np' - n'p}{\sin C''_0}\Pi,\ \beta'' = \frac{pm' - p'm}{\sin C''_0}\Pi,\ \gamma'' = \frac{mn' - m'n}{\sin C''_0}\Pi.$$

$$\alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') + \alpha'(\gamma\beta'' - \beta\gamma'') + \alpha''(\beta\gamma' - \gamma\beta') = \Pi\Pi_0$$

Die letzteren Formeln bestimmen noch die Determinanten der neuen Axen durch die Determinanten der neuen Coordinaten-Ebenen. Durch die im Vorstehenden gegebenen Formeln lassen sich alle, die gegenseitige Abhängigkeit der Kristallflächen betreffenden Aufgaben der Kristallographie lösen.

XIII.

Neue Construktion einer Lambert'schen Aufgabe aus der praktischen Geometrie.

Von

Herrn G. D. E. Weyer

Assistenten an der Sternwarte zu Hamburg.

Lambert giebt im ersten Theil seiner Beiträge. Seite 72 die folgende Aufgabe, welche er eine der schönsten und zugleich eine der schwersten aus der praktischen Geometrie nennt:

Die relative Lage von sechs Punkten zu bestimmen, wenn man in dreien derselben die Abweichung der drei übrigen von der Mittagslinie beobachtet hat.

Die folgende Auflösung gründet sich auf der eleganten Construction der Pothenotschen Aufgabe von Bessel und Kulenkamp, auf welche Claussen in Nr. 430. der Astronomischen Nachrichten aufmerksam machte und welche sich in Grunerts Geodäsie Seite 224 vorgetragen findet.

Bezeichnen die Buchstaben A, B, C (Taf. I. Fig. 10.) die drei Stationen und D, E, F die drei observirten Punkte, so sind zunächst gegeben die Winkel

$$DAE,\ EAF$$
$$DBE,\ EBF$$
$$DCE,\ ECF$$

wodurch in Verbindung mit der Mittagslinie auch folgende Winkel bekannt sind:

$$ADB,\ BDC$$
$$AEB,\ BEC$$
$$AFB,\ BFC$$

Betrachtet man jetzt die Punkte A, B, C, D als eine Pothenotsche Aufgabe und construirt z. B. über der willkührlich angenommenen Linie AC die Winkel $CAG = BDC$ und $ACG = ADB$, so liefert dies einen Durchschnittspunkt G, welcher mit D und B in gerader Linie liegt. Eben so geben die Punkte A, B, C, E einen zweiten Durchschnittspunkt H, welcher mit E und B in einer geraden Linie liegt, und so auch die Punkte A, B, C, F einen dritten Durchschnittspunkt J, welcher mit F und B in gerader Linie liegt. Die drei Punkte G, H, J werden also bekannt, und da man auch die Winkel kennt, welche sie von dem Punkte B aus gesehen bilden, so ist dieser Punkt B und folglich alle übrigen leicht bestimmt.

Zusatz des Herausgebers.

Die vorhergehende schöne Construction des obigen Lambertschen Problems, welches jedenfalls bei geodätischen Aufnahmen häufig mit grossem Vortheil angewandt werden kann, veranlasst mich zu der Mittheilung der folgenden analytischen Auflösung dieses Problems, weil mir die von Lambert selbst a. a. O. S. 81 gegebene analytische Auflösung, insbesondere wenn man sich der Coordinatenmethode zu bedienen beabsichtigt, nicht so einfach zu sein, und namentlich nicht ohne alle weitere Berücksichtigung der Figur oder vielmehr des durch dieselbe dargestellten speciellen Falls zum Zweck zu führen scheint, wie es wohl zu wünschen wäre, wobei übrigens auch nicht unerwähnt bleiben darf, dass der

Digitized by Google

von Lambert a. a. O. gegebene analytische Ausdruck falsch ist, indem sowohl im Zähler, als auch im Nenner desselben, aus Versehen ein Factor ausgelassen worden ist. Der Fehler wurde zuerst von Good entdeckt (Lambert's gelehrter Briefwechsel. Bd. 2. S. 232), und von Lambert (Ebendas. S. 236) anerkannt. Die richtige Formel findet man u. A. in Meier Hirsch's Sammlung geometrischer Aufgaben. Erster Theil. Berlin. 1805. S. 86.

Die sechs Punkte wollen wir jetzt durch A, A_1, A_2 und A', A'_1, A'_2 bezeichnen, und wollen annehmen, dass in jedem der drei ersten Punkte A, A_1, A_2 die Winkel gemessen worden seien, welche die von jedem dieser Punkte nach den drei letztern Punkten A', A'_1, A'_2 gezogenen geraden Linien mit gewissen von den drei erstern Punkten aus nach denselben Seiten hin gezogenen einander parallelen geraden Linien einschliessen, wobei diese Winkel von den in Rede stehenden einander parallelen Linien an immer nach denselben Seiten hin von 0 bis 360° gezählt werden sollen. Die von A, A_1, A_2 aus nach denselben Seiten hin gezogenen Parallellinien können die nach Norden oder Süden gerichteten Theile des astronomischen Meridians oder auch die gleichnamigen Theile des magnetischen Meridians sein. Näherungsweise kann man aber auch die von A A_1, A_2 nach einem und demselben sehr weit entfernten Punkte E gezogenen Linien anwenden. Sind die Entfernungen des Punktes E von den Punkten A, A_1, A_2, und die Entfernungen der drei letzten Punkte von einander näherungsweise bekannt, so ist es in dem letzten der drei obigen Fälle leicht, die Parallaxe zu berücksichtigen und gehörig in Rechnung zu nehmen, wozu eine besondere Anleitung hier nicht erforderlich ist. Die drei von den Punkten A, A_1, A_2 aus nach denselben Seiten hin gezogenen einander parallelen geraden Linien wollen wir im Folgenden der Kürze wegen schlechthin die Axen nennen, und wollen nun die folgenden Bezeichnungen einführen.

Die von den Linien AA', AA'_1, AA'_2 mit der von A aus gezogenen Axe eingeschlossenen, von dieser Axe an nach derselben Seite hin von 0 bis 360° gezählten Winkel sollen respective durch α, β, γ bezeichnet werden.

Die von den Linien A_1A', $A_1A'_1$, $A_1A'_2$ mit der von A_1 aus gezogenen Axe eingeschlossenen, von dieser Axe an nach derselben Seite wie vorher hin von 0 bis 360° gezählten Winkel sollen respective durch α_1, β_1, γ_1 bezeichnet werden.

Die von den Linien A_2A', A_2A_1', $A_2A'_2$ mit der von A_2 aus gezogenen Axe eingeschlossenen, von dieser Axe an nach derselben Seite wie vorher hin von 0 bis 360° gezählten Winkel sollen respective durch α_2, β_2, γ_2 bezeichnet werden.

Die von den Linien AA_1, AA_2 mit der von A aus gezogenen Axe eingeschlossenen, von dieser Axe an immer nach derselben Seite hin wie vorher von 0 bis 360° gezählten Winkel wollen wir endlich respective durch φ, ψ bezeichnen.

Nehmen wir nun in jedem der Punkte A, A_1, A_2 die von diesem Punkte aus gezogene Axe als den positiven Theil der Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, in welchem der positive Theil der Ordinatenaxe eine solche Lage hat, dass man sich, um von dem positiven Theile der Abscissenaxe durch den Coordinatenwinkel hindurch zu dem positiven Theile der Or-

Digitized by Google

dinatenaxe zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher von den von A, A_1, A_2 aus gezogenen Axen an die Winkel α, β, γ; α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2 von 0 bis 360° gezählt werden; so sind die Coordinaten der Punkte

$$A',\ A'_1,\ A'_2$$

in dem Systeme, dessen Anfang A ist:

$$1)\ \begin{cases} AA' \cdot \cos\alpha,\ AA' \cdot \sin\alpha; \\ AA'_1 \cdot \cos\beta,\ AA'_1 \cdot \sin\beta; \\ AA'_2 \cdot \cos\gamma,\ AA'_2 \cdot \sin\gamma; \end{cases}$$

in dem Systeme, dessen Anfang A_1 ist:

$$2)\ \begin{cases} A_1A' \cdot \cos\alpha_1,\ A_1A' \cdot \sin\alpha_1; \\ A_1A'_1 \cdot \cos\beta_1,\ A_1A'_1 \cdot \sin\beta_1; \\ A_1A'_2 \cdot \cos\gamma_1,\ A_1A'_2 \cdot \sin\gamma_1; \end{cases}$$

in dem Systeme, dessen Anfang A_2 ist:

$$3)\ \begin{cases} A_2A' \cdot \cos\alpha_2,\ A_2A' \cdot \sin\alpha_2; \\ A_2A'_1 \cdot \cos\beta_2,\ A_2A'_1 \cdot \sin\beta_2; \\ A_2A'_2 \cdot \cos\gamma_2,\ A_2A'_2 \cdot \sin\gamma_2. \end{cases}$$

Endlich sind die Coordinaten der Punkte

$$A_1,\ A_2$$

in dem Systeme, dessen Anfang A ist:

$$4)\ \begin{cases} AA_1 \cdot \cos\varphi,\ AA_1 \cdot \sin\varphi; \\ AA_2 \cdot \cos\psi,\ AA_2 \cdot \sin\psi. \end{cases}$$

Also hat man nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die zwölf folgenden Gleichungen:

$$5)\ \begin{cases} AA' \cdot \cos\alpha = AA_1 \cdot \cos\varphi + A_1A' \cdot \cos\alpha_1 \\ \qquad\qquad = AA_2 \cdot \cos\psi + A_2A' \cdot \cos\alpha_2, \\ AA' \cdot \sin\alpha = AA_1 \cdot \sin\varphi + A_1A' \cdot \sin\alpha_1 \\ \qquad\qquad = AA_2 \cdot \sin\psi + A_2A' \cdot \sin\alpha_2; \\ AA'_1 \cdot \cos\beta = AA_1 \cdot \cos\varphi + A_1A'_1 \cdot \cos\beta_1 \\ \qquad\qquad = AA_2 \cdot \cos\psi + A_2A'_1 \cdot \cos\beta_2, \\ AA'_1 \cdot \sin\beta = AA_1 \cdot \sin\varphi + A_1A'_1 \cdot \sin\beta_1 \\ \qquad\qquad = AA_2 \cdot \sin\psi + A_2A'_1 \cdot \sin\beta_2; \\ AA'_2 \cdot \cos\gamma = AA_1 \cdot \cos\varphi + A_1A'_2 \cdot \cos\gamma_1 \\ \qquad\qquad = AA_2 \cdot \cos\psi + A_2A'_2 \cdot \cos\gamma_2, \\ AA'_2 \cdot \sin\gamma = AA_1 \cdot \sin\varphi + A_1A'_2 \cdot \sin\gamma_1 \\ \qquad\qquad = AA_2 \cdot \sin\psi + A_2A'_2 \cdot \sin\gamma_2; \end{cases}$$

welche die dreizehn unbekannten Grössen

Digitized by Google

$$\varphi,\ \psi;$$
$$AA_1,\ AA_2;$$
$$AA',\ AA'_1,\ AA'_2;$$
$$A_1A',\ A_1A'_1,\ A_1A'_2;$$
$$A_2A',\ A_2A'_1,\ A_2A'_2$$

enthalten, die sich also aus den obigen zwölf Gleichungen nicht sämmtlich bestimmen lassen.

Man kann diese zwölf Gleichungen auf folgende Form bringen:

$$6)\quad \begin{cases} AA_1 \cdot \cos\varphi = AA' \cdot \cos\alpha - A_1A' \cdot \cos\alpha_1 \\ \qquad\quad = AA'_1 \cdot \cos\beta - A_1A'_1 \cdot \cos\beta_1 \\ \qquad\quad = AA'_2 \cdot \cos\gamma - A_1A'_2 \cdot \cos\gamma_1, \\ AA_1 \cdot \sin\varphi = AA' \cdot \sin\alpha - A_1A' \cdot \sin\alpha_1 \\ \qquad\quad = AA'_1 \cdot \sin\beta - A_1A'_1 \cdot \sin\beta_1 \\ \qquad\quad = AA'_2 \cdot \sin\gamma - A_1A'_2 \cdot \sin\gamma_1, \\ AA_2 \cdot \cos\psi = AA' \cdot \cos\alpha - A_2A' \cdot \cos\alpha_2 \\ \qquad\quad = AA'_1 \cdot \cos\beta - A_2A'_1 \cdot \cos\beta_2 \\ \qquad\quad = AA'_2 \cdot \cos\gamma - A_2A'_2 \cdot \cos\gamma_2, \\ AA_2 \cdot \sin\psi = AA' \cdot \sin\alpha - A_2A' \cdot \sin\alpha_2 \\ \qquad\quad = AA'_1 \cdot \sin\beta - A_2A'_1 \cdot \sin\beta_2 \\ \qquad\quad = AA'_2 \cdot \sin\gamma - A_2A'_2 \cdot \sin\gamma_2; \end{cases}$$

und erhält aus diesen letztern Gleichungen ferner ohne alle Schwierigkeit die vier folgenden Gleichungen:

$$7)\quad \begin{cases} AA' \cdot \sin(\alpha-\beta_1) - A_1A' \cdot \sin(\alpha_1-\beta_1) = AA'_1 \cdot \sin(\beta-\beta_1), \\ AA' \cdot \sin(\alpha-\gamma_1) - A_1A' \cdot \sin(\alpha_1-\gamma_1) = AA'_2 \cdot \sin(\gamma-\gamma_1), \\ AA' \cdot \sin(\alpha-\beta_2) - A_2A' \cdot \sin(\alpha_2-\beta_2) = AA'_1 \cdot \sin(\beta-\beta_2), \\ AA' \cdot \sin(\alpha-\gamma_2) - A_2A' \cdot \sin(\alpha_2-\gamma_2) = AA'_2 \cdot \sin(\gamma-\gamma_2); \end{cases}$$

aus denen sich durch Division sogleich die beiden Gleichungen

$$8)\quad \begin{cases} \dfrac{AA' \cdot \sin(\alpha-\beta_1) - A_1A' \cdot \sin(\alpha_1-\beta_1)}{AA' \cdot \sin(\alpha-\beta_2) - A_2A' \cdot \sin(\alpha_2-\beta_2)} = \dfrac{\sin(\beta-\beta_1)}{\sin(\beta-\beta_2)}, \\ \dfrac{AA' \cdot \sin(\alpha-\gamma_1) - A_1A' \cdot \sin(\alpha_1-\gamma_1)}{AA' \cdot \sin(\alpha-\gamma_2) - A_2A' \cdot \sin(\alpha_2-\gamma_2)} = \dfrac{\sin(\gamma-\gamma_1)}{\sin(\gamma-\gamma_2)} \end{cases}$$

oder

$$9)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin(\alpha-\beta_1) - \dfrac{A_1A'}{AA'}\sin(\alpha_1-\beta_1)}{\sin(\alpha-\beta_2) - \dfrac{A_2A'}{AA'}\sin(\alpha_2-\beta_2)} = \dfrac{\sin(\beta-\beta_1)}{\sin(\beta-\beta_2)}, \\ \dfrac{\sin(\alpha-\gamma_1) - \dfrac{A_1A'}{AA'}\sin(\alpha_1-\gamma_1)}{\sin(\alpha-\gamma_2) - \dfrac{A_2A'}{AA'}\sin(\alpha_2-\gamma_2)} = \dfrac{\sin(\gamma-\gamma_1)}{\sin(\gamma-\gamma_2)} \end{cases}$$

Digitized by Google

ergeben, welche nun bloss noch die beiden unbekannten Grössen

$$\frac{A_1A'}{AA'} \text{ und } \frac{A_2A'}{AA'}$$

enthalten, die sich also mittelst derselben bestimmen lassen.

Zu dem Ende bringe man diese Gleichungen zuerst auf die Form

$$10)\begin{cases} \sin(\alpha-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)-\sin(\alpha-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1) \\ =\sin(\alpha_1-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)\cdot\frac{A_1A'}{AA'} \\ \qquad -\sin(\alpha_2-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1)\cdot\frac{A_2A'}{AA'}, \\ \sin(\alpha-\gamma_1)\sin(\gamma-\gamma_2)-\sin(\alpha-\gamma_2)\sin(\gamma-\gamma_1) \\ =\sin(\alpha_1-\gamma_1)\sin(\gamma-\gamma_2)\cdot\frac{A_1A'}{AA'} \\ \qquad -\sin(\alpha_2-\gamma_2)\sin(\gamma-\gamma_1)\cdot\frac{A_2A'}{AA'}; \end{cases}$$

oder, weil, wie man leicht findet,

$$\begin{aligned} &\sin(\alpha-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)-\sin(\alpha-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1) \\ &\qquad =\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2), \\ &\sin(\alpha-\gamma_1)\sin(\gamma-\gamma_2)-\sin(\alpha-\gamma_2)\sin(\gamma-\gamma_1) \\ &\qquad =\sin(\alpha-\gamma)\sin(\gamma_1-\gamma_2) \end{aligned}$$

ist, auf die Form

$$11)\begin{cases} \sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2) \\ =\sin(\alpha_1-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)\cdot\frac{A_1A'}{AA'} \\ \qquad -\sin(\alpha_2-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1)\cdot\frac{A_2A'}{AA'}, \\ \sin(\alpha-\gamma)\sin(\gamma_1-\gamma_2) \\ =\sin(\alpha_1-\gamma_1)\sin(\gamma-\gamma_2)\cdot\frac{A_1A'}{AA'} \\ \qquad -\sin(\alpha_2-\gamma_2)\sin(\gamma-\gamma_1)\cdot\frac{A_2A'}{AA'}; \end{cases}$$

und erhält aus diesen Gleichungen, wenn man der Kürze wegen

$$12)\begin{cases} K=\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2)\sin(\alpha_2-\gamma_2)\sin(\gamma-\gamma_1), \\ K_1=\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2)\sin(\alpha_1-\gamma_1)\sin(\gamma-\gamma_2), \\ L=\sin(\alpha-\gamma)\sin(\gamma_1-\gamma_2)\sin(\alpha_2-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1), \\ L_1=\sin(\alpha-\gamma)\sin(\gamma_1-\gamma_2)\sin(\alpha_1-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2), \\ M=\sin(\alpha_1-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)\sin(\alpha_2-\gamma_2)\sin(\gamma-\gamma_1), \\ N=\sin(\alpha_1-\gamma_1)\sin(\gamma-\gamma_2)\sin(\alpha_2-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1) \end{cases}$$

setzt, ohne alle Schwierigkeit

Digitized by Google

$$13)\quad \begin{cases} \dfrac{A_1A'}{AA'} = \dfrac{K-L}{M-N}, \\ \dfrac{A_2A'}{AA'} = \dfrac{K_1-L_1}{M-N}. \end{cases}$$

Hat man die Verhältnisse

$$\frac{A_1A'}{AA'},\ \frac{A_2A'}{AA'}$$

mittelst dieser Formeln gefunden, so ergeben sich die Verhältnisse

$$\frac{AA'_1}{AA'},\ \frac{AA'_2}{AA'}$$

mittelst der folgenden unmittelbar aus den Gleichungen 7) fliessenden Formeln:

$$14)\quad \begin{cases} \dfrac{AA'_1}{AA'} = \dfrac{\sin(\alpha-\beta_1)}{\sin(\beta-\beta_1)} - \dfrac{\sin(\alpha_1-\beta_1)}{\sin(\beta-\beta_1)} \cdot \dfrac{A_1A'}{AA'} \\ \qquad = \dfrac{\sin(\alpha-\beta_2)}{\sin(\beta-\beta_2)} - \dfrac{\sin(\alpha_2-\beta_2)}{\sin(\beta-\beta_2)} \cdot \dfrac{A_2A'}{AA'}, \\ \dfrac{AA'_2}{AA'} = \dfrac{\sin(\alpha-\gamma_1)}{\sin(\gamma-\gamma_1)} - \dfrac{\sin(\alpha_1-\gamma_1)}{\sin(\gamma-\gamma_1)} \cdot \dfrac{A_1A'}{AA'} \\ \qquad = \dfrac{\sin(\alpha-\gamma_2)}{\sin(\gamma-\gamma_2)} - \dfrac{\sin(\alpha_2-\gamma_2)}{\sin(\gamma-\gamma_2)} \cdot \dfrac{A_2A'}{AA'}. \end{cases}$$

Die Verhältnisse

$$\frac{A_1A'_1}{AA'},\ \frac{A_1A'_2}{AA'},\ \frac{A_2A'_1}{AA'},\ \frac{A_2A'_2}{AA'}$$

erhält man hierauf mittelst der folgenden aus den Gleichungen 6) sich unmittelbar ergebenden Formeln:

$$15)\quad \begin{cases} \dfrac{A_1A'_1}{AA'} = -\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta_1} + \dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\beta_1} \cdot \dfrac{A_1A'}{AA'} + \dfrac{\cos\beta}{\cos\beta_1} \cdot \dfrac{AA'_1}{AA'} \\ \qquad = -\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta_1} + \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} \cdot \dfrac{A_1A'}{AA'} + \dfrac{\sin\beta}{\sin\beta_1} \cdot \dfrac{AA'_1}{AA'}, \\ \dfrac{A_1A'_2}{AA'} = -\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma_1} + \dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\gamma_1} \cdot \dfrac{A_1A'}{AA'} + \dfrac{\cos\gamma}{\cos\gamma_1} \cdot \dfrac{AA'_2}{AA'} \\ \qquad = -\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1} + \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma_1} \cdot \dfrac{A_1A'}{AA'} + \dfrac{\sin\gamma}{\sin\gamma_1} \cdot \dfrac{AA'_2}{AA'}, \\ \dfrac{A_2A'_1}{AA'} = -\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta_2} + \dfrac{\cos\alpha_2}{\cos\beta_2} \cdot \dfrac{A_2A'}{AA'} + \dfrac{\cos\beta}{\cos\beta_2} \cdot \dfrac{AA'_1}{AA'} \\ \qquad = -\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta_2} + \dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} \cdot \dfrac{A_2A'}{AA'} + \dfrac{\sin\beta}{\sin\beta_2} \cdot \dfrac{AA'_1}{AA'}, \\ \dfrac{A_2A'_2}{AA'} = -\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma_2} + \dfrac{\cos\alpha_2}{\cos\gamma_2} \cdot \dfrac{A_2A'}{AA'} + \dfrac{\cos\gamma}{\cos\gamma_2} \cdot \dfrac{AA'_2}{AA'} \\ \qquad = -\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma_2} + \dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\gamma_2} \cdot \dfrac{A_2A'}{AA'} + \dfrac{\sin\gamma}{\sin\gamma_2} \cdot \dfrac{AA'_2}{AA'}. \end{cases}$$

Zur Berechnung der Winkel φ und ψ hat man nach den Gleichungen 6) die folgenden Ausdrücke:

$$16)\begin{cases}\text{tang } \varphi = \dfrac{\sin\alpha - \sin\alpha_1 \cdot \dfrac{A_1A'}{AA'}}{\cos\alpha - \cos\alpha_1 \cdot \dfrac{A_1A'}{AA'}},\\[2ex] \text{tang } \psi = \dfrac{\sin\alpha - \sin\alpha_2 \cdot \dfrac{A_2A'}{AA'}}{\cos\alpha - \cos\alpha_2 \cdot \dfrac{A_2A'}{AA'}};\end{cases}$$

oder

$$16^*)\begin{cases}\text{tang } \varphi = \text{tang } \alpha \cdot \dfrac{1 - \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha} \cdot \dfrac{A_1A'}{AA'}}{1 - \dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{A_1A'}{AA'}},\\[2ex] \text{tang } \psi = \text{tang } \alpha \cdot \dfrac{1 - \dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha} \cdot \dfrac{A_2A'}{AA'}}{1 - \dfrac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{A_2A'}{AA'}};\end{cases}$$

und zur Berechnung der Verhältnisse

$$\frac{AA_1}{AA'},\ \frac{AA_2}{AA'}$$

hat man endlich die folgenden aus den Gleichungen 6) sich ergebenden Formeln:

$$17)\begin{cases}\dfrac{AA_1}{AA'} = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\varphi} - \dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\varphi} \cdot \dfrac{A_1A'}{AA'}\\[2ex] \qquad = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\varphi} - \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\varphi} \cdot \dfrac{A_1A'}{AA'},\\[2ex] \dfrac{AA_2}{AA'} = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\psi} - \dfrac{\cos\alpha_2}{\cos\psi} \cdot \dfrac{A_2A'}{AA'}\\[2ex] \qquad = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\psi} - \dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\psi} \cdot \dfrac{A_2A'}{AA'}.\end{cases}$$

Man muss für φ und ψ diejenigen der beiden zwischen 0 und 360° liegenden Werthe nehmen, welche nach den Formeln 16) jeder dieser beiden Winkel haben kann, die mittelst der Formeln 17) für die Verhältnisse

$$\frac{AA_1}{AA'},\ \frac{AA_2}{AA'}$$

positive Werthe liefern, so dass also über die Art, wie man die Winkel φ und ψ zu nehmen hat, nie eine Unbestimmtheit bleiben kann.

Bezeichnen wir die Coordinaten der Punkte A_1, A_2 und A', A'_1, A'_2 in dem Systeme, dessen Anfang A ist, respective durch X_1, Y_1; X_2, Y_2 und X', Y'; X'_1, Y'_1; X'_2, Y'_2; so ist nach 4) und 1)

$$X_1 = AA_1 \cdot \cos\varphi,\ Y_1 = AA_1 \cdot \sin\varphi;$$
$$X_2 = AA_2 \cdot \cos\psi,\ Y_2 = AA_2 \cdot \sin\psi$$

Digitized by Google

und

$$X' = AA' \cdot \cos\alpha, \quad Y' = AA' \cdot \sin\alpha;$$
$$X'_1 = AA'_1 \cdot \cos\beta, \quad Y'_1 = AA'_1 \cdot \sin\beta;$$
$$X'_2 = AA'_2 \cdot \cos\gamma, \quad Y'_2 = AA'_2 \cdot \sin\gamma;$$

also

$$18)\begin{cases} \frac{X_1}{AA'} = \cos\varphi \cdot \frac{AA_1}{AA'}, & \frac{Y_1}{AA'} = \sin\varphi \cdot \frac{AA_1}{AA'}; \\ \frac{X_2}{AA'} = \cos\psi \cdot \frac{AA_2}{AA'}, & \frac{Y_2}{AA'} = \sin\psi \cdot \frac{AA_2}{AA'} \end{cases}$$

und

$$19)\begin{cases} \frac{X'}{AA'} = \cos\alpha, & \frac{Y'}{AA'} = \sin\alpha; \\ \frac{X'_1}{AA'} = \cos\beta \cdot \frac{AA'_1}{AA'}, & \frac{Y'_1}{AA'} = \sin\beta \cdot \frac{AA'_1}{AA'}; \\ \frac{X'_2}{AA'} = \cos\gamma \cdot \frac{AA'_2}{AA'}, & \frac{Y'_2}{AA'} = \sin\gamma \cdot \frac{AA'_2}{AA'}; \end{cases}$$

mittelst welcher Formeln man also jetzt auch die Verhältnisse der Coordinaten der Punkte A_1, A_2 und A', A'_1, A'_2 in dem Systeme, dessen Anfang A ist, zu der Linie AA' berechnen kann.

Wir wollen jetzt bloss noch zeigen, wie man die Formeln 13), durch welche die Verhältnisse

$$\frac{A_1A'}{AA'}, \quad \frac{A_2A'}{AA'},$$

auf denen die ganze übrige Rechnung beruhet, gefunden werden, nun durch Einführung von Hülfswinkeln zur logarithmischen Rechnung bequem einrichten kann.

Berechnen wir nämlich die drei Hülfswinkel ξ, ξ_1, ξ_2 mittelst der Formeln

$$20)\begin{cases} \operatorname{tang}\xi = \frac{\sin(\alpha-\gamma)\sin(\gamma_1-\gamma_2)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2)}, \\ \operatorname{tang}\xi_1 = \frac{\sin(\alpha_1-\gamma_1)\sin(\gamma-\gamma_2)}{\sin(\alpha_1-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)}, \\ \operatorname{tang}\xi_2 = \frac{\sin(\alpha_2-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1)}{\sin(\alpha_2-\gamma_2)\sin(\gamma-\gamma_1)}; \end{cases}$$

so ist, wie man leicht findet,

$$\frac{A_1A'}{AA'} = \frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2)}{\sin(\alpha_1-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)} \cdot \frac{1-\operatorname{tang}\xi\operatorname{tang}\xi_2}{1-\operatorname{tang}\xi_1\operatorname{tang}\xi_2},$$

$$\frac{A_2A'}{AA'} = -\frac{\sin(\alpha-\gamma)\sin(\gamma_1-\gamma_2)}{\sin(\alpha_2-\gamma_2)\sin(\gamma-\gamma_1)} \cdot \frac{1-\cot\xi\operatorname{tang}\xi_1}{1-\operatorname{tang}\xi_1\operatorname{tang}\xi_2};$$

und folglich

$$21)\begin{cases} \frac{A_1A'}{AA'} = \frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2)\cos(\xi+\xi_2)\cos\xi_1}{\sin(\alpha_1-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)\cos(\xi_1+\xi_2)\cos\xi}; \\ \frac{A_2A'}{AA'} = -\frac{\sin(\alpha-\gamma)\sin(\gamma_1-\gamma_2)\sin(\xi-\xi_1)\cos\xi_2}{\sin(\alpha_2-\gamma_2)\sin(\gamma-\gamma_1)\cos(\xi_1+\xi_2)\sin\xi}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Berechnet man die Hülfswinkel Θ, Θ_1 mittelst der Formeln

$$22)\begin{cases}\text{tang }\Theta = \dfrac{\sin(\alpha-\gamma)\sin(\gamma_1-\gamma_2)\sin(\alpha_2-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2)\sin(\alpha_2-\gamma_2)\sin(\gamma-\gamma_1)},\\ \text{tang }\Theta_1 = \dfrac{\sin(\alpha_1-\gamma_1)\sin(\gamma-\gamma_2)\sin(\alpha_2-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1)}{\sin(\alpha_1-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)\sin(\alpha_2-\gamma_2)\sin(\gamma-\gamma_1)};\end{cases}$$

so ist, wie man leicht findet,

$$\frac{A_1A'}{AA'} = \frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2)}{\sin(\alpha_1-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)}\cdot\frac{1-\text{tang }\Theta}{1-\text{tang }\Theta_1};$$

also, weil

$$1-\text{tang }\Theta = \text{tang }45^\circ - \text{tang }\Theta = \frac{\sin(45^\circ-\Theta)\cdot\sqrt{2}}{\cos\Theta},$$

$$1-\text{tang }\Theta_1 = \text{tang }45^\circ - \text{tang }\Theta_1 = \frac{\sin(45^\circ-\Theta_1)\cdot\sqrt{2}}{\cos\Theta_1}$$

ist:

$$23)\quad \frac{A_1A'}{AA'} = \frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2)\sin(45^\circ-\Theta)\cos\Theta_1}{\sin(\alpha_1-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)\sin(45^\circ-\Theta_1)\cos\Theta}.$$

Weil nun nach 11)

$$\frac{A_2A'}{AA'} = \frac{\sin(\alpha_1-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)\cdot\frac{A_1A'}{AA'} - \sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2)}{\sin(\alpha_2-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1)}$$

ist, so ist nach 23), wie man leicht findet:

$$\frac{A_2A'}{AA'} = \frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2)}{\sin(\alpha_2-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1)}\cdot\frac{\sin(45^\circ-\Theta)\cos\Theta_1-\sin(45^\circ-\Theta_1)\cos\Theta}{\sin(45^\circ-\Theta_1)\cos\Theta},$$

und folglich, weil

$$\sin(45^\circ-\Theta)\cos\Theta_1 - \sin(45^\circ-\Theta_1)\cos\Theta$$
$$= -\cos 45^\circ\sin(\Theta-\Theta_1) = -\frac{\sin(\Theta-\Theta_1)}{\sqrt{2}}$$

ist,

$$24)\quad \frac{A_2A'}{AA'} = -\frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2)\sin(\Theta-\Theta_1)}{\sin(\alpha_2-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1)\sin(45^\circ-\Theta_1)\cos\Theta\cdot\sqrt{2}}.$$

Auf diese Weise kann man also die Verhältnisse

$$\frac{A_1A'}{AA'},\ \frac{A_2A'}{AA'}$$

bloss mittelst der beiden Hülfswinkel Θ und Θ_1 berechnen, da im Gegentheil die zuerst gelehrte Methode die Berechnung der drei Hülfswinkel ξ, ξ_1, ξ_2 erfordert.

Bemerken wollen wir nun endlich noch, dass, wenn an den Punkten A, A_1, A_2 die sechs 180° nicht übersteigenden Winkel $A'AA'_1$, $A'AA'_2$; $A'A_1A'_1$, $A'A_1A'_2$; $A'A_2A'_1$, $A'A_2A'_2$; und etwa noch in dem Punkte A' die zwei 180° nicht übersteigenden Winkel $AA'A_1$, $AA'A_2$ gemessen worden sind, daraus offenbar immer leicht die Winkel hergeleitet werden können, welche in A die Linien AA', AA'_1, AA'_2 mit der Linie AA', in A_1 die Linien A_1A', $A_1A'_1$, $A_1A'_2$ mit einer von A_1 aus der Linie AA' parallel

und nach derselben Seite hin gezogenen Linie, in A_2 die Linien A_2A', $A_2A'_1$, $A_2A'_2$ mit einer von A_2 aus der Linie AA' parallel und nach derselben Seite hin gezogenen Linie einschliessen, wobei alle diese Winkel von der Linie AA', und den derselben von A_1 und A_2 aus parallel gezogenen Linien an immer nach derselben Seite hin von 0 bis 360° gezählt werden. Hat man aber diese letztern Winkel, so kann man die gegenseitige Lage der sechs Punkte A, A_1, A_2 und A', A'_1, A'_2 ganz nach den im Vorhergehenden entwickelten Formeln bestimmen. Die Linie AA' ist dann der positive Theil der Abscissenaxe des zum Grunde liegenden rechtwinkligen Coordinatensystems, und der positive Theil der Ordinatenaxe wird immer nach der im Obigen in dieser Beziehung gegebenen Bestimmung genommen.

Die vorhergehende analytische Auflösung des wichtigen und interessanten Lambert'schen Problems scheint mir vor der gewöhnlichen, z. B. bei Meier Hirsch a. a. O. sich findenden analytischen Auflösung vorzüglich deshalb wesentliche Vorzüge zu haben, weil letztere eine stete Berücksichtigung der Figur, oder vielmehr des durch dieselbe dargestellten speciellen Falls erfordert, welches bei der ersteren gar nicht nothwendig ist, indem dieselbe mittelst der im Obigen entwickelten Formeln ohne alle weitere Berücksichtigung der Figur, allein auf dem Wege der Rechnung, ganz sicher zum Zweck führt, insofern nur erst, wie sich von selbst versteht, die sämmtlichen Grössen, welche als gegeben betrachtet werden, gehörig und ohne alle Zweideutigkeit bestimmt sind.

XIV.

Ueber die abgeleiteten Vierecke, welche von je vier merkwürdigen Punkten des geradlinigen Viereckes gebildet werden.

Von

Herrn Professor C. A. Bretschneider

in Gotha.

So wie das geradlinige Dreieck in den Mittelpunkten des ein- und umgeschriebenen Kreises und in den Durchschnittspunkten der drei Schwerlinien und der drei Höhenperpendikel merkwürdige

Digitized by Google

Punkte darbietet, so lassen sich solche auch bei dem geradlinigen Vierecke auffinden; nur mit dem Unterschiede, dass das letztere immer vier Punkte einer und derselben Gattung darbietet, welche zusammen ein abgeleitetes Viereck bilden, das dem Urviereck auf bestimmte Weise verwandt ist. In dem Folgenden sollen einige dieser abgeleiteten Vierecke näher untersucht werden, wobei ich mich genau derselben Bezeichnung bedienen will, welche ich in meiner Abhandlung „über die trigonometrischen Relationen des geradlinigen Viereckes" (Arch. Thl. II. Heft 3. S. 225) gebraucht habe. Da wo ich Formeln aus dieser Abhandlung citiren muss, soll dies der Kürze halber immer durch das Wort „Relationen" geschehen.

I.

Ich betrachte zuerst das Viereck, welches von den Mittelpunkten der den Hauptdreiecken $T_1T_2T_3T_4$ umgeschriebenen Kreise gebildet wird (Taf. I. Fig. 11.), und nenne diese Mittelpunkte mit den Zeigern der zugehörigen Dreiecke 1, 2, 3, 4. Es leuchtet sofort ein, dass im Vierecke 1234 der Winkel

$$\left.\begin{array}{ll} \angle 314 = 180° - (ab) & \angle 253 = A \\ \angle 324 = 180° - (a_1b_1) & \angle 264 = 180° - B \\ \angle 132 = 180° - (ab_1) & \angle 274 = C \\ \angle 142 = 180° - (a_1b) & \text{u. s. w.} \end{array}\right\} 1.$$

sein muss. Hiernach verwandeln sich die Winkelgrössen, welche im Urvierecke durch $\psi\psi'\psi''$ bezeichnet worden sind, für das abgeleitete Viereck in die Werthe $360° - \psi$, $-\psi'$ und $-\psi''$; d. h. wenn in dem Urvierecke die Hauptecke C ausserhalb des um ABD beschriebenen Kreises liegt, was immer als Normalfall angenommen worden ist; so liegt im abgeleiteten Vierecke 1234 die, C entsprechende Hauptecke 1 innerhalb des um die drei anderen Hauptecken 234 beschriebenen Kreises.

Man erhält ferner für die Seiten des abgeleiteten Viereckes ganz leicht die Werthe:

$$\left.\begin{array}{ll} (13) = \mathfrak{a}_1 = \frac{1}{2}a\,(\cot(b_1c) - \cot(bc_1)) & \\ (24) = \mathfrak{a} = \frac{1}{2}a_1(\cot(bc) - \cot(b_1c_1)) & \\ (14) = \mathfrak{b}_1 = \frac{1}{2}b\,(\cot(a_1c) - \cot(ac_1)) & \\ (23) = \mathfrak{b} = \frac{1}{2}b_1(\cot(ac) - \cot(a_1c_1)) & \\ (34) = \mathfrak{c}_1 = \frac{1}{2}c\,(\cot(ab_1) + \cot(a_1b)) & \\ (12) = \mathfrak{c} = \frac{1}{2}c_1(\cot(ab) + \cot(a_1b_1)) & \end{array}\right\} 2.$$

Nun ist nach „Relat. Nr. 50."

$$\cot(b_1c) - \cot(bc_1) = \frac{\sin(bc_1 - b_1c)}{\sin(bc_1)\sin(b_1c)}$$

$$= \frac{\sin\psi''}{\sin(bc_1)\sin(b_1c)} \cdot \frac{bb_1cc_1}{bb_1cc_1}$$

$$= \frac{2E^2}{4T_1T_2} = 2 \cdot \frac{E^2}{4\sqrt{T_1T_2T_3T_4}} \cdot \sqrt{\frac{T_2T_4}{T_1T_3}}$$

Digitized by Google

Macht man ähnliche Verwandlungen für die übrigen Ausdrücke in Nr. 2. und führt zur Abkürzung die Constante

$$\frac{E^2}{4\sqrt{T_1 T_2 T_3 T_4}} = k \quad \ldots . (3)$$

ein, so erhält man für die Seiten des abgeleiteten Viereckes:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a} &= k a_1 \sqrt{\frac{T_1 T_2}{T_3 T_4}} \quad \mathfrak{b} = k b_1 \sqrt{\frac{T_1 T_4}{T_2 T_3}} \quad \mathfrak{c} = k c_1 \sqrt{\frac{T_3 T_4}{T_1 T_2}} \\ \mathfrak{a}_1 &= k a \sqrt{\frac{T_3 T_4}{T_1 T_2}} \quad \mathfrak{b}_1 = k b \sqrt{\frac{T_2 T_3}{T_1 T_4}} \quad \mathfrak{c}_1 = k c \sqrt{\frac{T_1 T_2}{T_3 T_4}} \end{aligned}\right\} 4.$$

und hieraus sogleich:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 &= k^2 . a a_1 \quad T_1 T_2 : T_3 T_4 = \mathfrak{a}\mathfrak{a} : \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1 &= k^2 . b b_1 \quad T_1 T_4 : T_2 T_3 = \mathfrak{b}\mathfrak{b} : \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_1 \\ \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1 &= k^2 . c c_1 \quad T_2 T_4 : T_1 T_2 = \mathfrak{c}\mathfrak{c} : \mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_1 \end{aligned}\right\} 5.$$

Man bezeichne ferner die Flächenräume, welche im Urviereck durch die Buchstaben $FF'F''\ T_1 T_2 T_3 T_4 \Delta\ E$ angedeutet worden sind (Relat. Nr. 14., 18., 50. und 69.), für das abgeleitete Viereck durch die entsprechenden deutschen Buchstaben $\mathfrak{F}\mathfrak{F}'\mathfrak{F}''\ \mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3\mathfrak{T}_4\ \mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$, so ist:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{F} &= k^2 F \\ \mathfrak{F}' &= k^2 F' \\ \mathfrak{F}'' &= k^2 F'' \\ \mathfrak{D} &= k^2 \Delta \\ \mathfrak{E}^2 &= -k^4 E^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{T}_1 &= k^2 T_1 \\ \mathfrak{T}_2 &= k^2 T_2 \\ \mathfrak{T}_3 &= k^2 T_3 \\ \mathfrak{T}_4 &= k^2 T_4 \end{aligned}\right\} 6.$$

Demnach stehen sämmtliche Flächenräume des Ur- und abgeleiteten Viereckes in constantem Verhältnisse und der Exponent des letzteren ist die Grösse k^2. Es bleibt nun noch übrig diejenigen Grössen zu untersuchen, welche den $\delta_1 \delta_2 \delta_3\ \alpha\beta\gamma$ des Urviereckes entsprechen und die wir für das abgeleitete durch $\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_3\ \alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ bezeichnen wollen. Ich bemerke, dass nach „Relat. Nr. 82." folgende Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} F^2 F''^2 \alpha^2 &= b^2 T_2^2 T_3^2 + b_1^2 T_1^2 T_4^2 - 2bb_1 T_1 T_2 T_3 T_4 \cos B \\ F^2 F''^2 \beta^2 &= a^2 T_3^2 T_4^2 + a_1^2 T_1^2 T_2^2 + 2aa_1 T_1 T_2 T_3 T_4 \cos A \\ F^2 F''^2 \gamma^2 &= a^2 T_2^2 T_4^2 + a_1^2 T_1^2 T_3^2 - 2aa_1 T_1 T_2 T_3 T_4 \cos A \\ &= b^2 T_3^2 T_3^2 + b_1^2 T_1^2 T_4^2 + 2bb_1 T_1 T_2 T_3 T_4 \cos B \end{aligned}\right\} 7.$$

Werden daher in die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_1^2 &= \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{b}_1^2 - 2\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1 \cos B \\ \mathfrak{d}_2^2 &= \mathfrak{c}^2 + \mathfrak{c}_1^2 - 2\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1 \cos C \\ \mathfrak{d}_3^2 &= \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}_1^2 - 2\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 \cos A \end{aligned}$$

die erforderlichen Werthe aus Nr. 4. gesetzt, und aus Nr. 7. gehörig substituirt, so findet man:

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{llll} E^2\mathfrak{d}_1 = 4k^2\alpha\ FF' & \text{oder} & k^2E^2\mathfrak{d}_1 = 4\alpha\ \mathfrak{F}\mathfrak{F}' \\ E^2\mathfrak{d}_2 = 4k^2\beta\ FF'' & & k^2E^2\mathfrak{d}_2 = 4\beta\ \mathfrak{F}\mathfrak{F}'' \\ E^2\mathfrak{d}_3 = 4k^2\gamma\ F'F'' & & k^2E^2\mathfrak{d}_3 = 4\gamma\ \mathfrak{F}'\mathfrak{F}'' \end{array}\right\} 8.$$

Eben so findet man aus den Gleichungen:

$$\mathfrak{F}^2\mathfrak{F}'^2a_1^{\,2} = c^2\mathfrak{T}_1^{\,2}\mathfrak{T}_2^{\,2} + c_1^{\,2}\mathfrak{T}_3^{\,2}\mathfrak{T}_4^{\,2} + 2cc_1\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3\mathfrak{T}_4 \cos C$$

u. s. w. die den vorigen ganz entsprechenden Werthe:

$$\left.\begin{array}{l} 4FF'\alpha_1 = \delta_1E^2 \\ 4FF''\beta_1 = \delta_2E^2 \\ 4F'F''\gamma_1 = \delta_3E^2 \end{array}\right\} 9.$$

Es gehen daher die zugeordneten Seiten des Urviereckes in die doppelten Verbindungslinien der Mittelpunkte je zweier Gegenseiten des abgeleiteten Viereckes über, und eben so gehen die doppelten Verbindungslinien der Mittelpunkte je zweier Gegenseiten des Urviereckes in die zugeordneten Seiten des abgeleiteten Viereckes über. Die Verbindung von Nr. 8. und 9. giebt:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{d}_1\alpha_1 = k^2 \cdot \delta_1\alpha, & \Delta F' \cdot \delta_1\mathfrak{d}_1 = 2FF' \cdot \alpha\alpha_1 \\ \mathfrak{d}_2\beta_1 = k^2 \cdot \delta_2\beta, & \Delta F'' \cdot \delta_2\mathfrak{d}_2 = 2FF'' \cdot \beta\beta_1 \\ \mathfrak{d}_3\gamma_1 = k^2 \cdot \delta_3\gamma, & \Delta F \cdot \delta_3\mathfrak{d}_3 = 2F'F'' \cdot \gamma\gamma_1 \end{array}\right\} 10.$$

wodurch die in Nr. 6. gefundenen Relationen eine neue Erweiterung erhalten. Die eben erwähnte Beziehung zwischen den zugeordneten Seiten und den Mittellinien beider Vierecke gilt unmittelbar auch von den Winkeln, die diese Linien unter sich bilden. Nach „Relat. Nr. 83.“ hat man die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\beta \cos(\alpha\beta) = \dfrac{c^2T_1^{\,2}T_2^{\,2} - c_1^{\,2}T_3^{\,2}T_4^{\,2}}{+F^2F'F''} \\ \alpha\gamma \cos(\alpha\gamma) = \dfrac{b^2T_2^{\,2}T_3^{\,2} - b_1^{\,2}T_1^{\,2}T_4^{\,2}}{-FF'^2F''} \\ \beta\gamma \cos(\beta\gamma) = \dfrac{a^2T_3^{\,2}T_4^{\,2} - a_1^{\,2}T_1^{\,2}T_2^{\,2}}{-FF'F''^2} \end{array}\right\} 11.$$

und nach „Relat. Nr. 8.“ $a_1^{\,2} - a^2 = \delta_2\delta_3 \cos(\delta_{2\,2})$ u. s. w. Bezeichnen nun $(\alpha_1\beta_1)$ $(\alpha_1\gamma_1)$ $(\beta_1\gamma_1)$ und $(\mathfrak{d}_{1\,2})$ $(\mathfrak{d}_{1\,3})$ $(\mathfrak{d}_{2\,3})$ dieselben Winkelgrössen im abgeleiteten Viereck, welche $(\alpha\beta)$ $(\delta_{1\,2})$ u. s. w. im Urviereck andeuten, so findet man alsbald:

$$\left.\begin{array}{ll} \cos(\mathfrak{d}_{1\,2}) = +\cos(\alpha\beta), & \cos(\alpha_1\beta_1) = +\cos(\delta_{1\,2}) \\ \cos(\mathfrak{d}_{1\,3}) = -\cos(\alpha\gamma), & \cos(\alpha_1\gamma_1) = -\cos(\delta_{1\,3}) \\ \cos(\mathfrak{d}_{2\,3}) = -\cos(\beta\gamma), & \cos(\beta_1\gamma_1) = -\cos(\delta_{2\,3}) \end{array}\right\} 12.$$

woraus, da keine dieser Winkelgrössen 180° übersteigen kann, die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} (\mathfrak{d}_{1\,2}) = (\alpha\beta), & (\alpha_1\beta_1) = (\delta_{1\,2}) \\ (\mathfrak{d}_{1\,3}) = 180^\circ - (\alpha\gamma), & (\alpha_1\gamma_1) = 180^\circ - (\delta_{1\,3}) \\ (\mathfrak{d}_{2\,3}) = 180^\circ - (\beta\gamma), & (\beta_1\gamma_1) = 180^\circ - (\delta_{2\,3}) \end{array}\right\} 13.$$

folgen, so dass hiernach die zugeordneten Winkel des einen Viereckes die Winkel der Mittellinien des anderen Viereckes geben.

So wie aus dem Urvierecke das Viereck 1234 abgeleitet wurde; so kann man aus letzterem wieder ein zweites Viereck erhalten, aus diesem ein drittes, und sofort, indem man immerfort die Mittelpunkte der je drei Hauptecken umgeschriebenen Kreise nimmt. Bezeichnet man in dem Vierecke zweiten Ranges die einzelnen Linien und Flächen mit denselben deutschen Buchstaben, welche für das Viereck 1234 gebraucht worden sind, setzt ihnen jedoch zur Unterscheidung eine (2) über, so ist, da die Constante

$$\frac{-\mathfrak{E}^2}{4\sqrt{\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3\mathfrak{T}_4}} = \frac{k^4E^2}{4k^4\sqrt{T_1T_2T_3T_4}} = k$$

wird, also für alle abgeleiteten Vierecke unveränderlich ist,

$$\overset{(2)}{a} = ka_1\sqrt{\frac{\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3}{\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_4}} = k^2a\sqrt{\frac{T_2T_4}{T_1T_3}}\sqrt{\frac{T_1T_3}{T_2T_4}} = k^2a,$$

d. h. die Seiten des abgeleiteten zweiten Viereckes sind denen des Urviereckes gleich proportionirt. Da nun zugleich auch die Winkel der ersteren den Winkeln des letzteren wieder gleich sind, so folgt: dass alle abgeleiteten Vierecke von *geradem* Index einander und dem Urvierecke ähnlich sind, und dass die homologen Seiten und Flächen je zweier unmittelbar auf einander folgender sich beziehungsweise wie die Constanten k^2 und k^4 verhalten.

Geht man vom zweiten abgeleiteten Viereck zum dritten über, so findet man ganz auf gleiche Weise, dass die Seiten des letzteren denen des ersten Vierecks gleich proportionirt sind; und da überdiess beide Figuren dieselben Winkel haben, so sind auch alle abgeleiteten Vierecke von *ungerader* Indexzahl einander ähnlich und die homologen Seiten und Flächen je zweier unmittelbar auf einander folgenden verhalten sich respective wie die Constanten k^2 und k^4.

Was endlich die Halbmesser der den Dreiecken $T_1T_2T_3T_4$ umgeschriebenen Kreise anlangt, die in entsprechender Weise mit $R_1R_2R_3R_4$ bezeichnet werden mögen, so ist es leicht allerhand Relationen zwischen ihnen und den Bestandtheilen des Urviereckes herzuleiten. Man erhält z. B.

$$\frac{R_1R_3 - R_2R_4}{R_1R_4 - R_2R_3} = \frac{\sin A}{\sin B}, \quad \frac{R_2R_4 - R_1R_3}{R_1R_2 - R_3R_4} = \frac{\sin C}{\sin A} \quad \ldots (14)$$

oder

$$\left.\begin{aligned}
\frac{R_2+R_1}{R_2-R_1} &= \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B), & \frac{R_4+R_3}{R_4-R_3} &= \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B)\\
\frac{R_3+R_1}{R_3-R_1} &= \cot\tfrac{1}{2}\psi''\cot\tfrac{1}{2}(B-C), & \frac{R_2+R_4}{R_2-R_4} &= \cot\tfrac{1}{2}\psi''\cot\tfrac{1}{2}(B+C)\\
\frac{R_4+R_1}{R_4-R_1} &= \cot\tfrac{1}{2}\psi'\cot\tfrac{1}{2}(C-A), & \frac{R_3+R_2}{R_3-R_2} &= \cot\tfrac{1}{2}\psi'\cot\tfrac{1}{2}(C+A)
\end{aligned}\right\} 15.$$

indessen bieten sie keinen Ausdruck dar, der sich besonders auszeichnete, und so mögen sie für jetzt übergangen werden.

Digitized by Google

II.

Ich betrachte zweitens das Viereck, welches von den Durchschnittspunkten der Perpendikel gebildet wird, die man aus den Mittelpunkten der Vierecksseiten auf ihre Gegenseiten fällt. Nimmt man zuerst die vier Perpendikel in dem einfachen Vierecke $ABCDA$ erster Form (Taf. I. Fig. 12.) und nennt deren Durchschnittspunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, so bilden die letzteren ein vollständiges Viereck, dessen Winkel genau dieselben Werthe haben, welche in Nr. 1. für die Winkel des in I. betrachteten Viereckes gefunden wurden.

Ferner ist, wenn man die Hülfslinien $FE = GH = \frac{1}{2}c_1$ und $FG = HE = \frac{1}{2}c$ zieht:

$$E2 = \tfrac{1}{2}a_1 \cot(b_1c_1),\quad E4 = \tfrac{1}{2}a_1 \cot(bc)$$
$$F2 = \tfrac{1}{2}b_1 \cot(a_1c_1),\quad F3 = \tfrac{1}{2}b_1 \cot(ac)$$
$$G1 = \tfrac{1}{2}a \cot(bc_1),\quad G3 = \tfrac{1}{2}a \cot(b_1c)$$
$$H1 = \tfrac{1}{2}b \cot(ac_1),\quad H4 = \tfrac{1}{2}b \cot(a_1c)$$

Dies giebt für die Seiten des abgeleiteten Viereckes:

$$(24) = \tfrac{1}{2}a_1(\cot(b_1c_1) - \cot(bc))$$
$$(13) = \tfrac{1}{2}a(\cot(bc_1) - \cot(b_1c))$$
$$(23) = \tfrac{1}{2}b_1(\cot(a_1c_1) - \cot(ac))$$
$$(14) = \tfrac{1}{2}b(\cot(ac_1) - \cot(a_1c))$$

und für dessen Diagonalen die Werthe:

$$(12) = \tfrac{1}{2}c_1(\cot(ab) + \cot(a_1b_1))$$
$$(34) = \tfrac{1}{2}c(\cot(ab_1) + \cot(a_1b)).$$

Die beiden letzten Gleichungen zeigen, dass die von dem Mittelpunkte jeder Diagonale des einfachen Viereckes $ABCD$ auf die andere Diagonale gefällte Senkrechte durch zwei Gegenecken des Viereckes 1234 hindurchgehen und daher eine Diagonale des Letzteren bilden muss. Es bilden daher die sechs Perpendikel, welche von den Mittelpunkten der sechs Seiten des vollständigen Urviereckes auf die Gegenseiten gefällt werden, wiederum ein einziges abgeleitetes Viereck mit sechs Seiten.

Zweitens aber ergiebt sich aus der Vergleichung der vorstehenden Ausdrücke mit denen in Nr. 2. gefundenen, dass die Seiten des hier betrachteten abgeleiteten Viereckes den Seiten des in §. I. untersuchten vollständig und in gleicher Aufeinanderfolge gleich sind. Demnach ist das hier betrachtete Viereck dem des §. I. congruent, und je zwei homologe Seiten beider Figuren sind einander parallel; ein Satz der sich auch sehr leicht auf synthetischem Wege beweisen lässt. Auch ist auf der Stelle klar, dass die Gerade, welche irgend zwei homologe Ecken beider Vierecke verbindet, durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der drei Mittellinien $\delta_1\delta_2\delta_3$ des Urviereckes hindurchgehen, und von demselben halbirt werden muss.

Ist das Urviereck ein Sehnenviereck, so verwandelt sich das

Digitized by Google

abgeleitete Viereck des §. I. in einen Punkt, nämlich den Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises. Daraus folgt dann sogleich der interessante Satz: „dass in jedem Sehnenvierecke die sechs Perpendikel aus den Mittelpunkten der sechs Seiten auf ihre Gegenseiten sich in einem und demselben Punkte schneiden, welcher mit dem Centrum des umgeschriebenen Kreises und dem Durchschnittspunkte der drei Mittellinien des Viereckes in einer und derselben Geraden liegt, die von dem letzteren Punkte genau halbirt wird.

III.

Ein drittes Viereck, welches mit den bereits untersuchten eng zusammenhängt, entsteht durch die Durchschnittspunkte der Höhenperpendikel in jedem der vier Hauptdreiecke $T_1T_2T_3T_4$, (Taf. I. Fig. 13.) Zieht man die Gerade $K1 \parallel AD$, so wird $K3 = C3 - B1 + a_1 \sin A = b(\cot(b,c) - \cot(bc_1)) + a_1 \sin A$. Dies giebt durch Substitution aus Nr. 2. die Gleichung $K3 = 2a_1 + a_1 \sin A$, mithin $(13)^2 = (K3)^2 + a_1^2 \cos^2 A$. Macht man für die übrigen Seiten des neuen Viereckes ähnliche Entwickelungen, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}
(24)^2 &= a^2 + 4a^2 - 4a\,a \sin A\\
(13)^2 &= a_1^2 + 4a_1^2 + 4a_1 a_1 \sin A\\
(23)^2 &= b^2 + 4b^2 - 4b\,b \sin B\\
(14)^2 &= b_1^2 + 4b_1^2 + 4b_1 b_1 \sin B\\
(12)^2 &= c^2 + 4c^2 - 4c\,c \sin C\\
(34)^2 &= c_1^2 + 4c_1^2 + 4c_1 c_1 \sin C
\end{aligned}\right\} 16.$$

Diese Ausdrücke lassen aber noch eine bemerkenswerthe Umformung zu. Es ist nämlich nach „Relat. Nr. 95.“

$$\left.\begin{aligned}
a^2 T_2T_4 - a_1^2 T_1T_3 &= F''E^2\\
b^2 T_3T_1 - b_1^2 T_1T_4 &= F'E^2\\
c^2 T_1T_2 - c_1^2 T_3T_4 &= F\,E^2
\end{aligned}\right\} 17.$$

und mit Hülfe dieser Gleichungen und der Ausdrücke Nr. 4. verwandeln sich die in Nr. 16. zusammengestellten Werthe der einzelnen Viereckseiten in nachfolgende:

$$\left.\begin{aligned}
(24)^2 &= a^2 \cdot 2\frac{1+2k^2}{k^2} - a^2\\
(13)^2 &= a_1^2 \cdot 2\frac{1+2k^2}{k^2} - a_1^2\\
(23)^2 &= b^2 \cdot 2\frac{1+2k^2}{k^2} - b^2\\
(14)^2 &= b_1^2 \cdot 2\frac{1+2k^2}{k^2} - b_1^2\\
(12)^2 &= c^2 \cdot 2\frac{1+2k^2}{k^2} - c^2\\
(34)^2 &= c_1^2 \cdot 2\frac{1+2k^2}{k^2} - c_1^2
\end{aligned}\right\} 18.$$

Digitized by Google

Mittelst dieser, in der That sehr einfachen, Ausdrücke kann nun jeder andere zu dem neuen Vierecke gehörige Werth leicht gefunden werden. Nennt man z. B. die doppelten Verbindungslinien der Mittelpunkte der Seiten (24) und (13), ferner (23) und (14) und endlich (12) und (34) beziehungsweise $t_1 t_2 t_3$, so ist, weil stets

$$(aa - a_1 a_1) \sin A = (bb - b_1 b_1) \sin B = (cc - c_1 c_1) \sin C = \frac{E^2}{\Delta}$$

sein muss,

$$\left.\begin{aligned} t_1^2 &= 4(1+2k^2)\,\frac{FF'}{\Delta F'}\,\alpha^2 - \delta_1^2 = \delta_1^2 + \frac{E^4\alpha^2}{\Delta^2 F'^2} - \frac{4E^2}{\Delta} \\ t_2^2 &= 4(1+2k^2)\,\frac{FF'}{\Delta F}\,\beta^2 - \delta_2^2 = \delta_2^2 + \frac{E^4\beta^2}{\Delta^2 F'^2} - \frac{4E^2}{\Delta} \\ t_3^2 &= 4(1+2k^2)\,\frac{F'F'}{\Delta F}\,\gamma^2 - \delta_3^2 = \delta_3^2 + \frac{E^4\gamma^2}{\Delta^2 F^2} - \frac{4E^2}{\Delta} \end{aligned}\right\} 19.$$

Bezeichnet man ferner die zu $t_1 t_2 t_3$ gehörigen charakteristischen Winkel des neuen Viereckes beziehungsweise mit $A'B'C'$, so ist:

$$\left.\begin{aligned} t_2^2 - t_3^2 &= 4(24)\,(13)\cos A' = 4(1+4k^2)\,aa_1 \cos A \\ t_3^2 - t_1^2 &= 4(23)\,(14)\cos B' = 4(1+4k^2)\,bb_1 \cos B \\ t_1^2 - t_2^2 &= 4(12)\,(34)\cos C' = 4(1+4k^2)\,cc_1 \cos C \end{aligned}\right\} 20.$$

Für die von je zwei Seiten des abgeleiteten Viereckes eingeschlossenen Winkel ergeben sich die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} 2(24)\,(23)\cos(\hat{32}4) &= -4T_1\{\cot(ab) + 2(1+2k^2)\cot(a_1 b_1)\} \\ 2(14)\,(13)\cos(\hat{31}4) &= -4T_2\{\cot(a_1 b_1) + 2(1+2k^2)\cot(ab)\} \\ 2(24)\,(14)\cos(\hat{21}4) &= -4T_3\{\cot(ab_1) + 2(1+2k^2)\cot(a_1 b)\} \\ 2(23)\,(13)\cos(\hat{23}1) &= -4T_4\{\cot(a_1 b) + 2(1+2k^2)\cot(ab_1)\} \end{aligned}\right\} 21.$$

Auf einem anderen allerdings ziemlich weitläufigen Wege findet man auch:

$$\left.\begin{array}{l}
\cot(\hat{423}) = -\cot(ab) + \cot(a_1b_1) \\
\cot(\hat{314}) = -\cot(a_1b_1) + \cot(ab) \\
\cot(\hat{241}) = -\cot(ab_1) + \cot(a_1b) \\
\cot(\hat{231}) = -\cot(a_1b) + \cot(ab_1)
\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{c_1^2\cot(a_1b_1) - a^2\cot(b_1c) - b^2\cot(a_1c)}{2T_1} \\
\dfrac{c_1^2\cot(ab) - a_1^2\cot(bc) - b_1^2\cot(ac)}{2T_2} \\
\dfrac{c^2\cot(a_1b) - a^2\cot(bc_1) - b_1^2\cot(a_1c_1)}{2T_3} \\
\dfrac{c^2\cot(ab_1) - a_1^2\cot(b_1c_1) - b^2\cot(ac_1)}{2T_4}
\end{array}\right\} \quad 22.$$

woraus sich ziemlich einfache Formeln für die Flächeninhalte der vier Hauptdreiecke des Viereckes 1234 ableiten lassen. Es hat indessen kein grosses Interesse, diese Untersuchung weiter fortzusetzen, und ich beschränke mich daher darauf, noch zu erwähnen, dass wenn das Urviereck ein Sehnenviereck wird, alsdann nach Nr. 16. und 21. auch

$$(24) = a \quad (23) = b \quad (12) = c$$

$$(13) = a_1 \quad (14) = b_1 \quad (34) = c_1$$

Digitized by Google

$$\angle \hat{423} = (ab) \qquad \angle \hat{241} = (ab_1)$$

$$\angle \hat{413} = (a_1 b_1) \quad \angle \hat{231} = (a_1 b)$$

werden muss. Construirt man daher in einem Sehnenvierecke die Durchschnittspunkte der Höhenperpendikel in den vier Hauptdreiecken, so bilden diese die Ecken eines dem Urvierecke congruenten Viereckes. Wollte man noch weiter gehen und auch noch die gegenseitige Lage der gleichen Seiten erörtern, so müsste man in dem allgemeinen Vierecke 1234 die Verbindungslinien jedes Eckpunktes des letzteren mit der entsprechenden Ecke des Urviereckes suchen. Man erhält für diese Geraden sehr elegante Werthe, wie z. B.

$$\left.\begin{aligned}(A2)^2 &= \frac{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2\delta_2\delta_3 \cos(\delta_{23} - 2(b_1c_1)}{4\sin^2(b_1c_1)} \\ (C1)^2 &= \frac{\delta_2^2 + \delta_3^2 - 2\delta_2\delta_3 \cos(\delta_{23} - 2(bc_1))}{4\sin^2(bc_1)}\end{aligned}\right\} 23.$$

und findet dadurch, dass im Sehnenvierecke und dem aus ihm abgeleiteten Vierecke die homologen Seiten auch noch *parallel* sind; so dass also die Ecken des einen von beiden Vierecken immer auch die Durchschnittspunkte der Höhenperpendikel in den vier Hauptdreiecken des anderen sind *).

XV.

Ueber die perspectivischen Lagen eines Strahlenbüschels auf einer projectivischen Geraden.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin.

1. Wenn ein Strahlenbüschel a, b, c, d von einer beliebigen Geraden geschnitten wird, so findet bekanntlich zwischen den Ab-

*) Von den hier erörterten Sätzen, insofern sie sich auf ein Viereck beziehen, das kein Sehnenviereck ist, möchte wohl kein einziger bekannt sein. Die durch specielle Anwendung auf das Sehnenviereck daraus abgeleiteten Theoreme sind bereits bekannt, und finden sich zum Theil bei Puissant und in Crelle's Journal, von wo aus sie in die Anhänge zur deutschen Uebersetzung der van Swinden'schen Geometrie übergegangen sind. Eine vollständige Zusammenstellung aller dieser Sätze über des Sehnenviereck, mit eleganten synthetischen Beweisen, enthält Kunzes Lehrbuch der Geometrie.

Digitized by Google

ständen der beziehlichen Durchschnittspunkte a, b, c, d dasselbe Doppelverhältniss statt, wie zwischen den Sinus der entsprechenden Winkel des Strahlenbüschels, nämlich

$$\frac{ab}{bc} : \frac{ad}{dc} = \frac{\sin ab}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin dc}.$$

Umgekehrt, findet zwischen den vier Punkten a, b, c, d einer Geraden und zwischen vier Strahlen eines Strahlenbüschels *a*, *b*, *c*, *d* eine Gleichheit der obigen Doppelverhältnisse statt, so kann man das Strahlenbüschel und die Gerade so legen, dass die Punkte a, b, c, d auf den entsprechenden Strahlen liegen, d. h. dass beide Gebilde sich in perspectivischer Lage befinden.

Da nun

$$\frac{ab}{bc} : \frac{ad}{dc} = \frac{ba}{ad} : \frac{bc}{cd} = \frac{cb}{da} : \frac{cb}{ba} = \frac{bc}{cb} : \frac{da}{ab}$$

ist, so kann jedes dieser Doppelverhältnisse dem obigen Verhältnisse zwischen den Sinus gleich gesetzt werden, und es ergiebt sich dann, dass die Punkte

a, b, c, d

nicht nur den Strahlen

1) *a*, *b*, *c*, *d*

sondern auch denen

2) *b*, *a*, *d*, *c*

3) *c*, *d*, *a*, *b*

4) *d*, *c*, *b*, *a*

entsprechend gedacht und mithin auch beide Gebilde auf diese vierfache Art in perspectivische Lage gebracht werden können.

Sind überdies die Strahlen des Büschels und daher auch die Punkte der Geraden harmonisch, d. h. ist $\frac{ab}{bc} : \frac{ad}{dc} = 1$;

so hat man auch noch

$$\frac{ab}{bc} : \frac{ad}{dc} = 1 =$$

$$\frac{ad}{dc} : \frac{ab}{bc} = \frac{da}{ab} : \frac{dc}{cb} = \frac{cb}{ba} : \frac{cd}{da} = \frac{bc}{cd} : \frac{ba}{ad}.$$

Vergleicht man diese vier Doppelverhältnisse wieder mit dem der Sinus, so findet sich, dass die Punkte

a, b, c, d

auch den Strahlen

5) *a*, *d*, *c*, *b*

6) *d*, *a*, *b*, *c*

7) *c*, *b*, *a*, *d*

8) *b*, *c*, *d*, *a*

entsprechend genommen werden können und dass also in dem be-

Digitized by Google

sondern Falle von harmonischen Gebilden eine achtfache perspectivische Lage möglich wird.

Insofern aber bei einer jeden der angeführten Combinationen der Mittelpunkt des Strahlenbüschels sowohl diesseits als (symmetrisch) jenseits der Geraden liegen kann, so wird sich die Anzahl der möglichen Lagen verdoppeln und im Allgemeinen 8, aber im Falle von harmonischen Gebilden 16 sein. Bezeichnet man die verschiedenen Oerter des Mittelpunkts des perspectivischen Strahlenbüschels, die oberhalb der Geraden befindlich sind, dem aufgestellten Schema gemäss. mit 1, 2, 3, 4, (5, 6, 7, 8), und die entsprechenden unterhalb der Geraden mit 1′, 2′, 3′, 4′, (5′, 6′, 7′, 8′), so lehrt der Anblick jenes Schemas sogleich, welcher Winkel des Strahlenbüschels auf irgend einem Abschnitte der gegebenen Geraden bei irgend einer der perspectivischen Lagen steht. So z. B. steht auf ac bei der Lage 1) der Winkel *ac*, aber bei der Lage 3) der Winkel *ac′*, d. h. der Nebenwinkel jenes Winkels *ac*, weil in diesem Falle zwischen den Strahlen *a* und *c* der Strahl *d* liegt, während im ersten Falle der Strahl *b* dazwischen liegt. Dasselbe gilt für die Lage 3′), nur dass hier der Winkel *ac′* unterhalb der Geraden und desshalb der Winkel *ac* oberhalb der Geraden auf ac steht.

2. Denkt man sich nun die Gerade in der Ebene festliegend, so darf offenbar nur einer jener Mittelpunkte 1, 2, u. s. w. gegeben sein, und es wird dadurch auch das Strahlenbüschel und demnächst auch alle übrigen Mittelpunkte bestimmt sein. Es kann also gefragt werden, in welcher Beziehung diese 8 (oder 16) Mittelpunkte zu einander stehen, und wie aus einem von ihnen alle übrigen durch eine einfache Construction zu finden sind. (S. Steiner's Entwickelung der Abhängigkeit u. s. w. Anhang). Die gegenwärtige Abhandlung soll diese Frage beantworten.

3. Es werde fürs erste ein beliebiges Strahlenbüschel betrachtet. Der Anblick des Schemas zeigt ohne weiteres, dass in den Mittelpunkten 1 und 2 der Winkel *ab* auf ab steht. Folglich liegen die Punkte a, b, 1, 2 in einem Kreise. Dasselbe gilt von den Punkten c, d, 1, 2, weil dem Schema zufolge in den Mittelpunkten 1 und 2 der Winkel *cd* auf cd steht. Zieht man die gemeinschaftliche Sehne 12 dieser beiden Kreise (Taf. II. Fig. 1.) bis zu ihrem Durchschnittspunkte f mit der Geraden ad, so ist die Potenz des ersten Kreises in Bezug auf f:

$$f1 \cdot f2 = fa \cdot fb;$$

und die des zweiten Kreises:

$$f1 \cdot f2 = fc \cdot fd;$$

folglich

$$fa \cdot fb = fc \cdot fd.$$

Der Punkt f also, in welchem die Gerade 12 die Gerade ad schneidet, ist nur durch die Punkte a, b, c, d bestimmt und unabhängig von den Winkeln des Strahlenbüschels.

Eben so liegen die Punkt a, b, 3, 4 und c, d, 3, 4 in Kreisen, deren gemeinschaftliche Sehne 34 die Gerade ad in einem Punkte f schneiden wird, für welchen

Digitized by Google

$$f3 \cdot f4 = fa \cdot fb,$$
$$f3 \cdot f4 = fc \cdot fd;$$

folglich

$$fa \cdot fb = fc \cdot fd$$

ist, und der daher mit dem Punkte f zusammenfällt, da beide innerhalb b und c liegen.

Ganz auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass (wegen der Kreise ad14, bc14; ad23, bc23) die Geraden 14 und 23 sich auf der Geraden ad in einem Punkte g treffen, für welchen

$$g1 \cdot g4 = g2 \cdot g3 =$$
$$ga \cdot gd = gb \cdot gc$$

ist, und der ebenso wie f nur durch die Punkte *a*, *b*, *c*, *d* bestimmt ist.

Aus dem Obigen folgt nun unmittelbar, dass die Mittelpunkte 1, 2, 3, 4 auf einem Kreise liegen, dessen Potenz in Bezug auf f gleich $fa \cdot fb = fc \cdot fd$. und in Bezug auf g gleich $ga \cdot gd = gb \cdot gc$ ist, und dessen Mittelpunkt deshalb senkrecht über einem bestimmten Punkte e der Geraden ad liegt. Dieser Punkt e erhält seine Bestimmung dadurch, dass die Potenz des Kreises in Bezug auf f gleich $fe \cdot fg$, folglich in Bezug auf g gleich $ge \cdot gf$ und in Bezug auf e gleich $ef \cdot eg$ ist.

4. Die angeführten Beziehungen der Punkte e, f, g ergeben auch noch andere Bestimmungen derselben. Beschreibt man nämlich über ac und bd als Durchmessern zwei Kreise, die sich in o schneiden, so ist offenbar wegen $ga \cdot gd = gb \cdot gc$ der Punkt g ihr äusserer Aehnlichkeitspunkt, und der Punkt f wegen $fa \cdot fb = fc \cdot fd$ ihr innerer Aehnlichkeitspunkt. Folglich geht der Kreis über fg als Durchmesser ebenfalls durch o (er hat mit den Kreisen über ac und bd eine gemeinschaftliche Potenzlinie); und es ist

$$fa \cdot fb = fo \cdot fo,$$
$$ga \cdot gd = go \cdot go.$$

Da nun die Potenz des Kreises 1234 $fa \cdot fb = fe \cdot fg$ ist, so folgt

$$fe \cdot fg = fo \cdot fo,$$

mithin ist oe senkrecht auf ad oder e liegt auf der gemeinschaftlichen Sehne der Kreise über ac und bd. Deshalb hat man endlich noch

$$ea \cdot ec = eb \cdot ed \ (= eo \cdot eo = ef \cdot eg),$$

welche Bestimmung des Punktes e den obigen für die Punkte f und g ähnlich ist. Auch hat sich ergeben, dass die Potenz des Kreises 1234 in Bezug auf die Punkte e, f, g beziehlich $eo \cdot eo$, $fo \cdot fo$, $go \cdot go$ ist, so wie sie überhaupt für irgend einen Punkt p der Geraden ad gleich $po \cdot po$ sein wird.

5. Ueber die in 3. entwickelten Lagenbeziehungen liesse sich noch viel Einzelnes bemerken. Zieht man z. B. irgend einen Kreis 1234, den angegebenen Bedingungen entsprechend, und legt man von g aus die beiden Tangenten an denselben, so fallen offenbar die Punkte 1 und 4 in den einen Berührungspunkt (14) und die Punkte 2 und 3 in den andern (23) zusammen, wo $g(14) = g(23) = go$.

Digitized by Google

Dieser Fall findet statt, wenn in dem (übrigens immer projectivischen) Strahlenbüschel *abcd* der Winkel $ab = cd$ ist, wie das Schema zeigt. Die Punkte (14) und (23), für welche die vier Mittelpunkte in zwei zusammenfallen, liegen daher auf zwei Kreisen, deren Mittelpunkte g und f, und deren Halbmesser beziehlich go und fo sind. Für den Durchschnitt o dieser beiden Kreise fallen alle vier Mittelpunkte in diesen einen zusammen. U. s. w. Ich will mich aber bei dergleichen Betrachtungen, die aus dem Gesagten von selbst folgen, nicht aufhalten.

6. Aus der Gestaltung der Figur erhellet nun auch, dass die Punkte 1, 2, 3′, 4′; 1, 2′, 3′, 4 ebenfalls in Kreisen liegen. Wendet man das oben befolgte Verfahren z. B. auf die Punkte 1, 2, 3′, 4′ an, so findet sich, dass der Mittelpunkt dieses Kreises auf einer im Punkte g Senkrechten liegt, und dass die Geraden 12, 3′4′ sich in f, dagegen die Geraden 13′, 24′ sich in e schneiden. U. s. w.

7. Wenn das Gebilde a, b, c, d nicht mehr gegeben ist, so fallen auch alle unter 3. aufgestellten Bedingungen für den Kreis 1234 weg, und es bleibt unter den Punkten 1, 2, 3, 4 nur die Beziehung übrig, dass sie auf einem Kreise liegen. Es können demnach umgekehrt vier beliebige im Kreise liegende Punkte 1, 2, 3, 4 die vier verschiedenen Lagen des Mittelpunkts eines Strahlenbüschels vorstellen und man kann aus ihnen ein zugehöriges Gebilde a, b, c, d folgendermassen ableiten.

Der Durchschnittspunkt von 14 und 23 heisse g, der von 12 und 34 heisse f. Die Senkrechte aus dem Mittelpunkte des Kreises 1234 auf fg bestimmt auf dieser den Punkt e und auf dem über fg als Durchmesser beschriebenen Kreise den Punkt o. Nun wähle man auf fg den ersten Punct a beliebig; bestimme dann mittelst des rechten Winkels aoc den Punkt c und mittelst der Beziehung $gb \cdot ge = go \cdot go$ den Punkt b; der rechte Winkel bod bestimmt dann den vierten Punkt d. Da $gb \cdot ge = go \cdot go$ ist, so wird auch $ga \cdot gd = go \cdot go$; mithin ist g der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise über ac und bd. Da endlich gof ein rechter Winkel ist, so ist f der innere Aehnlichkeitspunkt und folglich $fa \cdot fb = fe \cdot fd = fo \cdot fo$. Die Punkte a, b, c, d haben also die zufolge 3. erforderliche Lage in Bezug auf g, e, f, und folglich werden die Strahlenbüschel 1a, 1b, 1c, 1d; 2b, 2a, 2d, 2c; u. s. w. identisch sein.

8. So viel über das allgemeine Strahlenbüschel. Ich komme nun zu dem Fall, in welchem die Gebilde harmonisch sind, und noch vier andere Mittelpunkte 5, 6, 7, 8 existiren.

Fürs Erste ist aus der zweiten Hälfte des Schemas klar, dass diese Mittelpunkte dieselbe Beziehung zu einander haben, als die Mittelpunkte 1, 2, 3, 4. Sie werden daher in einem Kreise liegen, der mit dem Kreise 1234 die Gerade ad zur Linie der gleichen Potenzen hat; und es wird 58 und 67 mit 14 und 23 in g zusammentreffen u. s. w. Dass aber die Kreise 1234 und 5678 zusammenfallen, soll im Folgenden bewiesen werden.

Das Schema zeigt, dass die Punkte a, c, 1, 3′, 5′, 7 und a, c, 1′, 3, 5, 7′ in Kreisen liegen. (Taf. II. Fig. 2.) Diese Kreise sind einander gleich und haben nur eine symmetrische Lage zu ac. Ferner geht durch die Punkte bd13′57′ ein Kreis, der also oberhalb ac den ersten in 1 und den zweiten in 5 schneidet. Man verbinde den Punkt 1 mit dem Punkte p, Mitte von ac, durch eine Gerade

pl, die den Kreis ac1'357' oberhalb ac im Punkte m und den Kreis bd13'57' zum zweitenmale im Punkte n schneidet. Dann hat man

$$pl \cdot pn = pb \cdot pd$$

als Potenz des Kreises bd13'57' in Bezug auf p, und

$$pl \cdot pm = pa \cdot pa,$$

weil p offenbar der innere Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise über ac ist. Nun ist aber, weil a, b, c, d harmonisch sind,

$$pa \cdot pa = pb \cdot pd,$$

folglich auch

$$pl \cdot pm = pl \cdot pn.$$

Es fällt daher m mit n in den einen Punkt 5 zusammen, in dem sich die beiden Kreise ac1'357' und bd13'57' schneiden; die Punkte p, 1, 5 liegen auf einer Geraden und es ist

$$pl \cdot p5 = pa \cdot pa = po \cdot po.$$

Dies letzte Produkt ist aber die Potenz des Kreises 1234 in Bezug auf p; folglich liegt der Punkt 5 auf diesem Kreise und daher auch die Punkte 6, 7, 8.

Auf dieselbe Art überzeugt man sich (am kürzesten durch gehörige Vertauschung der Buchstaben des Schemas), dass auch die Punkte p, 4, 6; p, 2, 8; p, 3, 7; ferner, wenn die Mitte von bd mit q bezeichnet wird, q, 1, 7; q, 2, 6; q, 3, 5; q, 4, 8 auf Geraden liegen.

9. Es ist nun noch das Verhalten der Punkte g, f, p, q zu einander zu ermitteln, in denen sich die Verbindungslinien der auf dem Kreise vertheilten Mittelpunkte 1, 2, 3 . . . 8 zu vieren schneiden, um die Beziehung derselben unabhängig von dem harmonischen Gebilde a, b, c, d vollständig festzustellen.

Einerseits ist das Strahlenbüschel 1g, 1p, 1f, 1q mit dem Strahlenbüschel 8q, 8g, 8p, 8f identisch und folglich auch projectivisch, weil sich die entsprechenden Strahlen beziehlich in den Punkten 4, 5, 2, 7 des Kreisumfanges schneiden und deshalb die Winkel zwischen je zwei Paaren entsprechender Strahlen einander gleich sind. Andrerseits ist dasselbe Strahlenbüschel 1g, 1p, 1f, 1q mit dem Strahlenbüschel 8g, 8p, 8f, 8q projectivisch, weil sich die entsprechenden Strahlen in den Punkten der Geraden g, p, f, q schneiden. Folglich *) sind beide Strahlenbüschel harmonisch, folglich auch die Punkte g, p, f, q.

Diesem zufolge ergiebt sich eine neue Bestimmung der Punkte g und f aus den gegebenen harmonischen a, b, c, d. Da nämlich $pa \cdot pa = po \cdot po = pb \cdot pd$ ist, so berührt die Gerade po den Kreis

*) In der Abhandlung des Herrn Dr. Rädell (Th. I. Nr. XXIII.) ist gezeigt worden, dass wenn zwei Gebilde (Strahlenbüschel oder Punktenreihe) a, b, c, d; a', b', c', d' projectivisch sind und es auch in der Beziehung a, b, c, d und a', d', c', b' (oder c', b', a', d') bleiben, in welcher ein zugeordnetes Paar b', d' (oder a', c') vertauscht worden ist, dann beide Gebilde harmonisch sind. Der Anblick der zweiten Hälfte unsers Schemas lehrt, dass dies auch dann der Fall ist, wenn neben der Projectivität von a, b, c, d und a', b', c', d' noch die von a, b, c, d und b', c', d', a' (oder d', a', b', c') stattfindet.

Digitized by Google

über bd in e, und steht mithin senkrecht auf dem Halbmesser derselben qo. Daher liegt der Mittelpunkt r des Kreises poq in der Mitte von pq. Aus demselben Grunde liegt wegen des harmonischen Gebildes g, p, f, q, wenn die Mitte von gf mit h bezeichnet wird, der Mittelpunkt des Kreises hor in der Mitte von hr. Man darf also nur durch den Punkt o und die Mitte r von pq einen Kreis ziehen, dessen Mittelpunkt auf ad liegt; dann bestimmt der andere Endpunkt des Durchmessers den Punkt h. Der Kreis um h mit dem Halbmesser ho schneidet dann in den Punkten g und f ein.

10. Aus dem Gesagten ersieht man leicht, dass auf irgend einem Kreise nur vier von den Mittelpunkten beliebig angenommen werden dürfen, dass aber dann jedesmal die vier zugehörigen bestimmt werden können. Hat man z. B. aus den vier willkührlichen Punkten 1, 2. 3, 4, wie unter 7., die Punkte g, e, f, o abgeleitet, so lege man von h (Mitte von gf) aus den rechten Winkel hor, der den Punkt r bestimmt. Aus r beschreibe man mit dem Halbmesser ro einen Kreis, der die Punkte p und q ergeben wird. Zieht man nun die Geraden p1, p2, p3, p4, so schneiden diese den Kreis 1234 noch einmal in den gesuchten Punkten 5, 6, 7, 8; und dann liegen auch noch auf Geraden die Punkte g, 5, 8; g, 6, 7; f, 5, 6, f, 7, 8; q, 1, 7, q, 2, 6; q, 3, 5; q, 4, 8. — Die harmonischen Punkte a, b, c, d, in Bezug auf welche die eben gefundenen Punkte die verschiedenen Lagen des Mittelpunkts eines harmonischen Strahlenbüschels bezeichnen, werden endlich mittelst der Kreise um p und q mit den bezüglichen Halbmessern po und qo bestimmt.

11. Da zwischen den Punkten 1 bis 8 mehr Beziehungen stattfinden, als zur Bestimmung ihrer gegenseitigen Abhängigkeit erforderlich sind, so bilden die überzähligen Bedingungen Lehrsätze, die sich unabhängig von dem harmonischen Gebilde a, b, c, d aussprechen lassen. Ein Beispiel hievon bietet die vorige Nummer, in der von beliebigen vier Punkten im Kreise ausgegangen wurde. Man kann aber auch von den beliebigen vier harmonischen Punkten g, p, f, q ausgehen. Beschreibt man nämlich irgend einen Kreis von der öfters erwähnten Beschaffenheit, so bestimmen sich, von einem beliebigen Punkte 1 desselben ausgehend, z. B. durch die Züge g14; q48; p82; q26; f65; q53; p37 der Reihe nach die Punkte 4, 8, 2, 6, 5, 3, 7, deren Lage so beschaffen ist, dass die Züge q17; g58; g26; u. s. w. ebenfalls geradlinig sind.

Ausserdem lassen sich in der Figur noch viele geradlinige Punktenreihen, so wie Zusammentreffen von Strahlen und sonstige Eigenheiten nachweisen, wenn man gewisse Theile der Figur veränderlich sein lässt. Ich führe sie nicht an, weil sie nicht von Wichtigkeit zu sein scheinen.

Digitized by Google

XVI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Man soll die folgenden goniometrischen Formeln beweisen.

1) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)$
$=4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$

2) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)$
$=4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$

3) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma+\sin(\alpha+\beta+\gamma)$
$=4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$

4) $\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta+\gamma)$
$=4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$

5) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)}$
$=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$

6) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma+\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$
$=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$

7) $\frac{\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)}$
$=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$

8) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta+\gamma)}=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

9) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma+\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)}=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

10) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)=4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

11) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)=4\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

12) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)=4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

13) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha-\beta)=4\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

14) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos(\alpha\pm\beta)=4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}(\alpha\pm\beta)-1$

15) $\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha\pm\beta)=\pm 4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}(\alpha\pm\beta)+1$

16) $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)$
$=-4\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$

Digitized by Google

17) $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)$
$= 4\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)-1$

18) $\sin(\alpha+\beta)^2+\sin(\alpha-\beta)^2=1-\cos 2\alpha\cos 2\beta$

19) $\sin(\alpha+\beta)^2-\sin(\alpha-\beta)^2=\sin 2\alpha\sin 2\beta$

20) $\cos(\alpha+\beta)^2+\cos(\alpha-\beta)^2=1+\cos 2\alpha\cos 2\beta$

21) $\cos(\alpha+\beta)^2-\cos(\alpha-\beta)^2=-\sin 2\alpha\sin 2\beta$

22) $\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\sin(\alpha\pm\beta)^2=2\{1-\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha\pm\beta)\}$

23) $\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\sin(\alpha\pm\beta)^2=2\{1\pm\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha\pm\beta)\}$

24) $\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\cos(\alpha\pm\beta)^2=1\mp 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha\pm\beta)$

25) $\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos(\alpha\pm\beta)^2=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha\pm\beta)$

26) $\sin\alpha^2+\sin\beta^2-\sin(\alpha\pm\beta)^2=\mp 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha\pm\beta)$

27) $\cos\alpha^2+\cos\beta^2-\sin(\alpha\pm\beta)^2=2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha\pm\beta)$

28) $\sin\alpha^2+\sin\beta^2-\cos(\alpha\pm\beta)^2=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha\pm\beta)$

29) $\cos\alpha^2+\cos\beta^2-\cos(\alpha\pm\beta)^2=1\pm 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha\pm\beta)$.

Man soll den folgenden geometrischen Lehrsatz beweisen, zu welchem ein Jeder sich die Figur leicht selbst wird construiren können:

Es seien A, B, C drei beliebige Punkte in dem Umfange eines Kreises. Zieht man nun durch diese drei Punkte Tangenten an den Kreis, bezeichnet den Durchschnittspunkt der beiden durch A und B gezogenen Tangenten durch D, verbindet die Punkte C und D durch die Linie CD mit einander, und zieht mit der durch den Punkt C an den Kreis gezogenen Tangente eine beliebige Parallele, welche die von A und B nach C gezogenen Linien AC und BC in E und F schneidet; so wird, wie auch diese Parallele gezogen werden mag, die Linie EF immer von der Linie CD halbirt. Dieser von Chasles in dem Journal de Mathématiques publié par Liouville. Juillet. 1842. p. 272 mitgetheilte Satz kann Veranlassung zu verschiedenen interessanten Folgerungen geben, und ist namentlich für die Theorie der stereographischen Projection von Wichtigkeit.

Aufgaben von Herrn Dr. Haedenkamp zu Hamm.

1. Welches ist der Ausdruck für das Produkt der Differenzen je zweier Wurzeln einer Gleichung von irgend einem Grade durch die Coefficienten?

Digitized by Google

Bei einer Gleichung vom dritten Grade:

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0,$$

deren Wurzeln x_1, x_2, x_3 sind, hat man bekanntlich

$$(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$$
$$= (a_1^2 - 4a_2)(a_2^2 - 4a_1 a_3) + 2a_1 a_2 a_3 - 27a_3^2 \text{ *}).$$

2. Welches ist ferner das Produkt der Differenzen je zweier Wurzeln dieser Gleichung:

$$\frac{a_1}{a_1 - x} + \frac{a_2}{a_2 - x} + \frac{a_3}{a_3 - x} + \ldots + \frac{a_n}{a_n - x} = 1,$$

bei welcher noch

$$\frac{a_1}{a_1} + \frac{a_2}{a_2} + \frac{a_3}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_n} = 1.$$

Ueber Aufgaben für Gleichungen vom zweiten Grade. Von dem Herrn Conrector Beyer am Gymnasium zu Neustettin.

Die Bemerkung, dass die Auflösung so vieler zur Einübung der Theorie von der Auflösung quadratischer Gleichungen gegebenen Aufgaben, so bald die Gleichungen formirt sind, ein rein mechanisches und geisttödtendes Geschäft wird, erregte in mir den Wunsch, solche Aufgaben aufzufinden, deren Auflösung wo möglich ein fortgehendes Nachdenken und eine stets gespannte Aufmerksamkeit in Anspruch nähme. Beim Suchen nach Aufgaben der Art bot sich eine grosse Zahl von trigonometrischen dar, welche wenigstens theilweise dem beabsichtigten Zwecke entsprechen. Als beweisendes Beispiel möge folgende dienen:

Von welchen hohlen und erhabenen Winkeln ist die Cotangente so gross als das Doppelte ihres Sinus?

Auflösung. Der allgemeine Ausdruck für die möglichen Winkel sei x, so muss zufolge der Aufgabe $\text{cotg}\, x = 2\sin x$ sein. Nun ist aber $\text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$, folglich hat man auch $\frac{\cos x}{\sin x} = 2\sin x$ und daher $\cos x = 2\sin x^2$. Um mit Hülfe dieser Gleichung den oder die Werthe von x zu finden, so muss sie in eine solche verwandelt werden, in welcher nur eine trigonometrische Function vorkommt. Zu dem Ende kann $\sqrt{1 - \sin x^2}$ für $\cos x$, oder $1 - \cos x^2$ für $\sin x^2$ substituirt werden. Das erste Verfahren giebt die Gleichung $\sin x^4 + \frac{1}{4}\sin x^2 = \frac{1}{4}$, also $\sin x = \pm\sqrt{-\frac{1}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{17}}$,

---

*) Ich glaube in Betreff dieser Aufgabe auf die Abhandlung Nr. XXX. im 2ten Theile des Archivs, §. 14—§. 16., verweisen zu dürfen. Die Entwickelung eines völlig independenten Ausdrucks, auf welchen Herr Dr. Haedenkamp seine Absicht vorzüglich gerichtet zu haben scheint, ist allerdings sehr zu wünschen, und dieselbe daher der Aufmerksamkeit der Leser des Archivs angelegentlich zu empfehlen.

G.

Digitized by Google

das zweite aber $\cos x^2 + \frac{1}{4}\cos x = 1$, also $\cos x = -\frac{1}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{17}$. Da aber $\sin x$ keine imaginaire Grösse und $\cos x$ nicht < -1 ist, so kann nur $\sin x = \pm\sqrt{-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17}}$ und $\cos x = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17}$ sein. Nach der ersten von diesen beiden Gleichungen ergeben sich vier Werthe von x und zwar 1) $x \begin{matrix} > 0^\circ \\ < 90^\circ \end{matrix}$, 2) $x \begin{matrix} > 90^\circ \\ < 180^\circ \end{matrix}$, 3) $x \begin{matrix} > 180^\circ \\ < 270^\circ \end{matrix}$, 4) $x \begin{matrix} > 270^\circ \\ < 360^\circ \end{matrix}$; die zweite, $\cos x = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17}$, giebt aber nur zwei, nämlich 1) $x \begin{matrix} > 0^\circ \\ < 90^\circ \end{matrix}$ und 2) $x \begin{matrix} > 270^\circ \\ < 360^\circ \end{matrix}$, und die beiden letzteren sind diejenigen, welche hier allein gebraucht werden können, da ja $\operatorname{cotg} x = 2\sin x$ sein soll, und diese Gleichung nur für $x \begin{matrix} > 0^\circ \\ < 90^\circ \end{matrix}$ und $x \begin{matrix} > 270^\circ \\ < 360^\circ \end{matrix}$ stattfinden kann.

Aehnliche Aufgaben lassen sich bilden nach den Gleichungen:

1. $\sin x = 2\cos x$
2. $\operatorname{tg} x = \cos x$
3. $\sec x = \operatorname{cotg} x$
4. $\cos x = \sin x^2 - \cos x^2$
5. $\frac{1}{2}\cos x = \sin x^2 - \cos x^2$.

Man soll den folgenden aus dem London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine. September 1842. p. 179 entlehnten Satz beweisen:

Wenn wie gewöhnlich a, b, c die den Spitzen A, B, C eines sphärischen Dreiecks ABC gegenüberstehenden Seiten dieses sphärischen Dreiecks sind, von den Spitzen A, B, C durch einen und denselben beliebigen Punkt S auf der Oberfläche der Kugel bis zu den gegenüberstehenden Seiten a, b, c die Bogen grösster Kugelkreise α, β, γ gezogen, und die zwischen dem Punkte S und den Seiten a, b, c liegenden Stücke dieser Bogen durch α', β', γ' bezeichnet werden, so ist immer

$$\left(\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} + \frac{\sin\beta'}{\sin\beta} + \frac{\sin\gamma'}{\sin\gamma}\right)^2$$

$$= 1 + 2\frac{\sin\alpha'\sin\beta'\sin\gamma'}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\left\{\begin{aligned}&\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}(1-\cos a)\\ &+\frac{\sin\beta}{\sin\beta'}(1-\cos b)\\ &+\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'}(1-\cos c)\end{aligned}\right\}.$$

Die Seiten a, b, c eines ebenen Dreiecks kann man sich als im Verhältniss zum Radius unendlich kleine Kreisbogen denken, so wie auch die von seinen Spitzen A, B, C durch einen beliebi-

Digitized by Google

gen Punkt S in seiner Ebene bis zu den gegenüberstehenden Seiten a, b, c gezogenen geraden Linien α, β, γ, und deren zwischen dem Punkte S und den Seiten a, b, c liegende Stücke α', β', γ'. Unter dieser Voraussetzung hat man in der vorhergehenden Gleichung $\cos a = \cos b = \cos c = 1$; $\sin \alpha = \alpha$, $\sin \beta = \beta$, $\sin \gamma = \gamma$; $\sin \alpha' = \alpha'$, $\sin \beta' = \beta'$, $\sin \gamma' = \gamma'$ zu setzen, und erhält aus derselben dann sogleich die bekannte Gleichung

$$\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} + \frac{\gamma'}{\gamma} = 1.$$

XVII.

Miscellen.

In dem Cambridge mathematical Journal. February. 1842. p. 96 wird folgende Ableitung der Neper'schen Analogieen mitgetheilt, die, wenn sie sich auch schon anderswo finden sollte *), doch jedenfalls nicht so allgemein bekannt zu sein scheint, wie sie verdient, wobei ich indess nicht unbemerkt lassen will, dass mir immer der Weg, wo man zuerst die Gaussischen Gleichungen beweiset, und aus denselben dann die Neper'sche ableitet, welches sehr leicht geschehen kann, wesentliche Vorzüge zu haben scheint.

Wenn, wie gewöhnlich, $2s = a + b + c$ gesetzt wird, so ist bekanntlich, wie man in jedem Lehrbuche der sphärischen Trigonometrie findet,

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}A^2 = \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)},$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}B^2 = \frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-b)},$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}C^2 = \frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)};$$

also

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}A^2 \text{ tang } \tfrac{1}{2}B^2 = \left\{\frac{\sin(s-c)}{\sin s}\right\}^2,$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}A^2 \text{ tang } \tfrac{1}{2}C^2 = \left\{\frac{\sin(s-b)}{\sin s}\right\}^2,$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}B^2 \text{ tang } \tfrac{1}{2}C^2 = \left\{\frac{\sin(s-a)}{\sin s}\right\}^2.$$

*) In den mir zu Gebote stehenden Schriften finde ich dieselbe nirgends.

Digitized by Google

Weil nun ferner bekanntlich

$$\cos \tfrac{1}{2}A^2 = \frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c},$$

$$\cos \tfrac{1}{2}B^2 = \frac{\sin s \sin (s-b)}{\sin a \sin c},$$

$$\cos \tfrac{1}{2}C^2 = \frac{\sin s \sin (s-c)}{\sin a \sin b}$$

ist, und die Grössen sin a, sin b, sin c unter der Voraussetzung, dass alle Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks kleiner als 180° sind, sämmtich positiv sind; so haben die Grössen sin s, sin $(s-a)$, sin $(s-b)$, sin $(s-c)$ offenbar alle gleiche Vorzeichen, und die Brüche

$$\frac{\sin (s-c)}{\sin s}, \quad \frac{\sin (s-b)}{\sin s}, \quad \frac{\sin (s-a)}{\sin s}$$

sind daher sämmtlich positiv. Also ist nach dem Obigen, weil die Grössen tang $\frac{1}{2}A$, tang $\frac{1}{2}B$, tang $\frac{1}{2}C$ unter der in Rede stehenden Voraussetzung sämmtlich positiv sind,

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}A \text{ tang } \tfrac{1}{2}B = \frac{\sin (s-c)}{\sin s},$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}A \text{ tang } \tfrac{1}{2}C = \frac{\sin (s-b)}{\sin s},$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}B \text{ tang } \tfrac{1}{2}C = \frac{\sin (s-a)}{\sin s}.$$

Folglich ist, wie man hieraus leicht findet,

$$\frac{(\text{tang } \frac{1}{2}A \pm \text{tang } \frac{1}{2}B) \text{ tang } \frac{1}{2}C}{1 \mp \text{tang } \frac{1}{2}A \text{ tang } \frac{1}{2}B} = \frac{\sin (s-b) \pm \sin (s-a)}{\sin s \mp \sin (s-c)},$$

$$\frac{(\text{tang } \frac{1}{2}A \pm \text{tang } \frac{1}{2}C) \text{ tang } \frac{1}{2}B}{1 \mp \text{tang } \frac{1}{2}A \text{ tang } \frac{1}{2}C} = \frac{\sin (s-c) \pm \sin (s-a)}{\sin s \mp \sin (s-b)},$$

$$\frac{(\text{tang } \frac{1}{2}B \pm \text{tang } \frac{1}{2}C) \text{ tang } \frac{1}{2}A}{1 \mp \text{tang } \frac{1}{2}B \text{ tang } \frac{1}{2}C} = \frac{\sin (s-c) \pm \sin (s-b)}{\sin s \mp \sin (s-a)};$$

d. i. nach einigen bekannten goniometrischen Formeln:

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(A \pm B) \text{ tang } \tfrac{1}{2}C = \frac{\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\{\frac{1}{2}(a-b)\}}{\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\{\frac{1}{2}(a+b)\}},$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(A \pm C) \text{ tang } \tfrac{1}{2}B = \frac{\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\{\frac{1}{2}(a-c)\}}{\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\{\frac{1}{2}(a+c)\}},$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(B \pm C) \text{ tang } \tfrac{1}{2}A = \frac{\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\{\frac{1}{2}(b-c)\}}{\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\{\frac{1}{2}(b+c)\}};$$

welches die erste Klasse der Neper'schen Analogieen ist.

Digitized by Google

Setzt man ferner wie gewöhnlich $2S = A + B + C$, so ist bekanntlich

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}a^2 = -\frac{\cos S \cos (S-A)}{\cos (S-B) \cos (S-C)},$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}b^2 = -\frac{\cos S \cos (S-B)}{\cos (S-A) \cos (S-C)},$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}c^2 = -\frac{\cos S \cos (S-C)}{\cos (S-A) \cos (S-B)};$$

und folglich

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}a^2 \text{ tang } \tfrac{1}{2}b^2 = \left\{\frac{\cos S}{\cos (S-C)}\right\}^2,$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}a^2 \text{ tang } \tfrac{1}{2}c^2 = \left\{\frac{\cos S}{\cos (S-B)}\right\}^2,$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}b^2 \text{ tang } \tfrac{1}{2}c^2 = \left\{\frac{\cos S}{\cos (S-A)}\right\}^2.$$

Weil nun

$$\sin \tfrac{1}{2}a^2 = -\frac{\cos S \cos (S-A)}{\sin B \sin C},$$

$$\sin \tfrac{1}{2}b^2 = -\frac{\cos S \cos (S-B)}{\sin A \sin C},$$

$$\sin \tfrac{1}{2}c^2 = -\frac{\cos S \cos (S-C)}{\sin A \sin B}$$

ist, und die Grössen sin A, sin B, sin C unter der gemachten Voraussetzung sämmtlich positiv sind; so haben cos $(S-A)$, cos $(S-B)$, cos $(S-C)$ offenbar sämmtlich mit cos S entgegengesetztes Vorzeichen, die Brüche

$$\frac{\cos S}{\cos (S-C)}, \quad \frac{\cos S}{\cos (S-B)}, \quad \frac{\cos S}{\cos (S-A)}$$

sind daher alle negativ, und nach dem Obigen ist folglich, weil die Grössen tang $\frac{1}{2}a$, tang $\frac{1}{2}b$, tang $\frac{1}{2}c$ sämmtlich positiv sind,

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}a \text{ tang } \tfrac{1}{2}b = -\frac{\cos S}{\cos (S-C)},$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}a \text{ tang } \tfrac{1}{2}c = -\frac{\cos S}{\cos (S-B)},$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}b \text{ tang } \tfrac{1}{2}c = -\frac{\cos S}{\cos (S-A)};$$

woraus sich unmittelbar

$$\cot \tfrac{1}{2}a \cot \tfrac{1}{2}b = -\frac{\cos (S-C)}{\cos S},$$

$$\cot \tfrac{1}{2}a \cot \tfrac{1}{2}c = -\frac{\cos (S-B)}{\cos S},$$

$$\cot \tfrac{1}{2}b \cot \tfrac{1}{2}c = -\frac{\cos (S-A)}{\cos S}$$

ergiebt. Folglich ist auf ähnliche Art wie oben

Digitized by Google

$$\frac{(\cot\frac{1}{2}a \pm \cot\frac{1}{2}b)\cot\frac{1}{2}c}{1 \mp \cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b} = -\frac{\cos(S-B)\pm\cos(S-A)}{\cos S\pm\cos(S-C)},$$

$$\frac{(\cot\frac{1}{2}a \pm \cot\frac{1}{2}c)\cot\frac{1}{2}b}{1 \mp \cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}c} = -\frac{\cos(S-C)\pm\cos(S-A)}{\cos S\pm\cos(S-B)},$$

$$\frac{(\cot\frac{1}{2}b \pm \cot\frac{1}{2}c)\cot\frac{1}{2}a}{1 \mp \cot\frac{1}{2}b\cot\frac{1}{2}c} = -\frac{\cos(S-C)\pm\cos(S-B)}{\cos S\pm\cos(S-A)};$$

woraus leicht

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a \pm b)\cot\tfrac{1}{2}c = \frac{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{\frac{1}{2}(A-B)\}}{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{\frac{1}{2}(A+B)\}},$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a \pm c)\cot\tfrac{1}{2}b = \frac{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{\frac{1}{2}(A-C)\}}{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{\frac{1}{2}(A+C)\}},$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(b \pm c)\cot\tfrac{1}{2}a = \frac{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{\frac{1}{2}(B-C)\}}{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{\frac{1}{2}(B+C)\}}$$

erhalten wird, welches die zweite Klasse der Neper'schen Analogieen ist.

G.

Unter den verschiedenen Methoden der Polhöhenbestimmung wendet der Seemann bei Weitem am Häufigsten die Beobachtung der Sonne im Mittage an. Zu dem Ende findet er sich jeden Tag, wo ihm der Zustand der Atmosphäre eine gute Beobachtung verspricht, mit seinem Sextanten auf dem Verdecke ein, und verfolgt die Sonne, bis sie in ihrer Höhe stationär geworden; in diesem Momente stellt er scharf ein, lässt von nun an die Alhidade unberührt, überzeugt sich allenfalls durch das bald darauf erfolgende Sinken der Sonne, oder Einschneiden ihres Bildes in die Linie des Meereshorizontes von dem Vorübersein des Mittags, und was sein Instrument dann angiebt, gilt ihm für die Meridianhöhe der Sonne.

Dieses fast zu praktische Verfahren erfordert ein sehr häufiges, in der Nähe der Culmination wegen der geringen Höhenänderung für das Auge äusserst anstrengendes Einstellen, und lässt, wie es in der Natur der Sache liegt, stets eine Ungewissheit von einigen Minuten über die Zeit des Mittags oder desjenigen Moments, in welchem die Beobachtung eigentlich hätte angestellt werden müssen; in der That wird jeder Astronom, der im Vereine mit anderen an Bord beobachtete, sich der kleinen Streitigkeiten erinnern, die sich immer darüber erheben, ob die Sonne noch im Steigen, oder stationär, oder wohl gar schon im Sinken begriffen sei.

In dem ersten Bande der neuen Folge der Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Wien, 1841. S. XLIX hat

Digitized by Google

Herr Adjunct Dr. C. L. v. Littrow ein Verfahren angegeben, welches bei hinreichender Einfachheit und Leichtigkeit uns wohl geeignet scheint, die obige Methode der Breitenbestimmung zur See zu grösserer Genauigkeit zu erheben, und daher jedenfalls allgemeiner bekannt zu werden verdient, weshalb wir im Folgenden unsern Lesern das Wesentliche desselben mittheilen wollen, wozu wir auch darin eine besondere Veranlassung finden, dass, wie wir glauben, wohl auch Mancher auf dem Lande dieses einfache Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung seiner Breite geeignet finden und in Anwendung bringen wird.

Zwei auf den Mittelpunkt der Erde bezogene Höhen des Mittelpunkts der Sonne seien h, h'; die entsprechenden Stundenwinkel und Declinationen der Sonne seien σ, σ' und δ, δ'; so hat man, wenn φ die Polhöhe bezeichnet, die beiden folgenden in völliger Allgemeinheit geltenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \sin h &= \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos\sigma \\ \sin h' &= \sin\delta' \sin\varphi + \cos\delta' \cos\varphi \cos\sigma' \end{aligned}\right\} \ldots . 1)$$

Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab, so erhält man

$$\begin{aligned} \sin h - \sin h' = {} & (\sin\delta - \sin\delta')\sin\varphi \\ & + (\cos\delta\cos\sigma - \cos\delta'\cos\sigma')\cos\varphi. \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} \sin h - \sin h' &= 2\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h'), \\ \sin\delta - \sin\delta' &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta') \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \cos\delta\cos\sigma - \cos\delta'\cos\sigma' \\ = {} & \cos\delta\cos\sigma - \cos\{\delta + (\delta'-\delta)\}\cos\sigma' \\ = {} & \cos\{\delta' + (\delta-\delta')\}\cos\sigma - \cos\delta'\cos\sigma' \\ = {} & \cos\delta\cos\sigma - \{\cos\delta\cos(\delta'-\delta) - \sin\delta\sin(\delta'-\delta)\}\cos\sigma' \\ = {} & \{\cos\delta'\cos(\delta-\delta') - \sin\delta'\sin(\delta-\delta')\}\cos\sigma - \cos\delta'\cos\sigma' \\ = {} & \cos\delta\cos\sigma - \{\cos\delta - 2\sin\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta)\sin\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta)\}\cos\sigma' \\ = {} & \{\cos\delta' - 2\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\}\cos\sigma - \cos\delta'\cos\sigma' \\ = {} & \cos\delta(\cos\sigma - \cos\sigma') + 2\sin\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta)\sin\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta)\cos\sigma' \\ = {} & \cos\delta'(\cos\sigma - \cos\sigma') - 2\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\sigma \\ = {} & -2\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma') \\ & \quad -2\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\sigma' \\ = {} & -2\cos\delta'\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma') \\ & \quad -2\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\sigma. \end{aligned}$$

Also ist nach dem Obigen

$$\begin{aligned} & \sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h') \\ = {} & -\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')\cos\varphi \\ & + \sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\{\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\varphi - \sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\sigma'\cos\varphi\} \end{aligned}$$

oder

Digitized by Google

$$\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')$$
$$=-\cos\delta'\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')\cos\varphi$$
$$+\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\{\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\varphi-\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\sigma\cos\varphi\};$$

folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\frac{\sin\frac{1}{2}(h-h')}{\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta\cos\varphi}$$
$$+\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta')}{\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\varphi-\sin\frac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\sigma\cos\varphi}{\cos\delta\cos\varphi},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\frac{\sin\frac{1}{2}(h-h')}{\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta'\cos\varphi}$$
$$+\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta')}{\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\varphi-\sin\frac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\sigma\cos\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi}.$$

Bei der Sonne ist nun der absolute Werth des Bruchs

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta')}{\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')}$$

immer eine sehr kleine Grösse, wovon man sich leicht aus den Ephemeriden überzeugen kann, und man kann also näherungsweise, aber ohne merklichen Fehler,

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\frac{\sin\frac{1}{2}(h-h')}{\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta\cos\varphi}\quad\ldots.\,2)$$

oder auch

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\frac{\sin\frac{1}{2}(h-h')}{\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta'\cos\varphi}\quad\ldots.\,3);$$

und, wenn die absoluten Werthe von $h-h'$ und $\sigma-\sigma'$ sehr klein sind, auch näherungsweise

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\frac{h-h'}{\sigma-\sigma'}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta\cos\varphi}\quad\ldots.\,4)$$

oder auch

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\frac{h-h'}{\sigma-\sigma'}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta'\cos\varphi}\quad\ldots.\,5)$$

setzen.

Bezeichnet jetzt φ' einen genäherten Werth der Polhöhe φ, und setzen wir $\varphi=\varphi'+\Delta\varphi'$; so ist

$$\cos\varphi=\cos\varphi'\cos\Delta\varphi'-\sin\varphi'\sin\Delta\varphi'$$
$$=\cos\varphi'(1-2\sin\tfrac{1}{2}\Delta\varphi'^2)-2\sin\varphi'\sin\tfrac{1}{2}\Delta\varphi'\cos\tfrac{1}{2}\Delta\varphi'$$
$$=\cos\varphi'-2\sin\tfrac{1}{2}\Delta\varphi'\sin(\varphi'+\tfrac{1}{2}\Delta\varphi'),$$

und folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\frac{h-h'}{\sigma-\sigma'}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta\{\cos\varphi'-2\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi'\sin(\varphi'+\frac{1}{2}\Delta\varphi')\}}$$

oder

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\frac{h-h'}{\sigma-\sigma'}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta'\{\cos\varphi'-2\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi'\sin(\varphi'+\frac{1}{2}\Delta\varphi')\}};$$

Digitized by Google

also, weil die absoluten Werthe von

$$2(\sigma-\sigma')\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}\Delta\varphi'\sin(\varphi'+\tfrac{1}{2}\Delta\varphi')$$

oder

$$2(\sigma-\sigma')\cos\delta'\sin\tfrac{1}{2}\Delta\varphi'\sin(\varphi'+\tfrac{1}{2}\Delta\varphi')$$

als Grössen der zweiten Ordnung offenbar sehr klein sind, näherungsweise

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\frac{h-h'}{\sigma-\sigma'}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta\cos\varphi'}\quad\ldots.\ 6)$$

oder

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\frac{h-h'}{\sigma-\sigma'}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta'\cos\varphi'}\quad\ldots.\ 7)$$

Von diesen Formeln lässt sich nun die folgende Anwendung machen.

Man nehme etwa eine halbe Stunde vor Mittag zwei Höhen der Sonne, und bemerke natürlich die entsprechenden Uhrzeiten, so hat man den Bruch

$$\frac{h-h'}{\sigma-\sigma'},$$

und kann nun mittelst der aus den Ephemeriden zu entnehmenden Declination δ der Sonne an dem Tage, wo die Beobachtung angestellt wird, und der genäherten Polhöhe φ' nach der Formel

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\frac{h-h'}{\sigma-\sigma'}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta\cos\varphi'}\quad\ldots.\ 8)$$

die Grösse $\frac{1}{2}(\sigma+\sigma')$ berechnen, welche in Verbindung mit der bekannten Grösse $\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')$ zu der Kenntniss von σ und σ' führt, woraus man dann ferner die Zeit des Mittags, d. h. das Zeitmoment, wo man die Höhe der Sonne messen muss, um ihre Meridianhöhe zu erhalten, im Voraus berechnen kann. Bestimmt man nun zu dieser Zeit die Höhe H des Mittelpunkts der Sonne, so ist

$$\varphi=\delta-h+90^\circ\text{ oder }\varphi=\delta+h-90^\circ\quad\ldots..\ 9)$$

jenachdem φ grösser oder kleiner als δ ist.

Alle gemessene Höhen müssen natürlich, bevor sie in die Rechnung eingeführt werden, wegen Collimationsfehler, Refraction, Halbmesser der Sonne und Parallaxe gehörig corrigirt werden, um, wie es erforderlich ist, die auf den Mittelpunkt der Erde bezogenen Höhen des Mittelpunkts der Sonne zu erhalten, da auf diese beiden Punkte sich auch die in den Ephemeriden angegebenen Declinationen der Sonne beziehen, was aus den ersten Elementen der praktischen Astronomie hier als bekannt vorausgesetzt werden kann. Bezeichnet p die sogenannte Horizontalparallaxe der Sonne unter dem Aequator und h die gemessene Höhe des Mittelpunkts der Sonne, so findet man die Höhenparallaxe, welche bekanntlich zu der gemessenen Höhe h addirt werden muss, mittelst des bekannten Ausdrucks $p\cos h$ für den vorliegenden Zweck hinreichend genau.

Gestattet man sich noch einige kleine Vernachlässigungen, so kann man die Formel 8) noch etwas bequemer zur Rechnung auch auf folgende Art ausdrücken. Weil nämlich h und h' immer nur

Digitized by Google

sehr wenig von einander verschieden sein werden, so kann man näherungsweise h für $\frac{1}{2}(h+h')$ setzen, wodurch die Formel 8) folgende Gestalt erhält:

$$\sin \tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma') = -\frac{h-h'}{\sigma-\sigma'} \cdot \frac{\cos h}{\cos \delta \cos \varphi'} \quad \ldots . 10)$$

Endlich ist aber auch, wenn man im Folgenden immer die obern oder untern Zeichen nimmt, jenachdem φ' grösser oder kleiner als δ ist, näherungsweise

$$h = \pm(\delta - \varphi') + 90^\circ,$$

und folglich $\cos h = \mp \sin(\delta - \varphi')$, also nach der Gleichung 10)

$$\sin \tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma') = \pm \frac{h-h'}{\sigma-\sigma'} \cdot \frac{\sin(\delta-\varphi')}{\cos \delta \cos \varphi'} \quad \ldots . 11)$$

oder

$$\sin \tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma') = \pm \frac{h-h'}{\sigma-\sigma'} (\text{tang } \delta - \text{tang } \varphi') \ldots 12).$$

So einfach diese Formeln auch sind, so kann man sich die Rechnung nach denselben doch noch beträchtlich durch Tafeln erleichtern. Nimmt man nämlich, was immer in der Macht des Beobachters steht, die Zwischenzeit zwischen den beiden vor Mittage anzustellenden Beobachtungen constant, etwa 5 Minuten, und drückt den absoluten Werth der Differenz der beiden Höhen, welchen wir durch dh bezeichnen wollen, immer in Bogensecunden aus; so ist

$$\sin \tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma') = \mp dh \cdot \frac{\sin(\varphi'-\delta)}{4500 \cos \delta \cos \varphi'} \quad \ldots . 13)$$

oder

$$\sin \tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma') = \mp dh \cdot \frac{\text{tang } \varphi' - \text{tang } \delta}{4500} \quad \ldots . 14).$$

Bringt man nun den Logarithmus der Grösse

$$A = \frac{\sin(\varphi'-\delta)}{4500 \cos \delta \cos \varphi'} = \frac{\text{tang } \varphi' - \text{tang } \delta}{4500} \quad \ldots . 15)$$

wobei wir jetzt φ' grösser als δ annehmen wollen, in eine Tafel, deren Argumente die Polhöhe und die Declination sind, und besitzt eine zweite Tafel, welche aus dem Logarithmus des Sinus eines Bogens unmittelbar diesen Bogen in Zeit ausgedrückt giebt, so kommt die ganze Berechnung der Formel 13) oder 14) auf das Aufschlagen des Logarithmus von dh und seine Addition zu dem aus der ersten Tafel zu nehmenden log A hinaus. Auf S. LVII—LIX a. a. O. hat Herr von Littrow zwei solche Tafeln beispielsweise mitgetheilt, die erste für die Gränzen des mittelländischen Meeres, die zweite für Stundenwinkel, die eine halbe Stunde nicht übersteigen, und sagt, dass die oben ihren Grundzügen nach entwickelte Methode der Polhöhenbestimmung sich in der Praxis schon bewährt habe, bei Beobachtungen, die ein ausgezeichneter Offizier der österreichischen Marine, Herr Linienschiffs-Fähnrich Bucchia angestellt und nach dieser Methode berechnet, sich auch dadurch bewogen gefunden hat, dieselbe zu seinem eigenen Gebrauche für immer anzunehmen. Herr von Littrow fügt noch

Digitized by Google

hinzu, dass die nach der obigen Methode näherungsweise gefundene Uhrzeit des Mittags, verglichen mit der bekannten Uhrzeit des Mittags für den letzten Ort, wo man eine genaue Längenbestimmung vornahm, zu einer beiläufigen Länge des Beobachtungsorts, und dadurch auch zu der Kenntniss der Epoche, für welche man aus den Ephemeriden die Declination der Sonne zu nehmen hat, führe. Hierüber, so wie über die weitere Entwickelung der obigen Methode überhaupt, muss man aber den lesenswerthen Aufsatz des Herrn von Littrow a. a. O. selbst nachsehen.

G.

Il y a aujourd'hui à l'Institut Polytechnique de Londres une machine électrique qui est probablement la plus puissante que l'on connaisse. Le diamètre du plateau de verre est de 7 pieds, celui du conducteur de 4 pieds. La resistance du plateau contre les frotteurs est telle qu'une machine à vapeur est employée à le faire tourner. Quand la machine est fortement chargée, une étincelle traverse facilement un livre épais. La puissance d'une telle machine offre un vaste champ aux expériences de physique, et l'on doit en attendre d'intéressantes découvertes.

On connaît nombre d'exemples de pluies jaunâtres, dont on sait que la matière colorante n'est autre chose que le pollen des arbres, principalement des Pins. Ces pluies ont lieu le plus fréquemment dans les mois de mai et juin, mais elles arrivent ordinairement après des orages. Nous apprenons qu'au mois de mai 1841 il en est tombé une à Picton (Etats-Unis) pendant une nuit sereine que n'avait précédée aucun orage. Elle consistait en une poussière jaune qui fut recueillie, en grande quantité, à bord d'un vaisseau dans le port. Examinée à l'aide de puissants microscopes, par M. J. W. Bailey, elle a été reconnue pour être entièrement composée de pollen de Pin. Une autre poussière également tombée à Troy, en mai, et qu'on avait cru être des sporules de Lycopodes, a été reconnue aussi pour du pollen de Pin. L'analyse chimique en a été faite par M. Blake, qui en a retiré, par la dissolution, du nitrogène et de l'ammoniaque; l'acide hydrochlorique et l'incinération ont donné pour résidu une grande quantité de phosphate de chaux.

(l'Institut. Nr. 439. 26. Mai 1842.)

Berichtigung.

In der vierten der Formeln 10) auf Seite 46 und in der vierten der Formeln 11) auf Seite 48 ist $(-1)^{n-1}$ statt $(-1)^n$ zu setzen.

Digitized by Google

XVIII.

Vorschläge zur Vermeidung einiger fehlerhaften Ausdrücke in den mathematischen Lehrbüchern.

Von dem

Herrn Conrector Beyer

am Gymnasium zu Neustettin.

Wahrscheinlich möchte wohl schon von allen Lehrern der Mathematik bei nicht wenigen Schülern die Erfahrung gemacht sein, dass sie Producte von zwei gleich, oder ungleich benannten Zahlen bilden, wenn ihnen auch bei der Multiplication gründlich auseinandergesetzt worden ist, dass der Multiplicator als Summandenzähler nie benannt sein könne. Worin liegt nun der Grund hievon? Ohne Zweifel in dem fehlerhaften Ausdruck so mancher mathematischen Regeln und darin, dass man sich bei vielen geometrischen Beweisen die Multiplication von zwei Linien, von Linien und ebenen Figuren und dergleichen erlaubt. Möge hier die Erinnerung an die allgemeine Anwendung des nur von der geometrischen Zahlenproportion geltenden Satzes, nach welchem das Product der innern Glieder gleich dem der äusseren ist, und an die Inhaltsbestimmung der geometrischen Figuren genügen, bei welcher nur zu häufig von dem Producte der Grundlinie oder Grundfläche und der Höhe die Rede ist. Enthalten nun die Lehrbücher in ihren Lehrsätzen solche unrichtige Angaben, so können die in Anmerkungen etwa gegebenen Regeln, dass statt der benannten Zahlen und stetigen Grössen eigentlich blosse Zahlen zu denken seien, nach unsern Erfahrungen vor irrigen Auffassungen nicht genügend schützen, da ihr Inhalt von den Schülern gewöhnlich als weniger wichtig betrachtet wird. Jene Fehler lassen sich aber leicht und ohne grosse Weitläuftigkeit vermeiden.

Für die auf einfache Proportionen sich gründenden Rechnungen reicht die Regel aus, dass vor der wirklichen Berechnung des zu bestimmenden Gliedes das Verhältniss mit den bekannten Gliedern in ein Verhältniss unbenannter Zahlen verwandelt, also z. B. statt

a Pfd. : b Pfd. = c Sgr. : x Sgr. die Proportion $a : b = c$ Sgr : x Sgr. gebildet werden müsse, aus welcher x Sgr. $= \frac{b \cdot c}{a}$ Sgr. als der Werth von b Pfd. sofort hervorgeht.

Bei den mit Hülfe der Zusammensetzung von Verhältnissen auszuführenden Rechnungen müssen aber zunächst alle Verhältnisse lauter unbenannte Zahlen enthalten, und es ist erst in der durch die Zusammensetzung entstandenen Proportion in dem Verhältnisse, welches die unbekannte Zahl enthält, die erforderliche Benennung hinzuzufügen.

Für die Auflösung von Gleichungen ist, wenn anders Aufgaben mit benannten Zahlen gegeben sind, nach der Bildung der Gleichungen die Weglassung der Benennungen zu empfehlen, welche so lange fehlen können, bis die Unbekannten berechnet sind.

In der Geometrie ist es bei der Inhaltsbestimmung, so wie bei der Berechnung unbekannter Grössen aus gegebenen zu tadeln, wenn für die räumlichen Grössen allgemeine Zeichen, wie g, h, r, p, k u. s. w. eingeführt, und solche bald als benannte, bald als unbenannte Zahlen, wie z. B. in der Formel $f = r^2\pi$ gebraucht werden. Um diesen Fehler zu vermeiden, ist es angemessen, hier eine bestimmte Benennung z. B. Fuss als allgemein geltendes Maass anzunehmen, und mithin die Grösse der Linien durch g', h', r', die der Flächen durch $a^{\square'}$, $f^{\square'}$ und die der Körper durch $p^{c'}$, $k^{c'}$, oder auf eine andere noch zweckmässigere Art auszudrücken, und beim Rechnen die Benennungszeichen da, wo es erforderlich ist, stets wegzulassen. Wird die angegebene Bezeichnungsart gewählt, so können auch in der Trigonometrie bei der Berechnung der Dreiecke nicht mehr solche unrichtige Gleichungen, wie $\log AB = \log AC + \log \sin C - \log \sin B$ und ähnliche vorkommen, wo für $\log AB$ und $\log AC$ geschrieben werden muss $\log c$ und $\log b$, vorausgesetzt, dass c und b blosse Zahlen sind. Ein ähnlicher Fehler, wie der zuletzt gerügte, kommt auch in der zusammengesetzten Zinsrechnung vor, indem man hier gewöhnlich das Kapital $= a$, oder $= c$ setzt, so dass a und c benannte Zahlen vorstellen, und dann den Ausdruck $a \cdot (1 + \frac{z}{100})^n$, in welchem überdiess noch der Multiplicator benannt ist, durch Logarithmen berechnet, woraus man consequent schliessen könnte, dass es auch Logarithmen benannter Zahlen gäbe.

Bei den geometrischen Beweisen können die Zusammensetzungen der Proportionen umgangen werden, sobald nur in den Lehrsätzen die Ausdrücke zusammengesetztes Verhältniss, oder Product stetiger Grössen vermieden sind, wenn zuvor folgende zwei Sätze, welche mit ihren Beweisen hier eine Stelle finden mögen, erwiesen sind, und, wo es irgend thunlich ist, rein geometrische Beweise gegeben werden.

1. Sind A, B, E, F, so wie C, D, G, H gleichartige Grössen, und ist zugleich $A : B = C : D$ und $E : F = G : H$, so ist auch $\frac{A}{E} : \frac{B}{F} = \frac{C}{G} : \frac{D}{H}$.

Beweis. Es sei M für A, B, E, F, und N für C, D, G, H gemeinschaftliches Maass und zwar $A = a \cdot M$, $B = b \cdot M$; $C = a \cdot N$, $D = b \cdot N$; $E = e \cdot M$, $F = f \cdot M$; $G = e \cdot N$,

Digitized by Google

$H = f \cdot N$; dann ist $\frac{A}{E} = \frac{a}{e}$, $\frac{B}{F} = \frac{b}{f}$, $\frac{C}{G} = \frac{a}{e}$ und $\frac{D}{H} = \frac{b}{f}$; aber es ist $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{a}{e} : \frac{b}{f}$, folglich auch $\frac{A}{E} : \frac{B}{F} = \frac{C}{G} : \frac{D}{H}$.

2. Sind A, B, C, D gleichartige Grössen, und ist $A : B = C : D$, so ist auch $A : C = B : D$.

Beweis. Da $A : B = C : D$ und auch $C : D = C : D$, so ist nach 1. auch $\frac{A}{C} : \frac{B}{D} = 1 : 1$, also $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$, oder $A : C = B : D$.

Zur Rechtfertigung der hier aufgestellten Behauptung sollen im Folgenden die in der sechsten Ausgabe des Grundrisses von Lorenz vorkommenden unrichtigen geometrischen Sätze und Beweise so gefasst werden, wie man es von der Mathematik mit Recht fordern darf. Zunächst muss §. 195. so lauten:

Zwei schiefwinklige Parallelogramme verhalten sich, wie die Rechtecke aus ihren Grundlinien und Höhen.

Der Beweis für diesen Satz erhellet sogleich, da die Rechtecke den Parallelogrammen gleich sind.

Vor demselben könnte aber noch folgender eingeschaltet werden:

Zwei Rechtecke verhalten sich, wie die Producte aus den Maasszahlen *) ihrer Grundlinien und Höhen.

Um letzteren zu beweisen, muss freilich schon die Ausmessung eines Rechtecks gelehrt sein, allein diese Lehre möchte auch unmittelbar hinter den Abschnitten, welche von der Verwandlung ebener Figuren in Rechtecke und Quadrate und von dem Maasse der stetigen Grössen handeln, die passendste Stellung finden.

Die Sätze in §. 196. und §. 198. können auf folgende Art ausgedrückt werden:

§. 196. Zwei Quadrate verhalten sich wie die zweiten Potenzen der Maasszahlen ihrer Seiten.

§. 198. Zwei Parallelogramme, wie auch zwei Dreiecke, in denen ein Winkel gegenseitig gleich ist, verhalten sich wie die Rechtecke aus den diesen Winkel einschliessenden Seiten.

Beweis. Da die Parallelogramme einen Winkel gleich haben, so kann man sie so aneinander legen, dass die gleichen Winkel Scheitelwinkel werden. Es seien also (Taf. II. Fig. 3.) die beiden Parallelogramme AC und AF die gegebenen. Um nun den Satz zu erweisen, construire man aus AB und AD,

*) Wie zweckmässig es sei, nicht nur die Grösse, mit welcher zu messen ist, sondern auch diejenige Zahl besonders zu benennen, welche angiebt, wie oft jene in der zu messenden Grösse enthalten ist, wird wohl von Niemand in Zweifel gestellt, und daher gebraucht Ohm das Wort Gemäss für die erstere Grösse, und das Wort Maass für die Zahl, welche bestimmt, wie oft das Gemäss zu nehmen sei. Dieser Gebrauch dürfte aber schwerlich zu billigen sein, da das Wort Maass sprachlich nicht eine Zahl, welche zählt, bedeuten kann. Uns scheint hiefür das Wort Maasszahl das angemessenste zu sein.

Digitized by Google

so wie aus AE und AG die Rechtecke AH und AI, und verlängere FG und BC, bis sie sich in K, und FN und BH, bis sie sich in L treffen. Jetzt ist $AC : AK = AD : AG$ und $AF : AK = AE : AB$, ebenso ist $AH : AL = AD : AG$, weil $AD = AM$ und $AG = AN$ ist, und $AF : AL = AE : AB$, folglich ist $AC : AK = AH : AL$ und $AF : AK = AI : AL$, und hieraus folgt durch Division $\frac{AC}{AF} : 1 = \frac{AH}{AI} : 1$, also auch $AC : AF = AH : AI$, w. z. e. w.

Der Beweis für die Dreiecke ist dem vorstehenden ähnlich. Die Beweise zu den Sätzen in §. 220. und 222. lassen sich richtiger so führen:

§. 222. Aehnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten.

Beweis. Ist (Taf. II. Fig. 4.) $\Delta ABC \sim \Delta abc$, und sind AD und ad Quadrate über den ähnlich liegenden Seiten AB und ab, so soll $\Delta ABC : \Delta abc = AD : ad$ sein. Man mache $AF = AC$ und $af = ac$, und ziehe FG parallel AB, so wie fg parallel ab, so ist $AG : AD = AF : AE = AC : AB$, und $ag : ad = ac : ab$. Nach der Voraussetzung ist aber $AC : AB = ac : ab$, folglich hat man $AG : AD = ag : ad$ und daher auch $AG : ag = AD : ad$. Da nun nach §. 198. $\Delta ABC : \Delta abc = AG : ag$, so ist auch $\Delta ABC : \Delta abc = AD : ad$.

§. 220. Von drei stetig proportionirten Linien wie (Taf. II. Fig. 5.) AD, CD, BD in dem rechtwinkligen Dreiecke ABC verhält sich die erste zur dritten, wie das Quadrat der ersten zu dem der zweiten, also $AD : BD = AD^2 : CD^2$.

Beweis. Es ist $\Delta ACD : \Delta BCD = AD : BD$, wegen ihrer gemeinschaftlichen Höhe CD, ferner ist wegen Aehnlichkeit der Dreiecke $\Delta ACD : \Delta BCD = AD^2 : CD^2$, folglich ist auch $AD : BD = AD^2 : CD^2$.

Vermittelst des §. 222. kann leicht folgender Satz bewiesen werden.

Sind vier Linien proportionirt, so sind auch ihre Quadrate proportionirt.

Beweis. Es seien die vier Linien durch A, B, C, D bezeichnet und $A : B = C : D$. Man construire aus A und C und einem beliebigen Winkel, und ebenso aus B und D und demselben Winkel zwei Dreiecke, welche ähnlich sein werden, und daher sich sowohl wie $A^2 : B^2$, als auch wie $C^2 : D^2$ verhalten, woraus die Richtigkeit des Satzes folgt.

Nach dem Gesagten ist leicht einzusehen, wie die stereometrischen Sätze in den §§. 320. 321. 323. 333. 341. 351. und 375. richtiger auszudrücken und zu beweisen sind. Daher soll hier bloss der Satz in §. 323. besonders betrachtet werden. Er muss lauten:

Zwei ähnliche Prismen verhalten sich wie die Würfel ihrer ähnlich liegenden Seiten.

Um ihn gehörig beweisen zu können, ist es nöthig folgende zwei Sätze voraufgehen zu lassen.

1. Aehnliche Parallelepipeda verhalten sich wie die Würfel ihrer ähnlich liegenden Seiten. Ist (Taf. III. Fig. 1.) $AG \sim ag$ und sind AD und ad ähnlich liegende Seiten, so soll $AG : ag = AD^c : ad^c$ sein.

Beweis. 1. Sind AG und ag rechtwinklige Parallelepipeda, also ihre Grundflächen AC und ac Rechtecke, so construire man über AD und ad die Quadrate AI und ai und über letzteren die Würfel AM und am, deren obere Seitenflächen LM und lm, durch die Parallelepipeda erweitert, die Rechtecke MN und mn geben. Bezeichnet man nun die ähnlichen Parallelepipeda AG, ag mit P, p, die Würfel AM, am mit W, w, und die an diesen liegenden Parallelepipeda BM, bm mit A, a, so verhält sich wegen gleicher Höhe $W : (W+A) = AI : AC = AK : AB = AD : AB$ und $w : (w+a) = ad : ab$, und wegen gemeinsamer Grundfläche $P : (W+A) = AE : AL = AE : AD$ und $p : (w+a) = ae : ad$. Da nun aber wegen der Aehnlichkeit von P und p sich $AD : AB = ad : ab$ und $AE : AD = ae : ad$ verhält, so ist auch $W : (W+A) = w : (w+a)$ und $P : (W+A) = p : (w+a)$, folglich durch Verwechselung der mittlern Glieder $W : w = (W+A) : (w+a)$ und $P : p = (W+A) : (w+a)$, und daher $P : p = W : w = AD^c : ad^c$.

Sollte bewiesen werden, dass $P : p = AB^c : ab^c$ sei, so würde der Beweis dem [illegible]ufgehenden ganz ähnlich sein, nur müsste $W-A$ und w [illegible] statt $W+A$ und $w+a$ geschrieben werden.

2. Sind aber die Parallelepipeda AG und ag nicht rechtwinklig, so verwandle man sie in rechtwinklige und zwar so, dass AD und ad in diesen ebenfalls ein Paar ähnlich liegende Seiten werden. Dann verhalten sich diese, weil sie ebenfalls ähnlich sind, nach 1. wie $AD^c : ad^c$, da sie aber beziehlich mit AG und ag gleich sind, so muss auch $AG : ag = AD^c : ad^c$ sein.

2. Sind vier Linien A, B, C, D proportionirt, so sind auch ihre Würfel proportionirt, ist also $A : B = C : D$, so ist auch $A^c : B^c = C^c : D^c$.

Beweis. Man construire aus den Linien A, B, C, D zwei ähnliche Rechtecke, so dass A, B, und C, D ähnlich liegende Seiten werden, und beschreibe über den Rechtecken zwei ähnliche Parallelepipeda P, p, so ist nach dem ersten Satze $P : p = A^c : B^c$ und auch $P : p = C^c : D^c$, woraus $A^c : B^c = C^c : D^c$ folgt.

Nun lässt sich der vorhin über das Verhältniss ähnlicher Prismen aufgestellte Lehrsatz folgendermassen beweisen.

1. Die ähnlichen Prismen seien P, p, und es soll bewiesen werden, dass sie sich verhalten wie die Würfel von einem Paar ähnlich liegender Seiten der Grundflächen S, s, also wie $S^c : s^c$. Da sich jedes Prisma in ein rechtwinkliges Parallelepipedum mit gegebenen Seitenlinie verwandeln lässt, so kann man statt Prismen P, p zwei ihnen gleiche Parallelepipeda G, g setzen,

Digitized by Google

welche rechtwinklig und einander ähnlich *) sind, und die Kanten S, s ebenfalls zu ähnlich liegenden Seiten haben. Dann ist nach dem ersten bewiesenen Satze $G : g = S^c : s^c$, da aber $G = P$ und $g = p$, so muss auch $P : p = S^c : s^c$ sein.

2. Wird aber behauptet, dass die Prismen sich verhalten wie die Würfel von solchen ähnlich liegenden Seitenlinien A, a, welche nur zu den Seitenflächen gehören, so folgt die Richtigkeit der Behauptung aus dem unmittelbar vorher bewiesenen Satze. Denn nach 1. ist $P : p = S^c : s^c$, aber $S^c : s^c = A^c : a^c$, weil nach der Voraussetzung $S : s = A : a$ ist, folglich auch $P : p = A^c : a^c$.

Noch möge hier der Beweis eines stereometrischen Satzes eine Stelle finden, um die weitere Anwendung des oben bewiesenen Satzes 1. zu zeigen.

Zwei Prismen von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen. (Vergl. Matthias Leitfaden §. 272.).

Beweis. 1. Sind die Prismen dreiseitig, so folgt der Satz leicht aus dem, dass zwei Parallelepipeda von gleicher Höhe sich wie ihre Grundflächen verhalten.

2. Ist aber das eine Prisma, P, über der Grundfläche G dreiseitig, und das andere, Q, über der Grundfläche F viel- z. B. fünfseitig, so lässt sich letzteres in drei dreiseitige A, B, C über den Grundflächen H, I, K zerlegen, und es ist dann nach 1. $A : B = H : I$, daher $(A + B) : B = (H + I) : I$, auch ist $C : B = K : I$, folglich durch Division $\frac{A+B}{C} : 1 = \frac{H+I}{K} : 1$, also $(A + B) : C = (H + I) : K$, und daher wieder $(A + B + C) : C = (H + I + K) : K$. Auch ist $P : C = G : K$, folglich $\frac{A+B+C}{P} : 1 = \frac{H+I+K}{G} : 1$, und daher $Q : P = F : G$, w. z. e. w.

3. Sind beider Prismen P und Q Grundflächen F und G vielseitige Figuren, so sei R ein dreiseitiges Prisma über der Grundfläche H und von gleicher Höhe mit den beiden ersten. Dann ist nach 2. $P : R = F : H$ und $Q : R = G : H$, folglich $\frac{P}{Q} : 1 = \frac{F}{G} : 1$, und daher $P : Q = F : G$.

---

*) Bezeichnet man von den Parallelepipeden die Rechtecke, welche den Grundflächen der Prismen gleich sind, mit R und r, so ist, da diese Grundflächen sich wie $Sq : sq$ verhalten, $R : r = Sq : sq$, und drückt man noch die andern Seiten jener Rechtecke durch B und b aus, so ist $R : Sq = B : S$ und $r : sq = b : s$, folglich $\frac{R}{r} : \frac{Sq}{sq} = \frac{B}{b} : \frac{S}{s}$, aber $\frac{R}{r} = \frac{Sq}{sq}$, mithin ist auch $B : b = S : s$ und daher $R \infty r$. Da nun auch die Höhen der Parallelepipeden wie $S : s$, also nach dem so eben Bewiesenen auch wie $B : b$ sich verhalten, so sind die Parallelepipeda ähnlich.

Digitized by Google

XIX.

Aufgaben zur Anwendung des Variationskalkuls.

Von dem

Herrn Dr. G. Strauch

Lehrer der Mathem. an d. Erziehungsanstalt zu Lenzburg im Kanton zu Aargau.

(Ich lege hier dem Publikum einige Probleme, aus einem grösseren Werke vor. Jede Bemerkung, jeder gegründete Tadel, u. s. w. wird, je eher man damit kommt, mit desto grösserem Danke angenommen werden).

Es ist bekannt, dass schon, ehe Lagrange den Variationskalkul erfunden hatte, einige dahin gehörige Probleme aufgestellt, und so, wie es bei dem damaligen Mangel einer Methode geschehen konnte, d. h. auf eine höchst unvollständige Weise, gelöst waren. Euler fügte den bereits vorhandenen Problemen noch viele hinzu, und versuchte es, eine Methode zu deren Auflösung zu geben. Dieses geschah in seinem berühmten Werke: Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Lausannae et Genevae anno 1744. 4.

Später erfand Lagrange den Variationskalkul, und so zeigte sich nicht nur, dass die in dem besagten Euler'schen Werke angewendete Methode gar keine Methode sei, sondern auch, dass in demselben aus den vielen Gattungen von Problemen nur eine einzige Gattung repräsentirt, die Probleme selbst aber immer noch höchst unvollständig gelöst seien. (Man denke namentlich daran, dass bei allen diesen Auflösungen die Gränzgleichungen fehlen, und dass das Mittel mangelt, wodurch man entscheiden kann, ob ein Grösstes oder Kleinstes, oder keines von beiden stattfinde, u. s. w.).

Euler ergriff nun die Lagrange'sche Erfindung, und bearbeitete sie auf eigene Weise; und seine neueste darüber geschriebene Abhandlung ist als Muster anerkannt (Novi Comm. Acad. Petrop. Tom. XVI. pag. 35—70).

Neben den Bearbeitungen des Variationskalkuls, welche wir von Euler und Lagrange besitzen, müssen vorzüglich diejenigen beachtet werden, welche wir von Martin Ohm besitzen. Sie sind eine erfreuliche Zugabe zu dem, was seine Vorgänger geleistet haben (Man sehe: Lehre des Grössten und Kleinsten. Berlin 1825. Höhere Mathematik in zwei Bänden. Leipzig 1839. System der Mathematik. Berlin 1828—1833).

Digitized by Google

Ungeachtet dieser vortrefflichen theoretischen Bearbeitungen ist aber die Kenntniss des Variationskalkul's noch so wenig verbreitet, dass die grössere Anzahl der Mathematiker denselben nur dem Namen nach kennt. Worin mag diese Thatsache ihren Grund haben? Etwa darin, dass solche Männer, wenn sie bei den Stufen der höchsten Höhe ihrer Wissenschaft angelangt sind, die Kraft nicht mehr haben, auch diese zu besteigen? Letztere Frage muss jedenfalls verneinend beantwortet, und der wahre Grund, dass die Kenntniss des Variationskalkuls noch so wenig verbreitet ist, darin gesucht werden, dass es den abstrakten mathematischen Theorien, wenn man ihnen nicht mit praktischen Anwendungen zur Seite steht, eben so ergeht, wie es etwa einer in wissenschaftlicher Strenge abgefassten Aesthetik ergehen würde, wenn keine Kunstwerke auf der Welt wären.

Ich habe es unternommen, für die Anwendung des Variationskalkuls Probleme zu bilden und aufzulösen, und dadurch dem angehenden Analytiker Gelegenheit zu bieten, sich in allen Operationen der höheren Analysis zu üben. Diese Probleme, wenn ich gleich selten mehr als drei von einerlei Art gebildet habe, sind zu einer sehr bedeutenden Anzahl angewachsen, und sie machen zusammen ein ausgedehntes Werk aus. Ich lege dem mathematischen Publikum einige dieser Probleme als Probe vor; ob ich grade die interessantesten vorlege, will ich nicht entscheiden, da das, was man interessant nennt, nur Geschmackssache ist. Zunächst mögen Probleme über das Grösste und Kleinste folgen. Diese habe ich in drei Abtheilungen gebracht.

Die erste Abtheilung enthält Probleme, die nur auf Urfunktionen führen. Diese musste ich alle selbst zusammensetzen und ausführen. Ich will, wenn gleich diese höchst instruktiv sind, und wegen ihrer Neuheit auch Interesse finden werden, hier in diesem Archive doch nur einige der einfachsten mittheilen, weil man einmal gewohnt ist beim Variationskalkul auch jedesmal zu integriren.

Die zweite Abtheilung enthält Probleme, welche auf Ausdrücke führen, in denen noch Differentiale eingehen. Die hierher gehörige Theorie hat Lagrange (m. s. z. B. die Crelle'sche Uebersetzung der Lagrange'schen Werke. Bd I. S. 495. 498) nur angedeutet, und ihre Ausbildung verdanken wir Martin Ohm (man sehe z. B. dessen Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 208—244). Probleme, welche in diese zweite Abtheilung gehören, gibt es bis jetzt nur fünf. Das eine davon ist von Lagrange, und findet sich z. B. in der Crelle'schen Uebersetzung. Bd. I. Seite 495. Ein zweites findet sich in Francoeur's Cours complet de mathématiques pures; Bd. II. Drei andere finden sich in Ohm's System. Bd. VII. Anhang II. Aufgabe 1, 5 und 6; die Aufgaben 2, 3, und 4 ebendaselbst sind weiter nichts, als drei verschiedene Fälle des so eben erwähnten von Lagrange gegebenen Problem's. Von dergleichen Problemen will ich viele mittheilen, da sie wegen ihrer Neuheit gewiss Interesse finden werden, und da sie höchst instruktiv sind, in welcher Hinsicht ich hier nur auf den einzigen Umstand aufmerksam mache, dass dabei fast immer mehr Gleichungen zu erfüllen sind, als unbekannte Stücke vorkommen.

Digitized by Google

Die dritte Abtheilung enthält Probleme, welche auf Ausdrücke führen, in denen noch Integrale eingehen. In diese Abtheilung gehört die Gattung der in Euler's oben genanntem Werke (Methodus inveniendi u. s. w.) enthaltenen Probleme. Allerdings haben Lagrange und Ohm einige in diese Abtheilung gehörige und sehr schätzenswerthe Beiträge geliefert; allein das hier zu bearbeitende Feld ist so ungeheuer, dass die von mir gemachten Zugaben allein soviel betragen, als die beiden ersten Abtheilungen zusammen. Diese Zugaben brauche ich aber hier nicht aufzuzählen, da ich ja im Begriffe bin, die Probe dem Publikum vorzulegen. Ich werde bei jedem einzelnen Probleme der dritten Abtheilung Gelegenheit nehmen auf das, was mein Eigenthum ist, aufmerksam zu machen.

Obgleich ich aber hier in diesem Archive nur Probleme mittheilen will, so muss ich doch wegen der mir angehörigen Eigenthümlichkeiten noch einige Bemerkungen vorausschicken, sowohl über den Variationskalkul überhaupt, als auch über das Grösste und Kleinste; und ich will mit einer, wie mir scheint, erschöpfenden Definition des Variationskalkuls beginnen. Der Sachkenner wird dabei ersehen, auf welche Grundlage ich baue.

Der Variationskalkul ist derjenige Zweig der höheren Analysis, welcher, wenn man Funktionen in andere Funktionen übergehen lässt, die aus diesem Verfahren folgenden Ergebnisse untersucht, und anwenden lehrt.

Der Variatioskalkul unterscheidet sich also wesentlich vom Differenzenkalkul; denn dieser ist bekanntlich derjenige Zweig der höheren Analysis, welcher, während das eigentliche Wesen der Funktionen ungestört bleibt, nur die Werthe der in den Funktionen befindlichen absolut unabhängigen Veränderlichen in andere Werthe übergehen lässt, und die aus diesem Verfahren folgenden Ergebnisse untersucht und anwenden lehrt.

Unter die Aufgaben des Variationskalkul's gehört z. B. die Behandlung der Fälle, wo die Funktionen, welche gewissen Bedingungen genügen sollen, das Gesuchte sind, wo also die Untersuchung selbst von ganz unbekannten Funktionen ausgeht.

Die der eben besagten Aufgabe des Variationskalkul's analoge Aufgabe des Differenzenkalkul's ist die Behandlung der Fälle, wo die den in bestimmt gegebenen Funktionen befindlichen absolut unabhängigen Veränderlichen beizulegenden Werthe, welche gewissen Bedingungen genügen sollen, das Gesuchte sind, wo also die Untersuchung von noch unbekannten Werthen der in bestimmt gegebenen Funktionen befindlichen Veränderlichen ausgeht.

Wenn eine Funktion in eine andere übergeht, so sagt man: „sie wird variirt;" die Funktion selbst, welche variirt wird, wird variable Funktion, und der Unterschied zwischen der neuen und ursprünglichen Funktion wird Variation genannt. Wenn eine variable Funktion als einziges Element betrachtet wird, so nennt man sie einen variablen Veränderlichen. Man kommt nun zu folgenden Unterscheidungen:

A. Eine Funktion erleidet eine einfache Variation, wenn dabei die nichtvariablen Veränderlichen keine Werthänderung erleiden. Die einfachen Variationen sind aber von zweierlei Art:

Digitized by Google

1) Eine Funktion wird gradezu für sich allein und unabhängig von andern Funktionen variirt; und eine solche einfache Variation nennt man eine unmittelbare einfache.

2) Eine Funktion wird dadurch einfach variirt, dass eine andere, von welcher sie abhängt, einfach variirt wird, oder dass mehrere andere, von welchen sie abhängt, einfach variirt werden; und eine solche einfache Variation nennt man eine mittelbare einfache.

B. Eine Funktion erleidet eine zusammengesetzte Variation, wenn die nichtvariablen Veränderlichen auch zugleich Werthänderungen erleiden. Die zusammengesetzten Variationen sind aber gleichfalls von zweierlei Art:

1) Eine Funktion wird gradezu für sich allein und unabhängig von andern variablen Funktionen zusammengesetzt variirt; und eine solche zusammengesetzte Variation nennt man eine unmittelbare zusammengesetzte.

2) Eine Funktion wird dadurch zusammengesetzt variirt, dass eine andere, von welcher sie abhängt, zusammengesetzt variirt wird, oder dass mehrere andere, von welchen sie abhängt, zusammengesetzt variirt werden; und eine solche zusammengesetzte Variation nennt man eine mittelbare zusammengesetzte.

Hiermit ist die Idee des Variationskalkul's vollkommen ausgesprochen. Bei der elementaren Klarheit dieser Idee sind wir uns jedesmal bewusst, wann wir unbedingte Freiheit in den Operationen haben, und letztere nach einem zu erreichenden Zwecke einrichten können, und wann wir gezwungen sind, die Operationen den jedesmal obwaltenden Umständen zu unterwerfen und zu überlassen.

A. *Einfache Variationen.*

1) Unmittelbare einfache Variationen. Wenn eine Funktion $y = \varphi x$ in eine andere $y + \Delta y = \psi x$ übergeht, so führt man ein weiteres Element x, welches von allen andern in ψx enthaltenen Elementen unabhängig ist, und von welchem wiederum alle in ψx enthaltenen Elemente unabhängig sind, in die neue Funktion ψx so ein, dass sie sich mittelst des Maclaurin'schen Satzes in folgende Reihe entwickeln lässt:

$$\text{I)} \quad y + \Delta y = \varphi x + x \,.\, \delta\varphi x + \frac{x^2}{1\,.\,2} \,.\, \delta^2\varphi x + \ldots\ldots\ldots$$

oder

$$\text{II)} \quad y + \Delta y = y + x \,.\, \delta y + \frac{x^2}{1\,.\,2} \,.\, \delta^2 y + \ldots\ldots\ldots$$

Die Ausdrücke δy, $\delta^2 y$, u. s. w. sind, wie man sieht, als Funktionen von x zu betrachten.

Wozu aber dieses fremdartige Element x? — Warum grade die nach lauter positiven ganzen Potenzen des x aufsteigende Reihe? — Was hat man mit diesem fremdartigen Elemente x am Ende aller Operationen anzufangen? — Wenn bei jedem beliebigen Werthe des x der Werth des neuen Ausdruckes ψx dem Werthe des ursprünglichen Ausdruckes φx unmittelbar anliegt; so muss das x in ψx so eingeführt sein, dass die specielle Bedeutung,

Digitized by Google

welche man nach ausgeführter Reihenentwickelung dem x beilegen muss, ein im Momente des Verschwindens befindlicher Werth ist. Warum muss grade das x diese Bedeutung haben? — Ist es immer möglich, das x so in die neue Funktion einzuführen? — Mit der Beantwortung dieser Fragen steht und fällt die ganze Theorie der unmittelbaren einfachen Variationen.

Wenn eine Funktion $y=\varphi(x, w)$ in eine andere $y+\Delta y=\psi(x, w)$ übergeht, so hat man auch hier in $\psi(x, w)$ das Element x so einzuführen, dass sich mittelst des Maclaurin'schen Satzes folgende Reihe

III) $y+\Delta y=\varphi(x, w)+x\,.\,\delta\varphi(x, w)+\frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,\delta^2\varphi(x, w)+\ldots\ldots$

oder

IV) $y+\Delta y=y+x\,.\,\delta y+\frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,\delta^2 y+\ldots\ldots\ldots$

ergiebt. Hier wiederholen sich die bereits gestellten Fragen. Die Ausdrücke δy, $\delta^2 y$, u. s. w. sind, wie man sieht, als Funktionen von x und w zugleich zu betrachten.

Auf ganz gleiche Weise hat man zu verfahren, wenn $y=\varphi(x, w, v)$ übergeht in $y+\Delta y=\psi(x, w, v)$.

Und so fort.

In der Reihe II), IV) u. s. w. wird Δy die Gesammtvariation, dagegen die einzelnen Glieder $x\,.\,\delta y$, $\frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,\delta^2 y$, u. s. w. werden bezüglich erster, zweiter, u. s. w. Variationstheil, und die Koefficienten δy, $\delta^2 y$, u. s. w. werden bezüglich erster, zweiter, u. s. w. Variationskoefficient genannt.

2) Mittelbare einfache Variationen. Sobald die Theorie der unmittelbaren einfachen Variationen begründet ist, hat die der mittelbaren keinen Anstand. Das Entwickelungsmittel ist der Maclaurin'sche Lehrsatz.

B. *Zusammengesetzte Variationen.*

1) Unmittelbare zusammengesetzte Variationen. Wenn eine Funktion $y=\varphi x$ übergeht in $y+(\Delta)y=\psi(x+Dx)$, wo Dx eine blosse Werthänderung des nichtvariablen Veränderlichen x ist; so geht die Reihe I) über in

V) $y+(\Delta)y=\varphi(x+Dx)+x\,.\,\delta\varphi(x+Dx)+\frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,\delta^2\varphi(x+Dx)+\ldots\ldots$

Um aber die zusammengesetzten Variationen gleichfalls durch den Maclaurin'schen Satz entwickeln zu können, setze man statt der Werthänderung Dx die Reihe

VI) $x\,.\,\vartheta x+\frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,\vartheta^2 x+\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\vartheta^3 x+\ldots\ldots\ldots$

Warum aber diese Reihe? — Wäre es nicht hinreichend, statt der Werthänderung Dx blos das Produkt $x\,.\,\vartheta x$ zu setzen? — In welchen Fällen genügt dieses Produkt, und in welchen Fällen ist die Reihe VI) nöthig? — Mit der Beantwortung dieser Fragen steht und fällt die Theorie der unmittelbaren zusammengesetzten Variationen. Setzt man nun die Reihe VI. an die Stelle

des Dx in der Reihe V. überall ein, und entwickelt man mittelst des Maclaurin'schen Satzes; so bekommt man folgende Reihe:

VII) $y+(\Delta)y=y+x\,.\,(\delta)y+\frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,(\delta)^2y+\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,(\delta)^3y+\ldots\ldots$

wo

VIII) $(\delta)y=\delta\varphi x+\frac{d\varphi x}{dx}\,.\,\vartheta x=\delta y+\frac{dy}{dx}\,.\,\vartheta x$

IX) $(\delta)^2y=\delta^2\varphi x+2\,.\,\frac{d\delta\varphi x}{dx}\,.\,\vartheta x+\frac{d^2\varphi x}{dx^2}\,.\,\vartheta x^2+\frac{d\varphi x}{dx}\,.\,\vartheta^2x$

$=\delta^2y+2\,.\,\frac{d\delta y}{dx}\,.\,\vartheta x+\frac{d^2y}{dx^2}\,.\,\vartheta x^2+\frac{dy}{dx}\,.\,\vartheta^2x$

u. s. w. u. s. w. Die zusammengesetzte Gesammtvariation wird hier mit $(\Delta)y$, und der erste, zweite u. s. w. zusammengesetzte Variationskoefficient wird hier bezüglich mit $(\delta)y$, $(\delta)^2y$, u. s. w. bezeichnet. Ich habe die Klammern desshalb gewählt, weil sie überhaupt an zusammengesetzte Ausdrücke erinnern. Die mit Dx bezeichnete Werthänderung mag Gesammtdifferenz, die in der Reihe VI. befindlichen Glieder $x\,.\,\vartheta x$, $\frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,\vartheta^2x$, u. s. w. mögen Differenztheile, und die Koefficienten ϑx, ϑ^2x, u. s. w. mögen bezüglich erster, zweiter, u. s. w. Differenzkoefficient genannt werden.

Wenn $y=\varphi(x,w)$ übergeht in $y+(\Delta)y=\psi(x+Dx,w+Dw)$, wo Dx und Dw blosse Werthänderungen der nichtvariablen Veränderlichen x und w sind; so geht die Reihe III. über in

X) $y+(\Delta)y=\varphi(x+Dx,w+Dw)+x\,.\,\delta\varphi(x+Dx,w+Dw)$

$+\frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,\delta^2\varphi(x+Dx,w+Dw)+\ldots\ldots\ldots$

Um aber auch diese zusammengesetzte Variation mittelst des Maclaurin'schen Satzes entwickeln zu können, setze man statt Dx und Dw bezüglich die Reihen

XI) $x\,.\,\vartheta x+\frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,\vartheta^2x+\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\vartheta^3x+\ldots\ldots$

XII) $x\,.\,\vartheta w+\frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,\vartheta^2w+\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\vartheta^3w+\ldots\ldots\ldots$

Setzt man diese Reihen wirklich statt Dx und Dw in die Reihe X. überall ein, und entwickelt man mittelst des Maclaurin'schen Satzes; so bekommt man

XIII) $y+(\Delta)y=y+x\,.\,(\delta)y+\frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,(\delta)^2y+\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,(\delta)^3y+\ldots\ldots$

wo

XIV) $(\delta)y=\delta\varphi(x,w)+\frac{d_x\varphi(x,w)}{dx}\,.\,\vartheta x+\frac{d_w\varphi(x,w)}{dw}\,.\,\vartheta w$

$=\delta y+\frac{d_xy}{dx}\,.\,\vartheta x+\frac{d_wy}{dw}\,.\,\vartheta w$

Digitized by Google

XV) $$(\delta)^2 y = \delta^2 \varphi(x, w) + 2 \cdot \frac{d_x \delta \varphi(x, w)}{dx} \cdot \vartheta x + 2 \cdot \frac{d_w \delta \varphi(x, w)}{dw} \cdot \vartheta w$$
$$+ \frac{d_x^2 \varphi(x, w)}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + 2 \cdot \frac{d_x d_w \varphi(x, w)}{dx \cdot dw} \cdot \vartheta x \cdot \vartheta w$$
$$+ \frac{d_w^2 \varphi(x, w)}{dw^2} \cdot \vartheta w^2$$
$$+ \frac{d_x \varphi(x, w)}{dx} \cdot \vartheta^2 x + \frac{d_w \varphi(x, w)}{dw} \cdot \vartheta^2 w$$
$$= \delta^2 y + 2 \cdot \frac{d_x \delta y}{dx} \cdot \vartheta x + 2 \cdot \frac{d_w \delta y}{dw} \cdot \vartheta w + \frac{d_x^2 y}{dx^2} \cdot \vartheta x^2$$
$$+ 2 \cdot \frac{d_x d_x y}{dx \, dw} \cdot \vartheta x \cdot \vartheta w + \frac{d_w^2 y}{dw^2} \cdot \vartheta w^2 + \frac{d_x y}{dx} \cdot \vartheta^2 x + \frac{d_w y}{dw} \cdot \vartheta^2 w$$

u. s. w.

2) Mittelbare zusammengesetzte Variationen. Sobald die Theorie der unmittelbaren zusammengesetzten Variationen begründet ist, hat die der mittelbaren keinen Anstand. Das Entwickelungsmittel ist der Maclaurin'sche Satz.

Das Grösste und Kleinste. Diese Aufgabe ist eine doppelte. Ich will den einfachsten Fall hier vornehmen.

Es sei $U = f(x, y)$, wo y ein variabler, dagegen x ein nichtvariabler Veränderlicher ist; und man sucht für y eine solche Funktion φx, dass dann bei jedem beliebigen Werthe des x der Werth des Ausdruckes $U = f(x, \varphi x)$ grösser oder kleiner wird, als es der Fall sein kann, wenn man an die Stelle des y alle diejenigen Funktionen setzt, deren Werthe bei jedem beliebigen Werthe des x dem Werthe der Funktion φx unmittelbar anliegen. Ein solches Grösstes oder Kleinstes, welches durch den einfachen Variationskalkul aufgesucht wird, und dessen Werth wegen der noch stattfindenden Allgemeinheit des x kein bestimmter ist, mag ein primäres Grösstes oder primäres Kleinstes genannt werden.

Hat man nun für y die Funktion φx gefunden, bei welcher $U = f(x, \varphi x)$ ein primäres Grösstes oder primäres Kleinstes wird; so kann man noch für x einen solchen bestimmten Werth a aufsuchen, bei welchem dann der Ausdruck $U = f(a, \varphi a)$ einen grösseren oder kleineren Werth bekommt, als wenn man die dem a unmittelbar anliegenden Nachbarwerthe einsetzt. Ein solches Grösstes oder Kleinstes, welches durch den Differentialkalkul aufgesucht wird, und bereits einen speciellen Werth hat, mag ein sekundäres genannt werden.

Trifft es sich dann, dass der Ausdruck $U = f(x, y)$ gleichzeitig sowohl in primärer als auch in sekundärer Beziehung ein Grösstes oder Kleinstes wird; so hat man ein zusammengesetztes Grösstes oder ein zusammengesetztes Kleinstes.

Es ist nicht grade nöthig, zuerst den primären Zustand für sich allein, und hierauf den sekundären Zustand für sich allein, aufzusuchen; sondern man kann den zusammengesetzten Zustand auch auf einmal auffinden. Oft ist man sogar gezwungen, den zusammengesetzten Zustand auf einmal aufzusuchen (man denke z. B. an die Probleme, welche auf bestimmte Integrale mit veränderlichen Gränzen führen). Das zusammengesetzte Grösste oder Kleinste

auf einmal aufzufinden ist aber Sache des zusammengesetzten Variationskalkul's.

Da es nicht meine Absicht ist, eine Theorie des Variationskalkul's hier mitzutheilen, so will ich die bereits gemachten Bemerkungen nicht noch vermehren; denn jetzt wird jeder Leser die von mir herrührenden Eigenthümlichkeiten, welche in den nachfolgenden Problemen vorkommen, ohne weiteres zu würdigen verstehen. Für einen Theil meiner Leser ist es vielleicht nicht überflüssig, wenn ich zu jedem Probleme einen Paragraphen aus Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten citire.

Erste Abtheilung.

Aufgaben, welche auf Ausdrücke führen, die wirkliche Urfunktionen sind.

Aufgabe 1.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 160. §. 17.).

Welche unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Kurven hat in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft, dass sie das Produkt der zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse gehörigen Ordinate und dieser um die Ordinate verminderten Abscisse grösser oder kleiner macht, als es bei der nemlichen Abscisse alle andern der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven machen können?

Die hier gestellte Aufgabe, welche ein primäres Grösstes oder primäres Kleinstes sucht, führt auf den allgemeinen Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = y\,.\,(x-y),$$

wo x jede beliebige Abscisse und y die jedesmalige Ordinate der gesuchten Kurve ist. Die Ordinaten aller der Kurven, welche der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegen, werden dargestellt durch

$$\text{II)}\quad y + \varkappa\,.\,\delta y + \frac{\varkappa^2}{1\,.\,2}\,.\,\delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\delta^3 y \ldots\ldots\ldots,$$

wo $\varkappa$ der Null nächstanliegend, y die gesuchte Funktion von x, und δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$ u. s. w. ganz willkürliche reelle Funktionen von x sind. Aus I. folgt nun

$$\text{III)}\quad \delta U = (x-2y)\,.\,\delta y$$

$$\text{IV)}\quad \delta^2 U = (x-2y)\delta^2 y - 2\,.\,\delta y^2.$$

Aus $\delta U = 0$ folgt $x - 2y = 0$, d. h. es ist

$$\text{V)}\quad y = \tfrac{1}{2}\,.\,x.$$

Die gesuchte Kurve ist also diejenige Gerade, welche im Anfangspunkte der Coordinaten die Abscissenaxe unter einem Winkel schneidet, dessen goniometri-

Digitized by Google

sche Tangente $= \frac{1}{2}$ ist; und da sich jetzt Gleichung IV. auf $\delta^2 U = -2 \cdot \delta y^2$ zurückzieht, also $\delta^2 U$ bei jeder reellen Funktion von x, welche man für δy setzt und bei jedem beliebigen Werthe des x negativ bleibt; so ist $U' = \frac{1}{4} \cdot x^2$ ein primäres Grösstes.

Aufgabe 2.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 160. §. 17.).

Welche unter allen auf das nemliche rechtwinklige Coordinatensystem bezogenen ebenen Kurven hat in sich einen bestimmten Punkt, der so gelegen ist, dass das Produkt seiner Ordinate und seiner um die Ordinate verminderten Abscisse nebst dem Produkt seiner Abscisse und einer um diese Abscisse verminderten konstanten Linie grösser oder kleiner ist, als bei allen andern nächstgelegenen Nachbarpunkten, mögen sie sich nun in der gesuchten Kurve oder in den ihr in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven befinden, der Fall sein kann?

Diese Aufgabe, welche ein zusammengesetztes Grösstes oder ein zusammengesetztes Kleinstes sucht, führt auf den allgemeinen Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = y \cdot (x - y) + x \cdot (a - x)$$

wo x jede beliebige Abscisse und y die jedesmalige Ordinate der gesuchten Kurve ist. Die irgend einem beliebigen Punkte nächstgelegenen und sowohl in der gesuchten als in allen nächstanliegenden Nachbarkurven befindlichen Nachbarpunkte haben die Abscisse $(x + Dx)$, welche man auch darstellen kann durch

$$\text{II)} \quad x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1 \cdot 2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \vartheta^3 x + \ldots\ldots\ldots,$$

und die Ordinate

$$\text{III)} \quad y + \varkappa \cdot (\delta) y + \frac{\varkappa^2}{1 \cdot 2} \cdot (\delta)^2 y + \frac{\varkappa^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (\delta)^3 y + \ldots\ldots\ldots,$$

wo bekanntlich

$$(\delta) y = \delta y + \frac{dy}{dx} \cdot \vartheta x,$$

$$(\delta)^2 y = \delta^2 y + 2 \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + \frac{dy}{dx} \cdot \vartheta^2 x$$

u. s. w. ist. Da aber die Werthänderung des x ganz unabhängig und willkürlich ist, so wäre es schon hinreichend, statt der Reihe II. den einfachern Ausdruck $x + \varkappa \cdot \vartheta x$ zu setzen, wobei also $\vartheta^2 x = 0$, $\vartheta^3 x = 0$, u. s. w. ist. Nimmt man aber dennoch die Reihe II., so bekommt man

$$\text{IV)} \quad (\delta) U = (x - 2y) \cdot \delta y + [(x - 2y) \cdot \frac{dy}{dx} + y + a - 2x] \cdot \vartheta x$$

$$\text{V)} \quad (\delta)^2 U = (x - 2y) \cdot \delta^2 y + [(x - 2y) \cdot \frac{dy}{dx} + y + a - 2x] \cdot \vartheta^2 x$$

$$- 2 \cdot \delta y^2 + 2[(1 - 2 \cdot \frac{dy}{dx}) \cdot \delta y + (x - 2y) \cdot \frac{d\delta y}{dx}] \cdot \vartheta x$$

Digitized by Google

$$+[(x-2y)\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+2\cdot\frac{dy}{dx}-2(\frac{dy}{dx})^2-2]\cdot\vartheta x^2.$$

Setzt man $(\delta)U=0$, d. h. sowohl $\frac{d_yU}{dy}=0$ als auch $\frac{dU}{dx}=0$, so bekommt man zunächst die identische Gleichung

VI) $x-2y=0.$

Daraus ergibt sich

VII) $y=\frac{1}{2}\cdot x$

Die gesuchte Kurve ist also diejenige Gerade, welche im Anfangspunkte der Coordinaten die Abscissenaxe unter einem Winkel schneidet, dessen goniometrische Tangente $=\frac{1}{2}$ ist. Man bekommt aber auch noch die nichtidentische Gleichung

$$(x-2y)\cdot\frac{dy}{dx}+y+a-2x=0$$

welche sich jedoch in Folge der Gleichung VI. zurückzieht auf

VIII) $y+a-2x=0$

Führt man für y den Ausdruck ein, so bekommt man $a-\frac{3x}{2}=0$, woraus $x=\frac{2a}{3}$ folgt, und es ist

IX) $U''=\frac{a^2}{3}.$

Unter diesen Umständen reducirt sich Gleichung V. auf

X) $(\delta)^2U=-2\cdot\delta y^2-\frac{3}{2}\cdot\vartheta x^2$

Dieser Ausdruck bleibt unter allen Umständen negativ und somit findet ein zusammengesetztes Grösstes statt.

Aufgabe 17.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 177. §. 26.).

Welche unter allen auf dasselbe rechtwinklige Coordinatensystem bezogenen Flächen hat in sich einen bestimmten Punkt, der so gelegen ist, dass folgender von den Coordinaten dieses Punktes abhängige Ausdruck

I) $U=6ax+x^2+w^2+6y^2-4hy\cdot(x+w)$

grösser oder kleiner ist, als bei allen andern nächstgelegenen Nachbarpunkten, mögen sie nun sich in der gesuchten Fläche oder in den ihr überall nächstliegenden Nachbarflächen befinden, der Fall sein kann?

Diese Aufgabe verlangt, wie man sieht, ein zusammengesetztes Grösstes oder Kleinstes. Zu den irgend einem beliebigen Punkte nächstgelegenen und sowohl in der gesuchten als in allen nächstanliegenden Nachbarflächen befindlichen Nachbarpunkten gehören die Abscissen $(x+Dx)$ und $(w+Dw)$, welche man auch darstellen kann durch

Digitized by Google

II) $x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1 \cdot 2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \vartheta^3 x + \ldots\ldots$

III) $w + \varkappa \cdot \vartheta w + \frac{\varkappa^2}{1 \cdot 2} \cdot \vartheta^2 w + \frac{\varkappa^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \vartheta^3 w + \ldots\ldots$

und die Ordinate

IV) $y + \varkappa \cdot (\delta)y + \frac{\varkappa^2}{1 \cdot 2} \cdot (\delta)^2 y + \frac{\varkappa^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (\delta)^3 y + \ldots\ldots$

wo bekanntlich

$$(\delta)y = \delta y + \frac{d_x y}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d_w y}{dw} \cdot \vartheta w,$$

$$(\delta)^2 y = \delta^2 y + 2 \cdot \frac{d_x \delta y}{dx} \cdot \vartheta x + 2 \cdot \frac{d_w \delta y}{dx} \cdot \vartheta w + \frac{d_x y}{dx} \cdot \vartheta^2 x + \frac{d_w y}{dw} \cdot \vartheta^2 w + \frac{d_x^2 y}{dx} \cdot \vartheta x^2 + 2 \cdot \frac{d_x d_w y}{dx \cdot dw} \cdot \vartheta x \cdot \vartheta w + \frac{d_w^2 y}{dw^2} \cdot \vartheta w^2$$

u. s. w. ist. Da aber die Werthänderungen des x und des w hier ganz unabhängig und willkürlich sind, so wäre es schon hinreichend statt der Reihen II. und III. nur $(x + \varkappa \cdot \vartheta x)$ und $(w + \varkappa \cdot \vartheta w)$ zu setzen, wobei also $\vartheta^2 x = 0$, $\vartheta^2 w = 0$, $\vartheta^3 x = 0$, $\vartheta^3 w = 0$ u. s. w. ist. Durch Variiren bekommt man

$$(\delta)U = 4(3y - hx - hw) \cdot \delta y + [4 \cdot (3y - hx - hw) \cdot \frac{d_x y}{dx} + 6a + 2x - 4hy] \cdot \vartheta x + [4 \cdot (3y - hx - hw) \cdot \frac{d_w y}{dw} + 2w - 4hy] \cdot \vartheta w.$$

Aus $(\delta)U = 0$ folgt zuerst die identische Gleichung

VI) $3y - hx - hw = 0$

und die beiden nichtidentischen Gleichungen

VII) $4 \cdot (3y - hx - hw) \cdot \frac{d_x y}{dx} + 6a + 2x - 4hy = 0,$

VIII) $4(3y - hx - hw) \cdot \frac{d_w y}{dw} + 2w - 4hy = 0,$

welche sich aber wegen Gleichung VI. zurückziehen auf

IX) $6a + 2x - 4hy = 0,$

und

X) $2w - 4hy = 0.$

Aus VI. folgt zunächst

XI) $y = \frac{h}{3} \cdot (x + w).$

Die gesuchte Fläche ist also eine Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, und bei welcher die in den Coordinatenebenen XY und WY liegen-

Digitized by Google

den Spuren mit der Coordinatenaxe Y solche Winkel bilden, deren gonlometrische Tangente $= \frac{h}{3}$ ist.

Führt man nun in IX. und X. für y den Ausdruck ein, so bekommt man $x = \frac{3 \cdot (3-2h^2)}{4h^2-3} \cdot a$ und $w = \frac{6h^2}{4h^2-3} \cdot a$. Unter diesen Umständen bleibt nur

$$\text{XII)} \quad (\delta)^2 U = 12 \cdot \delta y^2 + \tfrac{3}{4}(3-2h^2) \cdot [(\vartheta x - \frac{2h^2}{3-2h^2} \cdot \vartheta w)^2 + \frac{3 \cdot (3-4h^2)}{(3-2h^2)^2} \cdot \vartheta w^2].$$

Der Theilsatz mit dem Variationskoefficienten ist unter allen Umständen positiv; dagegen das Aggregat der mit Differenzkoefficienten versehenen Theilsätze ist nur dann sicher positiv, wenn $(3-2h^2)$ und $(3-4h^2)$ gleichzeitig positiv sind; und dieses ist der Fall bei allen von $(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3})$ bis zu $(+\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3})$ liegenden Werthen des h. Dabei findet aber ein zusammengesetztes Kleinstes statt.

Bei allen zwischen $(-\infty)$ und $(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3})$, so wie bei allen zwischen $(+\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3})$ und $(+\infty)$ liegenden Werthen des h kann von einem sichern Zeichenstande des mit Differenzkoefficienten versehenen Aggregates keine Rede sein, und in diesem Falle findet wohl ein primäres Kleinstes, aber in sekundärer Beziehung findet weder ein Grösstes noch ein Kleinstes statt.

Aufgabe 31.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 181. §. 27.).

Man sucht y und z als solche Funktionen von x und für x selbst einen solchen Werth, dass der Ausdruck

$$U = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz + hx - g^2 \cdot \log \text{nat} \frac{x}{m}$$

ein zusammengesetztes Grösstes oder Kleinstes wird.

Man bekommt hier

$$(\delta) U = (2y - z - x) \cdot \delta y + (2z - y - x) \cdot \delta z + [(2y - z - x) \cdot \frac{dy}{dx} + (2z - y - x) \cdot \frac{dz}{dx} + 2x - y - z + \frac{hx - g^2}{x}] \cdot \vartheta x$$

Daraus folgen zunächst die beiden identischen Gleichungen

$$\text{I)} \quad 2y - z - x = 0,$$

und

$$\text{II)} \quad 2z - y - x = 0$$

und die nichtidentische Gleichung

$$\text{III)} \quad 2x - y - z + \frac{hx - g^2}{x} = 0.$$

Digitized by Google

Aus I. und II. ergibt sich $y = x$ und $z = x$; und aus III. ergibt sich $x = \frac{g^2}{h}$. Es ist also jetzt

$$U'' = g^3 \,.\, (1 - \log \text{ nat } \tfrac{g^2}{h \,.\, m}).$$

Unter diesen Umständen bleibt nur

$$(\delta)^2 U = (\delta y - \delta z)^2 + \delta y^2 + \delta z^2 + \frac{h^2}{g^2} \,.\, \vartheta x^2.$$

Das Aggregat der Variationskoefficienten zeigt an, dass ein primäres Kleinstes, und der Theilsatz mit dem Differenzkoefficienten zeigt an, dass auch ein sekundäres Kleinstes statt findet; es findet also ein **zusammengesetztes** Kleinstes statt.

(Man vergleiche die folgende Aufgabe).

Aufgabe 32.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 177. §. 26.).

Man sucht z als solche Funktion von x und y und zugleich für x und y solche Werthe, dass der Ausdruck

$$U = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz + hx - g^2 \,.\, \log \text{ nat } \frac{x}{m}$$

ein zusammengesetztes Grösstes oder Kleinstes wird.

Man bekommt hier

$$(\delta)U = (2z - x - y) \,.\, \delta z + [(2z - x - y) \,.\, \frac{d_y z}{dy} + 2y - x - z] \,.\, \vartheta y$$

$$+ [(2z - x - y) \frac{d_x z}{dx} + 2x - y - z + \frac{hx - g^2}{x}] \,.\, \vartheta x.$$

Daraus folgt zunächst die identische Gleichung

$$\text{I)} \quad 2z - x - y = 0$$

und die beiden nichtidentischen Gleichungen

$$\text{II)} \quad 2y - x - z = 0$$

und

$$\text{III)} \quad 2x - y - z - \frac{hx - g^2}{x} = 0.$$

Aus I. ergibt sich $z = \frac{x + y}{2}$. Führt man diesen Ausdruck in I. und II. ein, so bekommt man $y = \frac{g^2}{h}$ und $x = \frac{g^2}{h}$. Es ist also jetzt wieder

$$U'' = g^2 \,.\, (1 - \log \text{ nat } \tfrac{g^2}{h \,.\, m}).$$

Unter diesen Umständen bleibt nur

$$(\delta)^2 U = 2\delta z^2 + 6 \,.\, (\vartheta x - \vartheta y)^2 + \frac{h^2}{g^2} \,.\, \vartheta x^2.$$

Digitized by Google

Der Theilsatz mit dem Variationskoefficienten zeigt an, dass ein primäres Kleinstes, und das Aggregat mit den Differenzkoefficienten zeigt an, dass auch ein sekundäres Kleinstes statt findet; es findet also ein zusammengesetztes Kleinstes statt.

(Man vergleiche die vorhergehende Aufgabe).

Aufgabe 51.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 197. §. 35.; und zu Seite 202. Anmerkung.).

Welcher abgekürzte senkrechte Kegel hat bei jedem beliebigen zwischen dem Halbmesser der oberen und unteren Grundfläche stattfindenden Verhältnisse die Eigenschaft, dass er unter allen denen, die denselben (gegebenen oder nichtgegebenen) Körperinhalt einschliessen, von der kleinsten Oberfläche begränzt wird?

Es sei y der Halbmesser der untern, z der Halbmesser der obern Grundfläche und v sei die senkrechte Entfernung dieser beiden Grundflächen; so ist bekanntlich des abgekürzten Kegelmantels Flächeninhalt $= \pi . (y+z) . \sqrt{v^2+(y-z)^2}$, das z mag grösser oder kleiner als y sein, d. h. des abgekürzten Kegels Spitze mag abwärts oder aufwärts liegen. Hier hat man, eben weil kein Grund vorhanden ist, warum des Kegelmantels Flächeninhalt negativ sein sollte, das Radikal nur nach seiner positiven Bedeutung zu nehmen; und diese Bedeutung muss ihm durch die ganze Aufgabe bleiben. Der Flächeninhalt der untern Grundfläche ist $\pi . y^2$, und der Flächeninhalt der obern Grundfläche ist $\pi . z^2$. Addirt man diese drei Ausdrücke, so ergibt sich für die ganze Oberfläche des abgekürzten senkrechten Kegels folgender Ausdruck:

$$\text{I)}\quad U = \pi . [y^2 + z^2 + (y+z) . \sqrt{v^2+(y-z)^2}].$$

Der Körperinhalt desselben ist

$$\text{II)}\quad \frac{\pi}{3} . v . (y^2 + yz + z^2).$$

Weil ferner der Halbmesser der obern Grundfläche irgend ein beliebiges Vielfaches oder irgend ein beliebiger Theil des Halbmessers der unteren Grundfläche ist, so hat man noch die Gleichung

$$\text{III)}\quad y = x . z.$$

Man erkennt sogleich, dass die Auflösung am leichtesten durchgeführt wird, wenn man y eliminirt; man hat dann z und v als solche Funktionen von x zu bestimmen, dass

$$\text{IV)}\quad U = \pi . [z^2 . (1+x^2) + z . (1+x) . \sqrt{v^2 + z^2 . (x-1)^2}]$$

ein primäres Kleinstes wird, während noch der Ausdruck

$$\text{V)}\quad \frac{\pi}{3} . v . z^2 . (1+x+x^2)$$

beständig denselben (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält. Aus IV. folgt nun

Digitized by Google

VI) $\delta U = \frac{\pi z \cdot (1+x) \cdot v}{\sqrt{v^2 + z^2 \cdot (x-1)^2}} \cdot \delta v$

$$+ \frac{\pi \cdot (1+x) \cdot [v^2 + 2z^2 \cdot (x-1)^2] + 2\pi z \cdot (1+x^2) \cdot \sqrt{v^2 + z^2 \cdot (x-1)^2}}{\sqrt{v^2 + z^2 \cdot (x-1)^2}} \cdot \delta z.$$

Aus V. aber folgt

VII) $z \cdot \delta v + 2v \cdot \delta z = 0.$

Eliminirt man nun δv, so geht Gleichung VI. über in

VIII) $\delta U = \frac{\pi \cdot (x+1) \cdot [2z^2 \cdot (x-1)^2 - v^2] + 2\pi z \cdot (x^2+1) \cdot \sqrt{v^2 + z^2 \cdot (x-1)^2}}{\sqrt{v^2 + z^2 \cdot (x-1)^2}} \cdot \delta z.$

Setzt man $\delta U = 0$, so folgt aus Gleichung VIII.

IX) $(x+1) \cdot [2z^2 \cdot (x-1)^2 - v^2]$

$$+ 2z \cdot (x^2+1) \cdot \sqrt{v^2 + z^2 \cdot (x-1)^2} = 0.$$

Daraus folgt

X) $z^2 = (\frac{v}{2x \cdot (x-1)})^2 \cdot [-(x^4+1)$

$$+ \sqrt{(x^4+1)^2 + x^2 \cdot (x^2-1)^2}].$$

Das Radikal kann aber hier nur seine positive Bedeutung haben, weil widrigenfalls z^2 negativ, also z selbst imaginär wäre. Hierdurch ist das Verhältniss der Höhe zum Halbmesser der oberen Grundfläche gegeben. Würde man dem nichtvariabeln Elemente x den Werth 1 beilegen, so würde aus Gleichung III. folgen $y = z$, d. h. der Halbmesser der obern Grundfläche wäre dem der untern Grundfläche gleich, und der abgekürzte Kegel ginge in den Cylinder über, und Gleichung X. ginge über in

XI) $z^2 = v^2 \cdot \frac{0}{0}.$

Wenn man aber Gleichung X. genauer betrachtet, so erkennt man, dass man den wahren Werth der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ jetzt am leichtesten dadurch ermittelt, dass man das Radikal nach dem binomischen Lehrsatze in eine Reihe verwandelt. Nun darf das Radikal, wie bereits aus einandergesetzt ist, nur seine positive Bedeutung haben; und dabei geht Gleichung X. über in

$$z^2 = \frac{v^2}{4x^2 \cdot (x-1)^2} \cdot [\tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^2 \cdot (x^2-1)^2}{x^4+1} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^4 \cdot (x^2-1)^4}{(x^4+1)^2}$$

$$+ \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^6 \cdot (x^2-1)^6}{(x^4+1)^3} - \ldots\ldots].$$

Dividirt man in Zähler und Nenner das gemeinschaftliche Produkt $x^2 \cdot (x-1)^2$ weg; so geht letztere Gleichung über in

$$z^2 = \frac{v^2}{4} [\tfrac{1}{2} \cdot \frac{(x+1)^2}{x^4+1} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^2 : (x-1)^2 \cdot (x+1)^4}{(x^4+1)^2}$$

$$+ \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^4 \cdot (x-1)^4 \cdot (x+1)^6}{(x^4+1)^3} - \ldots\ldots]$$

Diese Gleichung ist mit Gleichung X. ganz gleichbedeutend bei je-

Digitized by Google

dem Werthe des x, also auch bei $x=1$; und setzt man wirklich $x=1$, so bekommt man

$$\text{XII)}\quad z^2=\tfrac{1}{4}\,.\,v^2,$$

so dass die hier in Frage stehende unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ den Werth $\frac{1}{4}$ hat. Aus XII. folgt $v=2z$, d. h. die Höhe dieses Cylinders ist dem Durchmesser der beiden Grundflächen gleich, und man hat den bekannten Satz: „unter allen Cylindern von einerlei Körperinhalt wird derjenige von der kleinsten Oberfläche eingeschlossen, dessen Höhe dem Durchmesser der Grundflächen gleich ist.

Erstens. Ist der Körperinhalt des gesuchten Kegels ein gegebener, dargestellt durch m^3; so geht der Ausdruck V. über in die Gleichung

$$\text{XIII)}\quad \frac{\pi}{3}\,.\,v\,.\,z^2\,.\,(1+x+x^2)=m^3$$

und die Gleichungen X. und XIII. reichen hin, zu bestimmen, was v und z für Funktionen von x sind.

Zweitens. Ist der Körperinhalt des gesuchten Kegels nicht gegeben, so hat man nur die einzige Gleichung X., und jetzt kann man für das mittelbarvariable Element v jede beliebige Funktion von x wählen; die zugehörige Funktion z ergiebt sich dann jedesmal aus Gleichung IX. oder X.

Das Prüfungsmittel, ob ein Grösstes oder Kleinstes stattfinde, ist noch herzustellen.

Zweite Abtheilung.

Aufgaben, welche auf Ausdrücke führen, wo Differentiale vorkommen.

Aufgabe 56.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten Seite 208. §. 44—46.)

Welche unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Kurven hat in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft, dass sie folgenden von den Coordinaten abhängigen Ausdruck

$$\text{I)}\quad U=h^2\,.\,x^2+\frac{h^4\,.\,x^2}{x^2-h^2}+\tfrac{1}{2}\,.\,h^2\,.\,y^2-(h^2\,.\,x^2+h^2\,.\,xy)\,.\,\frac{dy}{dx}+h^2\,.\,x^2\,.\,\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse grösser oder kleiner macht, als ihn bei der nemlichen Abscisse alle andern der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächst anliegenden Nachbarkurven machen können?

Digitized by Google

Hier ist x jede beliebige Abscisse und y die jedesmalige Ordinate der gesuchten Kurve. Die Ordinaten aller Kurven, welche der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegen, werden dargestellt durch

$$\text{II)}\quad y+x\,.\,\delta y+\frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,\delta^2 y+\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\delta^3 y+\ldots\ldots\ldots$$

wo x der Null nächstanliegend, y die gesuchte Funktion von x, und δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, u. s. w. ganz willkürliche reelle Funktionen von x sind. Der erste Differentialquotient der der gesuchten Funktion y bei jedem Werthe des x nächstanliegenden Nachbarfunktionen wird also dargestellt durch

$$\text{III)}\quad \frac{dy}{dx}+x\,.\,\frac{d\delta y}{dx}+\frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,\frac{d\delta^2 y}{dx}+\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\frac{d\delta^3 y}{dx}+\ldots\ldots\ldots$$

Durch Variiren bekommt man

$$\text{IV)}\quad \delta U=(h^2\,.\,y-h^2\,.\,x\,.\,\frac{dy}{dx})\,.\,\delta y+(2h^2\,.\,x^2\,.\,\frac{dy}{dx}+h^2\,.\,x^2-h^2\,.\,x\,.\,y)\,.\,\frac{d\delta y}{dx},$$

$$\text{V)}\quad \delta^2 U=(h^2\,.\,y-h^2\,.\,x\,.\,\frac{dy}{dx})\,.\,\delta^2 y+(2h^2\,.\,x^2\,.\,\frac{dy}{dx}-h^2\,.\,x^2-h^2\,.\,xy)\,.\,\frac{d\delta^2 y}{dx}$$

$$+h^2\,.\,\delta y^2-2h^2\,.\,x\,.\,\delta y\,.\,\frac{d\delta y}{dx}+2\,.\,h^2\,.\,x^2\,.\,(\frac{d\delta y}{dx})^2.$$

Erster Fall. Soll die gesuchte Kurve aus allen möglichen einander in jedem Punkte nächstanliegenden herausgewählt werden; so sind δy und $\frac{d\delta y}{dx}$ dem Werthe nach ganz unabhängig von einander, wenn gleich mit der Form des δy auch die des $\frac{d\delta y}{dx}$ mitgegeben ist. Es müssen also jetzt die zwei identischen Gleichungen

$$1)\quad h^2\,.\,y-h^2\,.\,x\,.\,\frac{dy}{dx}=0$$

und

$$2)\quad 2h^2\,.\,x^2\,.\,\frac{dy}{dx}-h^2\,.\,x^2-h^2\,.\,xy=0$$

statt finden. Man hat nun zwei Wege, die gesuchte Funktion y von x aufzufinden.

Erstens. Gleichung 1) geht geradezu über in $y\,.\,dx-x\,.\,dy=0$ oder $\frac{y\,.\,dx-x\,.\,dy}{x^2}=0$. Daraus folgt durch Integriren

$$3)\quad y=Bx.$$

Durch diese Funktion muss aber auch Gleichung 2) identisch werden. Zu diesem Ende führe man Bx statt y und B statt $\frac{dy}{dx}$ in

Gleichung 2) überall ein, reducire so viel als möglich, und man bekommt

$$2B \,.\, h^2 \,.\, x^2 - h^2 \,.\, x^2 - B \,.\, h^2 \,.\, x^2 = 0.$$

Daraus folgt $B = 1$, und Gleichung 3) geht über in

$$4)\quad y = x,$$

welches die gesuchte Funktion y von x ist. Dabei reducirt sich Gleichung V) auf

$$\delta^2 U = h^2[(\delta y - x \,.\, \frac{d\delta y}{dx})^2 + (x \,.\, \frac{d\delta y}{dx})^2]$$

woran man erkennt, dass $U' = \frac{1}{2} \,.\, h^2 \,.\, \frac{x^2 \,.\, (x^2 + h^2)}{x^2 - h^2}$ ein primäres Kleinstes ist.

Zweitens. Man kann aber auch aus 1) und 2) den Ausdruck $\frac{dy}{dx}$ eliminiren, und so ohne Integration zu der gesuchten Funktion y von x gelangen. Zu diesem Ende wird man aus Gleichung 1) bekommen

$$5)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Diesen Ausdruck führe man in 2) ein, und es ergibt sich $h^2 \,.\, x(y - x) = 0$, so dass man

$$6)\quad y = x$$

hat. Diese Funktion soll nun die Gleichungen 1) und 2) zugleich identisch machen, was noch besonders untersucht werden muss. Man hat also jetzt genau dasselbe Resultat, wie vorher.

Zweiter Fall. Soll man aber nur unter denen in jedem Punkte einander nächstanliegenden Kurven, welche alle den zu der gerade gewählten Abscisse x gehörigen Punkt mit einander gemeinschaftlich haben, diejenige heraussuchen, wobei das U grösser oder kleiner wird, als bei allen andern so geeigenschafteten Kurven; so haben alle hier in Betracht zu ziehenden Kurven bei der gerade gewählten Abscisse x auch einerlei Ordinate. Deshalb besteht bei der gerade gewählten Abscisse x zwischen der Ordinate der gesuchten und den Ordinaten aller in Betracht zu ziehenden Kurven folgende Gleichung:

$$\text{VI)}\quad y = y + \varkappa \,.\, \delta y + \frac{\varkappa^2}{1 \,.\, 2} \,.\, \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, \delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

Es muss also bei dem gerade gewählten Werthe des x einzeln sein

$$\delta y = 0,\ \delta^2 y = 0,\ \delta^3 y = 0,\ \text{u. s. w.}$$

Hier reducirt sich also Gleichung IV. auf

$$\delta U = (2 \,.\, h^2 \,.\, x^2 \,.\, \frac{dy}{dx} - h^2 \,.\, x^2 - h^2 \,.\, x \,.\, y) \frac{d\delta y}{dx}.$$

Man hat daher jetzt nur die einzige Gleichung

$$7)\quad 2h^2 \,.\, x^2 \,.\, \frac{dy}{dx} - h^2 \,.\, x^2 - h^2 \,.\, xy = 0.$$

Digitized by Google

Diese Gleichung reducirt sich geradezu auf

$$8)\ 2x\,.\,dy - x\,.\,dx - y\,.\,dx = 0.$$

Die Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit dem Faktor $\frac{1}{2\,.\,x^{\frac{1}{2}}}$ multiplicirt. Dadurch bekommt man

$$9)\ \frac{2x\,.\,dy - y\,.\,dx}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Daraus folgt durch Integration

$$10)\ \frac{y}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = C$$

oder mit Aenderung der Konstanten

$$11)\ y - x = \sqrt{E\,.\,x}$$

oder

$$12)\ (y-x)^2 = E\,.\,x.$$

Die willkührliche Konstante E macht, dass man die Aufgabe noch einer Nebenbedingung unterwerfen kann. Da sich jetzt Gleichung V. auf

$$\delta^2 U = 2\,.\,h^2\,.\,x^2\,.\,(\tfrac{d\delta y}{dx})^2$$

zurückziehet, so erkennt man, dass ein primäres Kleinstes stattfindet.

Dritter Fall. Soll man nur unter denen in jedem Punkte einander nächstanliegenden Kurven, welche bei der gerade genommenen Abscisse x lauter parallele Berührende haben, während die zu dieser Abscisse x gehörigen Berührungspunkte der hier in Betracht zu ziehenden Kurven in verschiedenen (jedoch einander nächstanliegenden) Entfernungen von der Abscissenaxe sich befinden können, diejenigen heraussuchen, wobei das U grösser oder kleiner wird, als bei allen andern so geeigenschafteten Kurven; so schliesst die Abscissenaxe mit den zu der gerade gewählten Abscisse x gehörigen Berührenden aller in Betracht zu ziehenden Kurven jedesmal einen gleichgrossen Winkel ein. Nun ist $\frac{dy}{dx}$ die goniometrische Tangente des von der Abscissenaxe und von der (an den zu der gerade gewählten Abscisse x gehörigen Punkt der gesuchten Kurve gezogenen) Berührenden eingeschlossenen Winkels; und deshalb besteht bei der gerade gewählten Abscisse x zwischen der goniometrischen Tangente der gesuchten Kurve und zwischen den goniometrischen Tangenten aller in Betracht zu ziehenden Kurven folgende Gleichung:

$$\text{VII)}\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + x\,.\,\frac{d\delta y}{dx} + \frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,\frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\frac{d\delta^3 y}{dx} + \ldots\ldots.$$

Es muss also bei dem gerade gewählten Werthe des x einzeln sein

$$\frac{d\delta y}{dx} = 0,\ \frac{d\delta^2 y}{dx} = 0,\ \frac{d\delta^3 y}{dx} = 0,\ \text{u. s. w.}$$

Hierbei reducirt sich Gleichung 4) auf

Digitized by Google

$$\delta U = (h^2 \cdot y - h^2 \cdot x \cdot \frac{dy}{dx}) \cdot \delta y.$$

Daraus folgt die identische Gleichung

$$13)\ h^2 \cdot y - h^2 \cdot x \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Diese Gleichung formt sich zunächst um in $x \cdot dy - y \cdot dx = 0$, oder $\frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2} = 0$; und daraus folgt durch Integration

$$14)\ y = Gx.$$

Die willkürliche Konstante G macht, dass man die Aufgabe noch einer weitern Bedingung unterwerfen kann. Da sich hierbei Gleichung V. auf

$$\delta^2 U = h^2 \cdot \delta y^2$$

reducirt, so erkennt man, dass ein primäres Kleinstes statt findet.

Aufgabe 67.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 208. §. 44—46.).

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Kurven diejenige heraussuchen, welche in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft hat, dass, wenn man an den zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt die Berührende zieht, und dann von zwei andern in der Ebene irgendwo festliegenden Punkten Perpendikel auf diese Berührende fällt, das Produkt dieser Perpendikel grösser oder kleiner wird, als bei den zu der nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann.

Die Auflösung wird (Taf. III. Fig. 2.) vereinfacht, wenn man die Abscissenaxe durch die beiden bestimmten Punkte H und K legt; und wenn man zugleich HR und KT senkrecht auf OX errichtet, so bekommt man $HM = HR.\sin HRM$, und $KN = KT.\sin KTN$.

Nun ist $\text{tg}\ SFG = \frac{dy}{dx} = p$, also $\cos SFG = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$, und man hat somit

$$I)\ \sin HRM = \sin KTN = \cos SFG = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Ferner ist schon in der 66sten Aufgabe dargethan, dass, wenn man die festen Abscissen OH und OK bezüglich mit a und α bezeichnet,

$$HR = y + (a - x) \cdot p, \text{ und } KT = y + (\alpha - x) \cdot p;$$

also ist

$$II)\ HM = \frac{y + (a - x) \cdot p}{\sqrt{1+p^2}},$$

und

Digitized by Google

III) $KN = \frac{y + (\alpha - x) \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}$.

Für das gesuchte Produkt $HM \cdot KN$ hat man also, da die beiden Radikale entweder durchweg ihre positive oder durchweg ihre negative Bedeutung repräsentiren,

$$U = \frac{[y + (\alpha - x) \cdot p] \cdot [y + (\alpha - x)p]}{1 + p^2}.$$

Durch Variiren bekommt man

$$\text{IV)}\quad \delta U = \frac{1}{1+p^2} \cdot [2y + (\alpha + \alpha - 2x)p] \cdot \delta y$$

$$+ \frac{1}{(1+p^2)^2} \cdot \{[(\alpha + \alpha - 2x) \cdot y + 2(\alpha - x)(\alpha - x)p] \cdot (1 + p^2)$$

$$- 2p \cdot [y + (\alpha - x)p] \cdot [y + (\alpha - x)p]\} \cdot \frac{d\delta y}{dx}.$$

Erster Fall. Soll die gesuchte Kurve aus allen möglichen einander in jedem Punkte nächstanliegenden heraus gewählt werden, so sind δy und $\frac{d\delta y}{dx}$ dem Werthe nach ganz unabhängig von einander, wenn gleich mit der Form des δy auch die des $\frac{d\delta y}{dx}$ mitgegeben ist. Es müssen jetzt die zwei identischen Gleichungen stattfinden

$$1)\quad 2y + (\alpha + \alpha - 2x)p = 0$$

$$2)\quad [(\alpha + \alpha - 2x) \cdot y + 2(\alpha - x)(\alpha - x) \cdot p] \cdot (1 + p^2)$$

$$- 2p \cdot [y + (\alpha - x)p] \cdot [y + (\alpha - x)p] = 0$$

Eliminirt man p aus den beiden Gleichungen, so bekommt man

$$3)\quad (\alpha - \alpha)^2 \cdot y = 0$$

d. h. y wäre eine identische Funktion von x, und die gefundene Kurve wäre die in die Abscissenaxe fallende Grade. Dabei ist aber nur

$$\delta^2 U = 2 \cdot \delta y^2 + 2 \cdot (\alpha + \alpha - 2x) \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$+ 2 \cdot (\alpha - x)(\alpha - x) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2.$$

Da aber

$$\frac{d_y{}^2 U}{dy^2} \times \frac{d_p{}^2 U}{dp^2} - \left(\frac{d_y d_p U}{dy \cdot dp}\right)^2 = -(\alpha - \alpha)^2$$

beständig negativ bleibt, so kann von keinem Grössten oder Kleinsten die Rede sein.

Zweiter Fall. Macht man dieselbe Einschränkung wie beim zweiten Falle der vorigen Aufgabe, so reducirt sich Gleichung IV. auf

$$\delta U = \frac{1}{(1+p^2)^2} \{[(\alpha + \alpha - 2x)y + 2(\alpha - x)(\alpha - x) \cdot p](1 + p^2)$$

$$- 2p \cdot [y + (\alpha - x)p] \cdot [y + (\alpha - x)p]\} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Digitized by Google

Damit $\delta U = 0$ werde, muss sein

$$4)\ [(a+\alpha-2x)\,.\,y+2(a-x)\,(\alpha-x)\,.\,p]\,.\,(1+p^2) - 2p\,.\,[y+(a-x)\,.\,p]\,.\,[y+(\alpha-x)\,.\,p] = 0.$$

Um diese Gleichung zu integriren, multiplicire man sie vorerst mit $\frac{dp}{(1+p^2)^2}$; dann hat man

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}[(a+\alpha-2x)\,.\,y+2(a-x)\,(\alpha-x)p]\,.\,(1+p^2)\,.\,dp \\ -2[y+(a-x)\,.\,p]\,.\,[y+(\alpha-x)\,.\,p]\,.\,p\,.\,dp\end{array}\right\}}{(1+p^2)^2} = 0.$$

Da $dy = p\,.\,dx$, so ist der Ausdruck

$$[2y+(a+\alpha-2x)\,.\,p]\,.\,(1+p^2)dy - [2y+(a+\alpha-2x)\,.\,p]\,.\,(1+p^2)\,.\,p\,.\,dx$$

jedenfalls eine identische Gleichung. Man kann ihn also zu dem Zähler des letzten Bruches addiren, ohne dass derselbe dadurch geändert wird; und somit bekommt man

Digitized by Google

$$\frac{\left.\begin{array}{l}[2y+(a+a-2x)\cdot p]\cdot(1+p^2)\cdot dy-[2y+(a+a-2x)\cdot p]\cdot(1+p^2)\cdot p\cdot dx\\ +[(a+a-2x)\cdot y+2(a-x)(a-x)\cdot p]\cdot(1+p^2)\cdot dp\\ -2[y+(a-x)\cdot p]\cdot[y+(a-x)\cdot p]\cdot dp\end{array}\right\}}{(1+p^2)^2}=0$$

Diese Gleichung kann man geradezu integriren, und es wird

$$\frac{[y+(a-x)\cdot p]\cdot[y+(a-x)\cdot p]}{1+p^2}=A$$

Daraus folgt $[y+(a-x)p]\cdot[y+(a-x)\cdot p]=A\cdot(1+p^2)$; und führt man diesen Ausdruck in Gleichung 4. ein, so bekommt man

$$[(a+a-2x)\cdot y+2(a-x)(a-x)\cdot p]\cdot(1+p^2)$$
$$-2Ap\cdot(1+p^2)=0$$

Digitized by Google

Daraus folgt

$$\frac{2 \cdot dy}{y} = \frac{(a + \alpha - 2x) \cdot dx}{A - a\alpha + ax + \alpha x - x^2}.$$

Also ist

$$2\log \text{nat } y = C + \log \text{nat } (A - a\alpha + ax + \alpha x - x^2)$$

oder mit Veränderung der Konstanten

$$5)\ y^2 = B \cdot (A - a\alpha + ax + \alpha x - x^2).$$

Diese Gleichung enthält aber zwei willkührliche Konstanten, während doch die hier vorgegebene Differentialgleichung 4. nur von der ersten Ordnung ist. Aber der Umstand, dass Gleichung 4. durch 5. identisch werden muss, dient dazu, die eine der Konstanten durch die andere zu bestimmen.

Aus 5. folgt nun $y = \sqrt{B} \cdot (A - a\alpha + ax + \alpha x - x^2)$ und $p = \frac{(a + \alpha - 2x) \cdot \sqrt{B}}{2 \cdot \sqrt{A - a\alpha + ax + \alpha x - x^2}}$. Vereinfacht man noch Gleichung 4), so bleibt nur

$$6)\ (a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p - 2y^2 \cdot p - (a + \alpha - 2x) \cdot p^2 \cdot y = 0.$$

Und führt man hierin die so eben für y und p gefundenen Ausdrücke ein, so bleibt nach ausgeführten Reduktionen nur noch übrig

$$4A \cdot (1 - B) - B \cdot (\alpha - a)^2 = 0.$$

Daraus folgt

$$A = \frac{B}{1 - B} \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2$$

Gleichung 5. geht also über in

$$7)\ y^2 = B \cdot \left[\frac{B}{1 - B} \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2 - a\alpha + ax + \alpha x - x^2\right]$$

welche sich aber auf folgende Weise darstellen lässt

$$8)\ y^2 = B\left[\frac{1}{1 - B} \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{\alpha + a}{2}\right)^2\right]$$

oder

$$9)\ \frac{\left(x - \frac{\alpha + a}{2}\right)^2}{\frac{1}{1 - B} \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{B}{1 - B} \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2} = 1.$$

Die gesuchte Kurve ist also entweder eine Ellipse oder Hyperbel. Sie ist eine Ellipse, wenn $\frac{1}{1 - B}$ und $\frac{B}{1 - B}$ gleichzeitig positiv sind; und dazu ist nöthig, dass $B < 1$ und positiv ist. Die gesuchte Kurve aber ist eine Hyperbel, wenn $\frac{1}{1 - B}$ und $\frac{B}{1 - B}$ entgegengesetzte Vorzeichen haben; und dieses ist der Fall, wenn B negativ ist. B kann niemals grösser als $+1$ sein; denn dabei

Digitized by Google

kämo man (Gleichung 8) auf den Widersprnch, dass y^2 negativ, also y selbst imaginär wäre.

Da $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$, u. s. w.; so bekommt man für den Variationskoefficienten der zweiten Ordnung nach und nach

$$\delta^2 U = \frac{1}{(1+p^2)^2} \cdot \{2 \cdot (a-x)\ (\alpha - x) \cdot (1+p^2) - 2[y+(a-x) \cdot p]\ [y+(\alpha - x) \cdot p]\} \cdot (\frac{d\delta y}{dx})^2$$

oder

$$\delta^2 U = \frac{1}{(1+p^2)^2} \cdot [2(a-x)\ (\alpha - x) \cdot (1+p^2) - 2A \cdot (1+p^2)] \cdot (\frac{d\delta y}{dx})^2$$

oder

$$\delta^2 U = -\frac{2}{1+p^2} \cdot (A - a\alpha + ax + \alpha x - x^2) \cdot (\frac{d\delta y}{dx})^2$$

oder

$$\delta^2 U = -\frac{2}{1+p^2} \cdot \frac{y^2}{B} \cdot (\frac{d\delta y}{dx})^2.$$

Die Ellipse, bei welcher B positiv ist, liefert also ein primäres Grösstes; und die Hyperbel, bei welcher B negativ ist, liefert ein primäres Kleinstes.

Wie die Konstante B bestimmt wird, ist aus früheren Aufgaben zur Genüge bekannt.

Dritter Fall. Macht man dieselbe Einschränkung wie beim dritten Falle der vorigen Aufgabe, so ist $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, u. s. w.; und Gleichung IV. reducirt sich auf

$$\delta U = [2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p] \cdot \delta y.$$

Man hat also die identische Gleichung

$$10)\quad 2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p = 0$$

Daraus ergibt sich

$$11)\quad y = E \cdot (x - \frac{a+\alpha}{2}).$$

Die gesuchte Kurve ist also (Taf. III. Fig. 3. und Fig. 4.) die Grade RT, welche genau mitten zwischen H und K die Abscissenaxe durchschneidet, und insofern die Aufgabe löst, als jede Grade auch ihre eigne Berührende ist.

Wie man die Konstante E bestimmt, ist aus früheren Aufgaben zur Genüge bekannt.

Weil $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, u. s. w. ist; so bekommt man für den Variationskoefficienten der zweiten Ordnung

$$\delta^2 U = \frac{2}{1+p^2} \cdot \delta y^2,$$

Digitized by Google

woran man erkennt, dass jedenfalls ein primäres Kleinstes stattfindet.

Schaut man auf Taf. III. Fig. 3. und Taf. III. Fig. 4., so sieht man, dass das hier gefundene Produkt $U = HM \,.\, KN$ eigentlich negativ ist, weil die Faktoren HM und KN entgegengesetzt sind. Ein negativer Ausdruck gilt aber in der Analysis für desto kleiner, je weiter sein Werth von Null absteht. Jede mit RT parallele Berührende, z. B. VW, aller andern nächstanliegenden Nachbarkurven erzeugt ein Produkt $U + \Delta U = HV \,.\, KW$, welches natürlich auch jedesmal negativ ist, aber doch näher bei Null liegt, als das Produkt $U = HM \,.\, KN$.

Beweis. Weil $HI = IK$, so sind die beiden rechtwinkeligen Dreiecke HIM und KIN kongruent, also sind die Lothe HM und KN einander gleich, aber entgegengesetzt. Desshalb ist $U = HM \,.\, KN = HM \,.\, (-HM) = -\overline{HM}^2$. Weil nun VW parallel ist mit MN, so ist $VM = WN$. Man setze $VM = WN = D$, so ist $U + \Delta U = HV \,.\, KW = (HM - VM) \,.\, (KN + NW) = (HM - D) \,.\, [-(HM + D)] = -\overline{HM}^2 + D^2$, wie zu beweisen war.

Aufgabe 68.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 208. §. 44—46.)

Man zieht in einem beliebigen Punkte einer ebenen Kurve die Berührende. Aus zwei festen Punkten einer gegebenen Graden errichtet man Perpendikel, welche bis zur Berührenden verlängert werden; dadurch entsteht ein Trapez. Hierauf fällt man von denselben zwei festen Punkten Perpendikel auf die Berührende; dadurch entsteht wieder ein Trapez. Welche Kurve ist es nun, wenn der Unterschied dieser beiden Trapeze ein primäres Grösstes oder Kleinstes ist, und alle in Betracht zu ziehenden Kurven das nemliche rechtwinkelige Coordinatensystem haben?

Die gegebene gerade Linie (Taf. III. Fig. 2.) sei OX; H und K seien die in dieser Graden gelegenen bestimmten Punkte. Die beiden in Rede stehenden Trapeze sind also $HRTK$ und $HMNK$. Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe nicht, wenn man die gegebene Grade OX als Abscissenaxe nimmt; in ihr nehme man dann nach Belieben einen Punkt O als Anfang der Coordinaten. Es ist des Trapezes $HRTK$ Inhalt $= \frac{1}{2} \,.\, HK \,.\, (HR + KT)$; und ebenso ist des Trapezes $HMNK$ Inhalt $= \frac{1}{2} \,.\, MN \,.\, (HM + KN)$. Ist nun $OH = a$ und $OK = \alpha$, so ist nach Einleitung der vorigen Aufgabe

$$HK = \alpha - a, \quad HR = y + (a - x) \,.\, p, \quad KT = y + (\alpha - x) \,.\, p$$

$$MN = ME \,.\, \cos NME = HK \,.\, \cos SFG = \frac{\alpha - a}{\sqrt{1 + p^2}},$$

$HM = \frac{y + (a - x) \,.\, p}{\sqrt{1 + p^2}}$, und $KN = \frac{y + (\alpha - x) \,.\, p}{\sqrt{1 + p^2}}$. Es ist also Trapez $HRTK = \frac{\alpha - a}{2} \,.\, [2y + (a + \alpha - 2x) \,.\, p]$; und weil die Ra-

Digitized by Google

dikale entweder durchweg ihre positive oder durchweg ihre negative Bedeutung repräsentiren, so ist Trapez

$$HMNK = \frac{a-\alpha}{2} \times \frac{2y + (a+\alpha-2x) \cdot p}{1+p^2}.$$

Der Unterschied dieser beiden Trapeze ist also

$$U = \frac{a-\alpha}{2} \times \frac{2y \cdot p^2 + (a+\alpha-2x) \cdot p^2}{1+p^2}.$$

Durch Variiren bekommt man

$$1)\ \delta U = \frac{a-\alpha}{1+p^2} \cdot p^2 \cdot \delta y$$

$$+ \frac{a-\alpha}{2(1+p^2)^2} \cdot p[4y + (a+\alpha-2x)\ (3+p^2) \cdot p] \cdot \frac{d\delta y}{dx}.$$

Erster Fall. Soll die gesuchte Kurve aus allen möglichen einander in jedem Punkte nächstanliegenden herausgewählt werden; so sind bekanntlich δy und $\frac{d\delta y}{dx}$ dem Werthe nach ganz unabhängig von einander, und es müssen folgende zwei identische Gleichungen stattfinden:

$$1)\ p^2 = 0$$

$$2)\ p[4y + (a+\alpha-2x)\ (3+p^2) \cdot p] = 0.$$

Erstens. Diesen beiden Gleichungen wird zugleich genügt, wenn $p = 0$; und daraus folgt

$$3)\ y = A.$$

Man hat also die mit der Abscissenaxe parallele Gerade, und die beiden Trapeze *HRTK* und *HMNK* fallen in ein einziges zusammen. Dabei ist $U' = 0$ ganz unabhängig vom Werthe des x, so dass von einer secundären Beziehung keine Rede sein kann. Da nun besagte Gerade mit der Abscissenaxe parallel ist, so liegen alle ihre Ordinaten auf einer und derselben Seite der Abscissenaxe. Man setze also fest, dass die Ordinaten, welche zu besagter Graden gehören, die positiven seien; dabei ist auch A positiv. Ferner ist jetzt nur $\delta^2 U = 2 \cdot (a-\alpha) \cdot A \cdot (\frac{d\delta y}{dx})^2$, und es findet, eben weil A als positiv gilt, ein primäres Kleinstes statt.

Zweitens. Den Gleichungen 1 und 2 wird auch genügt, wenn

$$4)\ y = 0,$$

d. h. eine identische Funktion von x ist. Dadurch ist die in die Abscissenaxe hineinfallende Gerade gegeben und es ist wieder $U' = 0$. Es ist aber auch $\delta^2 U = 0$, und

$$\delta^2 U = (a-\alpha)\ (4\delta y - 3x \frac{d\delta y}{dx})\ (\frac{d\delta y}{dx})^2,$$

woran man erkennt, dass jetzt von keinem Grössten oder Kleinsten die Rede sein kann.

Zweiter Fall. Soll die gesuchte Kurve nur unter allen denen in jedem Punkte einander nächstanliegenden herausgesucht werden, welche den zu der gerade gewählten Abscisse x gehöri-

Digitized by Google

gen Berührungspunkt mit einander gemein haben; so reducirt sich die Gleichung I. auf

$$\delta U = \frac{\alpha - a}{2(1+p^2)^2} \cdot p \cdot [4y + (a + \alpha - 2x)\,(3+p^2) \cdot p] \cdot \frac{d\delta y}{dx}.$$

Es muss also jetzt die identische Gleichung

$$5)\quad p[4y + (a + \alpha - 2x) \cdot (3+p^2) \cdot p] = 0$$

stattfinden.

Erstens. Dieser Gleichung wird genügt, wenn $p = 0$; somit ist wieder

$$6)\quad y = A,$$

d. h. man hat wieder die mit der Abscissenaxe parallele Grade, so dass wieder $U' = 0$, und $\delta^2 U = 2(\alpha - a) \cdot A \cdot (\frac{d\delta y}{dx})^2$ ist, also ein primäres Kleinstes stattfindet, und von einer sekundären Beziehung keine Rede sein kann. Also ganz wie im ersten Falle.

Zweitens. Der Gleichung 5) wird aber auch genügt, wenn

$$7)\quad 4y + (a + \alpha - 2x) \cdot (3+p^2) \cdot p = 0$$

ist. Bringt man die Klammern weg, so bekommt man

$$8)\quad 4y + 3 \cdot (a + \alpha - 2x) \cdot p + (a + \alpha - 2x) \cdot p^2 = 0.$$

Differentirt man diese Gleichung, so ergibt sich

$$4 \cdot dy + 3 \cdot (a + \alpha - 2x) \cdot dp - 6p \cdot dx - 2p^3 \cdot dx + 3(a + \alpha - 2x) \cdot p^2 \cdot dp = 0.$$

Da aber $dy = p \cdot dx$, so reducirt sich diese Gleichung auf

$$3(a + \alpha - 2x) \cdot (1+p^2) \cdot dp - 2p \cdot (1+p^2) \cdot dx = 0;$$

daraus folgt

$$\frac{dp}{p} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot dx}{a + \alpha - 2x} = 0.$$

Also ist

$$\log \text{nat}\, p + \tfrac{1}{3} \cdot \log \text{nat}\,(a + \alpha - 2x) = C,$$

oder

$$\log \text{nat}\, p + \log \text{nat} \sqrt[3]{a + \alpha - 2x} = C$$

oder

$$\log \text{nat}\,(p \sqrt[3]{a + \alpha - 2x}) = C.$$

Mit Veränderung der Konstanten kann man auch setzen

$$\log \text{nat}\,(p \sqrt[3]{a + \alpha - 2x}) = \log \text{nat}\, B,$$

woraus

$$p \sqrt[3]{a + \alpha - 2x} = B$$

folgt. Also ist

Digitized by Google

$$p = \frac{B}{\sqrt[3]{a+a-2x}},$$

und man bekommt durch abermaliges Integriren

$$9)\quad y = E - \frac{3B}{4} \cdot \sqrt[3]{(a+a-2x)^2}.$$

Dieses Integral hat aber zwei willkührliche Konstanten, während doch die vorgelegte Differentialgleichung 7) oder 8) nur eine der ersten Ordnung ist. Allein gerade der Umstand, dass durch Gleichung 9) die Gleichung 7) oder 8) identisch werden muss, dient dazu, die eine der Konstanten durch die andere zu bestimmen. Führt man nun die aus 9) für y und p sich ergebenden Ausdrücke in 8) ein, so bleibt (nach ausgeführten Reduktionen) nur $4E+B^3=0$; daraus folgt $B=-\sqrt[3]{4E}$, und Gleichung 9) geht über in

$$10)\quad y = E + \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{4E(a+a-2x)^2}$$

$$11)\quad (y-E)^3 = \frac{27}{16} \cdot E \cdot (a+a-2x)^2.$$

Die dadurch dargestellte Kurve ist die Neil'sche Parabel. Hierbei ist ferner

$$U' = \frac{a-a}{2}\left[4E + \sqrt[3]{4E(a+a-2x)^2}\right] \cdot \frac{\sqrt[3]{16E^2}}{(\sqrt[3]{16E^2}) + \sqrt[3]{(a+a-2x)^2}}$$

und

$$\delta^2 U = -\frac{3 \cdot (a-a)}{2 \cdot (1+p^2)^2} \cdot \left[4E + \sqrt[3]{4E \cdot (a+a-2x)^2}\right] \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

und somit hängt es von E ab, ob ein primäres Grösstes oder Kleinstes stattfindet.

Dritter Fall. Soll man nur unter denen einander in jedem Punkte nächstanliegenden Kurven, welche bei der gerade genommenen Abscisse x lauter parallele Berührende haben, während die zu dieser Abscisse x gehörigen Berührungspunkte der hier in Betracht zu ziehenden Kurven in verschiedenen (jedoch einander nächstanliegenden) Entfernungen von der Abscissenaxe sich befinden können, diejenige heraussuchen, wobei das U grösser oder kleiner wird als bei allen andern so geeigenschafteten Kurven, so ist jetzt $\frac{d\delta y}{dx}=0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx}=0$, u. s. w.; und Gleichung I. reducirt sich auf

$$\delta U = \frac{a-a}{1+p^2} \cdot p^2 \cdot \delta y.$$

Daraus folgt $p=0$, und somit ist $y=A$, d. h. man hat die mit der Abscissenaxe parallele Grade. Aber eben weil $\frac{d\delta y}{dx}=0$,

Digitized by Google

$\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$ u. s. w. ist, so ist auch $\delta^2 U = 0$, $\delta^3 U = 0$, u. s. w. und man erkennt, dass von einem primären Grössten oder Kleinsten keine Rede sein kann.

Aufgabe 70.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 216. §. 48.).

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Kurven diejenige heraussuchen, welche in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft hat, dass für den zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt das von der Normale und den beiden Coordinatenaxen eingeschlossene Dreieck grösser oder kleiner wird, als bei allen andern der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann, während die gesuchte Kurve nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt werden darf, bei denen das um das Quadrat dieser Abscisse verminderte Produkt der Abscisse und Subtangente den bestimmt gegebenen (positiven oder negativen) Werth A hat.

Es sei (Taf. III. Fig. 5.) S ein beliebig gewählter Punkt, durch welchen die Normale gelegt ist; dann COD das auf vorgeschriebene Weise begränzte Dreieck, wenn O als Anfangspunkt der Coordinaten gilt. Nun ist die Gleichung der Normale

$$(y'' - y) \cdot p + x'' - x = 0,$$

wo x'' und y'' die veränderlichen Coordinaten der Normale, und x und y die (übrigens gleichfalls veränderlichen) Coordinaten des Punktes der Kurve sind, durch den man gerade die Normale legt; ferner ist, wie gewöhnlich, p statt $\frac{dy}{dx}$ gesetzt. Für den Punkt D ist $y'' = 0$, und somit folgt aus obiger Gleichung $OD = x'' = py + x$; für den Punkt C ist $x'' = 0$, und somit folgt aus obiger Gleichung $OC = y'' = \frac{py + x}{p}$. Des Dreiecks OCD Inhalt ist $= \frac{1}{2} \cdot OC \cdot OD$ und sonach hat man

$$\text{I)} \quad U = \frac{(py + x)^2}{2p}.$$

Ferner hat man für die hier vorgeschriebene Bedingungsgleichung

$$\text{II)} \quad \frac{y}{p} \cdot x - x^2 = A.$$

Erste Auflösung.

Variirt man Gleichung I., so bekommt man

$$\text{III)} \quad \delta U = (py + x) \cdot (\delta y + \frac{py - x}{2 \cdot p^2} \cdot \frac{d\delta y}{dx})$$

Digitized by Google

IV) $\delta^2 U = (py+x).(\delta^2 y + \frac{py-x}{2.p^2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx}) + p\delta y^2 + 2y.\delta y.\frac{d\delta y}{dx}$

$$+\frac{x^2}{p^2}.(\frac{d\delta y}{dx})^2.$$

Aus Gleichung II. aber folgt:

$$V)\ \frac{d\delta y}{dx} = \frac{p}{y}.\delta y,$$

$$VI)\ \frac{d\delta^2 y}{dx} = \frac{p}{y}.\delta^2 y, \text{ u. s. w.}$$

Eliminirt man $\frac{d\delta y}{dx}$ aus III., so bekommt man

$$VII)\ \delta U = \frac{1}{2py}.(py+x).(3py-x).\delta y.$$

Soll nun $\delta U = 0$ werden, so muss entweder $3py - x = 0$ oder $py + x = 0$ sein.

Erstens. Aus $3py - x = 0$ folgt $3y^2 - x^2 = B$. Dieses ist die Gleichung einer Hyperbel, deren Coordinaten in O anfangen. Man hat aber vor Allem zu untersuchen, ob durch diese Gleichung auch Gleichung II. identisch wird. Man führe also $\sqrt{\frac{1}{3}.(x^2+B)}$ statt y, und $\frac{x}{\sqrt{3(x^2+B)}}$ statt p in Gleichung II. ein, und berücksichtige, dass die Radikale entweder durchweg ihre positive oder durchweg ihre negative Bedeutung haben. Es ergibt sich $\frac{\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+B)}}{\sqrt{3(x^2+B)}}.x - x^2 = A$, oder $B = A$. Somit ist die vollkommen bestimmte und keiner weitern Nebenbedingung mehr unterliegende Gleichung der gesuchten Hyperbel $3y^2 - x^2 = A$. Unter diesen Umständen geht Gleichung IV. über in

$$VIII)\ \delta^2 U = \frac{4x}{\sqrt{\frac{1}{3}.(x^2+A)}}.\delta y^2.$$

Ferner ist $U' = \frac{8x}{3}.\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+A)}$; und man erkennt, dass die für U' und $\delta^2 U$ hergestellten Ausdrücke zweideutig sind, weil sie das Radikal als gemeinschaftlichen Faktor enthalten. In solchen Fällen pflegt man sich dahin zu entscheiden: Es findet ein Kleinstes statt, wenn U' und $\delta^2 U$ einerlei Zeichen haben, und es findet ein Grösstes statt, wenn U' und $\delta^2 U$ entgegengesetzte Zeichen haben. Demnach findet hier ein primäres Kleinstes statt; denn U' und $\delta^2 U$ haben unter allen Umständen einerlei Zeichen.

Zweitens. Aus $py + x = 0$ folgt $y^2 + x^2 = r^2$, d. h. die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt in O liegt, so dass die Normale durch O geht, und das auf vorgeschriebene Weise begränzte Dreieck Null wäre. Man untersuche nun vor Allem, ob durch die hiesige Gleichung auch Gleichung II. identisch wird, und führe zu diesem Ende $\sqrt{r^2 - x^2}$ statt y, und $\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ statt p in

Digitized by Google

Gleichung II. ein. Dadurch bekommt man $\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{-x}\cdot x-x^2=A$ oder $-(r^2-x^2)-x^2=A$ oder $-r^2=A$, so dass der Kreis nur existiren kann, wenn der Werth A der gegebenen Differenz negativ ist. Unter diesem Umständen ist

$$\text{IX)}\quad \delta^2 U=-\frac{4x}{\sqrt{r^2-x^2}}\cdot\delta y^2.$$

Dieser Ausdruck ist wegen des Radikals $\sqrt{r^2-x^2}$ zweideutig; und da jetzt $U'=0$ nichts mit diesem Radikal zu thun hat, so muss man sich dahin entscheiden, dass hier weder ein Grösstes noch Kleinstes stattfinde. Dieses wird aber auch noch durch folgende Betrachtung bestättigt: Die Aufgabe führt auf einen bestimmten Kreis d. h. auf einen Kreis mit dem bestimmten Halbmesser $\sqrt{-A}$. Aber nicht allein bei diesem Kreise, sondern auch bei allen andern Kreisen wird $U'=0$, so dass man unter allen möglichen Kreisen keinen heraussuchen kann, bei welchem U' grösser oder kleiner sein könnte, als bei allen andern.

Zweite Auflösung.

Da die gesuchte Funktion y von x auch der Gleichung II. genügen muss; so wird die gesuchte Funktion irgend ein Integral der Gleichung II. sein. Man integrire also Gleichung II., und forme sie deshalb vorher um in $\frac{dy}{y}=\frac{x\,.\,dx}{x^2+A}$. Daraus folgt durch Integration

$$\log\text{ nat }y=\tfrac{1}{2}\log\text{ nat }E+\tfrac{1}{2}\,.\log\text{ nat }(x^2+A),$$

oder

$$\log\text{ nat }y=\tfrac{1}{2}\,.\log\text{ nat }[E\,.\,(x^2+A)],$$

oder

$$\log\text{ nat }y=\log\text{ nat }\sqrt{E(x^2+A)},$$

und sonach ist

$$y=\sqrt{E\,.\,(x^2+A)}.$$

Das E muss also so beschaffen sein, dass das Produkt $E.(x^2+A)$ positiv wird.

Führt man nun $\sqrt{E\,.\,(x^2+A)}$ statt y, und $\frac{E\,.\,x}{\sqrt{E(x^2+A)}}$ statt p in Gleichung I. ein, so bekommt man

$$U'=\frac{x}{2E}\,.\,(E+1)^2\,.\,\sqrt{E\,.\,(x^2+A)}.$$

Man erkennt nun an der für y gefundenen Funktion, dass zu stetig neben einander liegenden Werthen des E auch stetig neben einander liegende Werthe des y gehören; ebenso erkennt man an dem für U' hergestellten Ausdrucke, dass zu stetig neben einander liegenden Werthen des E auch stetig neben einander liegende Werthe

Digitized by Google

des U' gehören. Um nun zu wissen, wenn U' ein primäres Grösstes oder Kleinstes ist, differentiire man U' nach E und man bekommt

$$\frac{dU'}{dE} = \frac{x}{4E^2} \cdot (3E-1) \cdot (E+1) \cdot \sqrt{E(x^2+A)}.$$

Es kann also $\frac{dU'}{dE} = 0$ werden entweder wenn $3E-1=0$ oder wenn $E+1=0$.

Erstens. Wenn $3E-1=0$, so ist $E=\frac{1}{3}$, und man hat $y=\sqrt{\frac{1}{3}\cdot(x^2+A)}$ oder $3y^2-x^2=A$. Differentiirt man noch ein mal und führt man dann für E den Werth $\frac{1}{3}$ ein; so ist $\frac{d^2U}{dE^2} = 27x \cdot \sqrt{\frac{1}{3}\cdot(x^2+A)}$. Ferner ist $U' = \frac{8x}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}\cdot(x^2+A)}$ und da die für $\delta^2 U$ und U' hergestellten Ausdrücke das Radikal als gemeinschaftlichen Faktor enthalten, so erkennt man, dass $\delta^2 U$ und U' unter allen Umständen einerlei Zeichen haben, und kann sich dahin entscheiden, dass ein primäres Kleinstes stattfinde. Also Alles wie beim ersten Fall der vorigen Auflösung.

Zweitens. Wenn $E+1=0$, so ist $E=-1$ und $y=\sqrt{-x^2-A}$ oder $y^2+x^2=-A$, woraus hervorgeht, dass A jedenfalls negativ sein muss. Ferner ist jetzt $\frac{d^2U}{dE^2} = -x \cdot \sqrt{-x^2-A}$. Dieser Ausdruck ist wegen des Radikals zweideutig; und da jetzt $U'=0$ nichts mit diesem Radikal zu thun hat, so muss man sich dahin entscheiden, dass hier weder ein Grösstes noch ein Kleinstes stattfinde. Dieses kann man auch durch die am Schlusse der vorigen Auflösung gemachte Betrachtung noch weiter bestättigen.

Aufgabe 71.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 216. §. 48.).

Man zieht durch einen beliebigen Punkt einer ebenen Kurve die Berührende. Hierauf fällt man aus zwei in der Ebene irgendwo festliegenden Punkten Perpendikel auf diese Berührende. Welche Kurve ist es aber, wenn die Summe dieser beiden Perpendikel ein primäres Grösstes oder Kleinstes ist, während die gesuchte Kurve nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt werden darf, bei welchen allen die Berührenden immer durch den nemlichen gegebenen Punkt gehen?

D sei (Taf. III. Fig. 2.) derjenige feste Punkt, durch welchen die Berührenden aller hier zu betrachtenden Kurven gehen sollen; H und K seien diejenigen Punkte, von welchen aus man Perpendikel auf die Berührende der gesuchten Kurve ziehen soll. Man lege eine Linie OX durch die beiden Punkte H und K, und nehme diese Linie als Abscissenaxe an. Man ziehe durch den gegebenen Punkt D ein Perpendikel auf OX. Dieses Perpendikel YO nehme man als Ordinatenaxe, so ist der Punkt O der Anfang der Coordinaten. Die hier in Rede stehenden Perpendikel sind HM und KV.

Digitized by Google

Nun ist $y'-y=(x'-x)\cdot\frac{dy}{dx}$ die Gleichung der berührenden Graden FT. Für den Punkt D ist $x'=0$, also ist $OD=y'=y-px$. Ferner hat man nach den vorhergehenden Aufgaben $HM=\frac{y+(a-x)\cdot p}{\sqrt{1+p^2}}$, und $KN=\frac{y+(a-x)p}{\sqrt{1+p^2}}$. Man hat also jetzt die Aufgabe: Es soll

$$\text{I)}\quad U=\frac{2y+(a+a-2x)\cdot p}{\sqrt{1+p^2}}$$

ein primäres Grösstes oder Kleinstes werden, während noch die Bedingungsgleichung

$$\text{II)}\quad y-px=g$$

stattfindet, wo g einen bestimmten konstanten (positiven oder negativen) Werth hat.

Erste Auflösung.

Man variirt Gleichung I., so bekommt man

$$\text{III)}\quad \delta U=\frac{1}{\sqrt{(1+p^2)^3}}\cdot[2\cdot(1+p^2)\cdot\delta y+(a+a-2x-2py)\cdot\frac{d\delta y}{dx}].$$

Aus Gleichung II. folgt

$$\text{IV)}\quad \delta y=x\cdot\frac{d\delta y}{dx}.$$

Führt man diesen für δy gefundenen Ausdruck in Gleichung III. ein; so bekommt man

$$\text{V)}\quad \delta U=\frac{1}{\sqrt{(1+p^2)^3}}\cdot(a+a-2\cdot py+2p^2\cdot x)\cdot\frac{d\delta y}{dx}.$$

Es ist also

$$\text{VI)}\quad a+a-2\cdot py+2p^2\cdot x=0.$$

Um aber diese Gleichung zu integriren, differentiire man sie zuvor noch einmal, und man bekommt $-2p\cdot dy-2y\cdot dp+4px\cdot dp+2p^2\cdot dx=0$. Weil aber $dy=p\cdot dx$, so reducirt sich diese Gleichung auf $2\cdot(2px-y)\cdot dp=0$, und dieser Gleichung geschieht Genüge, entweder wenn $dp=0$, oder wenn $2px-y=0$.

Erstens. Wenn $dp=0$, so ist

$$\text{VII)}\quad y=Ax+B,$$

d. h. man hat die gerade Linie, welche insoferne die Aufgabe löst, als jede Gerade zugleich ihre eigene Berührende ist. Diese Gleichung enthält aber zwei willkührliche Konstanten, während doch die vorgegebene Differentialgleichung VI. nur von der ersten Ordnung ist. Aber eben der Umstand, dass VI. durch VII. identisch werden muss, dient dazu, um eine der Konstanten durch die andere zu bestimmen. Man führe also $Ax+B$ statt y, und A statt p in Gleichung VI. überall ein, und reducire so viel als mög-

Digitized by Google

lich, so bekommt man $a+\alpha-2AB=0$, also $A=\frac{a+\alpha}{2B}$, und Gleichung VII. geht über in

$$\text{VIII)}\quad y=\frac{a+\alpha}{2B}\,.\,x+B.$$

Durch diese Gleichung muss aber auch Gleichung II. identisch werden; man führe also $\frac{a+\alpha}{2B}\,.\,x+B$ statt y, und $\frac{a+\alpha}{2B}$ statt p in Gleichung II. ein, und es ergibt sich $B=g$. Gleichung VIII. geht also über in

$$\text{IX)}\quad y=\frac{a+\alpha}{2g}\,.\,x+g,$$

so dass die Gleichung der gesuchten Graden vollkommen bestimmt ist, und keiner Nebenbedingung mehr unterworfen werden kann. Auch ist $U'=\sqrt{(a+\alpha)^2+4g^2}$, und unter Berücksichtigung alles Vorhergehenden ist

$$\delta^2 U=-\frac{16\,.\,g^4}{[(a+\alpha)^2+4g^2]\,.\,\sqrt{(a+\alpha)^2+4g^2}}\,.\,(\tfrac{d\delta y}{dx})^2.$$

Das Radikal $\sqrt{(a+\alpha)^2+4g^2}$ ist bei den für U' und $\delta^2 U$ hergestellten Ausdrücken gemeinschaftlicher Faktor; und somit erkennt man, dass U' und $\delta^2 U$ unter allen Umständen entgegengesetzte Vorzeichen haben. Desshalb entscheidet man sich dahin, dass ein primäres Grösstes stattfindet. Weil ferner der Werth des U' von x ganz unabhängig ist, so kann von einer sekundären Beziehung keine Rede sein.

Zweitens. Setzt man $2px-y=0$, so bekommt man $y^2=Cx$, d. h. die Gleichung einer Apollonischen Parabel. Da aber dieses Integral noch die Gleichung VI. identisch machen muss, so führe man $\sqrt{Cx}$ statt y, und $\frac{C}{2\sqrt{Cx}}$ statt p in Gleichung VI. ein, reducire so viel als möglich, und es bleibt $a+\alpha-\frac{C}{2}=0$; also ist $C=2(a+\alpha)$, und die Gleichung der gesuchten Apollonischen Parabel ist

$$\text{X)}\quad y^2=2(a+\alpha)\,.\,x.$$

Da aber Gleichung X. als Integral von Gleichung VI. gelten muss, während diese Gleichung X. keine willkührliche Konstante mehr enthält, auch kein besonderer Fall von Gleichung VIII. ist, so ist Gleichung X. ein singuläres Integral von Gleichung VI. Nun soll aber durch X. auch noch II. identisch werden; man führe also $\sqrt{2(a+\alpha)\,.\,x}$ statt y, und $\frac{1}{2}\,.\,\sqrt{\frac{2\,.\,(a+\alpha)}{x}}$ statt p in Gleichung II. überall ein; und man bekommt $\frac{1}{2}\,.\,\sqrt{2(a+\alpha)\,.\,x}=g$. Diese Gleichung ist aber keine identische, und somit kann dieser zweite Fall, welcher auf ein singuläres Integral führt, nicht weiter berücksichtigt werden.

Digitized by Google

Zweite Auflösung.

Da die gesuchte Funktion y von x auch der Gleichung II. genügen muss; so wird die gesuchte Funktion irgend ein Integral von Gleichung II. sein. Man integrire also Gleichung II., und forme sie zu diesem Ende um in $\frac{dy}{y-g} = \frac{dx}{x}$. Daraus folgt $y = cx + g$. Man führe also $cx+g$ statt y, und c statt p in Gleichung I. überall ein, so bekommt man $U' = \frac{2g+(a+\alpha).c}{\sqrt{1+c^2}}$. An der Gleichung $y = cx + g$ erkennt man, dass zu stetig neben einander liegenden Werthen des c auch stetig neben einander liegender Werthe des y gehören; ebenso erkennt man an der Gleichung $U' = \frac{2g+(a+\alpha)c}{\sqrt{1+c^2}}$, dass zu stetig neben einander liegenden Werthen des c auch stetig neben einander liegende Werthe des U' gehören. Um nun zu wissen, wenn U' ein Grösstes oder Kleinstes ist, differentiire man U' nach c, und es ergibt sich $\frac{dU'}{dc} = \frac{a+\alpha-2gc}{\sqrt{(1+c^2)^3}}$; daraus folgt $a+\alpha-2gc=0$, also $c = \frac{a+\alpha}{2g}$, und man hat wieder

$$\text{XI)}\quad y = \frac{a+\alpha}{2g}.x + g,$$

wie schon in Gleichung X. gefunden ist. Differentiirt man noch ein mal, so bekommt man im Allgemeinen

$$\frac{d^2U'}{dc^2} = -\frac{2g.(1+c^2)+3c.(a+\alpha-2gc)}{\sqrt{(1+c^2)^5}},$$

und wenn man den für c gefundenen Werth einführt, so ist

$$\frac{d^2U'}{dc^2} = -\frac{16g^4}{[(a+\alpha)^2+4g^2].\sqrt{(a+\alpha)^2+4g^2}};$$

daran erkennt man wieder, dass ein primäres Grösstes stattfindet, wie bei der ersten Auflösung.

Es ist bemerkenswerth, dass diese zweite Auflösung nur auf den Fall führt, welcher mit dem in der ersten Auflösung erhaltenen allgemeinen Integral übereinstimmt. Der Grund davon ist aber der, dass das in der ersten Auflösung erhaltene singuläre Integral gar kein Integral der Gleichung II. ist, und somit die zweite Auflösung, welche ganz allein vom Integral der Gleichung II. ausgeht, auch nicht auf besagtes singuläre Integral führen kann. Die zweite Auflösung ist also ebenso vollständig, wie die erste.

Aufgabe 72.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 216. §. 48.).

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinaten-

system bezogenen ebenen Kurven diejenige heraussuchen, bei welcher für den zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt das von der Normale und den beiden Coordinatenaxen eingeschlossene Dreieck grösser oder kleiner wird, als bei allen andern der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann, während die gesuchte Kurve nur aus der Zahl derjenigen heraus gewählt werden darf, bei welchen die Differenz, die zwischen dem Quadrate der Normale und dem doppelten Quadrate der Abscisse stattfindet, den bestimmten gegebenen (positiven oder negativen) Werth A hat.

Es ist (Taf. III. Fig. 5.), wie in Aufgabe 70, das Dreieck COD das auf vorgeschriebene Weise begränzte; und sein Inhalt ist

$$\text{I)}\quad U=\frac{(py+x)^2}{2.p}.$$

Die Normale ist $y.\sqrt{1+p^2}$; und die vorgeschriebene Bedingungsgleichung ist

$$\text{II)}\quad y^2.(1+p^2)-2x^2=A.$$

Variirt man Gleichung I. und II., und eliminirt man $\frac{d\delta y}{dx}$; so bekommt man

$$\text{III)}\quad \delta U=\frac{1}{2y.p^2}.(py-x)\,(py+x).(p^2-1).\delta y.$$

Hier wird $\delta U=0$, wenn eine von den folgenden drei Gleichungen stattfindet:

$$py-x=0 \text{ oder } py+x=0 \text{ oder } p^2-1=0.$$

Erstens. Setzt man $py-x=0$, so ergibt sich $y^2-x^2=B$, d. h. die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel. Man hat aber vor Allem zu untersuchen, ob dadurch auch Gleichung II. identisch wird; und führe zu diesem Ende x^2+B statt y^2, und $\frac{x^2}{x^2+B}$ statt p^2 in Gleichung II. ein. Dadurch bekommt man

$$(x^2+B).(1+\frac{x^2}{x^2+B})-2x^2=A \text{ oder } B=A.$$

Somit ist die vollkommen bestimmte Gleichung der gesuchten gleichseitigen Hyperbel $y^2-x^2=A$, welche keiner Nebenbedingung mehr unterworfen werden kann. Unter diesen Umständen bekommt man

$$\delta^2 U=(\frac{1}{x})^4.Ax.(\sqrt{x^2+A}).\delta y^2, \text{ und } U'=2x.\sqrt{x^2+A}.$$

Da die für U' und $\delta^2 U$ hergestellten Ausdrücke das Radikal $\sqrt{x^2+A}$ als gemeinschaftlichen Faktor enthalten, so muss man, wie in den beiden vorigen Aufgaben, beachten, ob dieselben mit einerlei oder mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen sind. Sie sind mit einerlei Vorzeichen versehen, wenn x und Ax gleichzeitig positiv oder gleichzeitig negativ sind; in diesem Falle entscheidet man sich für ein Kleinstes. Widrigenfalls entscheidet man sich für ein Grösstes.

Digitized by Google

Zweitens. Setze man $py+x=0$, so ergibt sich $y^2+x^2=r^2$ d. h. die Gleichung eines Kreises. Führt man aber r^2-x^2 statt y^2 und $\frac{x^2}{r^2-x^2}$ statt p^2 in Gleichung II. ein, so bekommt man $(r^2-x^2).(1+\frac{x^2}{r^2-x^2})-2x^2=A$, woraus $r^2-2x^2=A$ folgt. Letztere Gleichung ist aber keine identische und somit ist dieser zweite Fall, welcher den Kreis als Resultat liefert, unzulässig.

Drittens. Setzt man $p^2-1=0$, so bekommt man $p=\pm 1$, woraus $y=\pm x+C$ folgt. Führt man jetzt $(\pm x+C)^2$ statt y^2, und 1 statt p^2 in Gleichung II. ein, so bekommt man $(\pm x+C)^2.(1+1)-2x^2=A$, woraus $\pm 2Cx+2C^2=A$ folgt.

Letztere Gleichung ist aber wieder keine identische, und somit darf dieser dritte Fall, welcher die grade Linie als Resultat liefert, gleichfalls nicht berücksichtigt werden.

Aufgabe 79.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 220. §. 49—51.).

Man hat zwei mit einander parallele Graden, und man sucht eine auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogene ebene Kurve, welche in dem zu einer nach Belieben genommenen Abscisse x gehörigen Punkte die Eigenschaft hat, dass, wenn man den diesem Punkte der Kurve entsprechenden Krümmungsmittelpunkt aufsucht, und die senkrechten Entfernungen dieses Krümmungsmittelpunktes bis zu den zwei parallelen Graden nimmt, das Produkt beider Entfernungen ein primäres Grösstes oder Kleinstes, d. h. grösser oder kleiner wird, als bei den zu der nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann.

Die beiden gegebenen parallelen Geraden (Taf. III. Fig. 7.) seien MN und PQ. Die Durchführung der Aufgabe wird vereinfacht, wenn man auch die Abscissenaxe mit den zwei gegebenen Geraden parallel nimmt.

V sei der zu der grade genommenen Abscisse $OG=x$ gehörige Krümmungsmittelpunkt. VT und VR sind also die beiden in Rede stehenden senkrechten Entfernungen. Die Gleichung der Linie MN sei

$$\text{I)}\quad y'=m,$$

und die Gleichung der Linie PQ sei

$$\text{II)}\quad y''=n.$$

Es ist also $WR=m$ und $WT=n$. Die Ordinate des Krümmungsmittelpunktes ist $WV=y+\frac{1+p^2}{q}$; und desshalb ist

$$VR=m-(y+\tfrac{1+p^2}{q}) \text{ und } VT=n-(y+\tfrac{1+p^2}{q}),$$

Digitized by Google

wo wie gewöhnlich zur Abkürzung p statt $\frac{dy}{dx}$, und q statt $\frac{d^2y}{dx^2}$ gesetzt wurde. Das hier in Rede stehende Produkt ist

$$\text{III)}\quad U=(m-y-\frac{1+p^2}{q}).(n-y-\frac{1+p^2}{q}).$$

Variirt man, so bekommt man im Allgemeinen

$$\text{IV)}\quad \delta U=(2y-m-n+\frac{2.(1+p^2)}{q}).(\delta y+\frac{2p}{q}.\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1+p^2}{q^2}.\frac{d^2\delta y}{dx}).$$

Erster Fall. Soll man die gesuchte Kurve aus allen möglichen einander in jedem Punkte nächstanliegenden heraussuchen; so kann nur folgende Gleichung stattfinden:

$$\text{V)}\quad 2y-m-n+\frac{2.(1+p^2)}{q}=0.$$

Diese Gleichung formt sich geradezu um in

$$\frac{2.dx}{2y-m-n}+\frac{dp}{1+p^2}=0,$$

und wenn man diese Gleichung mit $p=\frac{dy}{dx}$ multiplicirt, so bekommt man

$$\frac{2dy}{2y-m-n}+\frac{pdp}{1+p^2}=0.$$

Durch Integration bekommt man

$$\log\text{ nat }(2y-m-n)+\log\text{ nat }\sqrt{1+p^2}=C$$

oder mit Aenderung der Konstanten

$$\log\text{ nat }[(2y-m-n).\sqrt{1+p^2}]=\log\text{ nat }A$$

oder

$$(2y-m-n).\sqrt{1+p^2}=A.$$

Daraus folgt

$$p=\frac{\sqrt{A^2-(2y-m-n)^2}}{2y-m-n},\text{ oder }dx=\frac{(2y-m-n).dy}{\sqrt{A^2-(2y-m-n)^2}};$$

und wenn man nochmals integrirt, so ergibt sich

$$x+B=-\tfrac{1}{2}.\sqrt{A^2-(2y-m-n)^2}$$

oder

$$\text{VI)}\quad (x+B)^2=\tfrac{1}{4}.A^2-\tfrac{1}{4}.(2y-m-n)^2$$

oder

$$\text{VII)}\quad (y-\frac{m+n}{2})^2+(x+B)^2=(\frac{A}{2})^2.$$

Dieses ist aber die Gleichung eines Kreises, dessen Durchmesser $=A$ ist und dessen Mittelpunkt genau mitten zwischen den beiden gegebenen Parallellinien liegt. Er löst in sofern die Aufgabe, als er in jedem seiner Punkte auch zugleich sein eigener Krümmungskreis ist.

Digitized by Google

Die beiden willkürlichen Konstanten A und B machen, dass man diesen Kreis noch zwei Nebenbedingungen unterwerfen kann. Dergleichen sind z. B.:

1) Der Kreis soll durch zwei feste Punkte (f, g) und (h, k) gehen. Für diese zwei Punkte geht Gleichung VII. bezüglich über in

$$(g-\tfrac{m+n}{2})^2+(f+B)^2=(\tfrac{A}{2})^2,$$

und

$$(k-\tfrac{m+n}{2})^2+(h+B)^2=(\tfrac{A}{2})^2$$

und mittelst dieser beiden Gleichungen lassen sich bestimmte Werthe für A und B ermitteln. Oder

2) Die gesuchte Kurve soll durch den festen Punkt (f, g) gehen und die zu diesem Punkte gehörige Berührende soll mit der Abscissenaxe einen Winkel einschliessen, dessen goniometrische Tangente $= K$. Aus Gleichung VII. folgt:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+B}{\sqrt{(\frac{A}{2})^2-(x+B)^2}};$$

und man hat jetzt folgende zwei Gleichungen:

$$(g-\tfrac{m+n}{2})^2+(f+B)^2=(\tfrac{A}{2})^2$$

und

$$K=-\frac{f+B}{\sqrt{(\frac{A}{2})^2-(f+B)^2}};$$

und mittelst dieser beiden Gleichungen lassen sich wieder bestimmte Werthe für A und B ermitteln. Oder

3) Die gesuchte Kurve soll durch den festen Punkt (f, g) gehen und die zu der bestimmten Abscisse h gehörige Berührende soll mit der Abscisse einen Winkel einschliessen, dessen goniometrische Tangente $= K$. Hier hat man folgende zwei Gleichungen

$$(g-\tfrac{m+n}{2})^2+(f+B)^2=(\tfrac{A}{2})^2$$

und

$$K=-\frac{h+B}{\sqrt{(\frac{A}{2})^2-(h+B)^2}},$$

woraus sich wieder bestimmte Werthe für A und B ermitteln lassen. Oder

4) Die zur festen Abscisse f gehörige Normale und Subnormale sollen bezüglich die Längen h und k haben. Hier bekommt man die Gleichungen

$$h=\tfrac{A}{2}, \text{ und}$$

$$K=-[\tfrac{m+n}{2}+\sqrt{(\tfrac{A}{2})^2-(f+B)^2}]\cdot\frac{f+B}{\sqrt{(\frac{A}{2})^2-(f+B)^2}},$$

Digitized by Google

woraus sich wieder bestimmte Werthe für A und B ermitteln lassen. Oder

5) Bei der festen Abscisse f soll der Quotient der Subtangente in die Subnormale den bestimmten Werth g haben; und bei der festen Abscisse h soll derselbe Quotient den festen Werth k haben. Hier bekommt man die beiden Gleichungen

$$g = \frac{(f+B)^2}{(\frac{A}{2})^2-(f+B)^2}, \text{ und } k = \frac{(h+B)^2}{(\frac{A}{2})^2-(h+B)^2},$$

woraus sich wieder bestimmte Werthe für A und B ermitteln lassen.

Dergleichen Nebenbedingungen kann man in beliebiger Menge aufstellen. Was für Nebenbedingungen man aber auch aufstellen mag, so folgt doch aus Gleichung V. ganz unbedingt $y+\frac{1+p^2}{q}=\frac{m+n}{2}$. Dabei geht Gleichung III. über in $U'=-\frac{1}{4}.(m-n)^2$, d. h. U' ist negativ und unabhängig von dem beliebigen Werthe des x. Variirt man noch einmal, so bekommt man

$$\text{VIII)}\quad \delta^2 U = 2.(\delta y+\frac{2p}{q}.\frac{d\delta y}{dx}-\frac{1+p^2}{q^2}.\frac{d^2\delta y}{dx^2})^2,$$

woran man erkennt, dass in der That ein primäres Kleinstes stattfindet. Ein negativer Ausdruck gilt aber für desto kleiner, je weiter sein Werth von Null entfernt ist.

Zweiter Fall. Soll man aber nur unter denen einander in jedem Punkte nächstanliegenden Kurven, welche alle den zu der gerade genommenen Abscisse x gehörigen Punkt mit einander gemein haben, diejenige heraussuchen, wobei das vorgegebene Produkt grösser oder kleiner wird, als bei allen andern so geeigenschafteten Kurven; so haben alle hier in Betracht zu ziehenden Kurven bei der gerade gewählten Abscisse x auch einerlei Ordinate. Es ist also $\delta y=0$, $\delta^2 y=0$, u. s. w.; und Gleichung IV. reducirt sich auf

$$\text{IX)}\quad \delta U = (2y-m-n+\frac{2.(1+p^2)}{q}).(\frac{2p}{q}.\frac{d\delta y}{dx}-\frac{1+p^2}{q^2}.\frac{d^2\delta y}{dx^2})$$

Daraus folgt aber wieder Gleichung V. und VII.; und Gleichung VIII. reducirt sich auf

$$\text{X)}\quad \delta^2 U = 2.(\frac{2p}{q}.\frac{d\delta y}{dx}-\frac{1+p^2}{q^2}.\frac{d^2\delta y}{dx^2})^2.$$

Und so fort.

Aufgabe 80.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 220. §. 49—51.).

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Kurven diejenige heraussuchen, bei welcher der zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörige Punkt die Eigenschaft hat, dass, wenn man den zu diesem

Digitized by Google

Punkte gehörigen Krümmungsmittelpunkt mit zwei festen Punkten (a, b) und (α, β) verbindet, die Summe der Quadrate beider Verbindungslinien grösser oder kleiner wird, als bei den zu der nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann.

Der Krümmungsmittelpunkt habe die Coordinaten ξ und η, die Entfernung des festen Punktes (a, b) bis zum Krümmungsmittelpunkte ist also $\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2}$; und die Entfernung des festen Punktes (α, β) bis zum Krümmungsmittelpunkte ist $\sqrt{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2}$. Die Aufgabe führt also zunächst auf den Ausdruck

$$\text{I)}\quad U=[(\xi-a)^2+(\eta-b)^2]+[(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2].$$

Die Durchführung der Aufgabe wird vereinfacht, wenn man die Abscissenaxe der gesuchten Kurve durch die beiden festen Punkte (a, b) und (α, β) legt. Dabei ist $b=0$ und $\beta=0$ und Gleichung I. reducirt sich auf

$$\text{II)}\quad U=(\xi-a)^2+(\xi-\alpha)^2+2\,.\,\eta^2.$$

Nun ist $\xi=x-\frac{(1+p^2)\,.\,p}{q}$ und $\eta=y+\frac{1+p^2}{q}$, wo, wie gewöhnlich zur Abkürzung p anstatt $\frac{dy}{dx}$, und q statt $\frac{d^2y}{dx^2}$ gesetzt ist. Gleichung II. geht nun über in

$$\text{III)}\quad U=(x-a-\frac{(1+p^2)\,.\,p}{q})^2+(x-\alpha-\frac{(1+p^2)\,.\,p}{q})^2 + 2\,.\,(y+\frac{1+p^2}{q})^2.$$

Dieser Ausdruck soll ein primäres Grösstes oder Kleinstes werden. Durch Variiren bekommt man

$$\text{IV)}\quad \delta U=\frac{A}{q}\,.\,(1+p^2+y\,.\,q)\,.\,\delta y$$
$$+\frac{2}{q^2}\,.\,[6p\,.\,(1+p^2)^2-(1+3p^2)\,.\,(2x-a-\alpha)\,.\,q+4ypq]\,.\,\frac{d\delta y}{dx}$$
$$+\frac{2\,.\,(1+p^2)}{q^2}\,.\,[(2x-a-\alpha)\,.\,pq-2yq-2\,.\,(1+p^2)^2]\,.\,\frac{d^2\delta y}{dx^2}.$$

Erster Fall. Soll die gesuchte Kurve aus allen möglichen einander in jedem Punkte nächstanliegenden herausgewählt werden, so müssen folgende drei Gleichungen zugleich bestehen:

$$\text{V)}\quad 1+p^2+q\,.\,y=0$$
$$\text{VI)}\quad 6p\,.\,(1+p^2)^2-(1+3p^2)\,.\,(2x-a-\alpha)\,.\,q+4ypq=0$$
$$\text{VII)}\quad (2x-a-\alpha)\,.\,pq-2yq-2\,.\,(1+p^2)^2=0.$$

Diese Gleichungen werden einfacher, wenn man z statt $x-\frac{a+\alpha}{2}$ setzt; denn sie gehen bezüglich über in

$$\text{VIII)}\quad 1+p^2+q\,.\,y=0$$

Digitized by Google

$$\text{IX)}\ 3p\,.\,(1+p^2)^2-(1+3p^2)\,.\,xq+2ypq=0,$$
$$\text{X)}\ x\,.\,pq-y\,.\,q-(1+p^2)^2=0.$$

Gleichung VIII. ist die einfachste; sie kann auch auf folgende Weise: $1+p\,.\,\frac{dy}{dx}+\frac{dp}{dx}\,.\,y=0$, oder auf folgende Weise: $dx+p\,.\,dy+y\,.\,dp=0$ geschrieben werden, und daraus folgt zunächst

$$\text{XI)}\ x+p\,.\,y=A.$$

Diese Gleichung ist aber gleichbedeutend mit $x\,.\,dx+y\,.\,dy=A\,.\,dx$, und daraus folgt weiter

$$\text{XII)}\ x^2+y^2=2Ax+B.$$

Man sehe nun zu, ob durch diese Gleichung auch IX. und X. identisch werden. Aus XII. folgt $y=\sqrt{B+2Ax-x^2}$,

$$p=\frac{A-x}{\sqrt{B+2Ax-x^2}}\ \text{und}\ q=-\frac{A+B}{(B+2Ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Führt man nun diese Ausdrücke in Gleichung IX. ein, so bekommt man nach gehörigen Reductionen

$$\frac{A\,.\,(A^2+B)\,.\,(3A^2+B-4Ax+2x^2)}{(B+2Ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

Diese Gleichung wird identisch, wenn $A=0$ ist. Gleichung XII. zieht sich also zurück auf

$$\text{XIII)}\ x^2+y^2=B,$$

und dadurch werden die Gleichungen VIII. und IX. zugleich identisch; man hat also noch zu untersuchen, ob dadurch auch Gleichung X. identisch wird. Aus XIII. folgt

$$y=\sqrt{B-x^2},\ p=-\frac{x}{\sqrt{x^2-B}}\ \text{und}\ q=-\frac{B}{(B-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Führt man aber diese für y, p, q zuletzt hergestellten Ausdrücke in Gleichung X. ein, so findet man, dass sie in der That identisch wird. Führt man für x seinen Ausdruck wieder zurück, so geht Gleichung XIII. über in

$$\text{XIV)}\ y^2+(x-\tfrac{a+\alpha}{2})^2=B,$$

und durch diese Gleichung werden die Gleichungen V., VI., VII. zugleich identisch. Letztere Gleichung stellt aber einen jeden beliebigen Kreis vor, dessen Mittelpunkt in der Abscissenaxe liegt, und zwar da, wo $x=\frac{a+\alpha}{2}$ ist. Gleichung III. geht nun über in

$$\text{XV)}\ U'=2\,.\,(\tfrac{\alpha-a}{2})^2,$$

d. h. U' ist konstant, und unabhängig von x und von der willkührlichen Konstanten B. Variirt man noch einmal, so bekommt man

Digitized by Google

$$\text{XVI)}\quad \delta^2 U = 4\left(\delta y + \frac{2p}{q}\cdot\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1+p^2}{q^2}\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2$$
$$+ 4\left(\frac{1+3\cdot p^2}{q}\cdot\frac{d\delta y}{dx} - \frac{p+p^3}{q^2}\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2,$$

woran man erkennt, dass ein primäres Kleinstes stattfindet.

Zweiter Fall. Soll man aber nur unter denen einander in jedem Punkte nächstanliegenden Kurven, welche alle sowohl den zu der gerade genommenen Abscisse x gehörigen Punkt, als auch die zu der gerade genommenen Abscisse x gehörige Berührende mit einander gemeinschaftlich haben, diejenige heraussuchen, bei welcher die vorgegebene Summe grösser oder kleiner wird, als bei allen andern so geeigenschafteten Kurven; so müssen bei der gerade gewählten Abscisse x folgende Gleichungen

$$\delta y = 0,\ \frac{d\delta y}{dx} = 0,\ \delta^2 y = 0,\ \frac{d\delta^2 y}{dx} = 0,\ \text{u. s. w.}$$

stattfinden. Desshalb reducirt sich Gleichung IV. auf

$$\text{XVII)}\quad \delta U = \frac{2\cdot(1+p^2)}{q^2}\cdot\left[(2x-\alpha-\alpha)\cdot p\cdot q - 2y\cdot q\right.$$
$$\left. - 2\cdot(1+p^2)^2\right]\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2}.$$

Es findet also jetzt nur die Gleichung VII. oder X. statt. Wenn man $p^2\cdot qy - p^2\cdot qy$ zu Gleichung X. addirt, so geht sie über in

$$(1+p^2)\cdot qy + (1+p^2)^2 - (py+z)\cdot pq = 0,$$

und diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit $\frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$ multiplicirt. Thut man dieses, so bekommt man

$$\frac{qy+1+p^2}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(py+z)\cdot pq}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich nun geradezu integriren, und man bekommt

$$\text{XVIII)}\quad \frac{py+z}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} = C.$$

Aus dieser Gleichung folgt $y = -\frac{z}{p} + \frac{C\cdot\sqrt{1+p^2}}{p}$; und wenn man auf beiden Seiten differentiirt, und dann $p\cdot dz$ statt dy setzt, so bekommt man

$$p\cdot(1+p^2)dz + \left(\frac{C}{\sqrt{1+p^2}} - z\right)\cdot dp = 0.$$

Der integrirende Faktor zu dieser Gleichung ist $\frac{1}{p^2\cdot\sqrt{1+p^2}}$; und multiplicirt man letztere Gleichung damit, so bekommt man

$$\frac{\sqrt{1+p^2}}{p}\cdot dz - \frac{z\cdot dp}{p^2\sqrt{1+p^2}} + \frac{C\cdot dp}{p^2\cdot(1+p^2)} = 0.$$

Digitized by Google

Diese Gleichung lässt sich nun geradezu integriren, und man bekommt

$$\text{XIX)}\quad \frac{z\sqrt{1+p^2}}{p} + C.\left(-\frac{1}{p} - \text{arctang } p\right) = E.$$

Führt man $x - \frac{a+\alpha}{2}$ statt z in die Gleichung XVIII. und XIX. zurück, so kann man für x und y folgende Ausdrücke herstellen:

$$\text{XX)}\quad x = \frac{a+\alpha}{2} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.(C + Ep + C.p.\text{arctang } p)$$

$$\text{XXI)}\quad y = \frac{1}{p.\sqrt{1+p^2}}.(Cp^2 - E.p - Cp.\text{arctang } p).$$

Die hier gesuchte Kurve ist, wie es oft geschieht, durch zwei Gleichungen gegeben, und kann durch ihre Tangenten konstruirt werden. Widrigenfalls hätte man aus XX. und XXI. das p zu eliminiren, und so eine einzige Gleichung zwischen x und y herzustellen. Variirt man bei Gleichung XVII. den in den eckigen Klammern stehenden Faktor noch einmal, so bekommt man

$$\delta^2 U = \frac{2.(1+p^2)}{q^2}.[(2x - a - \alpha).p - 2y].\left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2.$$

Aus Gleichung X. folgt aber $(2x - a - \alpha).p - 2y = 2\frac{(1+p^2)^2}{q}$, und somit ist

$$\delta^2 U = 4(1+p^2).\left(\frac{1+p^2}{q^2}\right)^2.\left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2,$$

woran man erkennt, dass ein primäres Kleinstes statt findet.

Dritter Fall. Soll man aber nur unter denen einander in jedem Punkte nächstanliegenden Kurven, welche alle bei den gerade für x genommenen Werthe nicht nur fur y einerlei (aber einen nicht gegebenen) Werth, sondern auch für $\frac{d^2y}{dx^2}$ einerlei (aber gleichfalls einen nicht gegebenen) Werth liefern, diejenige herausuchen, bei welcher die vorgegebene Summe grösser oder kleiner wird, als bei allen andern so geeigenschafteten Kurven; so müssen bei der gerade gewählten Abscisse x folgende Gleichungen:

$$\delta y = 0,\ \frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0,\ \delta^2 y = 0,\ \frac{d^2\delta^2 y}{dx^2} = 0,\ \text{u. s. w.}$$

stattfinden. Desshalb reducirt sich Gleichung IV. auf

$$\text{XXII)}\quad \delta U = \frac{2}{q^2}.[6p.(1+p^2)^2 - (1+3p^2).(2x - a - \alpha).q + 4ypq].\frac{d\delta y}{dx}.$$

Es findet also jetzt nur die einzige Gleichung IV. oder IX. statt. Wenn man $3y.p^2.q + y.p.q - 3y.p^2.q - y.p.q$ zu IX. addirt, so kann man ihr folgende Form geben

$$3y.p.q(1+p^2) + 3.p.(1+p^2)^2 - q.(yp + z) - 3p^2.q.(yp + z) = 0$$

Digitized by Google

oder

$$3p \,.\, (1+p^2) \,.\, (yq+1+p^2) - (yp+z) \,.\, (q+3\,.\,p^2\,.\,q) = 0.$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit $\frac{1}{3(p+p^2)^{\frac{1}{3}}}$ multiplicirt; und thut man dieses, so bekommt man

$$\frac{y\,.\,q+1+p^2}{(p+p^2)^{\frac{1}{3}}} - \frac{(y\,.\,p+z)\,.\,(q+3\,.\,p^2\,.\,q)}{3\,.\,(p+p^2)^{\frac{1}{3}}} = 0.$$

Integrirt man, so bekommt man $\frac{y\,.\,p+z}{\sqrt[3]{p+p^2}} = F$, oder

$$\text{XXIII)}\quad yp+z = F\,.\,\sqrt[3]{p+p^2}.$$

Wenn man Gleichung XXIII. auf beiden Seiten differentiirt, so bekommt man zunächst $y\,.\,dp+p\,.\,dy+dz = \frac{F}{3}\cdot\frac{(1+3p^2)\,.\,dp}{(p+p^2)^{\frac{1}{3}}}$; und wenn man diese ganze Gleichung mit $p = \frac{dy}{dz}$ multiplicirt, so bekommt man

$$py\,.\,dp+(p^2+1)\,.\,dy = \frac{F}{3}\cdot\frac{(p+3p^2)\,.\,dp}{(p+p^2)^{\frac{1}{3}}}.$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$ multiplicirt; und thut man dieses, so ergibt sich

$$\frac{py\,.\,dp}{\sqrt{1+p^2}} + dy\sqrt{1+p^2} = \frac{F}{3}\cdot\frac{(p+3p^2)\,.\,dp}{(\sqrt{1+p^2})\,.\,(p+p^2)^{\frac{1}{3}}}.$$

Diese Gleichung lässt sich geradezu integriren und es ergibt sich

$$\text{XXIV)}\quad y\sqrt{1+p^2} = G+\frac{F}{3}\cdot\int\frac{(p+3p^2)\,.\,dp}{(\sqrt{1+p^2})\,.\,(p+p^2)^{\frac{1}{3}}}.$$

Führt man $x-\frac{a+\alpha}{2}$ statt z in Gleichung XXIII. ein, so kann man sie auf folgende Weise schreiben:

$$\text{XXV)}\quad yp+x-\frac{a+\alpha}{2} = F\,.\,\sqrt[3]{p+p^2}.$$

Auch die jetzige Kurve ist durch zwei Gleichungen gegeben und man hat zu verfahren, wie schon im zweiten Falle angegeben wurde. Das Prüfungsmittel wird hergestellt, indem man bei Gleichung XXII. den in den eckigen Klammern stehenden Faktor variirt, und dabei beachtet, dass $\delta y = 0$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$, u. s. w. ist.

Aufgabe 82.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 220. §. 49—51.).

Es sind zwei in einer Ebene gelegene sich schneidende und auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogene Geraden

Digitized by Google

gegeben. Man sucht eine auf das nemliche Coordinatensystem bezogene Kurve, welche in dem zu einer nach Belieben genommenen Abscisse x gehörigen Punkte die Eigenschaft hat, dass, wenn man den diesem Punkte der Kurve entsprechenden Krümmungsmittelpunkt aufsucht, und von diesem Krümmungsmittelpunkte Perpendikel auf die zwei gegebenen Geraden zieht, das Produkt beider Perpendikel grösser oder kleiner wird, als bei den zur nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf das nemliche rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann.

Die Linien MN und PQ seien (Taf. III. Fig. 8.) die beiden gegebenen Geraden und V sei der zur Abscisse OG gehörige Krümmungsmittelpunkt der gesuchten Kurve. VR und VT sind also die zwei in Rede stehenden Perpendikel. Die Gleichung der Linie MN sei

$$\text{I)}\quad A\,.\,x' + B\,.\,y' + C = 0$$

und die Gleichung der Linie PQ sei

$$\text{II)}\quad \mathfrak{A}\,.\,x'' + \mathfrak{B}\,.\,y'' + \mathfrak{C} = 0.$$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes V seien $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$; so ist die Entfernung des Punktes V von der Linie MN bekanntlich

$$\text{III)}\quad VR = \frac{A\,.\,\mathfrak{x} + B\,.\,\mathfrak{y} + C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

und des Punktes V Entfernung von der Linie PQ ist ebenso

$$\text{IV)}\quad VT = \frac{\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{x} + \mathfrak{B}\,.\,\mathfrak{y} + \mathfrak{C}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}}.$$

Erst wenn man die gesuchte Kurve und den Krümmungsmittelpunkt gefunden hat, ist es möglich, zu entscheiden, welche Bedeutung man einem jeden der Radikale $\sqrt{A^2 + B^2}$ und $\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}$ beilegen muss. Das in Rede stehende Produkt ist also

$$\text{V)}\quad U = \frac{(A\,.\,\mathfrak{x} + B\,.\,\mathfrak{y} + C)\,.\,(\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{x} + \mathfrak{B}\,.\,\mathfrak{y} + \mathfrak{C})}{(\sqrt{A^2 + B^2})\,.\,(\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2})}.$$

Nun ist $\mathfrak{x} = x - \frac{p\,.\,(1+p^2)}{q}$ und $\mathfrak{y} = y + \frac{1+p^2}{q}$; und wenn man für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ diese Ausdrücke in V. einführt, und zur Abkürzung noch $\mathfrak{D}$ statt $\frac{1}{(\sqrt{A^2 + B^2})\,.\,(\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2})}$ setzt, so geht V. über in

$$\text{VI)}\quad U = \mathfrak{D}\,.\,[Ax + By + C + \frac{1+p^2}{q}\,.\,(B - Ap)]\,.$$
$$[\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C} + \frac{1+p^2}{q}\,.\,(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}p)].$$

Wenn man jetzt diesen Ausdruck variirt, so ergeben sich sehr weitläuftige Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung, und es wäre bei deren Integration ein nicht geringer Grad von Aufmerksamkeit nöthig. Desshalb ist es räthlich, sich vor Allen umzuschauen, ob man nicht einen einfachern Ausdruck statt Gleichung VI. gewinnen kann. Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe

Digitized by Google

nicht, wenn man eine der gegebenen Graden als Abscissenaxe annimmt, und den Anfangspunkt der Coordinaten in jenen Punkt verlegt, wo sich die beiden gegebenen Graden schneiden. Unter A und $\mathfrak{A}$ sind bekanntlich die Sinus der Winkel zu verstehen, welche von den gegebenen Graden und der Abscissenaxe eingeschlossen werden; eben so sind unter B und $\mathfrak{B}$ die Cosinus der Winkel zu verstehen, welche von den gegebenen Graden und der Abscissenaxe eingeschlossen werden. Soll nun die durch Gleichung I. dargestellte Gerade MN als Abscissenaxe und KY' als Ordinatenaxe angenommen werden, so ist $A=0$ und $B=1$, und Gleichung I. reducirt sich zunächst auf $y'+C=0$. Weil aber jetzt $y'=0$ sein muss bei jedem Werthe des x, so ist auch $C=0$; und der Ausdruck III. reducirt sich zunächst auf den bekannten Ausdruck:

$$\text{VII)}\quad VR=y+\frac{1+p^2}{q}.$$

Da ferner die durch Gleichung II. dargestellte Grade durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, so ist $\mathfrak{C}=0$ und Gleichung II. reducirt sich zunächst auf $\mathfrak{A}\,.\,x''+\mathfrak{B}\,.\,y''=0$ oder auf $y''+\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\,.\,x''=0$; und wenn man zur Abkürzung $-m$ statt $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ setzt, so ist $y''-mx''=0$. Der Ausdruck IV. geht über in

$$\text{VIII)}\quad VT=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\,.\,[-mx+y+\frac{1+p^2}{q}\,.\,(1+mp)].$$

Erst, wenn man die gesuchte Kurve und den Krümmungsmittelpunkt gefunden hat, ist es möglich zu entscheiden, welche Bedeutung man dem Radikal $\sqrt{1+m^2}$ beilegen muss. Das in Rede stehende Produkt ist also

$$\text{IX)}\quad U=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\,.\,[y+\frac{1+p^2}{q}]\,.\,[-mx+y+\frac{1+p^2}{q}(1+mp)].$$

Variirt man nun, so bekommt man

Digitized by Google

$$\text{X)}\quad \delta U = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \left[2y - mx + \frac{(2+mp)\cdot(1+p^2)}{q} \right] \cdot \delta y$$

$$+ \frac{1}{q}\left[my + 4yp - 2mxp + 3m \cdot y \cdot p^2 + \frac{(m+4p+3m\cdot p^2)\,(1+p^2)}{q} \right] \cdot \frac{\partial \delta y}{\partial x}$$

$$- \frac{1}{q^2} \cdot \left[2y - mx + myp + \frac{2\cdot(1+mp)\cdot(1+p^2)}{q} \right] \cdot \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} \Big\}.$$

Erster Fall. Soll die gesuchte Kurve aus allen möglichen in jedem Punkte einander nächstanliegenden herausgewählt werden; so müssen folgende drei Gleichungen zugleich bestehen:

$$\text{XI)}\quad 2y - mx + \frac{(2+mp)\cdot(1+p^2)}{q} = 0$$

$$\text{XII)}\quad my + 4yp - 2mxp + 3my \cdot p^2 + \frac{(m+4p+3m\cdot p^2)\cdot(1+p^2)}{q} = 0$$

$$\text{XIII)}\quad 2y - mx + myp + \frac{2\cdot(1+mp)\,(1+p^2)}{q} = 0.$$

Gleichung XI. ist die einfachste; sie soll auch zuerst integrirt werden. Zunächst geht sie über in $2yq + 2 + 2p^2 - mxq + mp + mp^2 = 0$. Man addire $mpqy - mpqy$ zu dieser Gleichung, so kann man sie auf folgende Weise schreiben:

$$(qy + 1 + p^2)\cdot(2+mp) - (py + x)\cdot mq = 0.$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit $\frac{q}{(2+mp)^2}$ multiplicirt; und thut man dieses, so geht sie über in

$$\frac{qy+1+p^2}{2+mp} - \frac{(py+x)\,.\,mq}{(2+mp)^2} = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich geradezu integriren und es ergibt sich

$$\text{XIV)}\quad \frac{py+x}{2+m\,.\,p} = H.$$

Daraus folgt $yp - mHp = 2H - x$; und integrirt man wieder, so bekommt man

$$\tfrac{1}{2}\,.\,y^2 - mHy = 2Hx - \tfrac{1}{2}\,.\,x^2 + \tfrac{1}{2}G$$

oder

$$y^2 - 2mHy = 4Hx - x^2 + G$$

oder

$$y^2 - 2mHy + m^2H^2 + x^2 - 4Hx + 4H^2 = G + (4+m^2)\,.\,H^2$$

oder

$$\text{XV)}\quad (y-mH)^2 + (x-2H)^2 = G + (4+m^2)H^2.$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt da liegt, wo $x = 2H$ und $y = mH$ ist. Aus XV. folgt

$$y = mH + \sqrt{G + m^2\,.\,H^2 - x^2 + 4Hx},$$

und daraus folgt weiter

$$p = \frac{-x+2H}{\sqrt{G+m^2\,.\,H^2 - x^2 + 4Hx}}$$

und

$$q = \frac{-G-(m^2+4)\,.\,H^2}{(G+m^2\,.\,H^2 - x^2 + 4Hx)^{\frac{3}{2}}}.$$

Diese für y, p, q hergestellten Ausdrücke hat man in die Gleichung XII. und XIII. einzuführen; und man findet, dass diese identisch werden, wenn $H = 0$. Gleichung XV. reducirt sich also auf

$$\text{XVI)}\quad y^2 + x^2 = G.$$

Dieses ist aber die Gleichung eines jeden beliebigen Kreises, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten d. h. im Durchschnittspunkte der beiden gegebenen Graden liegt. Variirt man noch einmal, und beachtet man, dass jetzt sowohl $y + \frac{1+p^2}{q} = 0$ als auch $-mx + \frac{mp\,.\,(1+p^2)}{q} = 0$ wird; so bleibt nur

$$\delta^2 U = \frac{2}{\sqrt{1+m^2}}\,.\,\Big[(\delta y + \frac{2p}{q}\,.\,\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1+p^2}{q^2}\,.\,\frac{d^2\delta y}{dx^2})^2$$

$$+ m\,(\delta y + \frac{2p}{q}\,.\,\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1+p^2}{q^2}\,.\,\frac{d^2\delta y}{dx^2})\,.\,(\frac{1+3p^2}{q}\,.\,\frac{d\delta y}{dx}$$

$$- \frac{p\,.\,(1+p^2)}{q^2}\,.\,\frac{d^2\delta y}{dx^2})\Big].$$

Digitized by Google

Der innerhalb der eckigen Klammer stehende Faktor kann, wie man geradezu erkennt, nicht immer einerlei Zeichen behalten, und somit findet jetzt weder ein Grösstes noch Kleinstes statt.

Zweiter Fall. Macht man dieselbe Einschränkung, wie beim zweiten Falle der vorigen Aufgabe, so ist

$$\delta y = 0,\ \frac{d\delta y}{dx} = 0,\ \delta^2 y = 0,\ \frac{d\delta^2 y}{dx} = 0,\ \text{u. s. w.}$$

Gleichung X. zieht sich also zurück auf

$$\text{XVII)}\quad \delta U = -\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \frac{1}{q^2} \cdot \left[2y - mx + mpy + \frac{2\cdot(1+mp)\cdot(1+p^2)}{q}\right] \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}.$$

Man hat also jetzt nur die einzige Gleichung

$$\text{XVIII)}\quad 2y - mx + mpy + \frac{2\cdot(1+mp)\cdot(1+p^2)}{q} = 0$$

oder

$$2yq + mpyq + 2\cdot(1+p^2)\cdot(1+mp) - mxq = 0.$$

Wenn man hier $mpyq - mpyq$ addirt, so kann man letzterer Gleichung auch folgende Form geben:

$$2yq(1+mp) + 2\cdot(1+p^2)\cdot(1+mp) - mq\cdot(yp+x) = 0$$

oder

$$2\cdot(yq+p^2+1)\cdot(1+mp) - mq\cdot(yp+x) = 0.$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit $\frac{1}{2\cdot(1+mp)^{\frac{1}{2}}}$ multiplicirt; und thut man dieses, so bekommt man

$$\frac{yq+p^2+1}{(1+mp)^{\frac{1}{2}}} - \frac{mq\cdot(yp+x)}{2\cdot(1+mp)^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Diese Gleichung kann man geradezu integriren und es ergibt sich

$$\text{XIX)}\quad \frac{yp+x}{\sqrt{1+mp}} = E.$$

Daraus folgt $yp + x = E\cdot\sqrt{1+mp}$; und wenn man hier auf beiden Seiten differentiirt, so bekommt man

$$y\cdot dp + p\cdot dy + dx = \frac{E}{2}\cdot\frac{m\cdot dp}{\sqrt{1+mp}}.$$

Man multiplicire diese Gleichung mit $p = \frac{dy}{dx}$, so ergibt sich

$$yp\cdot dp + (1+p^2)\cdot dy = \frac{E}{2}\cdot\frac{mp\cdot dp}{\sqrt{1+m\cdot p}}.$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$ multiplicirt und dadurch geht sie über in

Digitized by Google

$$\frac{yp\,.\,dp}{\sqrt{1+p^2}}+dy\,.\,\sqrt{1+p^2}=\frac{E}{2}\cdot\frac{m}{\sqrt{1+mp}}\cdot\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,.\,dp.$$

Durch Integration bekommt man

$$\text{XX)}\quad y\,.\,\sqrt{1+p^2}=F+\frac{E}{2}\cdot\int\frac{m}{\sqrt{1+mp}}\cdot\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,.\,dp.$$

Die hier gesuchte Kurve ist also durch zwei Gleichungen gegeben (XIX. und XX.); das Radikal $\sqrt{1+mp}$ hat entweder durchweg seine positive oder durchweg seine negative Bedeutung; eben so hat das Radikal $\sqrt{1+p^2}$ entweder durchweg seine negative oder durchweg seine positive Bedeutung; übrigens ist das Zeichen des Radikals $\sqrt{1+mp}$ vom Zeichen des Radikals $\sqrt{1+p^2}$ ganz unabhängig.

Dritter Fall. Macht man hier dieselbe Einschränkung wie beim dritten Falle der vorigen Aufgabe, so ist

$$\delta y=0,\ \frac{d^2\delta y}{dx^2}=0,\ \delta^2 y=0,\ \frac{d^2\delta^2 y}{dx^2}=0,\ \text{u. s. w.;}$$

und Gleichung X. zieht sich zurück auf

$$\delta U=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\cdot\frac{1}{q}\Big[my+4yp-2mxp+3my\,.\,p^2+\frac{(m+4p+3m\,.\,p^2)\,(1+p^2)}{q}\Big]\cdot\frac{d\delta y}{dx}.$$

Man hat also nur die einzige Gleichung

$$\text{XXI)}\quad my+4yp-2mxp+3my\,.\,p^2+\frac{(m+4p+3m\,.\,p^2)\,.\,(1+p^2)}{q}=0$$

oder

$$\text{XXII)}\quad myq+4ypq-2mx\,.\,pq+3my\,.\,p^2\,.\,q+m+4p+6m\,.\,p^2+4p^3+5m\,.\,p^4=0.$$

Ich will, um nicht zu weitläuftig zu werden, es unterlassen, hier an dieser Stelle die Methode mitzutheilen, nach welcher ich letztere Gleichung integrirt habe. Das Integral selbst ist

$$\text{XXIII)}\quad yp+x=L\,.\,\frac{[m+(2-\sqrt{4-5\,.\,m^2})\,.\,p]^{\frac{2+\sqrt{4-5\,.\,m^2}}{5\,.\,\sqrt{4-5\,.\,m^2}}}}{[m+(2+\sqrt{4-5\,.\,m^2})\,.\,p]^{\frac{2-\sqrt{4-5m^2}}{5\,.\,\sqrt{4-5m^2}}}}.$$

Von der Richtigkeit dieses Integrals kann man sich überzeugen, wenn man Gleichung XXIII. differentiirt, und dann aus der sich ergebenden Differentialgleichung und aus XXIII. das L eliminirt. Man wird genau Gleichung XXII. wieder bekommen. Setzt man nun statt XXIII. zur Abkürzung

Digitized by Google

$$\text{XXIV)}\quad yp + x = L \,.\, \varphi p$$

und differentiirt man, so ergibt sich

$$y \,.\, dp + p \,.\, dy + dx = L \,.\, d(\varphi p).$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ multiplicirt; denn es ergibt sich

$$\frac{py \,.\, dp}{\sqrt{1+p^2}} + dy \,.\, \sqrt{1+p^2} = L \,.\, \frac{p \,.\, d(\varphi p)}{\sqrt{1+p^2}},$$

und integrirt man wirklich, so bekommt man

$$\text{XXV)}\quad y \,.\, \sqrt{1+p^2} = M + L \,.\, \int \frac{p \,.\, d(\varphi p)}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Die hier gesuchte Kurve ist also wieder durch zwei Gleichungen (XXIII. und XXV.) gegeben. Das Radikal $\sqrt{4-5 \,.\, m^2}$ hat entweder durchweg seine positive oder durchweg seine negative Bedeutung; dasselbe gilt von dem Radikal $\sqrt{1+p^2}$. Uebrigens ist das Zeichen des Radikals $\sqrt{1+p^2}$ von dem des $\sqrt{4-5 \,.\, m^2}$ ganz unabhängig.

Aufgabe 83.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 220. §. 49—51.)

Man hat eine Menge von unter sich parallelen Graden, und man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Kurve. In den zu irgend einer nach Belieben genommenen Abscisse x gehörigen Punkt dieser Kurve legt man den Krümmungskreis, welcher eine jede dieser Parallellinien zweimal durchschneidet, so dass jedes der auf diesen Parallellinien abgeschnittenen Stücke eine Sehne des Krümmungskreises bildet. Die gesuchte Kurve soll in dem zu der gerade nach Belieben genommenen Abscisse x gehörigen Punkte die Eigenschaft haben, dass die Summe der Quadrate aller obgenannten Sehnen grösser oder kleiner wird als bei den zur nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann. Welche Kurve wird gesucht?

Die unter sich parallelen Geraden (Taf. III. Fig. 9.) seien MP, NO, u. s. w. Die Durchführung der Aufgabe wird vereinfacht, wenn man die Abscissenaxe senkrecht auf die besagten Parallellinien zieht. Wenn ξ und η die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes und x' und y' die Coordinaten des Krümmungskreises sind; so ist

$$\text{I)}\quad (y'-\eta)^2 + (x'-\xi)^2 = \varrho^2$$

die Gleichung des Krümmungskreises. Daraus folgt

$$\text{II)}\quad y' = \eta \pm \sqrt{\varrho^2 - (x'-\xi)^2}.$$

Digitized by Google

Nun ist $\eta = y + \frac{1+p^2}{q}$, $\xi = x - \frac{p+p^2}{q}$, und $\varrho = \frac{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}{q}$; und wenn man diese Ausdrücke in II. einführt, so bekommt man

III) $y' = y + \frac{1+p^2}{q} \pm \sqrt{(\frac{1+p^2}{q})^2 - 2\,.\,(x'-x)\,.\,\frac{p+p^2}{q} - (x'-x)^2}$.

Man erkennt, dass es für y' zwei verschiedene Ausdrücke gibt, d. h. zu jeder beliebigen Abscisse x' gibt es zwei verschiedene Ordinaten. Setzt man die Abssisse $OM = a_1$, so geht dabei Gleichung III. über in :

IV) $y'_{a_1} = y + \frac{1+p^2}{q} \pm \sqrt{(\frac{1+p^2}{q})^2 - 2\,.\,(a_1-x)\,.\,\frac{p+p^2}{q} - (a_1-x)^2}$

Dadurch sind die zu OM gehörigen Ordinaten Mm und Mw zugleich ausgedrückt; und zwar ist

$$Mm = y + \frac{1+p^2}{q} - \sqrt{(\frac{1+p^2}{q})^2 - 2(a_1-x)\,.\,\frac{p+p^2}{q} - (a_1-x)^2}$$

und

$$Mw = y + \frac{1+p^2}{q} + \sqrt{(\frac{1+p^2}{q})^2 - 2\,.\,(a_1-x)\,.\,\frac{p+p^2}{q} - (a_1-x)^2}.$$

Die Sehne mw ist also $= Mw - Mm$, d. h. es ist

$$mw = 2\sqrt{(\frac{1+p^2}{q})^2 - 2\,.\,(a_1-x)\,.\,\frac{p+p^2}{q} - (a_1-x)^2}$$

und daraus folgt

V) $\overline{mw}^2 = 4\,.\,[(\frac{1+p^2}{q})^2 - 2\,.\,(a_1-x)\,.\,\frac{p+p^2}{q} - (a_1-x)^2]$.

Setzt man ferner die Abscisse $ON = a_2$, so bekommt man auf gleiche Weise

VI) $\overline{nv}^2 = 4[(\frac{1+p^2}{q})^2 - 2\,.\,(a_2-x)\,.\,\frac{p+p^2}{q} - (a_2-x)^2]$

und sofort. Und setzt man endlich die letzte Abscisse $OR = a_n$, so bekommt man

VII) $\overline{rs}^2 = 4\,.\,[(\frac{1+p^2}{q})^2 - 2\,.\,(a_n-x)\,.\,\frac{p+p^2}{q} - (a_n-x)^2]$.

Die Aufgabe führt also auf folgenden Ausdruck

VIII) $U = 4[(\frac{1+p^2}{q})^2 - 2\,.\,(a_1-x)\,.\,\frac{p+p^2}{q} - (a_1-x)^2]$

$+ 4[(\frac{1+p^2}{q})^2 - 2\,.\,(a_2-x)\,.\,\frac{p+p^2}{q} - (a_1-x)^2]$

. . . . . .

$+ 4\,.\,[(\frac{1+p^2}{q})^2 - 2\,.\,(a_n-x)\,.\,\frac{p+p^2}{q} - (a_n-x)^2]$.

Diesen Ausdruck kann man noch umformen in

Digitized by Google

IX) $U = 4n \cdot \left(\frac{1+p^2}{q}\right)^2 + 8n \cdot \left(x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n}\right) \cdot \frac{p+p^2}{q}$

$- 4 \cdot [(a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (a_n - x)^2].$

Durch Variiren bekommt man

$$X)\quad \delta U = \frac{8n}{q^2} \cdot [2p \cdot (1+p^2) + (x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n}) \cdot (1+3p^2) \cdot q] \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$- \frac{8n}{q^2} \cdot [(1+p^2) + (x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_n}{n}) \cdot (1+p^2) \cdot [pq]] \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}.$$

Erster Fall. Soll die gesuchte Kurve aus allen möglichen in jedem Punkte einander nächstanliegenden herausgewählt werden, so müssen folgende zwei Gleichungen zugleich bestehen:

$$XI)\quad 2p \cdot (1+p^2) + (x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n}) \cdot (1+3p^2) \cdot q = 0$$

$$XII)\quad 1 + p^2 + (x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_n}{n}) \cdot p \cdot q = 0.$$

Man erkennt aber geradezu, dass es keine Funktion von x gibt, welche diese beiden Gleichungen zugleich identisch macht.

Digitized by Google

Zweiter Fall. Soll man nur unter denen einander in jedem Punkte nächstanliegenden Kurven, welche bei der gerade genommenen Abscisse x lauter parallele Berührende haben, diejenige heraussuchen, wobei die Summe der Quadrate aller auf vorgeschriebene Weise begränzter Sehnen grösser oder kleiner wird, als bei allen andern so geeigenschafteten Kurven; so ist bei der gerade genommenen Abscisse x jetzt $\frac{d\delta y}{dx}=0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx}=0$, u. s. w. Gleichung X. reducirt sich also auf

$$\text{XIII)}\quad \delta U=-\frac{8n}{b^2}\cdot\left[1+p^2+(x-\frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}{n})\cdot p\cdot q\right]\cdot(1+p^2)\cdot\frac{d^2\delta y}{dx}$$

Man hat also jetzt die einzige Gleichung

$$\text{XIV)}\quad 1+p^2+(x-\frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}{n})\cdot p\cdot q=0.$$

Diese Gleichung wird einfacher, wenn man $x-\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=z$ setzt; denn dabei geht sie über in $1+p^2+z\,.\,pq=0$

oder in $\frac{1}{z}+\frac{pq}{1+p^2}=0$ oder in $\frac{dz}{z}+\frac{p\,.\,dp}{1+p^2}=0$

Digitized by Google

und daraus folgt

$$\log \text{nat } z + \log \text{nat } \sqrt{1+p^2} = \log \text{nat } A$$

oder $z \cdot \sqrt{1+p^2} = A$. Daraus folgt weiter

$$p = \frac{1}{z} \cdot \sqrt{A^2 - z^2}, \text{ oder } dy = \frac{dz}{z} \cdot \sqrt{A^2 - z^2}.$$

Wenn man abermals integrirt, so ergibt sich

$$\text{XV)} \quad y = B + \sqrt{A^2 - z^2} + \frac{A}{2} \cdot \log \text{nat } \frac{-A + \sqrt{A^2 - z^2}}{A + \sqrt{A^2 - z^2}}.$$

Hier hat man statt z wieder $x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots . a_n}{n}$ zurückzuführen.

Dritter Fall. Soll man nur unter denen einander in jedem Punkte nächstanliegenden Kurven, welche bei der gerade genommenen Abscisse x alle für $\frac{d^2y}{dx^2}$ einerlei aber einen nicht gegebenen Werth liefern, diejenige heraussuchen, wobei die Summe der Quadrate aller auf vorgeschriebene Weise begränzter Sehnen grösser oder kleiner wird, als bei allen andern so geeigenschafteten Kurven; so ist bei der gerade genommenen Abscisse x jetzt $\frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2} = 0$, u. s. w. Gleichung X. reducirt sich also auf

$$\text{XVI)} \quad \delta U = \frac{8n}{q^2} \cdot [2p \cdot (1+p^2) + (x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}) \cdot (1+3p^2) \cdot q] \frac{d\delta y}{dx}.$$

Man hat also jetzt die einzige Gleichung

$$\text{XVII)} \quad 2p(1+p^2) + (x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots . + a_n}{n}) \cdot (1+3 \cdot p^2) \cdot q = 0.$$

Diese Gleichung wird einfacher, wenn man z anstatt

$$x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots . a_n}{n}$$

setzt; denn dabei geht sie über in

$$2p \cdot (1+p^2) + z \cdot (1+3p^2) \cdot q = 0,$$

oder in

$$\frac{1}{z} + \frac{(1+3p^2)q}{2p(1+p^2)} = 0,$$

oder in

$$\frac{dz}{z} + \frac{1}{2} \cdot (\frac{dp}{p} + \frac{2p \cdot dp}{1+p^2}) = 0.$$

Daraus folgt

$$\log \text{nat } z + \tfrac{1}{2}(\log \text{nat } p + \log \text{nat } (1+p^2)) = \log \text{nat } C,$$

oder

$$\log \text{nat } z + \tfrac{1}{2} \cdot \log \text{nat } p \cdot (1+p^2) = \log \text{nat } C,$$

oder

$$\log \text{nat } s + \log \text{nat } \sqrt{p \cdot (1+p^2)} = \log \text{nat } C,$$

oder

$$s\sqrt{p \cdot (1+p^2)} = C.$$

Führt man hier für s seinen Ausdruck zurück, so bekommt man

$$\text{XVIII)} \quad \left(x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_n}{n}\right)\sqrt{p \cdot (1+p^2)} = C.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n} = \frac{C}{\sqrt{p(1+p^2)}},$$

und wenn man jetzt auf beiden Seiten differentiirt, so bekommt man

$$dx = -\frac{C}{2} \cdot \frac{(1+3 \cdot p^2) \cdot dp}{p(1+p^2)\sqrt{p \cdot (1+p^2)}}.$$

Multiplicirt man beiderseits mit $p = \frac{dy}{dx}$, so ergibt sich

$$dy = -\frac{C}{2} \cdot \frac{(1+3 \cdot p^2) \cdot dp}{(1+p^2) \cdot \sqrt{p \cdot (1+p^2)}}.$$

Integrirt man, so ergibt sich

$$\text{XIX)} \quad y = E - \frac{C}{2} \cdot \int \frac{(1+3 \cdot p^2) \cdot dp}{(1+p^2) \cdot \sqrt{p(1+p^2)}}.$$

Die jetzige Kurve ist also durch zwei Gleichungen gegeben (XVIII. und XIX.).

Aufgabe 89.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 234. §. 57. u. s. w.).

(Der erste Fall dieser Aufgabe ist schon von M. Ohm z. B. in dessen System. Siebenter Band. Zweiter Anhang. Seite 58 behandelt. Der zweite, dritte und vierte Fall sind von mir hinzugefügt).

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Kurve. Man zieht in ihrem zu einer nach Belieben genommenen Abscisse x gehörigen Punkte eine Berührende, und errichtet in zwei festen Punkten der Abscissenaxe Perpendikel. In diesen beiden Perpendikeln liegen aber die zu besagten zwei festen Punkten gehörigen Ordinaten sowohl der Kurve selbst als auch der Berührenden. Wenn man nun beidemal die zwischen der Ordinate der Kurve selbst und zwischen der Ordinate der Berührenden stattfindende Differenz nimmt: welche Kurve ist es, die in dem zu der gerade genommenen Abscisse x gehörigen Punkte die Eigenschaft hat, dass das Produkt beider Differenzen grösser oder kleiner wird, als bei den zu der nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann?

Digitized by Google

Das gesuchte Produkt (Taf. III. Fig. 6.) ist hier $U = RP \,.\, TQ$; y und x sind die zum Berührungspunkte S gehörigen Coordinaten; y_a ist die zur Abscisse a gehörige Ordinate der Kurve, und ebenso ist y_α die zur Abscisse α gehörige Ordinate der Kurve; die den Abscissen a und α entsprechenden Ordinaten der in S berührenden Geraden sind bezüglich

$$RH = y + (a - x) \,.\, \frac{dy}{dx}$$

und

$$TK = y + (\alpha - x) \,.\, \frac{dy}{dx}.$$

Es ist also

$$RP = [y + (a - x) \,.\, \frac{dy}{dx} - y_a],$$

und

$$TQ = y + (\alpha - x) \,.\, \frac{dy}{dx} - y_\alpha.$$

Setzt man nun zur Abkürzung noch p anstatt $\frac{dy}{dx}$, so ist

$$U = [y + (a - x) \,.\, p - y_a] \,.\, [y + (\alpha - x) \,.\, p - y_\alpha].$$

Daraus folgt:

I) $$\begin{aligned} \delta U = {} & [2y + (a + \alpha - 2x) \,.\, p - y_a - y_\alpha] \,.\, \delta y \\ & + [(a + \alpha - 2x) \,.\, y + 2(a - x) \,.\, (\alpha - x) \,.\, p \\ & \qquad - (a - x) \,.\, y_\alpha - (\alpha - x) \,.\, y_a] \,.\, \frac{d\delta y}{dx} \\ & - [y + (\alpha - x) \,.\, p - y_\alpha] \,.\, \delta y_a - [y + (a - x) \,.\, p - y_a] \,.\, \delta y_\alpha \end{aligned}$$

und

II) $$\begin{aligned} \delta^2 U = {} & [2y + (a + \alpha - 2x) \,.\, p - y_a - y_\alpha] \,.\, \delta^2 y \\ & + [(a + \alpha - 2x) \,.\, y + 2 \,.\, (a - x) \,.\, (\alpha - x) \,.\, p \\ & \qquad - (a - x) \,.\, y_\alpha - (\alpha - x) \,.\, y_a] \,.\, \frac{d\delta^2 y}{dx} \\ & - [y + (\alpha - x) \,.\, p - y_\alpha] \,.\, \delta^2 y_a - [y + (a - x) \,.\, p - y_a] \,.\, \delta^2 y_\alpha \\ & + 2 \,.\, \delta y^2 + 2(a + \alpha - 2x) \,.\, \delta y \,.\, \frac{d\delta y}{dx} \\ & \qquad + 2 \,.\, (a - x) \,.\, (\alpha - x) \,.\, (\frac{d\delta y}{dx})^2 \\ & - 2 \,.\, \delta y \,.\, \delta y_a - 2(\alpha - x) \,.\, \frac{d\delta y}{dx} \,.\, \delta y_a - 2 \,.\, \delta y \,.\, \delta y_\alpha \\ & \qquad - 2(a - x) \,.\, \frac{d\delta y}{dx} \,.\, \delta y_\alpha \\ & + 2 \,.\, \delta y_a \,.\, \delta y_\alpha. \end{aligned}$$

Erster Fall. Soll die gesuchte Kurve aus allen möglichen einander in jedem Punkte nächstanliegenden herausgewählt wer-

den, so sind δy, $\frac{d\delta y}{dx}$, δy_a, δy_α dem Werthe nach ganz unabhängig von einander; und es muss Gleichung I. in folgende vier zerfallen:

$$1)\ 2y+(a+\alpha-2x)\,.\,p-y_a-y_\alpha=0$$

$$2)\ (a+\alpha-2x)\,.\,y+2\,.\,(a-x)\,.\,(\alpha-x)\,.\,p-(a-x)\,.\,y_\alpha - (\alpha-x)\,.\,y_a=0$$

$$3)\ y+(\alpha-x)\,.\,p-y_\alpha=0$$

$$4)\ y+(a-x)\,.\,p-y_a=0.$$

Addirt man 3) und 4), so bekommt man Gleichung 1). Multiplizirt man 3) mit $a-x$, und 4) mit $\alpha-x$, und addirt beide Produkte, so ergibt sich Gleichung 2). Eliminirt man p aus den beiden letzten Gleichungen, so folgt

$$5)\ y=\frac{y_\alpha-y_a}{\alpha-a}\,.\,x+\frac{\alpha\,.\,y_a-a\,.\,y_\alpha}{\alpha-a}.$$

Dies ist die Gleichung einer geraden Linie, die insoferne die Aufgabe löst, als sie zugleich ihre eigne Berührende ist. Da nun dadurch den Gleichungen 1), 2), 3), 4) genügt wird, so kann sie die Aufgabe lösen. Uebrigens sind y_a und y_α noch ganz unbestimmt, und somit kann man die gefundene Gerade noch zwingen, irgend zwei Bedingungen zu genügen, z. B. durch zwei gegebene Punkte zu gehen. Sind nun (n, m) und (k, h) diese Punkte, so geht für diese Punkte die Gleichung 5) bezüglich über in

$$6)\ m=\frac{y_\alpha-y_a}{\alpha-a}\,.\,n+\frac{\alpha y_a-a\,.\,y_\alpha}{\alpha-a},$$

$$7)\ h=\frac{y_\alpha-y_a}{\alpha-a}\,.\,k+\frac{\alpha y_a-a\,.\,y_\alpha}{\alpha-a},$$

wodurch sich y_a und y_α vollkommen bestimmen lassen. In Folge der Gleichungen 3) und 4) erkennt man, dass $TQ=0$ und $RP=0$; es ist also auch $U'=0$. Gleichung II. reducirt sich jetzt auf

$$\delta^2 U=2\,.\,\delta y^2+2(a+\alpha-2x)\,.\,\delta y\,.\,\frac{d\delta y}{dx} + 2\,.\,(a-x)\,.\,(\alpha-x)\,.\,(\frac{d\delta y}{dx})^2-2\delta y\,.\,\delta y_a - 2\,.\,(\alpha-x)\,.\,\frac{d\delta y}{dx}\,.\,\delta y_a-2\,.\,\delta y\,.\,\delta y_\alpha - 2\,.\,(a-x)\,.\,\frac{d\delta y}{dx}\,.\,\delta y_\alpha-2\,.\,\delta y_a\,.\,\delta y_\alpha.$$

Dieser Ausdruck kann aber nicht beständig einerlei Zeichen behalten, namentlich weil die beiden Elemente δy_a^2 und δy_α^2 dabei fehlen. Es findet also jetzt weder ein primäres Grösstes noch Kleinstes statt.

Zweiter Fall. Soll man die gesuchte Kurve nur aus allen denen in jedem Punkte einander nächstanliegenden herauswählen, bei welchen die Summe der zu den Abscissen a und α gehörigen Ordinaten denselben (gegebenen oder nicht gegebenen) konstanten

Digitized by Google

Werth B behält; so hat man für die gesuchte Kurve folgende Gleichung:

$$y_a + y_\alpha = B,$$

und für alle hier in Betracht zu ziehenden und der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Kurven hat man die Gleichung

$$(y_a + k \cdot \delta y_a + \frac{k^2}{1 \cdot 2} \cdot \delta^2 y_a + \ldots.)$$

$$+ (y_\alpha + k \cdot \delta y_\alpha + \frac{k^2}{1 \cdot 2} \cdot \delta^2 y_\alpha + \ldots.) = B.$$

Da aber letztere Gleichung für ein im Momente des Verschwindens befindliches k gelten soll; so muss einzeln stattfinden $\delta y_a + \delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a + \delta^2 y_\alpha = 0$, u. s. w. Wenn man nun δy_α, $\delta^2 y_\alpha$, u. s. w. als abhängig betrachtet, so ist $\delta y_\alpha = -\delta y_a$, $\delta^2 y_\alpha = -\delta^2 y_a$, u. s. w. Eliminirt man δy_α aus Gleichung I), so bekommt man

$$\delta U = [2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p - y_a - y_\alpha] \cdot \delta y$$
$$+ [(a + \alpha - 2x) \cdot y + 2(a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p - (a - x) \cdot y_a$$
$$- (\alpha - x) \cdot y_a] \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$
$$- [(\alpha - a) \cdot p - y_\alpha + y_a] \cdot \delta y_a.$$

Daraus ergeben sich die drei Gleichungen

$$8)\quad 2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p - y_a - y_\alpha = 0$$

$$9)\quad (a + \alpha - 2x) \cdot y + 2(a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p - (a - x) \cdot y_\alpha$$
$$- (\alpha - x) \cdot y_\alpha = 0$$

$$10)\quad (\alpha - a) \cdot p - y_\alpha + y_a = 0.$$

Eliminirt man p aus 8) und 10), so ergibt sich

$$11)\quad y = \frac{y_\alpha - y_a}{\alpha - a} \cdot x + \frac{a \cdot y_a - a \cdot y_\alpha}{\alpha - a}.$$

Diese Gleichung gehört einer geraden Linie an, und genügt den drei Gleichungen 8), 9), 10), kann also die Aufgabe lösen. Da aber y_α und y_a noch ganz unbestimmt sind, so kann man der Aufgabe selbst, damit sie eine bestimmte Auflösung habe, noch zwei Bedingungen zufügen, z. B. dass die gesuchte Linie durch zwei gegebene Punkte gehe, oder dass sie durch einen Punkt gehe und zugleich die Summe $y_a + y_\alpha = B$ einen bestimmt gegebenen Werth habe, u. s. w. Ferner geht Gleichung II. über in

$$\delta^2 U = 2 \cdot \delta y^2 + 2 \cdot (a + \alpha - 2x) \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$
$$+ 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot (\frac{d\delta y}{dx})^2$$
$$- 2(\alpha - a) \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \delta y_a - 2 \cdot \delta y_a^2.$$

Dieser Ausdruck kann aber nicht beständig einerlei Zeichen haben, namentlich weil δy^2 und δy_a^2 entgegengesetze Vorzeichen haben.

Digitized by Google

Es findet also weder ein primäres Grösstes noch Kleinstes statt.

Dritter Fall. Soll die gesuchte Kurve nur aus denen in jedem Punkte einander nächstanliegenden herausgewählt werden, bei welchen allen die Ordinaten y_a und y_α denselben (gegebenen oder nicht gegebenen) Werth haben und welche alle den zu der gerade genommenen Abscisse x gehörigen Berührungspunkt mit einander gemeinschaftlich haben; so findet einzeln statt $\delta y = 0$, $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, u. s. w.

Mancher Anfänger möchte behaupten: wenn einzeln stattfindet $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$, u. s. w., in welchen Ausdrücken der Werth des x noch ganz unbestimmt ist; so muss auch bei den bestimmten Werthen $x = a$ und $x = \alpha$ einzeln stattfinden $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, u. s. w., so dass durch die Gleichungen $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$ $\delta^2 y_\alpha = 0$ u. s. w. die Zahl der zu vergleichenden Kurven nicht mehr enger eingeschränkt wird, als es schon durch die Gleichungen $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$, u. s. w. geschehen ist. Dieses wäre ganz richtig, wenn die Ausdrücke δy, $\delta^2 y$, u. s. w. identische Funktionen wären; allein sie müssen alle beliebigen nur keine identischen Funktionen vorstellen; und wenn gleich der Werth des x unbestimmt ist, so ist er doch bei allen zu vergleichenden Funktionen der nemliche unveränderliche Werth, und für einen solchen nach Belieben angenommenen aber festzuhaltenden Werth des x und für keinen andern müssen auch die allgemeinen Gleichungen $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$, u. s. w. stattfinden.

Unter diesen Umständen reducirt sich nun Gleichung I. auf

$$\delta U = [(a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 \cdot (a - x)\ (\alpha - x) \cdot p - (a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a] \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Damit nun $\delta U = 0$ werden kann, muss sein

$$12)\ (a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p - (a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a = 0.$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit dem nach bekannter Methode leicht aufzufindenden Faktor $\frac{1}{2[(a-x)\ (\alpha-x)]^{\frac{1}{2}}}$ multiplicirt; dadurch bekommt man

$$\frac{2 \cdot (a - x)\ (\alpha - x) \cdot dy - (2x - a - \alpha) \cdot y \cdot dx}{2[(a - x) \cdot (\alpha - x)]^{\frac{1}{2}}} - \frac{[(a - x) \cdot y_\alpha + (\alpha - x) \cdot y_a] \cdot dx}{2[(a - x) \cdot (\alpha - x)]^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Daraus folgt durch Integration

$$\frac{y}{\sqrt{(a - x)\ (\alpha - x)}} + \frac{(a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a}{(\alpha - a)\sqrt{(a - x)\ (\alpha - x)}} = C$$

oder

$$13)\ \frac{(\alpha - a) \cdot y + (a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a}{(\alpha - a) \cdot \sqrt{(a - x) \cdot (\alpha - x)}} = C.$$

Sind die Werthe von y_a und y_α nicht gegeben, so kann man diese Kurve noch drei Bedingungen unterwerfen, weil ausser y_a und y_α auch noch C zu bestimmen ist; sind aber die Werthe von y_a und y_α gegeben, so kann man diese Kurve nur einer einzigen Bedin-

Digitized by Google

gung unterwerfen. Soll sie z. B. durch den festen Punkt (n, m) gehen, so ist

$$C = \frac{(\alpha - a) \cdot m + (a - n) \cdot y_\alpha - (\alpha - n) \cdot y_a}{(\alpha - a) \cdot \sqrt{(a - n) \cdot (\alpha - n)}}.$$

Gleichung 13) geht also jetzt über in

$$14) \quad \frac{(\alpha - a) \cdot y + (a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a}{(\alpha - a) \cdot m + (a - n) \cdot y_\alpha - (\alpha - n) \cdot y_a} = \sqrt{\frac{(a - x) \cdot (\alpha - x)}{(a - n) \cdot (\alpha - n)}}.$$

Unter diesen Umständen reducirt sich Gleichung II. jetzt auf

$$\delta^2 U = 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2,$$

so dass ein primäres Grösstes stattfindet, wenn $x > a$ und $x < \alpha$; dagegen findet ein Kleinstes statt, wenn entweder $x > a$ und $x > \alpha$, oder wenn $x < a$ und $x < \alpha$. Ferner ist jetzt

$$U' = -\left(\frac{(\alpha - a) \cdot y + (a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a}{2 \cdot \sqrt{(a - x) \cdot (\alpha - x)}}\right)^2$$

oder

$$U' = -\left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{(\alpha - a) \cdot y + (a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a}{(\alpha - a) \cdot \sqrt{(a - x) \cdot (\alpha - x)}}\right)^2$$

oder

$$U' = -\left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2 \cdot C^2.$$

Unter den hier zu bemerkenden Specialitäten ist besonders die hervorzuheben, wo $C = 0$. Dabei geht Gleichung 13) über in

$$(\alpha - a) \cdot y + (a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a = 0,$$

und daraus folgt

$$y = \frac{y_\alpha - y_a}{\alpha - a} \cdot x + \frac{\alpha \cdot y_a - a \cdot y_\alpha}{\alpha - a} = 0.$$

Diese Gleichung ist aber eine Specialität von Nr. 13, und somit kein singuläres Integral; übrigens stimmt sie mit Nr. 5. und 11. überein.

Vierter Fall. Sollen nur diejenigen in jedem Punkte einander nächstanliegenden Kurven in Betracht kommen, bei welchen die Ordinaten y_a und y_α ihren Werth nicht ändern, und bei welchen allen die zu der gerade gewählten Abscisse $OG = x$ gehörigen Berührenden mit einander parallel laufen; so muss einzeln stattfinden

$$\delta y_a = 0, \ \delta y_\alpha = 0, \ \frac{d\delta y}{dx} = 0, \ \delta^2 y_a = 0, \ \delta^2 y_\alpha = 0, \ \frac{d\delta^2 y}{dx} = 0, \text{ u. s. w.}$$

Gleichung I. reducirt sich also jetzt auf

$$\delta U = [2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p - y_a - y_\alpha] \cdot \delta y.$$

Damit nun $\delta U = 0$ werde, so muss sein

$$15) \quad 2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p - y_a - y_\alpha = 0.$$

Der jetzt integrirende Faktor ist $\frac{1}{(2x - a - \alpha)^2}$, und somit hat man letztere Gleichung in folgende umzuformen:

Digitized by Google

$$-\frac{(2x-a-\alpha)\,.\,dy-2y\,.\,dx}{(2x-a-\alpha)^2}-\frac{(y_a+y_\alpha)\,.\,dx}{(2x-a-\alpha)^2}=0.$$

Daraus ergibt sich durch Integration

$$-\frac{y}{2x-a-\alpha}+\frac{y_a+y_\alpha}{2\,.\,(2x-a-\alpha)}+E=0$$

oder

$$16)\quad y=2E\,.\,x+\tfrac{1}{2}\,.\,[y_a+y_\alpha-2E\,.\,(a+\alpha)].$$

Erstens. Sind die Werthe von y_a und y_α gegeben, d. h. soll die gesuchte Grade durch die zwei festen Punkte $(a,\ y_a)$ und $(\alpha,\ y_\alpha)$ gehen; so geht Gleichung 16) bezüglich über in

$$17)\quad y_a=2E\,.\,a+\tfrac{1}{2}[y_a+y_\alpha-2E\,.\,(a+\alpha)]$$

und

$$18)\quad y_\alpha=2E\,.\,\alpha+\tfrac{1}{2}\,.\,[y_a+y_\alpha-2E\,.\,(a+\alpha)]$$

und aus jeder dieser beiden Gleichungen folgt $E=\frac{y_\alpha-y_a}{2(\alpha-a)}$, so dass jetzt Gleichung 16) übergeht in

$$19)\quad y=\frac{y_\alpha-y_a}{\alpha-a}\,.\,x+\frac{\alpha\,.\,y_a-a\,.\,y_\alpha}{\alpha-a}.$$

Zweitens. Lässt man aber die gesuchte Gerade durch die zwei festen Punkte $(n,\ m)$ und $(k,\ h)$ gehen, wobei also die Werthe von y_a und y_α nicht gegeben sind; so geht Gleichung 16) bezüglich über in

$$20)\quad m=2E\,.\,n+\tfrac{1}{2}[y_a+y_\alpha-2E\,.\,(a+\alpha)]$$

und

$$21)\quad h=2E\,.\,k+\tfrac{1}{2}\,.\,[y_a+y_\alpha-2E\,.\,(a+\alpha)].$$

Daraus folgt $E=\frac{1}{2}\,.\,\frac{m-h}{n-k}$, und $y_a+y_\alpha=\frac{2nh-2mk}{n-k}+\frac{m-h}{n-k}\,.\,(a+\alpha)$ und Gleichung 16) geht über in

$$22)\quad y=\frac{m-h}{n-k}\,.\,x+\frac{nh-mk}{n-k},$$

aus welcher Gleichung sich geradezu die Werthe von y_a und y_α ergeben, wenn man bezüglich a oder α an die Stelle des x einsetzt.

Uebrigens ist unter allen Umständen $\delta^2 U=2\,.\,\delta y^2$; und somit findet unter allen Umständen ein primäres Kleinstes statt.

Aufgabe 91.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 234. §. 57. u. s. w.).

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Kurve. Man zieht in ihrem zu einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkte eine Berührende. Von zwei zu den festen Abscissen a und α gehörigen Punkten der ge-

Digitized by Google

suchten Kurve fällt man Perpendikel auf diese Berührende. Welche Kurve hat aber in dem zu der gerade genommenen Abscisse x gehörigen Punkte die Eigenschaft, dass das Produkt beider Perpendikel grösser oder kleiner wird, als bei den zu der nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann?

Die Gleichung irgend einer geraden Linie sei

$$\text{I)}\quad \mathfrak{A} \,.\, x' + \mathfrak{B} \,.\, y' + \mathfrak{C} = 0,$$

so ist bekanntlich die senkrechte Entfernung eines Punktes $(a,\ b)$ von dieser Linie gegeben durch

$$\text{II)}\quad \frac{\mathfrak{A} \,.\, a + \mathfrak{B} \,.\, b + \mathfrak{C}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}}.$$

Die nach Belieben gewählte Abscisse (Taf. III. Fig. 10.) sei $OQ = x$ und die zugehörige Berührende sei SV; so ist deren Gleichung bekanntlich

$$y' - y = (x' - x) \,.\, p,$$

oder

$$\text{III)}\quad p \,.\, x' - y' + y - p \,.\, x = 0.$$

Die erste feste Abscisse sei $OP = a$; so ist $Ps = y_a$; und die Länge des von s auf SV gefällten Perpendikels ergibt sich nach Formel II., d. h. es ist

$$\text{IV)}\quad sS = \frac{a \,.\, p - y_a + y - px}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{(a - x) \,.\, p - y_a + y}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Die zweite feste Abscisse sei $OR = \alpha$, so ist $Rv = y_\alpha$; und für die Länge des Perpendikels vV ergibt sich auf ähnliche Weise

$$\text{V)}\quad vV = \frac{(\alpha - x) \,.\, p - y_\alpha + y}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Das im Ausdrucke IV. und V. vorkommende Radikal hat entweder jedesmal seine positive oder jedesmal seine negative Bedeutung, und das hier in Rede stehende Produkt ist

$$\text{VI)}\quad U = \frac{[(a - x) \,.\, p - y_a + y] \,.\, [(\alpha - x) \,.\, p - y_\alpha + y]}{1 + p^2}.$$

Unter den verschiedenen Fällen welche hier aufgestellt werden können, soll folgender besonders hervorgehoben werden:

Man soll die gesuchte Kurve nur aus denen in jedem Punkte einander nächstanliegenden herauswählen, bei welchen allen die Ordinaten y_a und y_α denselben (gegebenen oder nicht gegebenen) Werth haben; und welche alle den zu der gerade genommenen Abscisse x gehörigen Berührungspunkt mit einander gemein haben. Hier ist $\delta y = 0$, $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, u. s. w. (die nöthige Erklärung steht gleich im Anfange des dritten Falles der 89sten Aufgabe). Durch Variiren bekommt man

Digitized by Google

VII) $\delta U = \frac{1}{(1+p^2)^2} \cdot \{[2 \cdot (a-x)\ (\alpha-x) \cdot p + (a+\alpha-2x) \cdot y$
$- (a-x) \cdot y - (\alpha-x) \cdot y_\alpha] \cdot (1+p^2)$
$- 2p \cdot [(a-x) \cdot p - y_a + y] \cdot [(\alpha-x) \cdot p - y_\alpha + y]\} \cdot \frac{d\delta y}{dx}.$

Daraus folgt die Gleichung

VIII) $[2 \cdot (a-x) \cdot (\alpha-x) \cdot p + (a+\alpha-2x) \cdot y - (a-x) \cdot y_\alpha$
$- (\alpha-x) \cdot y_a] \cdot (1+p^2)$
$- 2p \cdot [(a-x) \cdot p - y_a + y] \cdot [(\alpha-x) \cdot p - y_\alpha + y] = 0.$

Um diese Gleichung zu integriren, multiplicire man sie vorerst mit $\frac{dp}{(1+p^2)^2}$; und es ist

Digitized by Google

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}[2\cdot(a-x)\cdot(a-x)\cdot p+(a+a-2x)\cdot y-(a-x)\cdot y_a-(a-x)\cdot y_a]\cdot(1+p^2)\cdot dp\\ -2p[(a-x)\cdot p-y_a+y]\cdot[(a-x)\cdot p-y_a+y]\cdot dp\end{array}\right\}}{(1+p^2)^2}=0.$$

Da $dy = p \,.\, dx$ ist, so verschwindet folgender Ausdruck

$$[2y+(a+a-2x)\,.\,p-y_a-y_a]\,.\,(1+p^2)\,.\,dy$$
$$-[2y+(a+a-2x)\,.\,p-y_a-y_a]\,.\,(1+p^2)\,.\,p\,.\,dx$$

jedenfalls, und man kann ihn zum Zähler des letzten Bruches addiren, ohne, dass er sich ändert. Es ist also auch vollkommen genau

Digitized by Google

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}[2\cdot(a-x)\,(a-x)\cdot p+(a+a-2x)\cdot y-(a-x)\cdot y_a-(a-x)\cdot y_a]\cdot(1+p^2)\cdot dp\\ -2y[(a-x)\cdot p-y_a+y]\cdot[(a-x)\cdot p-y_a+y]\cdot dp\\ +[2y+(a+a-2x)\cdot p-y_a-y_a]\cdot(1+p^2)\cdot dy\\ -[2y+(a+a-2x)\cdot p-y_a-y_a]\cdot(1+p^2)\cdot p\cdot dx\end{array}\right\}}{(1+p^2)^2}=0.$$

Diese Gleichung lässt sich geradezu integriren, und man bekommt

$$\text{IX)}\quad \frac{[(a-x)\cdot p-y_a+y]\cdot[(a-x)\cdot p-y_a+y]}{1+p^2}=A$$

oder

$$\text{X)}\quad [(a-x)\cdot p-y_a+y]\cdot[(a-x)\cdot p-y_a+y]=A\cdot(1+p^2).$$

Digitized by Google

Setzt man nun $A \cdot (1+p^2)$ statt des gleichbedeutenden Ausdrucks in Gleichung VIII. ein, so bekommt man

$$[2(a-x)\ (\alpha-x) \cdot p + (a+\alpha-2x) \cdot y - (a-x) \cdot y_\alpha - (\alpha-x) \cdot y_a] \cdot (1+p^2) - 2A \cdot p \cdot (1+p^2) = 0$$

oder

$$2[(a-x)\ (\alpha-x) - A] \cdot p + (a+\alpha-2x) \cdot y - (a-x) \cdot y_\alpha - (\alpha-x) \cdot y_a = 0.$$

Diese Gleichung wird integrabel durch den Multiplicator $\frac{1}{2[(a-x)\ (\alpha-x)-A]^{\frac{1}{2}}}$. Dadurch geht letztere Gleichung zunächst über in

$$\frac{2[(a-x)\ (\alpha-x)-A] \cdot dy - (2x-a-\alpha) \cdot y \cdot dx}{2[(a-x)\ (\alpha-x)-A]^{\frac{1}{2}}} - \frac{[(a-x) \cdot y_\alpha + (\alpha-x) \cdot y_a] \cdot dx}{2[(a-x) \cdot (\alpha-x)-A]^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich geradezu integriren und es ergibt sich

$$\frac{y}{\sqrt{(a-x)\ (\alpha-x)-A}} + \frac{(\alpha-a) \cdot [(a-x) \cdot y_\alpha - (\alpha-x) \cdot y_a] - 2A \cdot (y_a+y_\alpha)}{[4A+(\alpha-a)^2] \cdot \sqrt{(a-x)\ (\alpha-x)-A}} = B$$

oder

$$\text{XI)}\quad [4A+(\alpha-a)^2] \cdot y + (\alpha-a) \cdot [(a-x) \cdot y_\alpha - (\alpha-x) \cdot y_a] - 2A \cdot (y_a+y_\alpha) = [4A+(\alpha-a)^2] \cdot B \cdot \sqrt{(a-x)\ (\alpha-x)-A}.$$

Dieses soll die Integralgleichung zu Gleichung VIII. sein. Da aber Gleichung VIII. nur eine Differentialgleichung der ersten Ordnung ist, so ist in Gleichung XI. eine Konstante zu viel eingegangen. Man stelle also aus Gleichung XI. für y und für p die Ausdrücke her, substituire sie in VIII., und bestimme dann A durch B, oder B durch A; jenachdem das eine oder das andere am bequemsten ist. (In dieser Hinsicht vergleiche man Aufgabe 67) oder 68) oder 71) erste Auflösung erster Fall).

Sind die Werthe von y_a und y_α nicht gegeben, so kann man die hier gefundene Kurve noch drei Bedingungen unterwerfen, weil ausser y_a und y_α auch noch eine der Konstanten A oder B zu bestimmen ist.

Sind aber die Werthe von y_a und y_α gegeben, so kann man die hier gefundene Kurve nur einer einzigen Bedingung unterwerfen.

(Man vergleiche den dritten Fall der 89sten Aufgabe).

Digitized by Google

Aufgabe 94.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 234. §. 57. u. s. w.).

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Kurve. Man legt in die zu zwei festen Abscissen gehörigen Punkte die Krümmungskreise, und zieht durch deren Mittelpunkte zwei mit einander parallele Graden. Man legt aber auch in den zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt der gesuchten Kurve den Krümmungskreis, und fällt von dessen Mittelpunkte Perpendikel auf die beiden obgenannten parallelen Graden. Beide Perpendikel fallen aber ganz in einander, und unterscheiden sich nur durch ihre Grösse. Wenn nun der zu der gerade genommenen Abscisse x gehörige Punkt der gesuchten Kurve die Eigenschaft hat, dass das Produkt der beiden in Rede stehenden Perpendikel grösser oder kleiner ist, als bei den zu der nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann: welche Kurve wird gesucht?

Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe durchaus nicht, wenn man (Taf. III. Fig. 12.) die Coordinaten der gesuchten Kurve so annimmt, dass die Abscissenaxe parallel wird mit den (durch die zu den festen Abscissen gehörigen Krümmungsmittelpunkte gezogenen) zwei parallelen Graden. Der zur ersten festen Abscisse gehörige Krümmungsmittelpunkt sei K, und der zur zweiten festen Abscisse gehörige Krümmungsmittelpunkt sei G. Die in der Aufgabe besagten parallelen Graden sind also EF und BC. Man gebe nun der Abscissenaxe die Lage OX parallel mit BC, und der Ordinatenaxe die Lage OY senkrecht auf OX. Der ersten festen Abscisse entspreche der Punkt P, und der zweiten festen Abscisse entspreche der Punkt R. Die nach Willkür genommene Abscisse sei OQ und der dazu gehörige Krümmungsmittelpunkt sei H. Die in der Aufgabe besagten zwei in eine einzige Grade fallenden Perpendikel sind also HI und HL; und das in Rede stehende Produkt ist

$$\text{I)}\quad U = HL \,.\, HI$$

oder

$$\text{II)}\quad U = (WK - MH) \,.\, (NG - MH).$$

Setzt man $OQ = x$ und $QT = y$, so ist $MH = y + \frac{1+p^2}{q}$; setzt man $OP = a$, so ist $WK = y_a + \frac{1+p_a{}^2}{q_a}$; und setzt man $OR = a$, so ist $NG = y_a + \frac{1+p_a{}^2}{q_a}$. Gleichung II. geht also über in

$$\text{III)}\quad U = \left[\left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)_a - \left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)\right] \cdot \left[\left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)_a - \left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)\right].$$

Variirt man nun, so ergibt sich

Digitized by Google

$$\text{IV)}\quad \partial U = [(y+\frac{1+p^2}{q})_\alpha - (y+\frac{1+p^2}{q})]\cdot\frac{d^2\partial y}{dx^2}\cdot\frac{1+p^2}{q^2} - [(y+\frac{1+p^2}{q})_\alpha - (y+\frac{1+p^2}{q})]\cdot(\partial y+\frac{2p}{q}\cdot\frac{d\partial y}{dx}) +$$

$$+ [(y+\frac{1+p^2}{q})_\alpha - (y+\frac{1+p^2}{q})]\cdot(\partial y+\frac{2p}{q}\cdot\frac{d\partial y}{dx}) - [(y+\frac{1+p^2}{q})_\alpha - (y+\frac{1+p^2}{q})]\cdot\frac{d^2\partial y}{dx^2}\cdot\frac{1+p^2}{q^2} +$$

$$+ [2y+\frac{2\cdot(1+p^2)}{q} - (y+\frac{1+p^2}{q})_\alpha - (y+\frac{1+p^2}{q})_\alpha]\cdot\frac{d^2\partial y}{dx^2}\cdot\frac{1+p^2}{q^2}.$$

Soll nun die gesuchte Kurve aus allen möglichen in jedem Punkte einander unmittelbar anliegenden herausgewählt werden, so müssen folgende drei Gleichungen

$$\text{V)}\quad (y+\frac{1+p^2}{q})_\alpha - (y+\frac{1+p^2}{q}) = 0$$

$$\text{VI)}\quad (y+\frac{1+p^2}{q})_\alpha - (y+\frac{1+p^2}{q}) = 0$$

$$\text{VII)}\quad 2y+\frac{2\cdot(1+p^2)}{q} - (y+\frac{1+p^2}{q})_\alpha - (y+\frac{1+p^2}{q})_\alpha = 0$$

Digitized by Google

gleichzeitig neben einander bestehen; dieses ist aber nur möglich wenn

$$\text{VIII)}\quad (y+\tfrac{1+p^2}{q})_a=(y+\tfrac{1+p^2}{q})_\alpha$$

stattfindet. Man setze zur Abkürzung g anstatt $(y+\frac{1+p^2}{q})_a$ und anstatt $(y+\frac{1+p^2}{q})_\alpha$, und jede der drei obigen Gleichungen geht über in

$$y+\frac{1+p^2}{q}=g.$$

Daraus folgt

$$\frac{q}{1+p^2}+\frac{1}{y-g}=0;$$

und wenn man auf beiden Seiten mit $p=\frac{dy}{dx}$ multiplicirt, so bekommt man

$$\frac{p\,.\,dp}{1+p^2}+\frac{dy}{y-g}=0;$$

daraus folgt

$$(y-g)\,.\,\sqrt{1+p^2}=h,$$

und daraus folgt weiter

$$dx=\frac{(y-g)\,.\,dy}{\sqrt{h^2-(y-g)^2}}.$$

Integrirt man abermals, so ergibt sich

$$x+k=-\sqrt{h^2-(y-g)^2},$$

oder

$$\text{X)}\quad (y-g)^2+(x+k)^2=h^2,$$

so dass der Kreis die gesuchte Kurve ist, welcher insofern die Aufgabe löst, als er in jedem seiner Punkte auch sein eigener Krümmungskreis ist. Bei Bestimmung der Konstanten muss aber Gleichung VIII. mitbenutzt werden. Allein Gleichung VIII. geht über in $g=g$, woraus nichts gefolgert werden kann; und sonach erkennt man, dass die gesuchte Kurve noch drei verschiedenen Nebenbedingungen unterworfen werden kann.

Da die hier gesuchte Kurve ein Kreis ist, so fallen alle Krümmungsmittelpunkte der gesuchten Kurve in einen einzigen Punkt zusammen. Es fallen also die drei Punkte K, H und G in einen einzigen Punkt, und die zwei Linien BC und EF in eine einzige Linie zusammen. Es ist also $U'=0$ unabhängig von den zwei festen Werthen a und α, und unabhängig von dem willkürlichen Werthe des x.

Das Prüfungsmittel ist noch herzustellen.

Digitized by Google

Nachdem ich schon so manche Aufgabe durchgeführt habe, lege ich noch folgende den Lesern des Archivs zur Uebung vor.

Aufgabe 92.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Kurve. Sie wird in den zu den festen Abscissen a und α gehörigen Punkten, so wie auch in dem zu einer nach Belieben genommenen Abscisse x gehörigen Punkte berührt. Diese drei berührenden Graden schliessen ein Dreieck ein. Wenn nun der zu der gerade genommenen Abscisse x gehörige Punkt der gesuchten Kurve die Eigenschaft hat, dass besagtes Dreieck einen grössern oder kleinern Flächeninhalt hat als bei den zu der nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann: welche Kurve wird gesucht?

Die gesuchte Kuve (Taf. III. Fig. 11.) sei MVN; die festen Abscissen a und α seien OP und OQ, und die nach Belieben gewählte Abscisse x sei OR. Die drei in Rede stehenden Berührenden sind also MT, NT und KH. Das auf vorgeschriebene Weise begränzte Dreieck ist KHT. Dessen Inhalt ist

$$U = \text{Trapez } GKTL + \text{Trapez } TLFH - \text{Trapez } GKHF$$

oder

$$U = \tfrac{1}{2} \cdot (GK + TL) \cdot (OL - OG) + \tfrac{1}{2}(TL + HF) \cdot (OF - OL) - \tfrac{1}{2} \cdot (GK + HF) \cdot (OF - OG)$$

oder

$$\text{I)}\quad U = \tfrac{1}{2} \cdot [GK \cdot (OL - OF) + TL \cdot (OF - OG) + HF \cdot (OG - OL)].$$

Ist nun $OR = x$ und $RV = y$, so ist die Gleichung der in V berührenden Geraden bekanntlich

$$y' - y = (x' - x) \cdot \frac{dy}{dx}$$

oder

$$\text{II)}\quad y' = \frac{dy}{dx} \cdot x' + y - \frac{dy}{dx} \cdot x.$$

Ist $OP = a$ und $PM = y_a$, so ist die Gleichung der in M berührenden Graden

$$\text{III)}\quad y'' = \left(\frac{dy}{dx}\right)_a \cdot x'' + y_a - \left(\frac{dy}{dx}\right)_a \cdot a.$$

Ist ferner $OQ = \alpha$ und $QN = y_\alpha$, so ist die Gleichung der in N berührenden Graden

$$\text{IV)}\quad y''' = \left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha \cdot x''' + y_\alpha - \left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha \cdot \alpha.$$

Digitized by Google

Da, wo die Berührenden KH und MT einander schneiden, ist $x' = x''$ und $y' = y''$; und aus Gleichung II. und III. folgt

$$V)\quad OG = x' = x'' = \frac{x \cdot p - a \cdot p_a - y + y_a}{p - p_a},$$

$$VI)\quad GK = y' = y'' = \frac{(x-a) \cdot p \cdot p_a + y_a \cdot p - y \cdot p_a}{p - p_a}.$$

Da wo die Berührenden NT und KH einander schneiden, ist $x' = x'''$ und $y' = y'''$, und aus den Gleichungen II. und IV. folgt

$$VII)\quad OF = x' = x''' = \frac{x \cdot p - \alpha \cdot p_\alpha - y + y_\alpha}{p - p_\alpha}$$

$$VIII)\quad FH = y' = y''' = \frac{(x-\alpha) \cdot p \cdot p_\alpha + y_\alpha \cdot p - y p_\alpha}{p - p_\alpha}.$$

Da, wo die Berührenden MT und NT einander schneiden ist $x'' = x'''$ und $y'' = y'''$; und aus den Gleichungen III. und IV. folgt

$$IX)\quad OL = x'' = x''' = \frac{a \cdot p_a - \alpha \cdot p_\alpha - y_a + y_\alpha}{p_a - p_\alpha}$$

$$X)\quad LT = y'' = y''' = \frac{(a-\alpha) \cdot p_a \cdot p_\alpha + y_\alpha \cdot p_a - y_a \cdot p_\alpha}{p_a - p_\alpha}.$$

Diese für OG, OF, OL, GK, LT und FH gefundenen Ausdrücke hat man jetzt in Gleichung I. einzuführen und dann weiter zu verfahren, wie bekannt.

Aufgabe 93.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Kurve. Sie wird in den zu den festen Abscissen a und α gehörigen Punkten berührt. Von dem zu einer nach Willkür genommenen Abscisse x gehörigen Punkte besagter Kurve fällt man Perpendikel auf die beiden Berührenden. Die beiden Perpendikel und die beiden Berührenden schliessen ein Viereck ein, durch dessen vier Punkte, weil die zwei entgegengesetzten Winkel jedesmal zusammen zwei Rechte betragen, man einen Kreis legen kann. Wenn nun der zu der gerade nach Willkür genommenen Abscisse x gehörige Punkt die Eigenschaft hat, dass besagtes Viereck einen grössern oder kleinern Flächeninhalt hat, als bei den zur nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann: welche Kurve wird gesucht?

Die gesuchte Kurve (Taf. III. Fig. 13) sei MVN, die festen Abscissen a und α seien OP und OQ, und die nach Willkür gewählte Abscisse x sei OR. Die zwei in Rede stehenden Berührenden sind MT und NT; der zur Abscisse x gehörige Punkt der Kurve ist V; die zwei in Rede stehenden Perpendikel sind also VW und VS; das auf vorgeschriebene Weise erzeugte Viereck ist also $VWTS$. Dessen Inhalt ist

Digitized by Google

$U =$ Trapez $WKLT +$ Trapez $LTSH -$ Trapez $VWKR$
$-$ Trapez $VSHR$

oder

$$U = \tfrac{1}{2} \cdot (WK + TL) \cdot (OL - OK) + \tfrac{1}{2} \cdot (TL + SH) \cdot (OH - OL)$$
$$- \tfrac{1}{2}(WK + VR) \cdot (OR - OK) - \tfrac{1}{2}(VR + SH) \cdot (OH - OR)$$

oder

I) $U = \tfrac{1}{2}[(WK - SH) \cdot (OL - OR) + (VR - TL)\ (OK - OH)]$.

Ist $OP = a$ und $PM = y_a$, so ist die Gleichung der in M berührenden Graden MT

$$\text{II)}\quad y' = \left(\frac{dy}{dx}\right)_a \cdot x' + y_a - \left(\frac{dy}{dx}\right)_a \cdot a.$$

Da nun $OR = x$ und $RV = y$, so ist die Gleichung der durch den Punkt V gehenden und auf MT senkrechten Geraden VW folgende:

$$\text{III)}\quad y'' = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_a} \cdot x'' + y + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_a} \cdot x.$$

Ist $OQ = \alpha$ und $Q\Lambda = y_\alpha$, so ist die Gleichung der in N berührenden Geraden NT

$$\text{IV)}\quad y''' = \left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha \cdot x''' + y_\alpha - \left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha \cdot \alpha,$$

und die Gleichung der durch V gehenden und auf NT senkrechten Graden VS ist folgende:

$$\text{V)}\quad y'''' = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha} \cdot x'''' + y + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha} \cdot x.$$

Da wo die Linien MT und VW einander schneiden ist $x' = x''$ und $y' = y''$; und aus den Gleichungen II. und III. folgt

$$\text{VI)}\quad OK = x' = x'' = \frac{a \cdot p_a^2 + x + (y - y_a) \cdot p_a}{1 + p_a^2},$$

$$\text{VII)}\quad KW = y' = y'' = \frac{(x - a) \cdot p_a + y_a + y \cdot p_a^2}{1 + p_a^2}.$$

Da wo die Linien NT und VS einander schneiden ist $x''' = x''''$ und $y''' = y''''$; und aus den Gleichungen IV. und V. folgt

$$\text{VIII)}\quad OH = x''' = x'''' = \frac{\alpha \cdot p_\alpha^2 + x + (y - y_\alpha) \cdot p_\alpha}{1 + p_\alpha^2}$$

$$\text{IX)}\quad HS = y''' = y'''' = \frac{(x - \alpha) \cdot p_\alpha + y_\alpha + y \cdot p_\alpha^2}{1 + p_\alpha^2}.$$

Da wo die Berührenden MT und NT einander schneiden ist $x' = x'''$ und $y' = y'''$; und aus der Gleichung II. und IV. folgt

$$\text{X)}\quad OL = x' = x''' = \frac{a \cdot p_a - \alpha \cdot p_\alpha - y_a + y_\alpha}{p_a - p_\alpha}$$

XI) $LT = y' = y'' = \frac{(a-\alpha)\cdot p_a \cdot p_\alpha + y_a \cdot p_a - y_\alpha \cdot p_\alpha}{p_a - p_\alpha}$.

Da wo die Linien VW und VS einander schneiden, ist $x'' = x'''$ und $y'' = y'''$; und aus Gleichung III. und V folgt

XII) $OR = x'' = x''' = x$

XIII) $RV = y'' = y''' = y$.

Diese für OK, OR, OL, OH, KW, RV, LT und HS gefundenen Ausdrücke hat man jetzt in Gleichung I. einzuführen und dann weiter zu verfahren, wie bekannt ist.

Aufgabe 95.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Kurve, und legt in die zu den festen Abscissen a und α gehörigen Punkte die Krümmungskreise. Man legt aber auch in den zu der nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt den Krümmungskreis. Man verbindet die zu den Abscissen a und α gehörigen Krümmungsmittelpunkte mit dem zu der Abscisse x gehörigen Krümmungsmittelpunkte. Wenn nun der zu der gerade genommenen Abscisse x gehörige Punkt der gesuchten Kurve die Eigenschaft hat, dass die Summe der Quadrate beider Verbindungslinien grösser oder kleiner wird, als bei den zur nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann: welche Kurve wird gesucht?

Es seien (Taf. III. Fig. 14.) die festen Abscissen $OP = a$ und $OR = \alpha$; und die nach Willkür genommene Abscisse sei $OQ = x$. Der zu $OP = a$ gehörige Krümmungsmittelpunkt ist K, der zu $OR = \alpha$ gehörige Krümmungsmittelpunkt ist G, und der zu $OQ = x$ gehörige Krümmungsmittelpunkt ist H. Die beiden Verbindungslinien sind KH und GH. Die Aufgabe verlangt also: es soll

I) $U = \overline{KH}^2 + \overline{GH}^2$

ein primäres Grösstes oder Kleinstes werden. Statt I. kann man auch setzen

II) $U = [(HM - KW)^2 + (OM - OW)^2] + [(HM - GN)^2 + (ON - OM)^2]$

oder

III) $U = \overline{OW}^2 + 2 \cdot \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 + \overline{KW}^2 + 2 \cdot \overline{HM}^2 + \overline{GN}^2 - 2 \cdot OM \cdot (OW + ON) - 2 \cdot HM \cdot (KW + GN)$.

Hier ist $OM = x - \frac{(1+p^2)\cdot p}{q}$, und $MH = y + \frac{1+p^2}{q}$; ferner

Digitized by Google

$OW = a - \frac{(1+p_a^2)\cdot p_a}{q_a}$, und $WK = y_a + \frac{1+p_a^2}{q_a}$; und ebenso ist $ON = \alpha - \frac{(1+p_\alpha^2)\cdot p_\alpha}{q_\alpha}$, und $NG = y_\alpha + \frac{1+p_\alpha^2}{q_\alpha}$.

Diese Ausdrücke hat man in III. einzusetzen, und dann zu verfahren, wie gewöhnlich.

Aufgabe 96.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Kurve. Man legt in die zu den festen Abscissen a und α gehörigen Punkte die Krümmungskreise. Man legt aber auch in den zu der nach Willkür gewählten Abscisse x gehörigen Punkt den Krümmungskreis. Man verbindet die drei Krümmungsmittelpunkte mit einander. Dadurch entsteht ein Dreieck. Wenn nun der zu der gerade genommenen Abscisse x gehörige Punkt die Eigenschaft hat, dass des besagten Dreiecks Inhalt grösser oder kleiner ist als bei den zur nämlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann: welche Kurve wird gesucht?

Hier soll (Taf. III. Fig. 14.)

I) $U =$ Dreieck KHG

ein primäres Grösstes oder Kleinstes werden. Statt I. kann man auch setzen

II) $U =$ Trapez $WKHM +$ Trapez $HMNG -$ Trapez $KWNG$

oder

$$U = \tfrac{1}{2}(KW+HM)\,.\,(OM-OW) + \tfrac{1}{2}\,.\,(HM+GN)\,(ON-OM) - \tfrac{1}{2}\,.\,(KW+GN)\,.\,(ON-OW)$$

oder

III) $$U = \tfrac{1}{2}\,.\,[KW\,.\,(OM-ON) + HM\,.\,(ON-OW) + GN\,.\,(OW-OM)].$$

Hier hat man die schon in voriger Aufgabe für OW, WK, OM, MH, ON, NG aufgestellten Ausdrücke einzuführen und dann zu verfahren wie gewöhnlich.

Digitized by Google

XX.

Neue Auflösung der die Bestimmung der Anzahl aller ganzen Zahlen, welche kleiner als eine gegebene Zahl und zu derselben relative Primzahlen sind, betreffenden Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

1.

Die erste Auflösung der oben genannten, für die Zahlenlehre in mehrfacher Beziehung wichtigen Aufgabe ist von Euler in den Nov. Comm. Acad. Petrop. T. VIII. p. 74. gegeben, und in den Nov. Act. Petrop. T. VIII. p. 17. wiederholt worden, worüber man auch Essai sur la théorie des nombres, par Legendre. Seconde édition. Paris. 1808. p. 6. nachsehen kann. Eine sehr schöne und höchst einfache Auflösung hat Gauss in den Disq. arithm. Lipsiae. 1801. p. 30. gegeben, mit welcher die von Cauchy in den Exercices d'Analyse et de Physique mathématique. Tome deuxième. Paris. 1841. p. 9. gegebene Auflösung im Wesentlichen übereinstimmt. Eine aus An elementary investigation of the theory of numbers, with its application to the indeterminate and diophantine analysis, the analytical and geometrical division of the circle and several other curious algebraical and arithmetical problems, by P. Barlow. London. 1811. 8. entlehnte Auflösung, die mit Eulers Auflösung Aehnlichkeit hat, findet man in dem Lehrbuche der Mathematik für Gymnasien und Realschulen von J. H. T. Müller. Erster Theil. Halle. 1838. S. 246. Eine von A. v. Ettingshausen in der Zeitschrift für Physik und Mathematik. Herausgegeben von A. Baumgartner und A. v. Ettingshausen, gegebene Auflösung, welche nach Müller's Urtheil a. a. O. jedoch nicht scharf genug zu sein scheint, ist mir bis jetzt unbekannt geblieben.

Die Auflösung von Euler lässt sich, wie es mir scheint, nur mit Weitläufigkeit zu völliger Allgemeinheit erheben, und ein gleiches Urtheil darf ziemlich mit demselben Rechte über die von Barlow gegebene Auflösung gefällt werden. Die schöne Auflösung von Gauss, mit welcher, wie schon erwähnt worden ist, Cauchy's Auflösung im Wesentlichen ganz übereinstimmt, setzt die Theorie der Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten

Digitized by Google

Grades zwischen zwei unbekannten Grössen, oder die Aufgabe: alle Zahlen zu finden, welche durch gegebene Zahlen dividirt, gegebene Reste übrig lassen, als bekannt voraus. Diese Gründe haben mich bewogen, eine neue Auflösung zu suchen, welche ich im Folgenden mittheile, weil sie auf sehr einfachen Gründen beruhet, und mir, wenn sie sich auch nicht als ganz kurz erweisen sollte, doch einen Blick in die eigentliche Natur dieses Gegenstandes zu verstatten scheint, wozu noch kommt, dass mir, des nächstfolgenden Aufsatzes wegen, sehr viel daran liegen musste, im Besitz einer von der Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades zwischen zwei unbekannten Grössen ganz unabhängigen Auflösung der in Rede stehenden Aufgabe zu sein.

Dass alle im Folgenden gebrauchten Symbole positive ganze Zahlen bezeichnen, braucht wohl kaum noch besonders bemerkt zu werden.

2.

Lehrsatz. Wenn μ und k relative Primzahlen sind, sind immer auch $nk+\mu$ und k relative Primzahlen.

Beweis. Wären $nk+\mu$ und k nicht relative Primzahlen, und hätten also einen von der Einheit verschiedenen gemeinschaftlichen Factor p, so sei

$$nk+\mu = pq,\ k = pq'.$$

Dann wäre $nk = npq'$, und folglich

$$\mu = pq - nk = pq - npq' = p(q - nq'),$$

so dass also auch μ den Factor p hätte, und folglich mit k nicht relative Primzahl wäre, wie doch vorausgesetzt wurde. Also sind $nk+\mu$ und k relative Primzahlen, wie bewiesen werden sollte.

3.

Lehrsatz. Wenn $nk+\mu$ und k relative Primzahlen sind, so sind immer auch μ und k relative Primzahlen.

Beweis. Wären μ und k nicht relative Primzahlen, und hätten also einen von der Einheit verschiedenen gemeinschaftlichen Factor p, so sei

$$\mu = pq,\ k = pq'.$$

Dann wäre $nk = npq'$, und folglich

$$nk+\mu = npq' + pq = p(nq' + q),$$

so dass also auch $nk+\mu$ den Factor p hätte, und folglich mit k nicht relative Primzahl wäre, wie doch angenommen wurde. Also sind μ und k relative Primzahlen, wie bewiesen werden sollte.

4.

Zusatz. Wenn μ und k keine relativen Primzahlen sind, so sind auch $nk+\mu$ und k keine relativen Primzahlen; und umgekehrt: wenn $nk+\mu$ und k keine relativen Primzahlen sind, so sind auch μ und k keine relativen Primzahlen.

Digitized by Google

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge aus den beiden vorhergehenden Sätzen.

5.

Wir wollen nun annehmen, dass

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ a_{\varphi(k)}$$

die sämmtlichen Glieder der Reihe

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ k$$

sind, welche mit k relative Primzahlen sind, wo also $\varphi(k)$ die Anzahl aller der Zahlen bezeichnet, welche mit k relative Primzahlen und kleiner als k sind. Bilden wir uns dann die Reihe

$$nk+1,\ nk+2,\ nk+3,\ \ldots\ nk+(k-1),\ nk+k;$$

d. i. die Reihe

$$nk+1,\ nk+2\ \ nk+3,\ \ldots\ (n+1)k-1,\ (n+1)k;$$

so sind nach den vorher bewiesenen Sätzen die sämmtlichen Glieder

$$nk+a_1,\ nk+a_2,\ nk+a_3,\ \ldots\ nk+a_{\varphi(k)}$$

dieser Reihe, aber auch nur diese Glieder der in Rede stehenden Reihe, mit k relative Primzahlen, und in den beiden Reihen

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ k$$

und

$$nk+1,\ nk+2,\ nk+3,\ nk+4,\ \ldots\ (n+1)k$$

kommt also immer eine gleiche Anzahl von Gliedern, in jeder Reihe nämlich $\varphi(k)$ Glieder, vor, welche mit k relative Primzahlen sind.

6.

Hat man jetzt die Reihe

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ pk;$$

so kann man diese Reihe auf folgende Art in p Abtheilungen oder Gruppen, eine jede mit k Gliedern, abtheilen:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ k;$$
$$k+1,\ k+2,\ k+3,\ k+4,\ \ldots\ 2k;$$
$$2k+1,\ 2k+2,\ 2k+3,\ 2k+4,\ \ldots\ 3k;$$
$$3k+1,\ 3k+2,\ 3k+3,\ 3k+4,\ \ldots\ 4k;$$

u. s. w.

$$(p-1)k+1,\ (p-1)k+2,\ (p-1)k+3,\ \ldots\ pk;$$

und übersieht hieraus mit Hülfe der in 5. angestellten Betrachtungen, dass $p\varphi(k)$ die Anzahl der sämmtlichen in der Reihe

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ pk$$

vorkommenden Glieder ist, welche mit k relative Primzahlen sind.

Digitized by Google

7.

Indem wir von jetzt an immer annehmen, dass das in der vorhergehenden Nummer gebrauchte Symbol p eine absolute von der Einheit verschiedene Primzahl bezeichne, wollen wir nun zuerst den Fall betrachten, wenn die Primzahl p ein Factor der Zahl k ist.

Unter dieser Voraussetzung lässt sich behaupten, dass jede Zahl μ, welche mit k relative Primzahl ist, auch mit pk relative Primzahl ist, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann.

Sollten nämlich μ und pk nicht relative Primzahlen sein, und also einen von der Einheit verschiedenen gemeinschaftlichen Primfactor haben, so müsste dieser gemeinschaftliche Primfactor, weil nach der Voraussetzung μ und k relative Primzahlen sind, und also keinen gemeinschaftlichen von der Einheit verschiedenen Primfactor haben, nothwendig p sein, und es müsste also μ den Primfactor p haben, welches aber ungereimt ist, da nach der Voraussetzung p auch ein Primfactor von k ist, und doch μ und k relative Primzahlen sein sollen. Also müssen unter der Voraussetzung, dass p ein Primfactor von k ist und μ und k relative Primzahlen sind, jederzeit auch μ und pk relative Primzahlen sein, wie behauptet wurde.

Ferner erhellet auf der Stelle, dass jede Zahl μ welche mit k nicht relative Primzahl ist, auch mit pk nicht relative Primzahl sein kann.

Nach diesen beiden Sätzen ist also, wenn p ein Primfactor von k ist, jedes Glied der Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots . pk,$$

welches mit k relative Primzahl ist, auch mit pk relative Primzahl, und jedes Glied dieser Reihe, welches mit k nicht relative Primzahl ist, ist auch mit pk nicht relative Primzahl. Die sämmtlichen Glieder der Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots . pk,$$

welche mit k relative Primzahlen sind, sind folglich die sämmtlichen Glieder dieser Reihe, welche mit pk relative Primzahlen sind, und da nun nach 6. die Anzahl der sämmtlichen Glieder der in Rede stehenden Reihe, welche mit k relative Primzahlen sind, $p\varphi(k)$ ist, so ist dies auch die Anzahl der sämmtlichen Glieder dieser Reihe, welche mit pk relative Primzahlen sind. Bezeichnen wir also, analog mit $\varphi(k)$, die Anzahl der sämmtlichen relativen Primzahlen zu pk, welche kleiner als pk sind, durch $\varphi(pk)$; so ist in dem Falle, wo die Primzahl p ein Primfactor von k ist, jederzeit

$$\varphi(pk) = p\varphi(k).$$

8.

Ferner wollen wir nun auch den Fall betrachten, wenn die Primzahl p kein Factor von k ist.

Digitized by Google

Weil

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots . a_{q(k)}$$

sämmtlich mit k relative Primzahlen sind und p kein Primfactor von k ist, so hat offenbar keins der Producte

$$pa_1, pa_2, pa_3, pa_4, \ldots pa_{q(k)}$$

einen Primfactor mit k gemein, und alle diese Producte sind also mit k relative Primzahlen, wobei sich, weil die Zahlen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_{q(k)}$$

sämmtlich kleiner als k sind, von selbst versteht, dass die Producte

$$pa_1, pa_2, pa_3, pa_4, \ldots pa_{q(k)}$$

alle in der Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots . pk$$

als Glieder derselben wirklich vorkommen; und eben so versteht sich von selbst, dass keins dieser Produkte mit pk relative Primzahl ist.

Ferner kann leicht gezeigt werden, dass jedes Glied der Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots pk,$$

welches mit k relative Primzahl, dagegen mit pk nicht relative Primzahl ist, ein Glied der Reihe

$$pa_1, pa_2, pa_3, pa_4, \ldots pa_{q(k)}$$

sein muss. Jede Zahl nämlich, welche mit k relative Primzahl ist, also mit k keinen von der Einheit verschiedenen gemeinschaftlichen Primfactor hat, dagegen mit pk nicht relative Primzahl ist, also mit pk einen von der Einheit verschiedenen gemeinschaftlichen Primfactor hat, muss offenbar nothwendig den Primfactor p haben, und wir können daher die in Rede stehende Zahl durch pq bezeichnen. Da nun pq mit k keinen von der Einheit verschiedenen gemeinschaftlichen Primfactor hat, so muss natürlich q mit k relative Primzahl sein. Es ist aber, wenn, wie wir jetzt voraussetzen wollen, pq ein Glied der Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots pk$$

ist, natürlich

$$pq \leqq pk,$$

also $q \leqq k$, oder vielmehr, weil q mit k relative Primzahl ist, $q < k$. Weil nun bekanntlich

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots . a_{q(k)}$$

alle relative Primzahlen zu k unter k sind, so muss, nach dem vorher Bewiesenen, q nothwendig in dieser Reihe, also pq nothwendig in der Reihe

$$pa_1, pa_2, pa_3, pa_4, \ldots . pa_{q(k)},$$

d. h. jedes Glied der Reihe

Digitized by Google

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots pk,$$

welches mit k relative Primzahl, dagegen mit pk nicht relative Primzahl ist, muss in der Reihe

$$pa_1, pa_2, pa_3, pa_4, \ldots pa_{\varphi(k)}$$

als ein Glied derselben vorkommen.

Endlich versteht sich auch von selbst, dass alle Glieder der Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots pk,$$

welche mit k nicht relative Primzahlen sind, auch mit pk nicht relative Primzahlen sind.

Wir wissen also jetzt, unter der Voraussetzung, dass die Primzahl p kein Factor von k ist:

Erstens: dass die Anzahl der sämmtlichen Glieder der Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots pk,$$

welche mit k relative Primzahlen sind, jederzeit

$$p\varphi(k)$$

ist *).

Zweitens: dass die in der Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots pk$$

wirklich vorkommenden Producte

$$pa_1, pa_2, pa_3, pa_4, \ldots pa_{\varphi(k)},$$

deren Anzahl

$$\varphi(k)$$

ist, sämmtlich mit k relative Primzahlen, dagegen mit pk nicht relative Primzahlen sind.

Drittens: dass jedes Glied der Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots pk,$$

welches mit k relative Primzahl, mit pk dagegen nicht relative Primzahl ist, in der Reihe

$$pa_1, pa_2, pa_3, pa_4, \ldots pa_{\varphi(k)}$$

als ein Glied derselben vorkommen muss.

Viertens: dass jedes Glied der Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots pk,$$

welches mit k nicht relative Primzahl ist, auch mit pk nicht relative Primzahl ist.

Hieraus ergiebt sich also ganz unzweideutig und mit völliger Strenge, dass in dem Falle, wenn die von der Einheit verschiedene Primzahl p kein Primfactor von k ist, indem wir immer die früher eingeführten Bezeichnungen auch jetzt beibehalten,

---

*) Dies ist in 6. gezeigt worden, und setzt im Allgemeinen als nothwendige Bedingung nicht voraus, dass p eine Primzahl und kein Factor von k ist, sondern gilt für jedes p und jedes k.

Digitized by Google

$$\varphi(pk) = p\varphi(k) - \varphi(k),$$

d. i.

$$\varphi(pk) = (p-1)\varphi(k)$$

ist.

9.

Wenn also die von der Einheit verschiedene Primzahl p ein Factor von k ist, so ist nach 7. immer

$$\varphi(pk) = p\varphi(k).$$

Wenn dagegen die von der Einheit verschiedene Primzahl p kein Factor von k ist, so ist nach 8. immer

$$\varphi(pk) = (p-1)\varphi(k).$$

Sei nun überhaupt

$$N = p^a N_1,$$

wo p eine von der Einheit verschiedene Primzahl und kein Factor von N_1 sein soll; so erhält man zuvörderst durch successive Anwendung des ersten Theils des vorhergehenden Satzes

$$\begin{aligned}
\varphi(N) &= p\varphi(p^{a-1}N_1) \\
&= p\ p\varphi(p^{a-2}N_1) = p^2\varphi(p^{a-2}N_1) \\
&= p^2 p\varphi(p^{a-3}N_1) = p^3\varphi(p^{a-3}N_1) \\
&= p^3 p\varphi(p^{a-4}N_1) = p^4\varphi(p^{a-4}N_1) \\
&= p^4 p\varphi(p^{a-5}N_1) = p^5\varphi(p^{a-5}N_1)
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$= p^{a-2}p\varphi(pN_1) = p^{a-1}\varphi(pN_1).$$

Weil nun aber nach der Voraussetzung p kein Primfactor von N_1 ist, so ist nach dem zweiten Theile des obigen Satzes

$$\varphi(pN_1) = (p-1)\varphi(N_1),$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\varphi(N) = p^{a-1}(p-1)\varphi(N_1).$$

Setzen wir nun

$$N = p^a p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \ldots p_\lambda^{a_\lambda},$$

wo p, p_1, p_2, p_3, ... p_λ lauter ungleiche von der Einheit verschiedene Primzahlen bezeichnen sollen; so ist nach dem vorher Bewiesenen:

$$\varphi(N) = p^{a-1}(p-1)\varphi(p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \ldots p_\lambda^{a_\lambda}),$$

$$\varphi(p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \ldots p_\lambda^{a_\lambda}) = p_1^{a_1-1}(p_1-1)\varphi(p_2^{a_2} p_3^{a_3} p_4^{a_4} \ldots p_\lambda^{a_\lambda}),$$

$$\varphi(p_2^{a_2} p_3^{a_3} p_4^{a_4} \ldots p_\lambda^{a_\lambda}) = p_2^{a_2-1}(p_2-1)\varphi(p_3^{a_3} p_4^{a_4} p_5^{a_5} \ldots p_\lambda^{a_\lambda}),$$

$$\varphi(p_3^{a_3} p_4^{a_4} p_5^{a_5} \ldots p_\lambda^{a_\lambda}) = p_3^{a_3-1}(p_3-1)\varphi(p_4^{a_4} p_5^{a_5} p_6^{a_6} \ldots p_\lambda^{a_\lambda}),$$

u. s. w.

$$\varphi(p_{\lambda-1}^{a_{\lambda-1}} p_\lambda^{a_\lambda}) = p_{\lambda-1}^{a_{\lambda-1}-1}(p_{\lambda-1}-1)\varphi(p_\lambda^{a_\lambda}),$$

$$\varphi(p_\lambda^{a_\lambda}) = p_\lambda^{a_\lambda-1}(p_\lambda-1);$$

Digitized by Google

und folglich, wenn man die Grössen auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen in einander multiplicirt, und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$\varphi(N) = p^{a-1}(p-1)p_1^{a_1-1}(p_1-1)p_2^{a_2-1}(p_2-1)\ldots p_\lambda^{a_\lambda-1}(p_\lambda-1),$$

oder

$$\varphi(N) = p^{a-1}p_1^{a_1-1}p_2^{a_2-1}\ldots p_\lambda^{a_\lambda-1}(p-1)\,(p_1-1)\,(p_2-1)\ldots(p_\lambda-1),$$

oder

$$\varphi(N) = p^a p_1^{a_1} p_2^{a_2}\ldots p_\lambda^{a_\lambda}\cdot\frac{(p-1)\,(p_1-1)\,(p_2-1)\ldots(p_\lambda-1)}{pp_1p_2\ldots p_\lambda},$$

oder

$$\varphi(N) = p^a p_1^{a_1} p_2^{a_2}\ldots p_\lambda^{a_\lambda}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_\lambda}\right);$$

also, weil

$$N = p^a p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3}\ldots p_\lambda^{a_\lambda}$$

ist,

$$\varphi(N) = N\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_\lambda}\right),$$

welches die bekannte zuerst von Euler gefundene Formel ist, die wir hier auf Beispiele weiter nicht anwenden wollen.

XXI.

Ueber Cauchy's Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades zwischen zwei unbekannten Grössen in ganzen Zahlen.

Von

dem Herausgeber.

1.

In dem Mémoire sur la résolution des équations indéterminées du premier dégré en nombres entiers (Exercices d'Analyse et de Physique mathématique. T. II. Pa-

Digitized by Google

ris. 1841. p. 1.) hat Cauchy eine früher von Libri und Binet gegebene, im Ganzen auf sehr einfachen Betrachtungen beruhende Auflösung der Gleichungen des ersten Grades zwischen zwei unbekannten Grössen in ganzen Zahlen, wie er selbst sagt, zu grösserer Allgemeinheit erhoben, und, wie wir noch hinzufügen wollen, überhaupt mit mehreren wichtigen Zusätzen bereichert. Da es uns scheint, dass diese Auflösung, wenigstens bis zu einer gewissen Gränze, worüber wir uns am Ende dieses Aufsatzes weiter aussprechen werden, wohl verdient, in den mathematischen Elementar-Unterricht aufgenommen zu werden, wenn man sich nämlich, was jetzt wohl vorausgesetzt werden kann, überhaupt nicht mehr scheuet, schon die Schüler der obern Klassen der Gymnasien und anderer höherer Lehranstalten mit den Elementen der Zahlenlehre bekannt zu machen; so halten wir es für zweckmässig, die in Rede stehende schöne Auflösung im Folgenden zu entwickeln, für jetzt jedoch nur so weit, als sich dieselbe nach unserer Meinung zur Aufnahme in den mathematischen Elementar-Unterricht eignet, indem wir uns vorbehalten, in einem spätern Aufsatze auf diesen interessanten Gegenstand zurückzukommen.

2.

Jede Gleichung des ersten Grades zwischen zwei unbekannten Grössen x und y kann man sich offenbar, wenn a, b, c ganze Zahlen bezeichnen, immer unter der Form

$$ax - by = c$$

dargestellt denken. Soll diese Gleichung aber überhaupt in ganzen Zahlen auflösbar sein, so muss augenscheinlich der grösste gemeinschaftliche Theiler von a und b auch nothwendig in c aufgehen, und wir werden also die in Rede stehende Gleichung, indem wir a, b, c durch den grössten gemeinschaftlichen Theiler von a und b dividiren, und die entsprechenden Quotienten durch m, n, k bezeichnen, immer auf die Form

$$mx - ny = k$$

bringen können, wo nun, was man im Folgenden stets gehörig vor Augen zu behalten hat, die Coefficienten m, n von x, y relative Primzahlen sind.

Dass wir uns im Folgenden bloss mit der Bestimmung der einen der beiden unbekannten Grössen x und y, etwa der Grösse x, zu beschäftigen brauchen, versteht sich von selbst, weil, wenn man alle Werthe von x kennt, durch welche die Gleichung

$$mx - ny = k$$

in ganzen Zahlen aufgelöst wird, die entsprechenden Werthe von y natürlich immer leicht mittelst der Formel

$$y = \frac{mx - k}{n}$$

berechnet werden können, wodurch wir also berechtigt sind, im

Digitized by Google

Folgenden unser Augenmerk bloss auf die Bestimmung der die Gleichung

$$mx - ny = k$$

in ganzen Zahlen auflösenden Werthe von x zu richten.

Wir wollen nun zuvörderst annehmen, dass x und X zwei specielle Werthe der im Allgemeinen auch durch x bezeichneten unbekannten Grösse seien, durch welche die in Rede stehende Gleichung in ganzen Zahlen aufgelöst wird, so dass also

$$mx - ny = k,$$
$$mX - nY = k$$

ist, wo x, y und X, Y ganze Zahlen bezeichnen. Dann ist, wie man sogleich durch Subtraction findet,

$$m(X - x) - n(Y - y) = 0,$$

also

$$m(X - x) = n(Y - y),$$

und folglich

$$X - x = \frac{n(Y-y)}{m}.$$

Weil nun $X - x$ eine ganze Zahl ist, so geht m in dem Producte $n(Y - y)$ auf. Nach der Voraussetzung sind aber m und n relative Primzahlen, woraus sich ergiebt, dass m in $Y - y$ aufgehen *), also

$$\frac{Y-y}{m} = z$$

eine ganze Zahl sein muss. Folglich ist

$$X - x = n\,\frac{Y-y}{m} = nz,$$

also

$$X = x + nz,$$

woraus man sieht, dass, wenn x ein beliebiger die Gleichung

$$mx - ny = k$$

in ganzen Zahlen auflösender bestimmter Werth der im Allgemeinen auch durch x bezeichneten unbekannten Grösse ist, jeder andere die in Rede stehende Gleichung in ganzen Zahlen auflösende Werth X dieser unbekannten Grösse die Form

$$X = x + nz$$

hat, wo z eine ganze Zahl bezeichnet.

Umgekehrt lässt sich aber auch sehr leicht zeigen, dass, wenn x ein beliebiger specieller die in Rede stehende Gleichung in ganzen Zahlen auflösender Werth der im Allgemeinen auch durch x bezeichneten unbekannten Grösse ist, dann immer auch

---

*) M. s. Archiv. Thl. II. S. 3. §. 3.

Digitized by Google

$$X = x + nz,$$

wo man sich für z jede beliebige ganze Zahl gesetzt denken kann, ein die in Rede stehende Gleichung in ganzen Zahlen auflösender Werth derselben unbekannten Grösse ist. Weil nämlich nach der Voraussetzung x ein die gegebene Gleichung in ganzen Zahlen auflösender Werth der im Allgemeinen auch durch x bezeichneten unbekannten Grösse ist, so ist

$$mx - ny = k,$$

wo y eine ganze Zahl bezeichnet, und folglich

$$mx = ny + k.$$

Ferner ist aber nach der Voraussetzung

$$X = x + nz,$$

wo z eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, und folglich

$$mX = mx + mnz,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$mX = ny + k + mnz = n(y + mz) + k,$$

oder, wenn wir

$$Y = y + mz$$

setzen, wo Y eine ganze Zahl bezeichnet,

$$mX = nY + k,$$

also

$$mX - nY = k,$$

wodurch die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung offenbar vollständig bewiesen ist.

Aus diesen Betrachtungen erhellet, dass, wenn man nur einen die gegebene Gleichung in ganze Zahlen auflösenden Werth x der im Allgemeinen auch durch x bezeichneten unbekannten Grösse zu finden im Stande ist, dann auch die allgemeine Auflösung dieser Gleichung in ganzen Zahlen als gefunden betrachtet werden kann, weil nach dem Obigen offenbar die sämmtlichen, die in Rede stehende Gleichung in ganzen Zahlen auflösenden Werthe der ersten der beiden gesuchten unbekannten Grössen in der Formel

$$x + nz,$$

wo z eine ganze Zahl bezeichnet, enthalten sind, und aus dieser Formel erhalten werden, wenn man für z von 0 an aufwärts alle positiven ganzen Zahlen, und von 0 an abwärts alle negativen ganzen Zahlen in dieselbe einführt.

Nach allem Bisherigen reducirt sich also die vollständige Auflösung der Gleichung

$$mx - ny = k$$

in ganzen Zahlen auf die Auffindung nur eines diese Gleichung in ganzen Zahlen auflösenden Werths der einen der beiden unbekannten Grössen, nämlich der Grösse x, und wie man einen solchen Werth immer zu finden im Stande ist, soll nun im Folgenden gezeigt werden.

Digitized by Google

3.

Aus dem Obigen wissen wir, dass die Coefficienten von x und y immer relative Primzahlen sind. Hierzu bemerken wir jetzt nun noch, dass durch geeignete Veränderung der Vorzeichen aller Glieder der Gleichung der Coefficient von x offenbar immer positiv gemacht werden kann. Sollte dann y einen negativen Coefficienten haben, so könnte man statt der unbekannten Grösse y jederzeit die unbekannte Grösse $-y$ in die Gleichung einführen, und würde dieselbe dann offenbar auf eine Form bringen, in welcher auch y einen positiven Coefficienten hat, woraus sich, in Verbindung mit dem Vorhergehenden, ergiebt, dass man die in ganzen Zahlen aufzulösende Gleichung, wie nun auch im Folgenden stets geschehen soll, immer auf die Form

$$mx - ny = k$$

gebracht annehmen kann, wo jetzt m und n positive ganze Zahlen bezeichnen, welche Primzahlen zu einander sind, und k eine positive oder negative ganze Zahl ist, welche Voraussetzungen man im Folgenden stets vor Augen zu behalten hat.

Ist es nun möglich, die, Null übersteigende positive ganze Zahl i so zu bestimmen, dass die Differenz $m^i - 1$ durch n ohne Rest theilbar ist, so ist natürlich auch $(m^i - 1)k$ durch n ohne Rest theilbar, und wir können also, wenn y eine ganze Zahl bezeichnet,

$$\frac{(m^i - 1)k}{n} = y$$

setzen. Dann ist

$$m^i k - k = ny,$$

und folglich

$$m^i k - ny = k$$

oder

$$m(km^{i-1}) - ny = k,$$

woraus sich unmittelbar ergiebt, dass km^{i-1} ein die gegebene Gleichung

$$mx - ny = k$$

in ganzen Zahlen auflösender Werth von x ist, und also

$$x = km^{i-1}$$

gesetzt werden kann.

Hieraus ergiebt sich also, dass immer ein die Gleichung

$$mx - ny = k$$

in ganzen Zahlen auflösender Werth von x gefunden werden kann, wenn man die, Null übersteigende positive ganze Zahl i so zu bestimmen im Stande ist, dass die Differenz $m^i - 1$ durch n ohne

Digitized by Google

Rest theilbar ist, oder mit andern Worten, wenn wir uns des Begriffs und Zeichens der Congruenz der Zahlen *) bedienen, dass

$$m^i \equiv 1 (\text{Mod. } n)$$

ist.

Eine der in Rede stehenden Bedingung genügende positive ganze Zahl i kann aber immer leicht gefunden werden. Denn aus dem durch Euler erweiterten Fermat'schen Theorem, für welches in dem zweiten Theile des Archivs. S. 7. §. 9. ein sehr einfacher, ganz elementarer und leicht verständlicher Beweis gegeben worden ist, wissen wir, dass, wenn m und n, wie es nach dem Obigen hier wirklich der Fall ist, relative Primzahlen sind, und die Anzahl aller Zahlen, welche mit n relative Primzahlen und kleiner als n sind, durch $\varphi(n)$ bezeichnet wird, jederzeit die Differenz

$$m^{\varphi(n)} - 1$$

durch n ohne Rest theilbar, oder mit andern Worten, dass immer

$$m^{\varphi(n)} \equiv 1 (\text{Mod. } n)$$

ist, so dass also immer

$$i = \varphi(n),$$

und folglich nach dem Obigen immer

$$x = km^{\varphi(n)-1}$$

gesetzt werden kann. Wie aber $\varphi(n)$ in jedem Falle zu bestimmen ist, haben wir in der vorhergehenden Abhandlung ausführlich gezeigt. Zerlegen wir nämlich n in seine Primfactoren, und setzen, indem p, q, r, s, ... lauter von der Einheit verschiedene absolute Primzahlen bezeichnen,

$$n = p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta \ldots .,$$

so ist, wie in der vorigen Abhandlung gezeigt worden ist,

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(1 - \frac{1}{s}\right) \ldots .$$

oder

$$\varphi(n) = p^{\alpha-1}(p-1)q^{\beta-1}(q-1)r^{\gamma-1}(r-1) \ldots .,$$

und aus allem Bisherigen ergiebt sich also jetzt die folgende ganz allgemeine und höchst elegante Auflösung der Gleichung

$$mx - ny = k,$$

wo m und n positive ganze Zahlen bezeichnen, die Primzahlen zu einander sind, und k eine positive oder negative ganze Zahl ist, in ganzen Zahlen:

Man zerlege n in seine Primfactoren, so dass, wenn p, q, r, s, ... lauter von der Einheit verschiedene absolute Primzahlen sind,

$$n = p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta \ldots .$$

---

*) M. s. Archiv. Thl. II. S. 4. §. 4.

Digitized by Google

ist, und setze

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1-\frac{1}{s}\right)\ldots.$$

oder

$$\varphi(n) = p^{\alpha-1}(p-1)q^{\beta-1}(q-1)r^{\gamma-1}(r-1)\ldots.$$

Dann erhält man alle die Gleichung

$$mx - ny = k$$

in ganzen Zahlen auflösenden Werthe von x, wenn man in die Formel

$$x = km^{\varphi(n)-1} + nz$$

für z von 0 an aufwärts alle positiven ganzen Zahlen, und von 0 an abwärts alle negativen ganzen Zahlen einführt. Die den einzelnen gefundenen Werthen von x entsprechenden Werthe von y ergeben sich dann ferner leicht aus der Formel

$$y = \frac{mx-k}{n}.$$

Ist n eine Primzahl, so ist offenbar $\varphi(n) = n-1$, und folglich

$$x = km^{n-2} + nz,$$

in welcher Formel man für z wieder von 0 an aufwärts alle positiven ganzen Zahlen, und von 0 an abwärts alle negativen ganzen Zahlen setzen muss.

Dies ist nach Cauchy's Angabe die von Libri und Binet, indem sie das Fermat'sche Theorem in seiner ursprünglichen Gestalt*) in Anwendung brachten, für den Fall, wenn n eine Primzahl ist, gegebene Auflösung, die Cauchy hierauf durch Anwendung des von Euler erweiterten Fermat'schen Theorems zu völliger Allgemeinheit erhob.

Aus dem Vorhergehenden wissen wir, dass es im Allgemeinen nur darauf ankommt, die Null übersteigende positive ganze Zahl i so zu bestimmen, dass

$$m^i \equiv 1 (\text{Mod. } n)$$

ist, und die einfachste Auflösung wird also offenbar der kleinste dieser Bedingung genügende Werth von i gewähren. Ueber diesen Gegenstand hat Cauchy in dem angeführten Memoire noch verschiedene Untersuchungen angestellt, die sich aber weniger als die obigen Betrachtungen zu der Aufnahme in den Elementar-Unterricht eignen dürften, weshalb wir dieselben für jetzt übergehen, uns aber vorbehalten, später auf diesen interessanten Gegenstand zurückzukommen.

Sehr erleichtert wird natürlich die oben gegebene Auflösung, wenn man im Besitz einer bis zu einem möglichst grossen Werthe von n fortgesetzten Tafel der Werthe von $\varphi(n)$, wodurch wir be-

*) M. s. Archiv. Thl. II. S. 8.

Digitized by Google

kanntlich die Anzahl aller der Zahlen, welche Primzahlen zu n und kleiner als n sind, bezeichnet haben, ist; und die Berechnung einer solchen Tafel, der wir gern im Archive einen Platz einräumen würden, möchte daher wohl anzurathen sein.

XXII.

Beweis eines arithmetischen Lehrsatzes.

Von

Herrn Friedrich Arndt

Candidaten des höhern Schulamts zu Greifswald.

Das Theorem, welches den Gegenstand dieser Abhandlung ausmacht, betrifft die bekannte Eigenschaft der Binomialcoefficienten eines ganzen Exponenten, dass jeder von ihnen eine ganze Zahl ist.

Man pflegt diesen Satz auf indirectem Wege zu bewahrheiten, indem man zeigt, dass der $m$te Binomialcoefficient des ganzen Exponenten n der Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen von n Elementen zur $m$ten Klasse gleichkommt, woraus denn unmittelbar folgt, dass der in Rede stehende Binomialcoefficient eine ganze Zahl ist, indem nur diese eine Anzahl anzugeben im Stande ist.

Wenn nun gleich gegen die Richtigkeit dieses Verfahrens nichts einzuwenden ist, so gewährt doch dasselbe noch keineswegs eine deutliche Einsicht in die Art und Weise, wie in der Bruchform

$$\frac{(n-m+1)\,(n-m+2)\,(n-m+3)\ldots(n-1)\,.\,n}{1\,.\qquad 2\,.\qquad 3\,.\,.\,.(m-1)\,.\,m}$$

die Factoren des Nenners sich gegen die Factoren des Zählers aufheben.

Zwar hat Gioachino Pessuti *) sich bemüht, den Satz von dieser Seite zu beleuchten; allein da der von ihm gegebene Beweis wegen seiner grossen Weitschweifigkeit nicht die erforderliche Einfachheit und Evidenz haben dürfte, so schien es der Mühe werth zu sein, einen Beweis zu versuchen, der den oben gemachten Anforderungen am meisten entsprechend wäre, besonders da in neue-

*) Nuove considerazioni su di alcune singulari proprietà de' coefficienti della nota formola del binomio Newtoniano. — Memorie di Matematica della società Italiana. Tom. XI. p. 446.

Digitized by Google

rer Zeit dieser Gegenstand vom Herrn Professor Kunze *) wieder in Anregung gebracht ist.

Betrachten wir also die Bruchform

$$\frac{(n-m+1)\,(n-m+2)\,(n-m+3)\ldots(n-1)\,.\,n}{1\,.\qquad 2\,.\qquad\quad 3\,..\quad (m-1)m},$$

in welcher n und m positive ganze Zahlen sind und m kleiner als n ist.

1. Wenn A einen beliebigen Primfactor des Nenners bezeichnet, so kommt es zunächst darauf an, die höchste Potenz von A zu bestimmen, durch welche der Nenner ohne Rest theilbar ist.

Bezeichnen wir zu diesem Behufe die grösste ganze Zahl, welche in dem Bruche $\frac{m}{p}$ enthalten ist, durch $G(\frac{m}{p})$, so ist offenbar $G(\frac{m}{A})$ die Anzahl der durch A theilbaren Glieder des Nenners, $G(\frac{m}{A^2})$ die Anzahl der durch A^2, $G(\frac{m}{A^3})$ die Anzahl der durch A^3, u. s. w. theilbaren Glieder. Wenn aber $m \gtreqless A^k$ und $< A^{k+1}$, so kommen im Nenner keine Glieder mehr vor, die durch A^{k+1} theilbar sind, die Anzahl hingegen der durch A^k theilbaren Glieder ist wie vorher $G(\frac{m}{A^k})$.

Daher ist die Anzahl der durch A, nicht aber durch eine höhere Potenz von A theilbaren Glieder $G(\frac{m}{A}) - G(\frac{m}{A^2})$, die Anzahl der durch A^2, nicht aber durch eine höhere Potenz von A theilbaren Glieder $G(\frac{m}{A^2}) - G(\frac{m}{A^3})$, u. s. w.; endlich ist die Anzahl der durch A^k, nicht aber durch eine höhere Potenz von A theilbaren Glieder, $G(\frac{m}{A^k})$.

Hieraus folgt, dass der Nenner theilbar ist durch die einzelnen Potenzen

$$A^{G(\frac{m}{A}) - G(\frac{m}{A^2})},\ A^{2\{G(\frac{m}{A^2}) - G(\frac{m}{A^3})\}},\ \ldots\ldots A^{kG(\frac{m}{A^k})},$$

und da diese verschiedenen Gliedern des Nenners entsprechen, so ist der Nenner durch das Product dieser Potenzen, oder durch

$$A^{G(\frac{m}{A}) + G(\frac{m}{A^2}) + \ldots + G(\frac{m}{A^k})}$$

ohne Rest theilbar. Zugleich erhellet aber auch aus dem Beweise, dass keine höhere Potenz von A in dem Nenner aufgeht.

2. Nun erhellet, dass, indem A^b eine beliebige Potenz von A ist, welche in dem Nenner vorkommt, die kleinsten Reste der Zahlen

$$n-m+1,\ n-m+2,\ n-m+3,\ \ldots\ n-m+A^b$$

nach A^b alle verschieden sind; denn wären die den Zahlen

*) Archiv der Mathematik und Physik Theil II. S. 329.

$n-m+\varphi$, $n-m+\psi$ entsprechenden Reste einander gleich, so wäre die Differenz dieser Zahlen $\pm(\varphi-\psi)$ durch A^b theilbar, welches nicht möglich ist, da beide Zahlen φ, ψ kleiner als A^b sind, oder wenigstens nur eine derselben der Potenz A^b gleich sein kann. Indem nun alle in Rede stehenden Reste ungleich sind und ihre Anzahl A^b ist, so muss einer unter ihnen verschwinden, und dieser verschwindende Rest oder das demselben entsprechende durch A^b theilbare Glied wird durch die Congruenz bestimmt

$$n-m+\varphi \equiv 0 \pmod{A^b}.$$

Wenn wir übrigens den Rest von $n-m$ durch A^b mit ϱ bezeichnen, so ist $\varphi = A^b - \varrho$.

In dem Intervall $n-m+1$ bis $n-m+A^b$ giebt es demnach nur ein einziges Glied, welches durch A^b theilbar ist; ganz ebenso giebt es in dem Intervall $n-m+A^b+1$ bis $n-m+2A^b$, in dem Intervall $n-m+2A^b+1$ bis $n-m+3A^b$ u. s. w. nur ein einziges durch A^b theilbares Glied. Man kann diese Schlüsse bis zu dem Intervall von $n-m+(\Theta-1)A^b+1$ bis $n-m+\Theta.A^b$ fortsetzen, indem Θ so bestimmt wird, dass $n-m+\Theta.A^b \leqq n$, $\Theta \leqq \frac{m}{A^b}$ oder $\Theta = G(\frac{m}{A^b})$ ist. Dies vorausgesetzt, giebt es mindestens *) Θ oder $G(\frac{m}{A^b})$ durch A^b theilbare Glieder des Zählers.

Insbesondere enthält der Zähler mindestens $G(\frac{m}{A})$ durch A, mindestens $G(\frac{m}{A^2})$ durch A^2, mindestens $G(\frac{m}{A^3})$ durch A^3 u. s. w. mindestens $G(\frac{m}{A^k})$ durch A^k theilbare Glieder. Hieraus leitet man leicht *db*, dass der Zähler durch die Potenz

$$A^{G(\frac{m}{A})+G(\frac{m}{A^2})+\ldots+G(\frac{m}{A^k})},$$

von A jederzeit ohne Rest theilbar ist.

3. Zerlegt man nun den Nenner unserer Bruchform in lauter ungleiche Factoren, von denen jeder eine Potenz eines Primfactors ist, so geht nach 2. jede solcher Potenzen in dem Zähler auf, weshalb, da alle Factoren relative Primzahlen sind, auch das Product der letztern d. h. der Nenner selbst in dem Zähler aufgehen wird, w. z. b. w.

Bei dieser Gelegenheit will ich endlich noch zeigen, wie sich der von Gauss in den Disquis. Arithmet. pag. 34—36 aufgestellte Satz, dessen Beweis Gauss auf die Lehre von den Permutationen stützt, mittelst unseres obigen Lehrsatzes sehr leicht darthun lässt.

Der gedachte Satz heisst so:

Wenn p eine Primzahl ist und man p Elemente hat, die nicht alle unter einander gleich sind, so ist die Zahl der Permutationen dieser Elemente stets durch p theilbar.

Wenn nämlich unter den Elementen zuerst a gleich sind, dann b gleich, dann c gleich u. s. w. (wo a, b, c, ... auch die Einheit bezeichnen können), so dass $p = a+b+c+\ldots$, so ist die

Digitized by Google

Zahl der Permutationen der p Elemente, wie bekannt, der Bruchform gleich

$$\frac{1.2.3.4.....p}{1.2.3...a.1.2.3..b.1.2.3...c.....}$$

Wir können diese Bruchform, die wir P nennen wollen, so in Factoren abtheilen:

$$\frac{1.2.3..a}{1.2.3...a}\times\frac{(a+1)\,(a+2)...(a+b)}{1.2....b}\times\frac{(a+b+1)...(a+b+c)}{1.....c}\times..,$$

und es ist also mit Einführung des Zeichens der Binomialcoefficienten

$$P=^{a}B_{a}\,.\,^{a+b}B_{b}\,.\,^{a+b+c}B_{c}\,....,$$

woraus folgt, dass P eine ganze Zahl ist, da jeder dieser Binomialcoefficienten eine ganze Zahl ist.

Da nun

$$1.2.3...p=1.2..a.1.2..b.1.2...c..\times P$$

ist, so ist

$$\frac{1.2..a.1.2..b.1.2...c....\times P}{p}$$

eine ganze Zahl; aber p geht in dem in P multiplicirten Factor nicht auf, also muss p in P aufgehen.

---

*) Es kann nämlich in dem Falle, wenn $n-m+\Theta\,.\,A^{b}<n$ ist, wie leicht erhellet, $G(\frac{m}{A^{b}})+1$ durch A^{b} theilbare Glieder des Zählers geben. Ist z. B. $m=17$, $n=48$, der Zähler also 32.33.34.35...46.47.48, so giebt es für $A=3$ und $b=1$ fünf $(G(\frac{17}{3})=5)$ vollständige Intervalle, in deren jedem sich ein durch 3 theilbarer Factor findet, und ausserdem zuletzt noch das unvollständige Intervall 47, 48, in welchem noch 48 ein durch 3 theilbares Glied ist.

XXIII.

Eine Formel für die dreiseitige Pyramide.

Von

Herrn R. Hoppe

Candidaten des höhern Schulamts zu Greifswald.

Unter andern Relationen zwischen den Stücken eines beliebigen Tetraeders, die ich gefunden habe, scheint mir eine Formel für den

Inhalt nicht ganz ohne Interesse zu sein, die ich daher hier, als Beitrag zu den Untersuchungen in diesem Gebiete, kurz entwickeln will.

Es bezeichne T den Inhalt eines beliebigen Tetraeders, a, b, c, d, e, f die sechs Kanten desselben, und zwar mögen a und f, b und e, c und d einander gegenüber liegen. Die an diesen Kanten gebildeten Neigungswinkel der Seiten seien respective α, β, γ, δ, ε, ζ; die vier Seitenflächen A, B, C, D, und zwar sei A von b, c, f, B von a, c, e, C von a, b, d und D von d, e, f begrenzt.

Denkt man sich auf D ein Höhenperpendikel H gefällt, so ist

$$T = \tfrac{1}{3} DH.$$

Ist ferner h das Höhenperpendikel des Dreiecks C, dessen Grundlinie d ist, so ist nach bekannten stereometrischen Sätzen

$$H = h \sin \delta.$$

Ausserdem hat man noch die Gleichung

$$C = \tfrac{1}{2} dh.$$

Eliminirt man zwischen diesen 3 Gleichungen H und h, so erhält man leicht

$$d = \frac{2CD \sin \delta}{3T},$$

und durch Vertauschung der entsprechenden Stücke ergeben sich die Gleichungen

$$b = \frac{2C}{3T} . A \sin \beta; \quad a = \frac{2C}{3T} . B \sin \alpha; \quad d = \frac{2C}{3T} . D \sin \delta.$$

Drückt man das Dreieck C durch seine 3 Seiten a, b, d aus, so ist

$$C^2 = \frac{1}{16} (b + a + d)(b + a - d)(b - a + d)(-b + a + d).$$

Setzt man für b, a, d ihre Werthe, so kommt

$$\begin{aligned} C^2 = \frac{C^4}{(3T)^4} & (A \sin \beta + B \sin \alpha + D \sin \delta) \\ & \times (A \sin \beta + B \sin \alpha - D \sin \delta) \\ & \times (A \sin \beta - B \sin \alpha + D \sin \delta) \\ & \times (-A \sin \beta + B \sin \alpha + D \sin \delta). \end{aligned}$$

Betrachtet man nun C als die Summe der Projectionen von A, B, D auf C, so erhält man unmittelbar

$$C = A \cos \beta + B \cos \alpha + D \cos \delta,$$

oder

$$D = \frac{C - A \cos \beta - B \cos \alpha}{\cos \delta}.$$

Substituirt man diesen Werth von D in die obige Gleichung, so erhält man

Digitized by Google

$$(3T)^4 = \frac{C^2}{\cos^4\delta}\{A(\sin\beta\cos\delta - \cos\beta\sin\delta) + B(\sin\alpha\cos\delta - \cos\alpha\sin\delta) + C\sin\delta\}$$
$$\times\{A(\sin\beta\cos\delta + \cos\beta\sin\delta) + B(\sin\alpha\cos\delta + \cos\alpha\sin\delta) - C\sin\delta\}$$
$$\times\{A(\sin\beta\cos\delta - \cos\beta\sin\delta) - B(\sin\alpha\cos\delta + \cos\alpha\sin\delta) + C\sin\delta\}$$
$$\times\{-A(\sin\beta\cos\delta + \cos\beta\sin\delta) + B(\sin\alpha\cos\delta - \cos\alpha\sin\delta) + C\sin\delta\},$$

was sich auch auf folgende Art ausdrücken lässt:

$$(3T)^4 = \frac{C^2}{\cos^4\delta}(A\sin(\beta-\delta) + B\sin(\alpha-\delta) + C\sin\delta)$$
$$\times(A\sin(\beta+\delta) + B\sin(\alpha+\delta) - C\sin\delta)$$
$$\times(A\sin(\beta-\delta) - B\sin(\alpha+\delta) + C\sin\delta)$$
$$\times(-A\sin(\beta+\delta) + B\sin(\alpha-\delta) + C\sin\delta).$$

Diess ist die beabsichtigte Formel, welche den Inhalt des Tetraeders durch 3 Seiten und die 3 von einer derselben mit den übrigen gebildeten Neigungswinkel ausdrückt.

XXIV.

Miscellen.

Société philomatique de Paris.

Séance du 20 août 1842.

M. Ivan Simonoff, professeur d'astronomie à l'Université de Kasan, présente à la Société un nouvel instrument qu'il a imaginé dans le but d'observer la déclinaison de l'aiguille aimantée à l'aide du sextant.

Une aiguille aimantée, de forme prismatique rectangulaire, horizontalement suspendue, porte un petit miroir à son extrémité dirigée vers le sud, et un contrepoids à son extrémité opposée. En appliquant cette aiguille à un niveau à siphon rempli de mercure, on peut voir si elle est horizontale ou non, et faire disparaître la petite inclinaison, en déplacant le centre de gravité ou le poids.

Digitized by Google

On met le miroir dans la position perpendiculaire à la direction de l'axe magnétique de l'aiguille, de la même manière qu'on le fait dans le magnétomètre unifilaire de M. Gauss, car jusqu'a présent cet instrument n'en differe pas. Ayant fait ces corrections préalables, on observe dans le miroir l'image réfléchie du soleil; mais, comme l'aiguille ne reste presque jamais en repos, on le fait descendre et se poser sur la planche inférieure de l'instrument. Alors l'aiguille devient stable; mais, pour voir si elle ne s'est pas déplacée du méridien magnétique, on place devant le miroir une échelle avec une lunette de sextant au dessus. Dans cette lunette on voit les divisions de l'échelle réfléchies par le miroir; on les observe d'abord quand l'aiguille est suspendue, et ensuite quand elle est posée sur la planche inférieure de l'instrument. La différence des parties de la division et la distance du miroir étant connues, on peut calculer l'angle de la déviation de l'aiguille du méridien magnétique; c'est la correction de la déclinaison obtenue au moyen de cet instrument.

Enfin l'on mesure, au moyen d'un sextant, la distance angulaire du soleil à son image réfléchie dans le miroir vertical de l'aiguille.

Soit d la distance mesurée au sextant entre le soleil vu directement et son image réfléchie dans le miroir, z la distance du soleil au zénith, a l'azimuth du soleil et α celui du méridien magnétique. On a un triangle sphérique dans lequel un côté est égal à z, un autre côté égal à 90°, et le troisième côté égal à $90° - \frac{1}{2}d$, ce qui donne

$$\sin \tfrac{1}{2}d = \sin z \cos (a - \alpha), \text{ d'où } \cos (a - \alpha) = \frac{\sin \frac{1}{2}d}{\sin z}.$$

Il est clair que, d étant donné par les observations, et z ainsi que a par le calcul, on en déduira la valeur de α par cette formule.

L'erreur de la position perpendiculaire du miroir, par rapport à l'axe magnétique de l'aiguille, et l'incertitude dans la direction horizontale de cet axe peuvent être déterminées, la première par le retournement de l'aiguille autour de son axe géométrique et la seconde par les observations faites avant et après le passage du soleil par le méridien magnétique.

On peut varier de plusieurs manières le mode de ces observations au moyen du sextant. Par exemple, on peut observer les distances égales du soleil à son image réfléchie par le miroir de l'aiguille; ces distances correspondantes donneront l'angle horaire du point d'intersection du méridien magnétique avec l'horizon, si l'on connait le temps du passage du soleil par le méridien. L'on peut aussi mesurer la plus grande distance du soleil à son image réfléchie, et si l'on ajoute à $90° - \frac{1}{2}d$ la distance du soleil au pôle du monde, on aura la distance de ce pôle au point d'intersection du méridien magnétique avec l'horizon. Dans cette dernière méthode l'on peut déduire la déclinaison magnétique du triangle tracé sur la voûte céleste, entre le pôle du monde, le zénith et le point d'intersection du méridien magnétique avec l'horizon, sans avoir besoin de chronomètre. A ce dernier mode l'on peut encore appliquer la méthode des hauteurs circumméridiennes, dont on fait usage pour déterminer la latitude géographique.

Enfin l'on peut mesurer la distance angulaire du soleil à son image réfléchie, d'abord dans le miroir vertical, et ensuite dans

Digitized by Google

l'horizon artificiel. La moitié de cette dernière distance est égale à la distance du soleil au pôle du méridien magnétique, et si l'on désigne par d' la distance entière du soleil à son image doublement réfléchie, on aura

$$\sin(\alpha - a) = \frac{\cos \frac{1}{2}d'}{\sin z}.$$

(L'Institut. No. 454. 8 Sept. 1842.).

Herr James Booth, Professor of Mathematics in Bristol College hat in dem London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. June 1842. p. 473 einen Satz von den Flächen des zweiten Grades bewiesen, welcher als eine Erweiterung eines schon früher bekannten Satzes von der Kugel (M. s. z. B. Élémens de Géometrie par Legendre. Onzième édition. Livre VIII. Prop. XVIII.) betrachtet werden kann. Weil uns der Satz jedenfalls bemerkenswerth und weniger bekannt zu sein scheint, so theilen wir hier den folgenden Auszug aus dem Aufsatze des Herrn James Booth mit.

Eine Fläche des zweiten Grades denken wir uns von zwei parallelen Ebenen durchschnitten, und wollen das Volumen des von diesen beiden Ebenen und der Fläche des zweiten Grades eingeschlossenen Körpers zu bestimmen suchen.

Die drei Halbaxen der Fläche des zweiten Grades seien a, b, c; die Halbaxen des den beiden in Rede stehenden parallelen Ebenen durch den Mittelpunkt der Fläche des zweiten Grades parallel geführten Schnitts seien a', b', und c' sei der halbe conjugirte Durchmesser dieses Schnitts; das von dem Mittelpunkte der Fläche auf die dem letztern Schnitte parallele berührende Ebene der Fläche gefällte Perpendikel sei p. Die Halbaxen eines beliebigen den beiden parallelen Ebenen, durch welche der Körper, dessen Volumen V bestimmt werden soll, begränzt wird, parallelen Schnitts seien α, β, und u und w seien die zwischen diesem Schnitte und dem Mittelpunkte der Fläche liegenden Theile von c' und p; die den beiden gegebenen, den Körper V begränzenden Ebenen entsprechenden Werthe von u und w seien respective u', u'' und w', w''.

Dies vorausgesetzt, ist nun offenbar

$$V = \pi \int_{w'}^{w''} \alpha\beta\, dw;$$

also, wenn man statt der Variablen w die Variable u einführt,

$$V = \pi \int_{u'}^{u''} \alpha\beta \frac{dw}{du}\, du.$$

In dem durch a' und c' gelegten Schnitte der Fläche ist

$$a : a' = \sqrt{c'^2 - u^2} : c',$$

und eben so ist in dem durch b' und c' gelegten Schnitte der Fläche

Digitized by Google

$$\beta : b' = \sqrt{c'^2 - u^2} : c'.$$

Aus diesen beiden Proportionen folgt

$$\alpha\beta = \frac{a'b'}{c'^2}\,(c'^2 - u^2).$$

Weil ferner offenbar

$$u : w = c' : p,$$

also

$$w = \frac{p}{c'}\,u$$

ist, so ist

$$\frac{dw}{du} = \frac{p}{c'};$$

und nach dem Obigen ist folglich

$$V = \pi \int_{u'}^{u''} \frac{a'b'p}{c'^2}\,(c'^2 - u^2)du.$$

Nach einer bekannten Eigenschaft der Flächen des zweiten Grades ist aber

$$a'b'p = abc;$$

folglich nach dem Vorhergehenden

$$V = \frac{abc}{c'^2}\,\pi \int_{u'}^{u''} (c'^2 - u^2)du.$$

Integrirt man nun zwischen den gegebenen Gränzen, so erhält man

$$V = \frac{abc}{c'^2}\,\pi\{c'^2(u'' - u') - \tfrac{1}{3}(u''^3 - u'^3)\}$$

oder, wie man leicht findet,

$$V = \frac{abc}{6c'^2}\,\pi(u'' - u')\;(6c'^2 - 2u''^2 - 2u''u' - u'^2);$$

also, wenn man innerhalb der Parenthesen $u''^2 + u'^2$ addirt und subtrahirt,

$$V = \frac{abc}{6c'^2}\,\pi(u'' - u')\;\{3(c'^2 - u''^2) + 3(c'^2 - u'^2) + (u'' - u')^2\}.$$

Sind jetzt α', β' und α'', β'' die Halbaxen der den Körper, dessen Volumen V gesucht wird, begränzenden parallelen Schnitte; so ist

$$c'^2 - u'^2 = \frac{c'^2\alpha'\beta'p}{abc},\quad c'^2 - u''^2 = \frac{c'^2\alpha''\beta''p}{abc},$$

und für die Entfernung t der Ebenen der beiden parallelen Schnitte von einander hat man die Proportion

Digitized by Google

$$u'' - u' : t = c' : p,$$

aus welcher

$$u'' - u' = \frac{c't}{p}$$

folgt. Führt man nun diese Ausdrücke von $c'^2 - u'^2$, $c''^2 - u''^2$, $u'' - u'$ in den obigen Ausdruck von V ein, so erhält man

$$V = \tfrac{1}{2}\pi t(\alpha'\beta' + \alpha''\beta'') + \frac{abc}{p^2} \cdot \frac{\pi t^3}{6}.$$

Bezeichnen wir jetzt durch A und B die Flächenräume der den Körper, dessen Volumen V ist, begränzenden parallelen Schnitte, und durch S den cubischen Inhalt der mit dem Durchmesser t beschriebenen Kugel; so ist

$$A = \alpha'\beta'\pi,\ B = \alpha''\beta''\pi,\ S = \tfrac{1}{6}\pi t^3,$$

und folglich nach dem Obigen

$$V = \tfrac{1}{2}t(A + B) + \frac{abc}{p^2} S.$$

Dies giebt den folgenden Satz:

Das Volumen eines jeden von zwei parallelen Schnitten einer Fläche des zweiten Grades als Grundflächen und dieser Fläche des zweiten Grades als Seitenfläche eingeschlossenen Körpers ist gleich der mit seiner Höhe multiplicirten halben Summe seiner beiden Grundflächen, plus dem mit $\frac{abc}{p^2}$ multiplicirten Volumen der mit seiner Höhe als Durchmesser beschriebenen Kugel.

Für die Kugel ist $a = b = c = p$, also

$$V = \tfrac{1}{2}t(A + B) + S,$$

worin der oben erwähnte, in den Éléments de Géométrie par Legendre. Onzième édition. Livre. VIII. Prop. XVIII. bewiesene Satz von der Kugel enthalten ist.

Für ein Hyperboloid mit einem Fache muss man für a, b, c respective $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, c setzen, und erhält hierdurch aus dem Obigen leicht

$$V = \tfrac{1}{2}t(A + B) - \frac{abc}{p^2} S.$$

Für ein Hyperboloid mit zwei Fächern erhält Herr Booth, indem er für a, b, c, p respective a, b, $c\sqrt{-1}$, $p\sqrt{-1}$ setzt, denselben Ausdruck von V wie vorher.

Für das elliptische Paraboloid findet Herr Booth $V = \frac{1}{2}t(A+B)$.

Es scheint uns dieser Gegenstand eine ausführlichere, recht strenge und deutliche, mehr in's Einzelne gehende und alle verschiedenen Arten der Flächen des zweiten Grades gehörig berücksichtigende Behandlung wohl zu verdienen, aber auch noch zu bedürfen.

G.

Digitized by Google

Physikalische Bemerkungen.

Von dem Herrn Professor und Director F. Strehlke zu Danzig.

(Diese Bemerkungen sind von dem Herrn Verfasser in dem Programm der Petrischule zu Danzig von Michaelis 1842 mitgetheilt worden. Ich lasse dieselben hier wieder abdrucken, weil ich die Ueberzeugung hege, dass sie insbesondere Lehrern, denen kein sehr vollständiger physikalischer Apparat zu Gebote steht, gewiss sehr angenehm sein werden, und weil dieselben auch einem Zwecke des Archivs, der in der Ankündigung desselben von mir weiter besprochen worden ist, auf eine ausgezeichnete Weise entsprechen. Möchten sich auch andere Lehrer der Physik zu recht vielen dergleichen sehr nützlichen Bemerkungen veranlasst finden! G.)

1. Wenn man durch eine einfache Glaslinse einen weissen Kreis ansieht, so erscheint derselbe in einer gewissen Entfernung mit violettem, in einer andern mit gelbrothem Farbensaume, man soll die Bedingungen, unter denen dies geschieht, angeben *).

2. Man scheint häufig genug zu vergessen, dass ein Sammelglas oder ein Hohlspiegel mit dem Auge verbunden schon ein Fernrohr giebt.

3. Von dem bekannten Busoltschen Farbenkreisel kann man eine mehrfache nützliche Anwendung machen. — Legt man auf den rotirenden Kreisel eine Kreisscheibe mit gleich weit von einander abstehenden Löchern, so wird ein Luftstrom, den man durch das abgeschnittene Ende eines Federkiels durch Blasen mit dem Munde hervorbringt, einen Ton erzeugen, von dem man sogleich die nächst höhere Oktave hört, wenn man denselben Luftstrom durch eine doppelt so grosse Anzahl von Löchern auf derselben Scheibe gehen lässt. So dient der Busoltsche Kreisel als eine unvollkommene Sirene. — Um zu zeigen, dass bei rotirenden kreisförmig gebogenen elastischen Streifen die Kreisform durch die Centrifugalkraft in eine elliptische verwandelt werde, verbindet man 2 parallele Ringe aus Notenpapier mit 4 oder 6 kreisförmig gebogenen Meridianstreifen von demselben Papier. Legt man diese Vorrichtung so auf die Axe des Kreisels, dass die beiden Ringe in der Axe liegen, so wird der obere Ring herabgehen und das Ganze dem Auge ein Ellipsoid zeigen, dessen Abplattung um so geringer wird, je langsamer sich allmählich der Kreisel bewegt. — Um die Dauer des Lichteindrucks einer grössern Menge von Schülern recht augenfällig zu machen, schreibt man auf Eine Seite

*) Bei den folgenden Mittheilungen aus der Experimental-Physik habe ich durchaus nicht die Besitzer kostbarer physikalischer Apparate im Auge, sondern Lehrer an Bürgerschulen, die wie die unsrige nur über eine geringe Anzahl möglichst zweckmässig anzuwendender Hülfsmittel zu gebieten haben.

Str.

Digitized by Google

eines Rechtecks von weisser Pappe etwa die Worte: „Dauer des“ auf die andere Seite: „Lichteindrucks“, und befestigt dieses Rechteck mit etwas Wachs auf der höchsten Stelle des Kreisels, so dass die Rotations-Axe des Kreisels mit der die Mitten der horizontalen Seiten des Rechtecks verbindenden Geraden zusammenfällt; dann wird jeder an seiner Stelle die 3 Worte gleichzeitig lesen können, so lange der Kreisel rotirt. — Von dieser Dauer des Lichteindrucks kann man auch Gebrauch machen, um die Rotationskörper, den senkrechten Kegel, den Cylinder, die Kugel, das Ellipsoid, das Hyperboloid und das Paraboloid durch Rotation der entsprechenden ebenen Curven, die man sauber gezeichnet aus feiner Pappe ausschneidet, zu zeigen. — Rotirt der Kreisel mit mehrern farbigen Flügeln belastet im Sonnenschein, so erscheint der Schatten von der Axe des Kreisels in den verschiedenen komplementären Farben, also grün in der Rotations-Ebene des rothen Flügels, violett in der Ebene des gelben Flügels u. s. w.

4. Der Gegensatz der beiden Elektricitäten tritt auf eine eigenthümliche Weise in folgenden Versuchen mit 2 Stanniol-Scheibchen von etwa 5 Linien Durchmesser, die an Coconfäden hängen, hervor. Um die Scheibchen einander zu nähern oder sie von einander zu entfernen, befestigt man dieselben mit etwas Wachs auf den Spitzen eines Zirkels dessen einer Schenkel an einem horizontalen Gegenstande mit Bindfaden befestigt wird, und dessen zweiter Schenkel sich in derselben horizontalen Ebene bewegen lässt. Elektrisirt man die beiden Stanniolblättchen mit gleichartiger Elektricität, so divergiren die Coconfäden, aber die Blättchen kehren ihre breiten Flächen einander zu; werden sie dagegen mit entgegengesetzten Elektricitäten geladen, so konvergiren die Fäden, aber die Scheibchen stellen sich so, dass die Ebene des einen in der Verlängerung des andern liegt. Diese letzte Stellung tritt auch ein, wenn das eine Scheibchen nicht elektrisirt ist, wegen des Gesetzes der Vertheilung.

5. Um zu zeigen, dass die erhitzte atmosphärische Luft ein guter Leiter der Elektricität ist, entlade man eine Leidner Flasche so, dass der eine Knopf des Ausladers, eine Lichtflamme und der Knopf der Leidner Flasche ein gleichseitiges Dreieck bilden; dann geht der elektrische Funke nicht auf dem kürzesten Wege, vom Knopfe der Leidner Flasche zum Auslader, sondern durch die beiden andern Seiten des Dreiecks, vom Knopfe der Leidner Flasche in die Flamme und von da zum Auslader.

6. In der Lehre von der Elektricität wünschte ich beim Unterrichte von folgendem leicht anzustellenden Versuche Faraday's Gebrauch gemacht. Wenn man durch 2 Platinspitzen, wozu 2 Stückchen des feinsten käuflichen Platindraths hinreichen, die Elektricitäten des positiven und negativen Conduktors einer gewöhlichen Elektrisirmaschine über ein mit Jodkaliumlösung befeuchtetes Papier entladet, so dass die vertikal gestellten, ohngefähr 2 Zoll von einander entfernten Spitzen das Papier unmittelbar berühren, so zeigt sich das ausgeschiedene Jod an der positiven Spitze, wie es auch bei der Anwendung Eines Plattenpaars einer Voltaschen Kette geschieht. An der negativen Spitze zeigt sich kein brauner Fleck.

Sobald aber beide Spitzen um eine kleine Entfernung von dem Papiere abstehen, so dass kleine elektrische Funken von den Spitzen zu dem befeuchteten Papier überschlagen müssen, alsdann zeigen sich unter beiden Spitzen braune Flecken von dem an beiden Stellen freiwerdenden Jod, welches die aus der atmosphärischen Luft durch den elektrischen Funken gebildete Salpetersäure aus dem Jodkalium ausgeschieden hat.

7. Als Segnerschen Wasserkreisel benutze ich eine an einem Faden hängende oben offene Röhre von Messingblech mit 2 horizontalen dünnen Röhren, auf welche 2 kurze rechtwinklicht gebogene Röhren aufgepasst sind. Bilden die horizontalen Röhren mit ihren aufgepassten Stücken die Form eines lateinischen Z, so erfolgt Drehung, bilden sie die Form einer Klammer, so erfolgt Stillstand. Für denselben Zweck dienen bei der Elektricität 2 in ihrer Mitte mit konischen Vertiefungen versehene Messingdrähte, oder eine freie, auf ihrem Hütchen schwebende Magnetnadel, an deren Enden rechtwinklig auf die Axe der Nadel 2 geradlinigte Stückchen Stanniol angedrückt werden. Lässt man den Z förmig gebogenen Draht im Dunkeln sich drehen, so gewahrt man einige bemerkenswerthe Erscheinungen. Da das elektrische Licht ein discontinuirliches ist, eine Lichtentwickelung mit Lichtpausen, so zeigt das elektrische Rad keinen ununterbrochenen Kreis, sondern ein kreisförmiges Strahlengeflecht, gebildet aus lauter Strahlenbüscheln. Dreht man die Scheibe der Elektrisirmaschine langsam, so treten nur einzelne Strahlen in der Peripherie des Rades hervor, bei schnellerer Drehung der Scheibe wird das Geflecht immer dichter, aber man kann noch immer die einzelnen Strahlen unterscheiden. Wird in die Nähe des elektrischen Rades eine 2te elektrische Wirkungssphäre, z. B. der Knopf einer geladenen Leidner Flasche gebracht, so fehlt in der Wirkungssphäre die Ausströmung, folglich auch das Licht, und der Strahlenkreis ist an dieser Stelle unterbrochen. Hält man den Draht der Leidner Flasche ohngefähr in die Richtung des Durchmessers des elektrischen Rades, entweder einige Linien ober- oder unterhalb der Rotations-Ebene, so hat der Lichtkreis an zwei entgegengesetzten Stellen zwei Unterbrechungen des Lichtes.

8. Wenn man eine sehr starke Entwickelung von freilich weniger reinem Wasserstoffgase haben will, so legt man zu den Zinkstücken kleine eiserne Kugeln oder Nägel. Dann vermehrt die Contact-Elektricität die Entwickelung des Wasserstoffgases auf eine ausgezeichnete Weise.

9. Besitzer von Voltaschen Säulen aus einzelnen Kupfer- und Zinkplatten thun am besten, dieselben Paarweise zusammenlöthen zu lassen. Die Säule kann dann mehrere Stunden hindurch mit stets wachsender Wirkung benutzt werden, wenn man sie oft umbaut und nur dafür sorgt, dass die Salmiak-Auflösung, die jedesmal aus den Tuchplatten ausgedrückt wird, von Zeit zu Zeit durch Zulegen von Salmiak in einem gewissen Grade der Concentration erhalten wird. Je stärker die Kupfer- und Zinkplatten oxydirt werden, desto stärker wirkt die Säule. Man thut daher gut, z. B. die Glühversuche bis zu einer der letzten Aufstellungen aufzuspa-

Digitized by Google

ren. Das Umlegen der Platten geschieht in wenig Minuten, da es bei solchen Versuchen nicht an hülfreichen Händen fehlt. Sind die Platten nicht zusammengelöthet, so kann die Säule nur Ein Mal gebraucht werden und die Platten müssen, ehe sie wieder in der Säule thätig sein können, zuvor gereinigt werden, da beim Umlegen das Eintreten von saurer Auflösung zwischen die Platten, die sich immer mit blanker Oberfläche berühren sollen, nicht gut vermieden werden kann.

10. Wenn man in verdünnter Schwefelsäure kupferne Scheiben, etwa Kupfermünzen in Berührung mit Zinkstücken bringt, so steigen die Wasserstoffbläschen des Kupfers am Rande nicht vertikal aufwärts, sondern auf einem gekrümmten Wege, als wenn eine Kraft vom Rande sie nach der Mitte der Scheibe triebe. Man bemerkt diese Erscheinung auch bei der unabhängigen Auflösung des Zinks in verdünnter Schwefelsäure. Nimmt man als negatives Metall Platin, so steigen die Bläschen vom Rande vertikal in die Höhe.

11. Mit einem etwas grössern Magnete in Hufeisenform kann man die durch Vertheilung im Eisen hervorgebrachte Anziehung und Abstossung des gleichartigen und ungleichartigen Magnetismus auf eine recht augenfällige Weise zeigen. Man legt über den mit beiden Polen horizontal gelegten Magneten eine denselben ganz bedeckende Glastafel und an die Krümmungsstelle parallel der durch die beiden Pole gezogenen geraden Linie etwa 3 wohl abgedrehte Cylinder von weichem Eisen von wenigstens 1 Linie im Durchmesser, und solcher Länge, dass jeder Cylinder die Breite des Hufeisens überspannt; dann gehen die eisernen Cylinder zu den Polen mit beschleunigter Bewegung, eilen darüber hinaus, kehren zurück und bleiben, jedoch immer getrennt von einander, in den Stellungen, welche durch die gegenseitige Abstossung ihrer gleichartigen Magnetismen und der ungleichartigen des nächsten Pols bedingt werden.

12. Zur Erläuterung der Magneto-Elektricität nehme ich 2 Drathspiralen von Kupfer mit Seide umwickelt. Die beiden Enden jeder Drathspirale, die gerade so gross ist, dass in jede ein Pol eines hufeisenförmig gekrümmten Magnetstabes gesteckt werden kann, können in die beiden Quecksilbergefässe eines Galvanometers getaucht werden. Indem man die 4 Drahtenden der Spiralen in geeigneter Weise mit den beiden Quecksilbergefässen des Galvanometers kombinirt, lässt sich zeigen, dass zwei gleiche und entgegengesetzte elektrische Ströme sich aufheben, zwei in derselben Richtung fliessende elektrische Ströme sich in ihrer Wirkung verdoppeln, wobei immer dieselben durch die beiden Magnetpole erregten Ströme in Anwendung kommen.

13. Wenn man ein verkorktes Glasgefäss, worin etwas Wasser befindlich ist, in der Mitte eines Zimmers auf einen Tisch stellt, so bemerkt man nach einiger Zeit an den den einzelnen Fenstern zunächst gelegenen Stellen des Glases einen Niederschlag des Wasserdampfes in tropfbarer Gestalt. Steht das Gefäss in der Nähe eines Fensters, durch welches man die Aussicht auf Gebäude

hat, zwischen denen freier Himmel hindurchblickt, so bemerkt man in der Form der Begränzung des Niederschlags einen Einfluss der Configuration der lichten und dunkeln Stellen, welche die Aussicht des Fensters bestimmen. Steht das Glasgefäss in einem Glasschranke, so gewahrt man auch an der dem Fenster des Glasschranks und dem nächsten Stubenfenster zugewandten Seite eine Verdichtung des Wasserdampfs, weil das zunächst befindliche Fenster des Glasschranks durch Ausstrahlung der Wärme gegen das erkältete Fenster des Zimmers abgekühlt worden ist.

14. Die gewöhnlichen Luftpumpen reichen hin, um selbst bei einer Temperatur von + 15° R. das Wasser zum Gefrieren zu bringen. — Man stellt über die Oeffnung des Tellers der Luftpumpe einen offenen einige Zoll langen Glas-Cylinder, legt darauf ein Uhrglas, an dessen Rand 3 Wachskügelchen geklebt werden. Darauf wird etwas Wasser in das Uhrglas gegossen und ein zweites gleich grosses Uhrglas auf die Wachskügelchen gedrückt, wodurch man eine Wasserschicht zwischen den beiden Gläsern erhält. Giesst man nun etwas Schwefeläther in das obere Uhrglas, setzt schnell die Glocke darüber und evacuirt, so gefriert die Wasserschicht in kurzer Zeit.

15. Dass im luftverdünnten Raume eine Lichtflamme erlischt, wird offenbar durch 2 Ursachen hervorgebracht. Schliesst man den Zusammenhang zwischen der atmosphärischen Luft und der Luft der Glocke, stellt auf den Teller der Luftpumpe eine kleine Schaale mit entzündetem Alkohol oder Schwefeläther und bedeckt die Schaale schnell mit der Glocke, so erlischt wegen mangelnden Oxygens die Flamme sehr bald und die Glocke haftet fest an dem Teller. Stellt man die Verbindung zwischen der atmosphärischen Luft und der Luft der Glocke wieder her, so dringt die äussere Luft hörbar ein. In den meisten Fällen wird die Lichtflamme schon durch Verbrennung des Oxygens erloschen sein, ehe noch die Luftverdünnung dazu beitragen kann.

16. In der Lehre von der Elektricität ist es ebenfalls nicht genau, wenn man sagt, dass bei der Entladung verstärkter Elektricität über Wasser die Kugeln des Ausladers erheblich weiter von einander entfernt sein können, als ohne dasselbe; denn es kommt offenbar auf die Summe der Erhebungen der Kugeln des Ausladers über die Wasserfläche an, und diese Entfernung wird man ziemlich gleich jener finden, bei welcher der Funke einer elektrischen Batterie ohne Hinzuziehung einer Wasserfläche von einer Kugel des Ausladers zur andern überschlägt.

Digitized by Google

XXV.

Neue Untersuchungen über die Bestimmung einer gleichseitigen Hyperbel vermittelst vier gegebener Bedingungen.

Von

Herrn Fr. Seydewitz

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

Die „Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère, au moyen de quatre conditions données, par M. M. Brianchon et Poncelet" im 11ten Bande der Gergonne'schen Annales de Mathématiques, pag. 205—220, folgten auf eine ähnliche Abhandlung im 8ten Bande derselben Annalen, in welcher Herr Coste Brianchon's Konstruktionen der Kegelschnitte auf den besondern Fall der Parabel angewandt hatte. Während aber die letztere für uns kein Interesse weiter als das von Corollaren darbietet, welche durch Annahme einer unendlich-entfernten Tangente unter fünf Bedingungs-Elementen sich unmittelbar aus bereits gelösten allgemeinern Aufgaben ableiten lassen, entspricht die erstere auch jetzt noch einem wesentlichen Bedürfniss der Wissenschaft, indem die allgemeinere Aufgabe, einen Kegelschnitt vermittelst des Asymptoten-Winkels, m beliebiger Punkte und $4-m$ beliebiger Tangenten zu bestimmen, soviel ich weiss, noch nicht zur Erledigung gekommen ist. In dem Folgenden sollen diese Untersuchungen fortgesetzt werden. Vorher aber dürfte es angemessen erscheinen, die in jener Abhandlung enthaltenen Aussagen, deren Beweise eine recht passende Uebung für Schüler sein werden, hier kurz ins Gedächtniss zurückzurufen.

Lehrsätze.

a. In jedem, einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreieck ist der Durchschnitt der drei Höhen ein Punkt der Curve.

b. In jedem, einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen rechtwinkligen Dreieck ist die der Hypotenuse entsprechende Höhe eine Tangente an der Curve.

Digitized by Google

c. Legt man durch jeden der Mittelpunkte zweier Sehnen einer gleichseitigen Hyperbel, oder auch durch jeden von zwei beliebigen Punkten, oder durch einen der ersteren und durch einen der letzteren bezüglich eine Parallele mit der Sehne oder mit der harmonischen Polare des anderen Punktes, so geht der Kreis, welcher diese zwei Punkte und den Durchschnitt der beiden Parallelen enthält, durch den Mittelpunkt der Curve.

d. Ist von drei Punkten ein jeder in Bezug auf eine gleichseitige Hyperbel der harmonische Pol der Geraden, welche die beiden anderen enthält, so geht der durch diese drei Punkte bestimmte Kreis durch den Mittelpunkt der Curve.

e. Der Kreis, welcher die drei Durchschnitte der Diagonalen eines vollständigen Vierseits enthält, geht durch die Mittelpunkte der diesem Vierseit eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln.

f. Der Kreis, welcher die drei Durchschnitte der Gegenseiten eines vollständigen Vierecks enthält, geht durch den Mittelpunkt der diesem Viereck umschriebenen gleichseitigen Hyperbel.

g. Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche einerlei Dreiecke umschrieben sind, liegen auf dem Umfange desjenigen Kreises, welcher durch die Fusspunkte der Höhen dieses Dreiecks geht, und der zugleich auch die drei Seiten und die Abstände der Ecken von dem Höhenpunkte des Dreiecks hälftet.

Aufgaben,

welche durch diese Sätze gelöst worden sind:

Eine gleichseitige Hyperbel zu beschreiben, von welcher man *a*) 3 Punkte und die Tangente in einem derselben; *b*) 2 Punkte und die Tangenten in beiden; *c*) 2 Punkte, die Tangente in einem dieser Punkte und irgend eine andere Tangente; *d*) 4 Punkte; *e*) 3 Punkte und eine beliebige Tangente; *f*) 4 Tangenten kennt.

§. 1.

Sind (Taf. IV. Fig. 1.) Sp, Sq die Asymptoten einer beliebigen Hyperbel, und aa_1, bb_1 zwei beliebige Tangenten derselben, welche den ersteren bezüglich in a, b; a_1, b_1 begegnen, so sind bekanntlich die Geraden ab_1 und a_1b parallel, und man hat demnach, wenn noch durch den Durchschnitt C von aa_1 und bb_1 die Geraden Cp, Cq mit den Asymptoten parallel gezogen werden:

$$ap : Sp = aC : a_1C = b_1C : bC = Sp : bp,$$

also $ap \,.\, bp = Sp^2$, und macht man $sp = Sp$, so ist:

$$Sa : sa = Sp \,.\, (Sp + pa) : sp \,.\, (sp - pa) =$$
$$pa \,.\, (pb + Sp) : pa \,.\, (pb - sp) =$$
$$Sb : sb, \text{ d. h.}$$

die vier Punkte S, a, s, b und demnach auch die vier Strahlen CS, Ca, Cs, Cb sind harmonisch; und da das Nämliche von den vier Strahlen CS, Cp, Cs, Cq gilt, weil $Cq \parallel Sp$ und $Sp = sp$; da ferner zur Bestimmung der Strahlen Cp und Cq der Punkt C und die blosse Richtung der Asymptoten hinreichen, und da die Lage zweier Strahlen CS, Cs vollkommen bestimmt ist, wenn sie

Digitized by Google

mit jedem von zwei gegebenen Linienpaaren harmonisch sind, so erhalten wir den

Satz 1.

Die Mittelpunkte aller Hyperbeln, welche zwei gegebene Gerade berühren und nach denselben zwei unendlich-entfernten Punkten gehen, gehören einem Systeme von zwei geraden Linien an, welche sowohl mit den beiden gegebenen, als mit den, von ihrem Durchschnitte nach den unendlich-entfernten Punkten gehenden Geraden harmonisch sind.

Wir können das in Rede stehende System zweier Geraden leicht vermittelst des blossen Lineals und eines festen Kreises construiren. Sind nämlich (Taf. IV. Fig. 2.) die Linienpaare Ca, Ca_1 und Cb, Cb_1 gegeben, und ist eine beliebige Gerade A gezogen, welche von ihnen in den entsprechenden Punkten a, a_1; b, b_1 geschnitten wird, so verbinde man diese Punkte mit einem beliebigen Punkte B des Hülfskreises durch die Geraden a, a_1, b, b_1, welche ihn zum zweitenmal in den entsprechenden Punkten α, α_1, β, β_1 schneiden; ziehe sofort die Geraden $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$ oder b^0 und b'_0, welche sich im Punkte α_0, und die Geraden $\alpha\beta_1$ und $\alpha_1\beta$ oder $b^0{}_1$ und b_0, welche sich im Punkte β_0 kreuzen; ziehe endlich die Gerade $\alpha_0\beta_0$, die dem Kreise in den Punkten γ und γ_1 begegnet, und verbinde die letzteren mit B durch zwei Gerade c und c_1, welche die Gerade A in den gleichnamigen Punkten schneiden. Zuletzt ziehe man die Geraden Cc und Cc_1, so sind dieselben sowohl mit Ca, Ca_1, als mit Cb, Cb_1 harmonisch.

Denn zieht man noch die Geraden $a\gamma$, $a\gamma_1$ und $a_1\gamma$, $a_1\gamma_1$ oder c^0, $c^0{}_1$ und c_0, c'_0, so sind der Reihe nach folgende Doppelverhältnisse einander gleich:

$$\frac{bc}{bc_1} : \frac{b_1c}{b_1c_1} = \frac{\sin . bc}{\sin . bc_1} : \frac{\sin . b_1c}{\sin . b_1c_1} = \frac{\sin . b^0c^0}{\sin . b^0c^0{}_1} : \frac{\sin . b^0{}_1c^0}{\sin . b^0{}_1c^0{}_1}$$

$$= \frac{\alpha_0\gamma}{\alpha_0\gamma_1} : \frac{\beta_0\gamma}{\beta_0\gamma_1} = \frac{\sin . b'_0c_0}{\sin . b'_0c'_0} : \frac{\sin . b_0c_0}{\sin . b_0c'_0} = \frac{\sin . b_1c}{\sin . b_1c_1} : \frac{\sin . bc}{\sin . bc_1}$$

$$= \frac{b_1c}{b_1c_1} : \frac{bc}{bc_1};$$

oder mit Worten: Es sind der Reihe nach die Gerade A, die Strahlbüschel B, α, die Gerade $\alpha_0\beta_0$, die Strahlbüschel α_1, B, und die Gerade A in Ansehung der entsprechenden Elemente b, c, b_1, c_1; b, c, b_1, c_1; b^0, c^0, $b^0{}_1$, $c^0{}_1$; α_0, γ, β_0, γ_1; b'_0, c_0, b_0, c'_0; b_1, c, b, c_1; b_1, c, b, c_1 projektivisch; folglich ist auch die Gerade A mit sich selber in Ansehung der entsprechenden Punkte b, c, b_1, c_1 und b_1, c, b, c_1 projektivisch; also $bc : bc_1 = b_1c : b_1c_1$, und ebenso zeigt man, dass $ac : ac_1 = a_1c : a_1c_1$; woraus folgt, dass auch die Strahlbüschel Cb, Cc, Cb_1, Cc_1 und Ca, Cc, Ca_1, Cc_1 beide harmonisch sind. (Vgl. Steiner's Abh. geom. Gest. §. 17. II., §. 46. III. und Geometrische Konstruktionen §. 20., Aufg. 4.).

Für den Fall der gleichseitigen Hyperbel ist der Asymptoten-Winkel ein rechter, folglich (Taf. IV. Fig. 1.) Cp senkrecht auf Sp und W. SCp = W. sCp; also:

Digitized by Google

Satz 2.

Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche zwei gegebene Gerade berühren und deren Asymptoten einerlei Richtungen haben, gehören einem Systeme von zwei geraden Linien an, welche mit den beiden gegebenen Geraden harmonisch sind, und mit einander Winkel bilden, die nach diesen Richtungen hin gehälftet werden.

Anmerkung: Nimmt man auf der Verlängerung von Cp einen Punkt M so an, dass $Mp \,.\, Cp = ap \,.\, bp = Sp^2 = sp^2$, so ist $\Delta Mpa \sim \Delta Cpb$, und $\Delta Mpb \sim \Delta Cpa$; also W. aMp = W. Cbp und W. aCp = W. Mbp; folglich auch W. aib = W. apM = R, und W. akb = W. apC = R. Demnach ist M der Höhenpunkt des Dreieks Cab. Ferner ist W. MSC ein rechter, weil $Mp \,.\, Cp = Sp^2$, und es ist $MS^2 = Mp \,.\, MC = Mk \,.\, Mb$. Beschreibt man also um M mit $MS = Ms$, als Halbmesser, einen Kreis, welcher Ca in T und t schneidet, so ist $MT^2 = Mt^2 = Mk \,.\, Mb$, also W. MTb = W. Mtb = R. Demnach sind nicht nur CS und Cs, sondern auch bT und bt Tangenten dieses Kreises, und jede Ecke des Dreiecks Cab ist demzufolge der harmonische Pol ihrer Gegenseite. Aus diesem Grunde nennen wir diesen Kreis den zu dem Dreiecke Cab, (welches immer stumpfwinklig sein muss), zugehörigen harmonischen Kreis.

§. 2.

Denken wir uns jetzt drei Gerade a, b, c gegeben, und aus ihren Durchschnitten A, B, C drei beliebige Parallelen p, p_1, p_2 gezogen, so liegt nach dem Vorigen der Mittelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel, welche die Geraden a, b, c berührt und deren eine Asymptote mit p, p_1, p_2 einerlei Richtung hat, auf einer von zwei Geraden S und s, welche mit c und b harmonisch sind, und einen Winkel einschliessen, der von p gehälftet wird; ebenso aber auch auf einer von zwei Geraden S_1 und s_1, und wieder auf einer von zwei Geraden S_2 und s_2, welche resp. mit c und a, mit a und b harmonisch sind und mit einander Winkel bilden, die von p_1, von p_2 gehälftet werden. Diese drei Paar Geraden schneiden sich also in denselben vier Punkten σ, σ_1, σ_2, σ_3. Ferner ist von den in Taf. IV. Fig. 3. näher bezeichneten Winkeln

$$SS_1 = pS_1 - pS \text{ und } ss_1 = p_1s_1 - p_1s;$$

aber da

$$p \parallel p_1 \text{ und W. } pS = \text{W. } ps,\ \text{W. } p_1S_1 = \text{W. } p_1s_1,$$

so ist

$$\text{W. } pS = \text{W. } ps = \text{W. } p_1s \text{ und W. } pS_1 = \text{W. } p_1S_1 = \text{W. } p_1s_1;$$

folglich ist W. SS_1 = W. ss_1 und es liegen demnach die vier Punkte σ, σ_1, σ_2, σ_3 auf dem Umfange eines und desselben Kreises. In Bezug auf diesen Kreis aber sind offenbar die Ecken A, B, C des von a, b, c gebildeten Dreiecks die harmonischen Pole ihrer Gegenseiten; er ist also der zu diesem Dreiecke zugehörige

Digitized by Google

harmonische Kreis und daher von der Annahme der Parallelen p, p_1, p_2 unabhängig. Hieraus ergibt sich folgender merkwürdige

Satz 3.

Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche drei gegebene Gerade berühren, liegen auf dem Umfange eines einzigen Kreises, nämlich des harmonischen Kreises, welcher zu dem von den gegebenen Geraden gebildeten Dreiecke gehört; und zwar sind jede vier Punkte dieses Kreises, welche ein vollständiges Viereck bilden, dessen Gegenseiten mit den gegebenen Geraden paarweise convergiren, die Mittelpunkte solcher vier gleichseitigen Hyperbeln, welche einerlei Asymptoten-Richtung haben; und man erhält diese Richtung, wenn man die von den Gegenseiten jenes Vierecks gebildeten Winkel hälftet.

Anmerkung: Im Obigen liegt zugleich der Beweis des von Herrn Heinen im 3. Bande des Crelle'schen Journals bekannt gemachten Satzes, dass in einem Kreisviereck die sechs Linienpaare, welche die von den Gegenseiten und von den Diagonalen gebildeten Winkelhälften, drei zu drei parallel sind.

§. 3.

Lassen wir zwei der so eben betrachteten Geraden a, b, c mit einander einen Winkel von zwei Rechten bilden, so fallen die beiden Punkte, in welchen sie von einer beliebigen gleichseitigen Hyperbel berührt werden, mit einander und mit dem Durchschnitte beider Geraden, also mit einem gegebenen Punkte zusammen. Fällt man von diesem Punkte, z. B. A, eine Senkrechte auf die dritte Gerade a, und errichtet im Durchschnitte von a und b (oder c) auf b (oder c) eine zweite Senkrechte, so stellt der Durchschnitt dieser beiden Senkrechten auch jetzt noch den Mittelpunkt, und der Durchschnitt von a und b einen Punkt des §. 1. und §. 2. besprochenen Kreises vor, und wir erhalten, als Corollar des vorigen, noch folgenden

Satz 4.

Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche zwei gegebene Gerade und zwar die eine in einem gegebenen Punkte berühren, liegen auf dem Umfange eines einzigen Kreises, welcher die letztere im Durchschnitte beider Geraden berührt, und dessen Mittelpunkt auf derjenigen Senkrechten liegt, welche aus dem auf der einen gegebenen Punkte auf die andere Gerade gefällt wird.

§. 4.

Die drei letzteren Sätze genügen nun zur Auflösung folgender Aufgaben:

Eine gleichseitige Hyperbel zu beschreiben, von welcher man *a*) 2 beliebige Tangenten und eine Asymptote; *b*) 2 beliebige Tangenten, den Berührungspunkt

Digitized by Google

der einen und die Richtung einer Asymptote; *c*) 2 Tangenten und ihre Berührungspunkte; *d*) 3 Tangenten und die Richtung einer Asymptote; *e*) 3 Tangenten und den Berührungspunkt der einen; *f*) 4 Tangenten kennt.

Es lassen sich nämlich immer zwei Oerter des Mittelpunktes der gesuchten Hyperbel, und vermittelst dessen sodann Alles andere finden. Uebrigens wird man bemerken, dass die Aufgaben *a*), *b*) und *d*) nur besondere Fälle der schon gelösten allgemeineren sind: *a*) einen Kegelschnitt zu beschreiben, von welchem man einen Punkt, drei beliebige Tangenten und den Berührungspunkt der einen; *b*) 2 Punkte, 2 beliebige Tangenten und den Berührungspunkt der einen; *d*) 2 Punkte und 3 Tangenten kennt. Ferner wird man finden, dass nicht nur die Aufgaben *c*) und *f*), sondern auch, was sie selber nicht bemerkt zu haben scheinen, die Aufgabe *e*) vermittelst der von den Herren Brianchon und Poncelet entdeckten Sätze aufgelöst werden können. Bilden nämlich zwei Seiten eines um eine gleichseitige Hyperbel beschriebenen Vierseits mit einander einen Winkel von zwei Rechten, so erhält man, wie sehr leicht einzusehen, als Zusatz zu dem oben unter *e* angeführten Satze noch den folgenden:

Satz 5.

Die Mittelpunkte derjenigen gleichseitigen Hyperbeln, welche drei gegebene Gerade, und zwar die eine in einem gegebenen Punkte berühren, liegen auf dem Umfange desjenigen Kreises, welcher die Verbindungslinie des gegebenen Punktes und des Durchschnittes der beiden andern Geraden in dem ersteren Punkte berührt, und die dritte Gerade zum zweitenmal in einem Punkte schneidet, welcher zu ihren Durchschnittspunkten mit den beiden andern Geraden und zu dem gegebenen Berührungspunkte der vierte harmonische, und zwar dem letztern zugeordnete Punkt ist.

Und auf ähnliche Weise liessen sich aus den Lehrsätzen *f* und *g* noch folgende herleiten:

Satz 6.

Der Mittelpunkt derjenigen gleichseitigen Hyperbel, welche durch drei gegebene Punkte geht und in einem derselben eine gegebene Gerade berührt, liegt auf dem Umfange eines Kreises, welcher den letzteren Punkt und den Durchschnitt der gegebenen Geraden mit der Verbindungslinie der beiden andern Punkte enthält, und diejenige Gerade berührt, welche zu den Verbindungslinien des einen mit den beiden anderen gegebenen Punkten und zu der gegebenen Geraden der vierte harmonische, und zwar der letzteren zugeordnete Strahl ist.

Satz 7.

Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, und in

Digitized by Google

einem derselben eine gegebene Gerade berühren, liegen auf dem Umfange eines einzigen Kreises, welcher durch den gegebenen Berührungspunkt, durch den Fusspunkt der, von dem andern gegebenen Punkte auf die gegebene Gerade gefällten Senkrechten und durch die Mitte des Abstandes der beiden gegebenen Punkte von einander geht.

Endlich dürfen wir nicht übersehen, dass in den Aufgaben *f*), *e*) und *c*) einer der Kreise, der zur Bestimmung des Mittelpunktes der gesuchten Kurve dient, sich durch eine Gerade ersetzen lässt. Denn nach dem bekannten Newton'schen Satze liegen „die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, welche vier gegebene Gerade berühren, auf derjenigen geraden Linie, welche die drei Diagonalen des von jenen gebildeten vollständigen Vierseits hälftet;" und demzufolge „die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, welche drei gegebene Gerade, und zwar die eine in einem gegebenen Punkte berühren, auf derjenigen geraden Linie, welche die letztere Gerade und den Abstand des gegebenen Punktes vom Durchschnitte der beiden anderen gegebenen Geraden hälftet;" und endlich „die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, welche zwei gegebene Gerade in zwei gegebenen Punkten berühren, auf derjenigen geraden Linie, welche den Durchschnitt der gegebenen Geraden mit dem Mittelpunkte des Abstandes der gegebenen Punkte von einander verbindet."

Anmerkung 1. Vier beliebige Gerade bilden vier Dreiecke; also liegen die Mittelpunkte der gleichseitigen Hyperbeln, welche diese vier Geraden berühren, nach Satz 3. auf den Umfängen der vier, diesen Dreiecken zugehörigen harmonischen Kreise. Verbinden wir hiermit den Lehrsatz *e* und den Newton'schen Satz, so ergibt sich:

Satz 8.

Die vier harmonischen Kreise, welche zu den von vier beliebigen Geraden gebildeten Dreiecken gehören, sowie derjenige Kreis, welcher die Durchschnitte der Diagonalen des von diesen vier Geraden gebildeten vollständigen Vierseits enthält, haben diejenige Gerade, welche diese drei Diagonalen hälftet, zur gemeinschaftlichen Sekante.

Zugleich begegnen wir hier, zunächst für stumpfwinklige Dreiecke, dem von Herrn Heinen an der schon angeführten Stelle bewiesenen Satze:

Satz 9.

Die Höhenpunkte der vier Dreiecke, welche von vier beliebigen Geraden gebildet werden, liegen in einer geraden Linie.

Anmerkung 2. Die Aufgaben *e*) und *c*) führen zu ähnlichen Sätzen, als die vorigen, von denen sie im Grunde nur besondere Fälle sind.

Anmerkung 3. Aus §. 1. Anmerk. und §. 2. ergibt sich

Digitized by Google

Satz 10.

Konstruirt man die vier harmonischen Kreise A, B, C, D, welche resp. zu den, von vier beliebigen Geraden a, b, c, d gebildeten (stumpfwinkligen) Dreiecken bcd, acd, abd, abc gehören, und zieht aus den Ecken ab, ac, bc eines beliebigen dieser Dreiecke an die zu den drei anderen gehörigen harmonischen Kreise C, B, A (wo möglich) drei Tangentenpaare, so schneiden sich diese letzteren gegenseitig in vier Punkten, und diese vier Punkte liegen auf dem Umfange des zum ersteren Dreiecke abc zugehörigen harmonischen Kreises D.

§. 5.

Durch den 3ten Satz werden wir auch noch in den Stand gesetzt, für den Fall, wenn drei Tangenten und ein beliebiger Punkt einer gleichseitigen Hyperbel gegeben sind — eine Aufgabe, welche in der genannten Abhandlung ganz unerledigt geblieben ist — einen Kreis zu zeichnen, welcher den Mittelpunkt derselben enthält. Es ist mir aber nicht gelungen, einen andern zweiten Ort dieses Mittelpunktes zu entdecken, als denjenigen Kegelschnitt, welcher die Mittelpunkte aller Kegelschnitte enthält, die 3 gegebene Gerade berühren und durch einen gegebenen Punkt gehen. (Siehe Annales de Math. tom. XI. pag. 385—389).

Was endlich den Fall betrifft, wenn von einer gleichseitigen Hyperbel zwei Tangenten und zwei beliebige Punkte gegeben sind, so sehe ich mich genöthigt, denselben einer besondern Untersuchung zu unterwerfen, weil sich hier in die Abhandlung der Herren Brianchon und Poncelet eine Unrichtigkeit eingeschlichen hat, welche durch Herrn Gergonne selbst noch verschlimmert worden ist.

Erstere behaupten nämlich p. 218 ohne Beweis, dass „die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche zwei gegebene „Tangenten berühren und durch zwei gegebene Punkte gehen, auf „einem einzigen Kreisumfange liegen;“ und hiermit übereinstimmend pag. 219: „dass die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, welche „zwei gegebene Gerade berühren und durch zwei gegebene Punkte „gehen, auf einem andern Kegelschnitte liegen, welcher den Durchschnitt der beiden gegebenen Geraden, den Mittelpunkt des Abstandes der beiden gegebenen Punkte und den Mittelpunkt des „durch die ersteren auf der Verbindungslinie der letzteren bestimmten Segmentes enthält.“

Dagegen kommt Herr Gergonne in demselben Bande pag. 393 durch analytische Betrachtungen zu dem Resultate, dass der letztere Ort weder ein Kegelschnitt, noch ein System von Kegelschnitten, sondern eine Curve vom 4ten Grade sei. — Wir werden sehen, dass im ersten Satze ein System von zwei Kreisen, und im letzten allerdings ein System von zwei Kegelschnitten zu setzen ist, was, soviel ich weiss, noch nicht synthetisch bewiesen worden ist, und eine passende Gelegenheit darbietet, die Vorzüge der Steiner'schen Methode an einem Beispiele zu zeigen.

Es seien (Taf. IV. Fig. 4.) B, B_1, a, b vier beliebige Punkte eines Kegelschnittes, Bd, B_1c die Tangenten in B, B_1, welche

Digitized by Google

von der Geraden ab in den Punkten d, c geschnitten werden; ferner seien die Geraden Ba, Bb, B_1a, B_1b gezogen: so sind, nach Steiner's Abh. geom. Gest. Theil I. §. 38. III. die Strahlbüschel B und B_1 in Ansehung der entsprechenden Strahlen Ba, Bb, Bd, BB_1 und B_1a, B_1b, B_1B, B_1c projectivisch; das erstere aber ist mit der Geraden ab in Ansehung der entsprechenden Elemente Ba, Bb, Bd. BB_1 und a, b, d, f; und das zweite mit derselben Geraden in Ansehung der entsprechenden Elemente B_1a, B_1b, B_1B, B_1c und a, b, f, c perspektivisch; also ist diese Gerade mit sich selber in Ansehung der entsprechenden Punkte a, b, d, f und a, b, f, c projektivisch; (Abh. geom. Gest. §. 11. III.) d. h.

$$\frac{ad}{bd} : \frac{af}{bf} = \frac{af}{bf} : \frac{ac}{bc} \text{ oder } \frac{af^2}{bf^2} = \frac{ad \cdot ac}{bd \cdot bc},$$

und

$$\frac{ab}{fb} : \frac{ad}{fd} = \frac{ab}{cb} : \frac{af}{cf} \text{ oder } \frac{af}{bf} = \frac{cf \cdot ad}{df \cdot cb},$$

also auch

$$\frac{df^2}{cf^2} = \frac{da \cdot db}{ca \cdot cb}.$$

Sind also die Punkte a, b und die Tangenten Bd, B_1c gegeben, so sind die Verhältnisse $\frac{af}{bf}$ und $\frac{df}{cf}$, und somit der Punkt f gegeben. Offenbar aber gibt es auf ab zwei solche Punkte, nämlich f und f_1, wovon der eine auf ab selbst und der andere auf ihrer Verlängerung liegt, und es ist

$$\frac{af}{bf} = \frac{af_1}{bf_1} \text{ und } \frac{df}{cf} = \frac{df_1}{cf_1}.$$

Also hat man den

Satz 11.

Die Berührungssehnen aller Kegelschnitte, welche zwei gegebene Gerade berühren, und durch zwei gegebene Punkte gehen, convergiren in dem einen oder dem anderen von zwei festen Punkten, welche sowohl mit den beiden gegebenen Punkten, als mit den Durchschnitten der Verbindungslinie dieser letzteren und der beiden gegebenen Geraden harmonisch sind.

Verbinden wir jetzt die Punkte f und f_1 mit dem Durchschnitte A der beiden Tangenten durch die Geraden Af und Af_1, so ist jede der letzteren die harmonische Polare des Punktes f, f_1, welcher der anderen angehört, und zwar in Bezug auf alle Kegelschnitte, deren Berührungssehnen durch diesen Punkt gehen. Wir können also hier den obigen Lehrsatz c. in Anwendung bringen. Legt man nämlich durch die Mitte m der Sehne ab z. B. mit Af_1 eine Parallele, und durch den Punkt f mit ab eine andere Parallele —, so liegen die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche die Punkte a und b enthalten und die Geraden Ac und Ad berühren, und zwar so, dass die Berührungssehne durch den Punkt f geht, auf dem Umfange desjenigen Kreises, welcher die Punkte

Digitized by Google

m, f und den Durchschnitt beider Parallelen enthält, d. h. hier, wo die eine Parallele mit ab zusammenfällt — welcher die andere Parallele im Punkte m berührt.

Satz 12.

Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche zwei gegebene Gerade berühren und durch zwei gegebene Punkte gehen, sind auf die Umfänge zweier Kreise vertheilt, welche 1) sich im Mittelpunkte des Abstandes der gegebenen Punkte von einander schneiden; welche 2) dieselbe Linie zum andernmal in zwei Punkten treffen, die sowohl mit den gegebenen Punkten als mit den Durchschnitten ihrer Verbindungslinie und der gegebenen Geraden harmonisch sind, und deren jeder 3) im ersteren Punkte eine Gerade berührt, welche mit der Verbindungslinie des ihm von den beiden letzteren nicht angehörigen Punktes und des gegenseitigen Durchschnittes der gegebenen Geraden parallel läuft.

Um nun auch den zweiten Theil unserer Behauptung zu beweisen, so ist zunächst klar, dass die Gerade Ak, welche A mit der Mitte der Sehne BB_1 verbindet, nach dem Mittelpunkte des Kegelschnittes gerichtet ist, welcher Ad, Ac in B, B_1 berührt.

Legen wir ferner durch einen der letzteren Punkte, z. B. B_1, mit ab eine Parallele B_1p, ziehen Bb (oder Ba), welche B_1p in p schneidet, ferner durch einen der Punkte f, f_1, z. B. f, die Gerade fp, welche Ad in r. und sofort ar, welche B_1p in q schneidet: so liegen im Fünfecke B_1Bbaq die Durchschnitte f und p der Gegenseiten B_1B und ab, B_1q und Bb mit dem Punkte r, wo die fünfte Seite aq von der durch ihre Gegenecke B gehenden Geraden Bd geschnitten wird, in einer Geraden; also ist, nach Abh. geom. Gest. §. 42. II, dieses Fünfeck einem Kegelschnitte eingeschrieben, welcher Ad in B — sowie, weil BB_1 durch f geht, Ac in B_1 — berührt. Verbinden wir also die Mittelpunkte m und i der Sehnen ab und B_1q, oder, was einerlei ist, den einen m mit dem Durchschnitte s von B_1b und aq, durch die Gerade msi, so geht auch diese letztere nach dem Mittelpunkte des Kegelschnittes BB_1ab. Folglich liegt dieser Punkt im Durchschnitte der Geraden An und msi.

Nachdem wir jetzt noch die Gerade Ak parallel mit BB_1 gezogen, so dass Ak, Ac, An, Ad einen harmonischen Büschel bilden: denken wir uns die Berührungssehne BB_1 um den festen Punkt f gedreht und hiemit die ganze Figur unter den angegebenen Bedingungen in Bewegung gesetzt, so bilden die Geraden fB, Ak, An, B_1q, fp, bB, bB_1, aq, aB_1, aB, ms um die entsprechenden festen Punkte f, A, A, den unendlich-entfernten Punkt auf ab, f, b, b, a, a, a, m eben so viele Strahlbüschel, welche wir, um die Figur nicht zu überladen, durch die erzeugenden Geraden selber bezeichnen können.

Nun sind die Strahlbüschel fB und Ak projektivisch-gleich, und die Strahlbüschel Ak und An sind ebenfalls projektivisch *). Denn es ist

*) Und zwar bilden sie ein Involutions-System. Setzt man an die Stelle

$$\frac{\sin . BAn}{\sin . B_1An} = \frac{\sin . BAk}{\sin . B_1Ak} \text{ und } \frac{\sin . BAn_1}{\sin . B_1An_1} = \frac{\sin . BAk_1}{\sin . B_1Ak_1},$$

wenn An_1 und Ak_1 zwei ähnliche Gerade, wie An und Ak bezeichnen; also ist auch

$$\frac{\sin . BAn}{\sin . B_1An} : \frac{\sin . BAn_1}{\sin . B_1An_1} = \frac{\sin . BAk}{\sin . B_1Ak} : \frac{\sin . BAk_1}{\sin . B_1Ak_1}.$$

Folglich sind die Strahlbüschel fB und An projektivisch.

Ferner liegt der Strahlbüschel fB sowohl mit bB_1 und B_1q, als mit bB perspektivisch. Folglich sind die Strahlbüschel B_1q und bB projektivisch, und zwar perspektivisch, weil, wenn B_1q mit ab zusammenfällt, dasselbe auch von bB gilt. (§. 14). Deshalb liegen auch die Strahlbüschel B_1q und fp perspektivisch, indem p eine Gerade beschreibt, und da auch die Strahlbüschel fp und aq wegen des perspektivischen Durchschnittes Ad projektivisch sind, so sind der Reihe nach die Strahlbüschel fB, bB_1, B_1q, fp, aq, also auch bB_1 mit aq, und beide mit fB projektivisch. Fällt aber bB_1, so fällt auch aq mit ab zusammen; also beschreibt der Punkt s eine gerade Linie, und nun sind der Reihe nach die Strahlbüschel ms, bB_1, fB, An, also auch ms mit An projektivisch. Also beschreibt, nach Abh. geom. Gest. §. 38. IV., der Durchschnitt M dieser Geraden einen Kegelschnitt, der durch m, A und die Mitte von dc geht.

Satz 13.

Die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, welche zwei gegebene Gerade berühren und durch zwei gegebene Punkte gehen, sind auf die Umfänge zweier Kegelschnitte vertheilt, welche mit einander den Durchschnitt der gegebenen Geraden, die Mitte des Abstandes der gegebenen Punkte und die Mitte des Segmentes, das auf dieser Linie durch jene Geraden bestimmt wird, gemein haben; und zwar ist der eine oder der andere dieser zwei Kegelschnitte zu verstehen, je nachdem die jedesmalige Berührungssehne zwischen den gegebenen Punkten hindurchgeht, oder nicht.

---

des Systems zweier Geraden Ac, Ad einen beliebigen Kegelschnitt, so sind auch jetzt noch die Strahlbüschel fB, Ak und An der Reihe nach projektivisch; also beschreibt der Punkt n einen Kegelschnitt, welcher durch den beliebig angenommenen festen Punkt f und durch den Mittelpunkt A des ersteren geht. Soviel als gelegentliche Bemerkung zu Seite 422 des 2ten Theiles des Archivs.

XXVI.

Ueber die höhern Differentiale der Function $y = \sqrt{a^2 - b^2x^2}$.

Von

dem Herausgeber.

Um die Begriffe zu fixiren, nehmen wir an, dass $a^2 - b^2x^2$ eine positive Grösse sein soll, so dass y reell ist. Ferner nehmen wir an, dass in der Gleichung

$$y = \sqrt{a^2 - b^2x^2}$$

die Quadratwurzel positiv genommen werden und a eine positive Grösse sein soll. Unter dieser Voraussetzung können wir

$$y = a\sqrt{1 - \frac{b^2x^2}{a^2}}$$

setzen, und da nun nach dem Vorhergehenden

$$a^2 - b^2x^2 = a^2(1 - \frac{b^2x^2}{a^2}),$$

also auch $1 - \frac{b^2x^2}{a^2}$ eine positive Grösse ist, so kann

$$\frac{bx}{a} = \sin \Theta$$

gesetzt und Θ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden, wo dann $\cos \Theta$ stets eine positive Grösse ist. Dies vorausgesetzt, ist nach dem Obigen

$$y = a \cos \Theta.$$

Aus der Gleichung

$$\sin \Theta = \frac{bx}{a}$$

folgt, wenn man nach x differentiirt,

$$\frac{d \sin \Theta}{dx} = \frac{d \sin \Theta}{d\Theta} \cdot \frac{d\Theta}{dx} = \cos \Theta \frac{d\Theta}{dx} = \frac{b}{a},$$

und folglich

$$\frac{d\Theta}{dx} = \frac{b}{a} \cos \Theta^{-1}.$$

Digitized by Google

Aus der Gleichung

$$y = a \cos \Theta$$

erhält man durch Differentiation nach x

$$\frac{dy}{dx} = a \frac{d \cos \Theta}{d\Theta} \cdot \frac{d\Theta}{dx} = -a \sin \Theta \frac{d\Theta}{dx},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\frac{dy}{dx} = -b \cos \Theta^{-1} \sin \Theta = -b \operatorname{tang} \Theta.$$

Differentiirt man von Neuem nach x, so erhält man

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -b \cos \Theta^{-1} \frac{d \sin \Theta}{d\Theta} \cdot \frac{d\Theta}{dx} + b \cos \Theta^{-2} \sin \Theta \frac{d \cos \Theta}{d\Theta} \cdot \frac{d\Theta}{dx}$$

$$= -b \frac{d\Theta}{dx} - b \cos \Theta^{-2} \sin \Theta^2 \frac{d\Theta}{dx}$$

$$= -\frac{b^2}{a} \cos \Theta^{-1} - \frac{b^2}{a} \cos \Theta^{-3} \sin \Theta^2$$

$$= -\frac{b^2}{a} \cos \Theta^{-3}(\cos \Theta^2 + \sin \Theta^2) = -\frac{b^2}{a} \cos \Theta^{-3}.$$

Mittelst neuer Differentiation nach x erhält man

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3b^2}{a} \cos \Theta^{-4} \frac{d \cos \Theta}{d\Theta} \cdot \frac{d\Theta}{dx}$$

$$= -\frac{3b^2}{a} \cos \Theta^{-4} \sin \Theta \frac{d\Theta}{dx}$$

$$= -\frac{3b^2}{a^2} \cos \Theta^{-5} \sin \Theta.$$

Differentiirt man nun wieder nach x, so ergiebt sich

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{3b^2}{a^2} \cos \Theta^{-5} \frac{d \sin \Theta}{d\Theta} \cdot \frac{d\Theta}{dx} + \frac{15b^4}{a^2} \cos \Theta^{-6} \sin \Theta \frac{d \cos \Theta}{d\Theta} \cdot \frac{d\Theta}{dx}$$

$$= -\frac{3b^2}{a^2} \cos \Theta^{-4} \frac{d\Theta}{dx} - \frac{15b^4}{a^2} \cos \Theta^{-6} \sin \Theta^2 \frac{d\Theta}{dx}$$

$$= -\frac{3b^4}{a^2} \cos \Theta^{-5} - \frac{15b^4}{a^2} \cos \Theta^{-7} \sin \Theta^2$$

$$= -\frac{b^4}{a^2} \cos \Theta^{-7}(3\cos \Theta^2 + 15\sin \Theta^2)$$

$$= -\frac{b^4}{a^2} \cos \Theta^{-7}(3 + 12\sin \Theta^2).$$

Hieraus ergiebt sich durch neue Differentiation nach x

Digitized by Google

$$\frac{d^5y}{dx^5} = -\frac{24b^4}{a^2}\cos\Theta^{-7}\sin\Theta\frac{d\sin\Theta}{d\Theta}\cdot\frac{d\Theta}{dx}$$
$$+\frac{7b^4}{a^2}\cos\Theta^{-8}(3+12\sin\Theta^2)\frac{d\cos\Theta}{d\Theta}\cdot\frac{d\Theta}{dx}$$
$$= -\frac{24b^5}{a^5}\cos\Theta^{-7}\sin\Theta$$
$$-\frac{7b^5}{a^5}\cos\Theta^{-9}\sin\Theta(3+12\sin\Theta^2)$$
$$= -\frac{b^5}{a^5}\cos\Theta^{-9}\sin\Theta(24\cos\Theta^2+21+84\sin\Theta^2)$$
$$= -\frac{b^5}{a^5}\cos\Theta^{-9}\sin\Theta(45+60\sin\Theta^2).$$

Durch fernere Differentiation nach x erhält man hieraus

$$\frac{d^6y}{dx^6} = -\frac{b^5}{a^5}\cos\Theta^{-9}(45\cos\Theta+180\sin\Theta^2\cos\Theta)\frac{d\Theta}{dx}$$
$$-\frac{9b^5}{a^5}\cos\Theta^{-10}\sin\Theta^2(45+60\sin\Theta^2)\frac{d\Theta}{dx}$$
$$= -\frac{b^6}{a^5}\cos\Theta^{-9}(45+180\sin\Theta^2)$$
$$-\frac{9b^6}{a^5}\cos\Theta^{-11}\sin\Theta^2(45+60\sin\Theta^2)$$
$$= -\frac{b^6}{a^5}\cos\Theta^{-11}(45\cos\Theta^2+180\sin\Theta^2\cos\Theta^2$$
$$+405\sin\Theta^2+540\sin\Theta^4)$$
$$= -\frac{b^6}{a^5}\cos\Theta^{-11}(45+540\sin\Theta^2+360\sin\Theta^4).$$

Differentiirt man von Neuem nach x, so erhält man

$$\frac{d^7y}{dx^7} = -\frac{b^6}{a^5}\cos\Theta^{-11}(1080\sin\Theta\cos\Theta+1440\sin\Theta^3\cos\Theta)\frac{d\Theta}{dx}$$
$$-\frac{11b^6}{a^5}\cos\Theta^{-12}\sin\Theta(45+540\sin\Theta^2+360\sin\Theta^4)\frac{d\Theta}{dx}$$
$$= -\frac{b^7}{a^6}\cos\Theta^{-11}(1080\sin\Theta+1440\sin\Theta^3)$$
$$-\frac{11b^7}{a^6}\cos\Theta^{-13}\sin\Theta(45+540\sin\Theta^2+360\sin\Theta^4)$$
$$= -\frac{b^7}{a^6}\cos\Theta^{-13}\sin\Theta(1080\cos\Theta^2+1440\sin\Theta^3\cos\Theta^2$$
$$+495+5940\sin\Theta^2+3960\sin\Theta^4)$$
$$= -\frac{b^7}{a^6}\cos\Theta^{-13}\sin\Theta(1575+6300\sin\Theta^2+2520\sin\Theta^4).$$

Digitized by Google

Um das Gesetz, welchem die gefundenen Ausdrücke unterworfen sind, besser übersehen zu können, wollen wir dieselben im Folgenden nochmals zusammenstellen:

$$y = a \cos \Theta$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^1}{a^0} \cos \Theta^{-1} \sin \Theta$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^1} \cos \Theta^{-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{b^3}{a^2} \cos \Theta^{-3} \sin \Theta \,.\, 3$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{b^4}{a^3} \cos \Theta^{-7}(3 + 12 \sin \Theta^2)$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = -\frac{b^5}{a^4} \cos \Theta^{-9} \sin \Theta(45 + 60 \sin \Theta^2)$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = -\frac{b^6}{a^5} \cos \Theta^{-11}(45 + 540 \sin \Theta^2 + 360 \sin \Theta^4)$$

$$\frac{d^7y}{dx^7} = -\frac{b^7}{a^6} \cos \Theta^{-13} \sin \Theta(1575 + 6300 \sin \Theta^2 + 2520 \sin \Theta^4).$$

Hieraus schliesst man sogleich durch Induction, dass allgemein

$$\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} = -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n-1} \cos \Theta^{-(4n-1)} \left\{ \begin{array}{l} {}^{2n}A_0 + {}^{2n}A_1 \sin \Theta^2 \\ \quad + {}^{2n}A_2 \sin \Theta^4 \\ \quad + {}^{2n}A_3 \sin \Theta^6 \\ \quad \text{u. s. w.} \\ \quad + {}^{2n}A_{n-1} \sin \Theta^{2n-2} \end{array} \right.$$

und

$$\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}} = -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \cos \Theta^{-(4n+1)} \sin \Theta \left\{ \begin{array}{l} {}^{2n+1}A_0 + {}^{2n+1}A_1 \sin \Theta^2 \\ \quad + {}^{2n+1}A_2 \sin \Theta^4 \\ \quad + {}^{2n+1}A_3 \sin \Theta^6 \\ \quad \text{u. s. w.} \\ \quad + {}^{2n+1}A_{n-1} \sin \Theta^{2n-2} \end{array} \right.$$

ist.

Um dieses Gesetz allgemein zu beweisen, und zugleich das recurrirende Gesetz der in diesen Formeln vorkommenden numerischen Coefficienten zu finden, wollen wir aus $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}$ und $\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}}$ respective $\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}}$ und $\frac{d^{2n+2}y}{dx^{2n+2}}$ entwickeln.

Aus dem obigen Ausdrucke von $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}$ erhält man nämlich zuvörderst, wenn man von Neuem nach x differentiirt leicht:

$$\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}} = -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n-1}\cos\Theta - (4n-1)\left\{2\overset{2n}{A}_1\sin\Theta + 4\overset{2n}{A}_2\sin\Theta^3 + 6\overset{2n}{A}_3\sin\Theta^5 \text{ u. s. w.} + (2n-2)\overset{2n}{A}_{n-1}\sin\Theta^{2n-3}\right\}\cos\Theta\frac{d\Theta}{dx}$$

$$-(4n-1)b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n-1}\cos\Theta^{-4n}\sin\Theta\left\{\overset{2n}{A}_0 + \overset{2n}{A}_1\sin\Theta^2 + \overset{2n}{A}_2\sin\Theta^4 + \overset{2n}{A}_3\sin\Theta^6 \text{ u. s. w.} + \overset{2n}{A}_{n-1}\sin\Theta^{2n-2}\right\}\frac{d\Theta}{dx}$$

$$= -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}\cos\Theta - (4n-1)\left\{2\overset{2n}{A}_1\sin\Theta + 4\overset{2n}{A}_2\sin\Theta^3 + 6\overset{2n}{A}_3\sin\Theta^5 \text{ u. s. w.} + (2n-2)\overset{2n}{A}_{n-1}\sin\Theta^{2n-3}\right\}$$

$$-(4n-1)b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}\cos\Theta^{-(4n+1)}\sin\Theta\left\{\overset{2n}{A}_0 + \overset{2n}{A}_1\sin\Theta^2 + \overset{2n}{A}_2\sin\Theta^4 + \overset{2n}{A}_3\sin\Theta^6 \text{ u. s. w.} + \overset{2n}{A}_{n-1}\sin\Theta^{2n-2}\right\}$$

$$= -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}\cos\Theta^{-(4n+1)}\sin\Theta\left\{2\overset{2n}{A}_1 + 4\overset{2n}{A}_2\sin\Theta^2 + 6\overset{2n}{A}_3\sin\Theta^4 \text{ u. s. w.} + (2n-2)\overset{2n}{A}_{n-1}\sin\Theta^{2n-4}\right\}\cos\Theta^2$$

Digitized by Google

$$-(4n-1)b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}\cos\Theta^{-(4n+1)}\sin\Theta\left\{\begin{array}{l}{}^{2n}A_0+{}^{2n}A_1\sin\Theta^2\\ \quad+{}^{2n}A_2\sin\Theta^4\\ \quad+{}^{2n}A_3\sin\Theta^6\\ \quad\text{u. s. w.}\\ \quad+{}^{2n}A_{n-1}\sin\Theta^{2n-2}\end{array}\right.$$

Also ist

$$\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}}=-b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}\cos\Theta^{-(4n+1)}\sin\Theta\left\{\begin{array}{l}(4n-1)\,{}^{2n}A_0\\ \quad+{}^{2n}A_1[(4n-1)\sin\Theta^2+2\cos\Theta^2]\\ \quad+{}^{2n}A_2[(4n-1)\sin\Theta^2+4\cos\Theta^2]\sin\Theta^2\\ \quad+{}^{2n}A_3[(4n-1)\sin\Theta^2+6\cos\Theta^2]\sin\Theta^4\\ \quad\text{u. s. w.}\\ \quad+{}^{2n}A_{n-1}[(4n-1)\sin\Theta^2+(2n-2)\cos\Theta^2]\sin\Theta^{2n-4}\end{array}\right.$$

Digitized by Google

Es ist aber allgemein

$$(4n-1)\sin\Theta^2 + 2k\cos\Theta^2 = 2k + (4n-2k-1)\sin\Theta^2,$$

und folglich

$$\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}} = -U(\frac{b}{a})^{2n}\cos\Theta - (4n+1)\sin\Theta\{(4n-1)\overset{2n}{A}_0$$
$$+ \overset{2n}{A}_1[2 + (4n-3)\sin\Theta^2]$$
$$+ \overset{2n}{A}_2[4 + (4n-5)\sin\Theta^2]\sin\Theta^2$$
$$+ \overset{2n}{A}_3[6 + (4n-7)\sin\Theta^2]\sin\Theta^4$$
u. s. w.
$$+ \overset{2n}{A}_{n-1}[2n-2 + (2n+1)\sin\Theta^2]\sin\Theta^{2n-4}$$

oder

$$\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}} = -U(\frac{b}{a})^{2n}\cos\Theta - (4n+1)\sin\Theta\{(4n-1)\overset{2n}{A}_0 + 2\overset{2n}{A}_1$$
$$+ [(4n-3)\overset{2n}{A}_1 + 4\overset{2n}{A}_2]\sin\Theta^2$$
$$+ [(4n-5)\overset{2n}{A}_2 + 6\overset{2n}{A}_3]\sin\Theta^4$$
$$+ [(4n-7)\overset{2n}{A}_3 + 8\overset{2n}{A}_4]\sin\Theta^6$$
u. s. w.
$$+ [(2n+3)\overset{2n}{A}_{n-2} + (2n-2)\overset{2n}{A}_{n-1}]\sin\Theta^{2n-4}$$
$$+ (2n+1)\overset{2n}{A}_{n-1}\sin\Theta^{2n-2}.$$

Vergleichen wir dies mit dem Ausdrucke

$$\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}} = -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \cos\Theta^{-(4n+1)} \sin\Theta \left\{ \begin{array}{l} {}^{2n+1}A_0 + {}^{2n+1}A_1 \sin\Theta^2 \\ \quad + {}^{2n+1}A_2 \sin\Theta^4 \\ \quad + {}^{2n+1}A_3 \sin\Theta^6 \\ \qquad \text{u. s. w.} \\ \quad + {}^{2n+1}A_{n-1} \sin\Theta^{2n-2} \end{array} \right\},$$

so erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} {}^{2n+1}A_0 &= (4n-1)\,{}^{2n}A_0 + 2\,{}^{2n}A_1, \\ {}^{2n+1}A_1 &= (4n-3)\,{}^{2n}A_1 + 4\,{}^{2n}A_2, \\ {}^{2n+1}A_2 &= (4n-5)\,{}^{2n}A_2 + 6\,{}^{2n}A_3, \\ {}^{2n+1}A_3 &= (4n-7)\,{}^{2n}A_3 + 8\,{}^{2n}A_4, \end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned} {}^{2n+1}A_{n-2} &= (2n+3)\,{}^{2n}A_{n-2} + (2n-2)\,{}^{2n}A_{n-1}, \\ {}^{2n+1}A_{n-1} &= (2n+1)\,{}^{2n}A_{n-1}; \end{aligned}$$

mittelst welcher die numerischen Coefficienten

$${}^{2n+1}A_0,\ {}^{2n+1}A_1,\ {}^{2n+1}A_2,\ {}^{2n+1}A_3, \ldots {}^{2n+1}A_{n-1}$$

aus den numerischen Coefficienten

$${}^{2n}A_0,\ {}^{2n}A_1,\ {}^{2n}A_2,\ {}^{2n}A_3, \ldots {}^{2n}A_{n-1}$$

berechnet werden können.

Aus dem obigen Ausdrucke von $\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}}$ erhält man ferner durch neue Differentiation nach x:

$$\frac{d^{2n+2}y}{dx^{2n+2}} = -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \cos\Theta^{-(4n+1)} \left\{ \begin{array}{l} {}^{2n+1}A_0 + 3\,{}^{2n+1}A_1 \sin\Theta^2 \\ \quad + 5\,{}^{2n+1}A_2 \sin\Theta^4 \\ \quad + 7\,{}^{2n+1}A_3 \sin\Theta^6 \\ \qquad \text{u. s. w.} \\ \quad + (2n-1)\,{}^{2n+1}A_{n-1} \sin\Theta^{2n-2} \end{array} \right\} \cos\Theta \frac{d\Theta}{dx}$$

Digitized by Google

$$-(4n+1)b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}\cos\Theta-(4n+2)\sin\Theta^2\Big\{{}^{2n+1}A_0+{}^{2n+1}A_1\sin\Theta^2+{}^{2n+1}A_2\sin\Theta^4+{}^{2n+1}A_3\sin\Theta^6\text{ u. s. w.}+{}^{2n+1}A_{n-1}\sin\Theta^{2n-2}\Big\}\frac{d\Theta}{dx}$$

$$=-b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1}\cos\Theta-(4n+1)\Big\{{}^{2n+1}A_0+3\,{}^{2n+1}A_1\sin\Theta^2+5\,{}^{2n+1}A_2\sin\Theta^4+7\,{}^{2n+1}A_3\sin\Theta^6\text{ u. s. w.}+(2n-1)\,{}^{2n+1}A_{n-1}\sin\Theta^{2n-2}\Big\}$$

$$-(4n+1)b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1}\cos\Theta-(4n+3)\sin\Theta^2\Big\{{}^{2n+1}A_0+{}^{2n+1}A_1\sin\Theta^2+{}^{2n+1}A_2\sin\Theta^4+{}^{2n+1}A_3\sin\Theta^6\text{ u. s. w.}+{}^{2n+1}A_{n-1}\sin\Theta^{2n-2}\Big\}$$

$$=-b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1}\cos\Theta-(4n+3)\cos\Theta^2\Big\{{}^{2n+1}A_0+3\,{}^{2n+1}A_1\sin\Theta^2+5\,{}^{2n+1}A_2\sin\Theta^4+7\,{}^{2n+1}A_3\sin\Theta^6\text{ u. s. w.}+(2n-1)\,{}^{2n+1}A_{n-1}\sin\Theta^{2n-2}\Big\}$$

$$-(4n+1)b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1}\cos\Theta-(4n+3)\sin\Theta^2\Big\{{}^{2n+1}A_0+{}^{2n+1}A_1\sin\Theta^2+{}^{2n+1}A_2\sin\Theta^4+{}^{2n+1}A_3\sin\Theta^6\text{ u. s. w.}+{}^{2n+1}A_{n-1}\sin\Theta^{2n-2}\Big\}$$

und folglich

Digitized by Google

$$\frac{d^{2n+2}y}{dx^{2n+2}} = -\,y\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1}\cos\Theta - (4n+3)\,\{{}^{2n+1}A_0[(4n+1)\sin\Theta^2 + \cos\Theta^2]$$
$$+ {}^{2n+1}A_1[(4n+1)\sin\Theta^2 + 3\cos\Theta^2]\sin\Theta^2$$
$$+ {}^{2n+1}A_2[(4n+1)\sin\Theta^2 + 5\cos\Theta^2]\sin\Theta^4$$
$$+ {}^{2n+1}A_3[(4n+1)\sin\Theta^2 + 7\cos\Theta^2]\sin\Theta^6$$
$$\text{u. s. w.}$$
$$+ {}^{2n+1}A_{n-1}[(4n+1)\sin\Theta^2 + (2n-1)\cos\Theta^2]\sin\Theta^{2n-2}$$

Es ist aber allgemein

$$(4n+1)\sin\Theta^2 + (2k+1)\cos\Theta^2 = 2k+1+(4n-2k)\sin\Theta^2;$$

also

$$\frac{d^{2n+2}y}{dx^{2n+2}} = -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1}\cos\Theta-(4n+3)\left\{\begin{array}{l} A_0^{2n+1}[1+4n\sin\Theta^2] \\ +A_1^{2n+1}[3+(4n-2)\sin\Theta^2]\sin\Theta^2 \\ +A_2^{2n+1}[5+(4n-4)\sin\Theta^2]\sin\Theta^4 \\ +A_3^{2n+1}[7+(4n-6)\sin\Theta^2]\sin\Theta^6 \\ \text{u. s. w.} \\ +A_{n-1}^{2n+1}[(2n-1)+(2n+2)\sin\Theta^2]\sin\Theta^{2n-2} \end{array}\right.$$

oder

$$\frac{d^{2n+2}y}{dx^{2n+2}} = -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1}\cos\Theta-(4n+3)\left\{\begin{array}{l} A_0^{2n+1} \\ +[4nA_0^{2n+1}+3A_1^{2n+1}]\sin\Theta^2 \\ +[(4n-2)A_1^{2n+1}+5A_2^{2n+1}]\sin\Theta^4 \\ +[(4n-4)A_2^{2n+1}+7A_3^{2n+1}]\sin\Theta^6 \\ \text{u. s. w.} \\ +[(2n+4)A_{n-2}^{2n+1}+(2n-1)A_{n-1}^{2n+1}]\sin\Theta^{2n-2} \\ +(2n+2)A_{n-1}^{2n+1}\sin\Theta^{2n} \end{array}\right.$$

Setzen wir nun analog mit dem Obigen

$$\frac{d^{2(n+1)}y}{dx^{2(n+1)}} = -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1}\cos\Theta-(4n+3)\left\{\begin{array}{l} A_0^{2(n+1)}+A_1^{2(n+1)}\sin\Theta^2 \\ +A_2^{2(n+1)}\sin\Theta^4 \\ +A_3^{2(n+1)}\sin\Theta^6 \\ \text{u. s. w.} \\ +A_n^{2(n+1)}\sin\Theta^{2n} \end{array}\right.,$$

so erhalten wir durch Vergleichung dieses Ausdrucks mit dem vorhergehenden die folgenden Gleichungen:

Digitized by Google

$$A_0^{2(n+1)} = A_0^{2n+1},$$

$$A_1^{2(n+1)} = 4n\, A_0^{2n+1} + 3A_1^{2n+1},$$

$$A_2^{2(n+1)} = (4n-2)\, A_1^{2n+1} + 5A_2^{2n+1},$$

$$A_3^{2(n+1)} = (4n-4)\, A_2^{2n+1} + 7A_3^{2n+1},$$

u. s. w.

$$A_{n-1}^{2(n+1)} = (2n+4)\, A_{n-2}^{2n+1} + (2n-1)A_{n-1}^{2n+1},$$

$$A_n^{2(n+1)} = (2n+2)\, A_{n-1}^{2n+1};$$

mittelst welcher sich die numerischen Coefficienten

$$A_0^{2(n+1)},\quad A_1^{2(n+1)},\quad A_2^{2(n+1)},\quad A_3^{2(n+1)},\ \ldots\ A_n^{2(n+1)}$$

oder

$$A_0^{2n+2},\quad A_1^{2n+2},\quad A_2^{2n+2},\quad A_3^{2n+2},\ \ldots\ A_n^{2n+2}$$

aus den numerischen Coefficienten

$$A_0^{2n+1},\quad A_1^{2n+1},\quad A_2^{2n+1},\quad A_3^{2n+1},\ \ldots\ A_{n-1}^{2n+1}$$

berechnen lassen.

Durch das Vorhergehende ist nicht bloss die allgemeine Gültigkeit des bemerkten Gesetzes, nach welchem die Ausdrücke der Differentialquotienten

$$\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} \text{ und } \frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}}$$

fortschreiten, bewiesen, sondern es sind auch zugleich allgemeine Formeln zur recurrirenden Berechnung der in diesen Ausdrücken vorkommenden numerischen Coefficienten gefunden worden, wobei nun noch die Auffindung des independenten Fortschreitungsgesetzes dieser Coefficienten zu wünschen übrig bleibt, eine Untersuchung, zu der wir wohl die Leser des Archivs aufzufordern uns erlauben möchten.

Weil nach dem Obigen

$$\sin\Theta = \frac{bx}{a}$$

ist, und Θ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen wird, so ist für $x=0$ auch $\Theta=0$. Da nun nach dem Obigen

Digitized by Google

$$\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} = -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n-1}\cos\Theta^{-(4n-1)}\left\{\begin{array}{l}{}^{2n}A_0 + {}^{2n}A_1\sin\Theta^2 \\ \quad + {}^{2n}A_2\sin\Theta^4 \\ \quad\quad \text{u. s. w.} \\ \quad + {}^{2n}A_{n-1}\sin\Theta^{2n-2}\end{array}\right.$$

und

$$\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}} = -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}\cos\Theta^{-(4n+1)}\sin\Theta\left\{\begin{array}{l}{}^{2n+1}A_0 + {}^{2n+1}A_1\sin\Theta^2 \\ \quad + {}^{2n+1}A_2\sin\Theta^4 \\ \quad\quad \text{u. s. w.} \\ \quad + {}^{2n+1}A_{n-1}\sin\Theta^{2n-2}\end{array}\right.$$

ist, so ist, wenn die Werthe der Differentialquotienten für $x = 0$ wie gewöhnlich durch Einschliessung in Parenthesen bezeichnet werden,

$$\left(\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}\right) = -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n-1}{}^{2n}A_0 = -\frac{b^{2n}}{a^{2n-1}}{}^{2n}A_0$$

und

$$\left(\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}}\right) = 0.$$

Die Werthe der Differentialquotienten für $x = 0$ erhält man übrigens ganz leicht durch Entwickelung von

$$y = a\sqrt{1 - \frac{b^2x^2}{a^2}}$$

in eine Reihe nach dem binomischen Lehrsatze, weshalb wir bei dieser Untersuchung nicht länger verweilen.

Digitized by Google

XXVII.

Ueber die Wurzelausziehung aus Binomien von der Form $A+\sqrt{B}$.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin.

1. Wenn man den Ausdruck $(a+\sqrt{b})\sqrt[n]{c}$, wo a, b und c rational sind, auf die $n$te Potenz erhebt, so erhält man nach gehöriger Sonderung der rationalen und irrationalen Theile einen Ausdruck von der Form $A+\sqrt{B}$, wo A und B wieder rational sind. Es kann daher die $n$te Wurzel mancher Ausdrücke $A+\sqrt{B}$ auf die Form $(a+\sqrt{b})\sqrt[n]{c}$ gebracht werden, wie schon Clairaut und Lacroix bemerkt haben. Da aber auch die $n$te Potenz des Ausdrucks $(a+\sqrt{b})\sqrt[n]{c\sqrt{b}}$ *) dieselbe Form $A+\sqrt{B}$ annimmt, so kann die $n$te Wurzel von $A+\sqrt{B}$ auch die Form $(a+\sqrt{b})\sqrt[n]{c\sqrt{b}}$ haben. Mit Berücksichtigung dieser Form wird also die Ausziehung der $n$ten Wurzel aus manchen Binomien $A+\sqrt{B}$ möglich sein, während sie den Voraussetzungen der genannten Schriftsteller zufolge für unmöglich erklärt werden müsste.

2. Ist nun also

$$A+\sqrt{B}=(a+\sqrt{b})^n\ c\sqrt{b},$$

so folgt aus der beziehlichen Gleichheit der rationalen und irrationalen Theile auch

$$A-\sqrt{B}=-(a-\sqrt{b})^n\ c\sqrt{b},$$

und aus der Multiplication beider Gleichungen

$$A^2-B=-(a^2-b)^n\ c^2b.$$

Die Zahl A^2-B wird also in zwei Factoren zerlegt werden können, von denen der eine $(a^2-b)^n$ eine $n$te Potenz ist und der andere $-c^2b$ nicht. Sondert man daher aus A^2-B die Factoren

*) $(a+\sqrt{b})\sqrt[n]{c\sqrt{bd^2}}$ würde nicht allgemeiner sein.

Digitized by Google

heraus, aus deren Inbegriff sich die $n$te Wurzel ziehen lässt, so findet sich leicht der übrigbleibende Factor $-c^2b$ und demnächst auch $c\sqrt{b}$. Nachdem dieser gefunden ist, wird man durch $c\sqrt{b}$ dividiren können und

$$\frac{A+\sqrt{B}}{c\sqrt{b}}=(a+\sqrt{b})^n$$

erhalten; woraus folgt, dass $\frac{A+\sqrt{B}}{c\sqrt{b}}$ nach vollführter Division wieder die Form $A_1+\sqrt{B_1}$ annimmt, so dass es sich nur noch darum handelt, die $n$te Wurzel dieses Quotienten $A_1+\sqrt{B_1}$ auf die Form $a+\sqrt{b}$ zu bringen. Das eben angedeutete Verfahren ergiebt nämlich die Reduction

$$\sqrt[n]{A+\sqrt{B}}=\sqrt[n]{\frac{A+\sqrt{B}}{c\sqrt{b}}}\sqrt[n]{c\sqrt{b}}=\sqrt[n]{A_1+\sqrt{B_1}}\sqrt[n]{c\sqrt{b}}.$$

Es findet sich z. B. für $\sqrt{\frac{5}{27}+\sqrt{\frac{5}{144}}}$ der Ausdruck $(\frac{5}{27})^3-\frac{5}{144}=-\frac{5}{144\,.\,81}$; also $c^nb=\frac{5}{144\,.\,81}$ oder auch $=\frac{5}{16}$; daher $\sqrt[3]{\frac{5}{27}+\sqrt{\frac{5}{144}}}=\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\,.\,\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[3]{4}}$ oder auch $=\sqrt[3]{\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{80}{729}}}\,.\,\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[3]{4}}$.

3. Wenn in dem Ausdruck $\sqrt[n]{A_1+\sqrt{B_1}}$ die Buchstaben A_1 und B_1 noch Brüche sind, so lassen sich deren Nenner vermittelst der bekannten Regeln ausserhalb der Wurzelzeichen hinausschaffen und man hat dann

$$\sqrt[n]{A_1+\sqrt{B_1}}=\frac{\sqrt[n]{P+\sqrt{Q}}}{N}=a+\sqrt{b},$$

wo P, Q und N ganze Zahlen sind.

Vermittelst dieser Umformung wird z. B. $\sqrt[3]{\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{80}{729}}}$ auf $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}$ zurückgeführt, da sich $\sqrt[3]{\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{80}{729}}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}$ findet.

Diese Umformung kann auch an dem Ausdrucke $a+\sqrt{b}$ ausgeführt gedacht werden. Bedeutet also von nun an jeder Buchstabe eine ganze Zahl, so wird sein:

$$\sqrt[n]{P+\sqrt{Q}}=\frac{x+\sqrt{y}}{p};$$

wobei offenbar angenommen werden darf, dass x^2, y und p^2 keinen gemeinschaftlichen quadratischen Theiler α^2 haben, weil sonst der Bruch $\frac{x+\sqrt{y}}{p}$ durch α gehoben werden könnte. Es kommt da-

Digitized by Google

her nur noch darauf an, die $n$te Wurzel des ganzzahligen Ausdrucks $P+\sqrt{Q}$ auf eine Bruchform $\frac{x+\sqrt{y}}{p}$ zurückzuführen.

Hier stellt sich aber die Frage, ob diese $n$te Wurzel auf einen ächten Bruch (wo $p>1$ ist) führen könne, oder ob p nicht vielleicht nothwendig der Einheit gleich sein müsse. Eine desfallsige Untersuchung führt zu dem folgenden Satze.

4. *Lehrsatz.* Wenn die $n$te Potenz des ächten Bruches $\frac{x+\sqrt{y}}{p}$ ganzzahlig $P+\sqrt{Q}$ ist, so ist 1) $p=2$, 2) $y=x^2-4z$, 3) x und z ungerade und 4) n durch 3 theilbar.

Beweis. Da $P+\sqrt{Q}=\frac{(x+\sqrt{y})^n}{p^n}$ und $P-\sqrt{Q}=\frac{(x-\sqrt{y})^n}{p^n}$, so folgt durch Multiplication

$$P^2-Q=\left(\frac{x^2-y}{p^2}\right)^n.$$

Es ist also $\frac{x^2-y}{p^2}$ gleich einer ganzen Zahl z, mithin $P^2-Q=z^n$ und $y=x^2-p^2z$. Hieraus geht hervor, dass p und x keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, indem sonst x^2, y und p^2 einen quadratischen Theiler haben würden, was nicht der Fall ist (3). Ferner geht aus $P^2-Q=z^n$ hervor, dass der rationale Theil P der $n$ten Potenz keine ganze Zahl sein kann, ohne dass es auch Q ist.

Aus der Addition jener beiden Gleichungen ergiebt sich

$$P=\frac{(x+\sqrt{y})^n+(x-\sqrt{y})^n}{2p^n}=\frac{(x+\sqrt{x^2-p^2z})^n+(x-\sqrt{x^2-p^2z})^n}{2p^n}$$

und wenn der rationale Theil von $(x+\sqrt{x^2-p^2z})^n$ entwickelt und nach Potenzen von p^2z geordnet wird:

$$P=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-2}p^2z+a_2x^{n-4}p^4z^2+\ldots}{p^n},$$

wo a_0, a_1, a_2, ... offenbar ganzzahlige, nur von n abhängige Coeffizienten sind. Da nun alle Glieder des Zählers ausser dem ersten durch p theilbar sind, so wird das erste es gleichfalls sein. Man findet es aber, wenn man in dem Ausdruck für P, $z=0$ setzt; nämlich $a_0x^n=2^{n-1}x^n$. Es wird also $2^{n-1}x^n$ und daher auch 2^{n-1} durch p theilbar sein, weil x und p keinen gemeinschaftlicher Factor haben; folglich muss $p=2q$ gesetzt werden, wo q keine andere Factoren als 2 haben, aber auch der Einheit gleich sein kann. Wird $2q$ für p gesetzt, so ergiebt sich

$$P=\frac{2^{n-1}x^n+4a_1x^{n-2}q^2z+16a_2x^{n-4}q^4z^2+\ldots}{2^n\cdot q^n}$$

Nun behaupte ich, dass der Zähler dieses Bruches, unabhängig von den Werthen von x und q^2z durch 2^{n-1} theilbar ist. Wird nämlich $(x+\sqrt{x^2-4q^2z})^m=\alpha_m+\beta_m\sqrt{x^2-4q^2z}$ gesetzt und sind α_m und β_m durch 2^{m-1}, dagegen $\alpha_m+\beta_m x$ durch 2^m theilbar, so werden die nämlichen Bedingungen für α_{m+1} und β_{m+1}

Digitized by Google

stattfinden; d. h. es werden α_{m+1} und β_{m+1} durch 2^m, dagegen $\alpha_{m+1}+\beta_{m+1}x$ durch 2^{m+1} theilbar sein. Denn da

$$\alpha_{m+1}+\beta_{m+1}\sqrt{x^2-4q^2z}=(x+\sqrt{x^2-4q^2z})\ (\alpha_m+\beta_m\sqrt{x^2-4q^2z})$$

ist, so findet sich

$$\alpha_{m+1}=x(\alpha_m+\beta_m x)-4\beta_m q^2 z$$

$$\beta_{m+1}=\alpha_m+\beta_m x$$

$$\alpha_{m+1}+\beta_{m+1}x=2x(\alpha_m+\beta_m x)-4\beta_m q^2 z,$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung erhellet. Nun ist aber $\alpha_1=x$, $\beta_1=1$, $\alpha_1+\beta_1 x=2x$; und daher α_1 und β_1 durch 2^0 oder 1, dagegen $\alpha_1+\beta_1 x$ durch 2^1 oder 2 theilbar; folglich ist auch wirklich α_m und β_m durch 2^{m-1}, daher auch α_n und β_n durch 2^{n-1} theilbar.

Nach Aufhebung des Factors 2^{n-1} hat man also

$$P=\frac{x^n+b_1x^{n-2}q^2z+b_2x^{n-4}q^4z^2+\ldots.}{2\cdot q^n}.$$

Hier sind wieder alle Glieder des Zählers ausser dem ersten durch q theilbar; also ist es auch das erste, was nicht anders stattfinden kann, als wenn $q=1$ ist, indem q und x keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Es ist folglich

1) $p=2$, weil $p=2q$ gesetzt worden ist
2) $y=x^2-4z$, wegen $y=x^2-p^2z$ *)
3) x ungerade, da es keinen Factor mit $p=2$ gemein hat; und auch z ungerade, weil sonst alle Glieder des Zählers von P

---

*) Das bis hieher Bewiesene lässt sich viel kürzer mittelst der folgenden Schlussfolgerungen herleiten. Aus $(\frac{x\pm\sqrt{y}}{p})^n=$ einem ganzzahligen Ausdrucke $P\pm\sqrt{Q}$ ergeben sich der Reihe nach folgende ganze Zahlen: $\frac{x+\sqrt{y}}{p}$, $\frac{x-\sqrt{y}}{p}$ (ganze Zahlen allerdings nicht im Sinne des Textes, in welchem sie vielmehr ächte Brüche genannt wurden, sondern ungefähr im Sinn der Congruenzentheorie, in welcher $\sqrt{3}\equiv 4$ (mod. 13) gesetzt oder mit andern Worten $\frac{4-\sqrt{3}}{13}$ als ganze Zahl betrachtet wird); ferner deren Product $\frac{x^2-y}{p^2}=z$, daher $y=x^2-p^2z$; ferner $\frac{x+\sqrt{x^2-p^2z}}{p}$ oder $\frac{x+\sqrt{x^2}}{p}$ oder $\frac{2x}{p}$, insofern $\frac{\sqrt{x^2-p^2z}-\sqrt{x^2}}{p}$ als ganze Zahl anzusehen ist; daher $p=2$; ferner endlich

$$(\frac{x+\sqrt{x^2-4z}}{2})^n+(\frac{x-\sqrt{x^2-4z}}{2})^n \text{ d. h. } \frac{a_n}{2^{n-1}}.$$

Da jedoch die Principien, auf denen diese Folgerungen beruhen, noch nicht als elementar betrachtet werden dürfen, ja vielleicht kaum schon berührt worden sind, so mag es genügen beiläufig darauf hingedeutet zu haben.

Digitized by Google

durch den Nenner 2 theilbar sein würden, das erste x^n aber nicht; mithin auch der ganze Zähler nicht.

Endlich ist jetzt

$$P=\frac{x^n+b_1x^{n-2z}+b_1x^{n-4z^2}+..}{2}=\frac{(x+\sqrt{x^2-4z})^n+(x-\sqrt{x^2-4z})^n}{2^{n+1}}.$$

Da nun x^n, x^{n-2z}, x^{n-4z^2}, ... beziehlich von der Form $2r+1$, $2r_1+1$, $2r_2+1$, ... sind, so geht dieser Ausdruck dadurch in

$$r+b_1r_1+b_2r_2+\ldots+\frac{1+b_1+b_2+\ldots}{2}$$

über; desshalb ist $\frac{1+b_1+b_2+\ldots}{2}$ oder der Werth von P für $x=1$, $z=1$ eine ganze Zahl, nämlich

$$\frac{(1+\sqrt{-3})^n+(1-\sqrt{-3})^n}{2^{n+1}}=g.$$

Wäre nun n von der Form $3m\pm1$, so hätte man wegen $(1\pm\sqrt{-3})^3=8=2^3$

$$g=\frac{2^{3m}\{(1+\sqrt{-3})^{\pm1}+(1-\sqrt{-3})^{\pm1}\}}{2^{3m\pm1+1}}=\pm\tfrac{1}{2}.$$

In beiden Fällen würde der Ausdruck für P ein Bruch werden; was jedoch nicht der Fall ist, wenn $n=3m$ ist, denn man hat dann

$$g=\frac{2^{3m}+2^{3m}}{2^{3m+1}}=1.$$

Folglich ist 4) n durch 3 theilbar; womit der Lehrsatz vollständig erwiesen ist.

Da allen Bedingungen für die Ganzzahligkeit genügt worden ist, so geht zugleich hervor, dass der Bruch $\frac{x+\sqrt{y}}{p}$ unter den im Lehrsatze angegebenen Umständen in jeder $3m$ten Potenz einen ganzzahligen Ausdruck liefert. Es sei z. B. $x=7$, $z=11$, also $y=5$, so hat man

$$(\frac{7+\sqrt{5}}{2})^{3m}=(56+19\sqrt{5})^m.$$

5. Dass die $\sqrt[n]{P+\sqrt{Q}}$ keine Bruchform $\frac{x+\sqrt{y}}{p}$ haben kann, wofern nicht n durch 3 theilbar ist, hat soviel ich weiss noch Niemand erwähnt. Dass für $n=3m$ der Nenner p auch gleich 2 sein kann, erwähnt Clairaut für den besondern Fall der Cubikwurzel und beweist es dadurch, dass er die Wurzel $\frac{x}{p}+\frac{\sqrt{y}}{q}$ annimmt, die Ausdrücke für P und $\sqrt{Q}$ ihrer ganzen Länge nach entwickelt und dann vermittelst der bekannten Criterien der Theil-

Digitized by Google

barkeit erst $p=q$ und demnächst $p=2$ findet. Eben dies Verfahren liesse sich auch für ein allgemeines n anwenden. Indessen dürfte die Entwickelung der Coefficienten in dem Ausdrucke für P (welche bekanntlich mit der Entwickelung von cos $m\alpha$ nach Potenzen von cos α identisch ist) vom elementaren Standpunkte aus ihre Schwierigkeiten oder gar Unmöglichkeiten haben. Da es überdies nur darauf ankommt, den Werth von a_0 und die Theilbarkeit der Coefficienten $4a_1$, $16a_2$, ... durch 2^{n-1} nachzuweisen, und da es ferner weit einfacher ist, wegen der Summe $1+b_1+b_2+\ldots$ auf den geschlossenen Ausdruck $\frac{(x+\sqrt{y})^n+(x-\sqrt{y})^n}{2^n}$ zurückzugehen, als die unbegränzte Reihe der ausgewertheten Coefficienten $1, b_1, b_2, \ldots$ zu summiren, so ist dieser Weg zum Beweise des Lehrsatzes (4) nicht gewählt worden.

6. Mit Hülfe dieses Lehrsatzes wird es nun leicht, das bei (3) unterbrochene Verfahren zur Ausziehung der $n$ten Wurzel aus $P+\sqrt{Q}$ zu beendigen, wenn Q positiv ist. Da nämlich ihm zufolge

$$\sqrt[n]{P+\sqrt{Q}}=\frac{x+\sqrt{y}}{2} \text{ (oder } x+\sqrt{y})$$

$$\sqrt[n]{P-\sqrt{Q}}=\frac{x-\sqrt{y}}{2} \text{ (oder } x-\sqrt{y})$$

ist, so folgt hieraus durch Addition, dass

$$\sqrt[n]{P+\sqrt{Q}}+\sqrt[n]{P-\sqrt{Q}}=x \text{ (oder } 2x)$$

jedenfalls eine ganze Zahl ist; wofern die Wurzelausziehung überhaupt im rationalen Ausdrücken möglich ist. Um den rationalen Theil der Wurzel $\frac{x}{2}$ (oder x) zu finden, darf man daher nur jene Summe der $n$ten Wurzeln bis auf die Einer genau berechnen. Hiezu ist aber erforderlich, dass jede einzelne $n$te Wurzel bis auf halbe Einheiten, d. h. bis auf 0,5 oder am besten bis auf die erste Decimale genau berechnet wird, weil sich durch die Addition beider Werthe die Fehler verdoppeln könnten. Wenn die so gefundene Zahl bei $n=3m\pm1$ nicht gerade sein sollte, so braucht man nicht weiter zu gehen, indem dann die Unmöglichkeit der Wurzelausziehung in der angenommenen Form einleuchtet. In allen andern Fällen hat man das gefundene Resultat durch 2 zu theilen, um den rationalen Theil $\frac{x}{2}$ (oder x) der Wurzel zu haben. Den irrationalen Theil findet man dann aus der Gleichung

$$y=x^2-4z \text{ (oder } x^2-z).$$

Ob der so gefundene Ausdruck wirklich die $n$te Wurzel aus $P+\sqrt{Q}$ ist, muss unmittelbar durch Erhebung zur $n$ten Potenz entschieden werden, da das angegebene Verfahren nur auf der Voraussetzung beruht, dass die Wurzelausziehung überhaupt möglich ist.

Digitized by Google

Beispiele.

I. $\sqrt[5]{10+\sqrt{68}}+\sqrt[5]{10-\sqrt{68}}=\sqrt[5]{18,..}+\sqrt[5]{2,..}=1{,}7+1{,}1=3=2x.$

Die Wurzelausziehung ist also unmöglich.

II. $\sqrt[5]{41+29\sqrt{2}}+\sqrt[5]{41-29\sqrt{2}}=\sqrt[5]{82{,}0}+\sqrt[5]{-0{,}0}=2=2x.$

Ferner $\sqrt[5]{41^2-29^2\,.\,2}=-1=z,\ y=x^2-z=2.$

Dass nun $1+\sqrt{2}$ wirklich die $\sqrt[5]{41+29\sqrt{2}}$ ist, zeigt sich erst durch Erhebung zur 5ten Potenz.

III. $\sqrt[5]{231+\sqrt{53329}}+\sqrt[5]{231-\sqrt{53329}}=\sqrt[5]{461{,}9}+\sqrt[5]{0{,}1}$

$=3{,}4+0{,}6=4=2x.$

Dann $\sqrt[5]{231^2-53329}=2=z,\ y=x^2-z=2.$ Aber $(2+\sqrt{2})^5$ ist gleich $232+\sqrt{53792}$ und nicht gleich $231+\sqrt{53329}$. Aus diesem letzteren Binomium lässt sich also keine 5te Wurzel ziehen.

IV. $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}=\sqrt[3]{18}..+\sqrt[3]{0,..}=2{,}6+0=3=x.$

Ferner $\sqrt[3]{9^2-4^2\,.\,5}=1=z,\ y=x^2-4z=5,$ und es findet sich wirklich $(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^3=9+4\sqrt{5}.$

V. $\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}=\sqrt[3]{11{,}9}+\sqrt[3]{0{,}1}=2{,}3+0{,}4=3=x.$

Ferner $\sqrt[3]{6^2-35}=1=z,\ y=x^2-4z=5.$ Es findet sich aber $(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^3=9+4\sqrt{5}$ und nicht $=6+\sqrt{35}.$ Dieser Ausdruck hat also keine Cubikwurzel von der gegebenen Form.

XXVIII.

Novi alicujus theorematis arithmetici commentatio analytica.

Auctore

Friederico Arndt

muneris schol. Cand. Gryph.

Neminem fugit, permultis ad coefficientes binomiales spectantibus propositionibus similia respondere theoremata, quae ad quantitatem hujus formae

$$\frac{n(n+k)\,(n+2k)\ldots(n+(p-1)k)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,p}$$

pertinent, ita ut illas ex his tanquam ex altiori fonte deducere liceat, quo loco n, k sunt quanta quaelibet, p vero numerus integer positivus.

Quum igitur his rebus studerem quumque intellexissem, demonstrationem theorematis Lagrangiani ad summam quadratorum coefficientium binomialium pertinentis non peti a geometris ex illa forma considerandā. tale theorema ex quo illud ipsum manaret, statim in mentem venit quaerere. Quod quidem nunc in promptu est itaque enunciari debet:

Designante $\overset{k}{n}_p$ quantitatem supra commemoratam, demonstrandam nobis proponimus aequationem hanc

$$\overset{k}{n}_p = (n \overset{k}{+} mk)_p - m_1 k(n \overset{k}{+} mk)_{p-1} + m_2 k^2 (n \overset{k}{+} mk)_{p-2} - \ldots .$$
$$\ldots . + (-1)^m m_m k^m (n \overset{k}{+} mk)_{p-m},$$

ubi denotat m numerum integrum positivum ipso p non majorem atque m_1, m_2, m_3, . . . coefficientes binomiales primum, secundum, tertium, etc. pro exponente m.

Primum facile patebit esse

$$(n \overset{k}{+} k)_p = \overset{k}{n}_p \,.\, \frac{n+pk}{n},\quad (n \overset{k}{+} k)_{p-1} = \overset{k}{n}_p \,.\, \frac{p}{n},$$

unde manat

$$1.\quad \overset{k}{n}_p = (n \overset{k}{+} k)_p - k(n \overset{k}{+} k)_{p-1}.$$

Deinde habetur simili modo

Digitized by Google

$$(n \overset{k}{+} k)_p = (n \overset{k}{+} 2k)_p - k(n \overset{k}{+} 2k)_{p-1}$$

$$(n \overset{k}{+} k)_{p-1} = (n \overset{k}{+} 2k)_{p-1} - k(n \overset{k}{+} 2k)_{p-2},$$

quibus aequationibus cum prima collatis prodit

$$2.\quad \overset{k}{n}_p = (n \overset{k}{+} 2k)_p - 2k(n \overset{k}{+} 2k)_{p-1} + k^2(n \overset{k}{+} 2k)_{p-2}.$$

Porro simili modo habetur

$$(n \overset{k}{+} 2k)_p = (n \overset{k}{+} 3k)_p - k(n \overset{k}{+} 3k)_{p-1}$$

$$(n \overset{k}{+} 2k)_{p-1} = (n \overset{k}{+} 3k)_{p-1} - k(n \overset{k}{+} 3k)_{p-2}$$

$$(n \overset{k}{+} 2k)_{p-2} = (n \overset{k}{+} 3k)_{p-2} - k(n \overset{k}{+} 3k)_{p-3},$$

quibus aequationibus cum secunda collatis prodit

$$3.\quad \overset{k}{n}_p = (n \overset{k}{+} 3k)_p - 3k(n \overset{k}{+} 3k)_{p-1} + 3k^2(n \overset{k}{+} 3k)_{p-2}$$
$$- k^3(n \overset{k}{+} 3k)_{p-3}.$$

Jam ex his lex patebit, ex qua termini sint conformati; ut vero theorema in genere probetur, assumamus verum id esse usque ad limitem quendam. Sit igitur

$$\overset{k}{n}_p = \{n + (m \overset{k}{-} 1)k\}_p - (m-1)_1 k\{n + (m \overset{k}{-} 1)k\}_{p-1}$$
$$+ (m-1)_2 k^2\{n \overset{k}{+} (m-1)k\}_{p-2} - \ldots + (-1)^{m-1}k^{m-1}\{n \overset{k}{+} (m-1)k\}_{p-m+1}$$

eritque simili modo ut antea

$$\{n + (m \overset{k}{-} 1)k\}_p = (n + \overset{k}{m}k)_p - k(n + \overset{k}{m}k)_{p-1}$$

$$\{n + (m \overset{k}{-} 1)k\}_{p-1} = (n + \overset{k}{m}k)_{p-1} - k(n \overset{k}{+} mk)_{p-2}$$

$$\{n + (m \overset{k}{-} 1)k\}_{p-2} = (n + \overset{k}{m}k)_{p-2} - k(n \overset{k}{+} mk)_{p-3}$$

etc. etc.

unde per substitutionem

$$\overset{k}{n}_p = (n + \overset{k}{m}k)_p - \{(m-1)_1 + 1\}k(n \overset{k}{+} mk)_{p-1}$$
$$+ \{(m-1)_2 + (m-1)_1\}k^2(n \overset{k}{+} mk)_{p-2}$$
$$- \{(m-1)_3 + (m-1)_2\}k^3(n \overset{k}{+} mk)_{p-3}$$
$$+ \{(m-1)_4 + (m-1)_3\}k^4(n \overset{k}{+} mk)_{p-4}$$

. . . .

Jam vero est

$$(m-1)_1 + 1 = m_1$$
$$(m-1)_2 + (m-1)_1 = m_2$$
$$(m-1)_3 + (m-1)_2 = m_3$$
$$\text{etc.}$$

quod facile perspicietur, ergo erit

$$\overset{k}{n}_p = (n + \overset{k}{mk})_p - m_1 k(n + \overset{k}{mk})_{p-1}$$
$$+ m_2 k^2 (n + \overset{k}{mk})_{p-2} - m_3 k^3 (n + \overset{k}{mk})_{p-3} + \ldots\ldots$$

Quando igitur propositio valet, si factorem ipsius k accipias $m-1$, etiam valebit, si m quantitatis $m-1$ loco ponas. Valet autem pro k, $2k$, $3k$, ideoque in universum vera erit.

Habemus igitur

4. $$\overset{k}{n}_p = (n + \overset{k}{mk})_p - m_1 k(n + \overset{k}{mk})_{p-1} + m_2 k^2 (n + \overset{k}{mk})_{p-2} - \ldots$$

ex quo sequitur ponendo $n + mk = q$:

5. $$(q - \overset{k}{mk})_p = \overset{k}{q}_p - m_1 \overset{k}{k} q_{p-1} + m_2 k^2 \overset{k}{q}_{p-2} - \ldots$$
$$\ldots\ldots + (-1)^m k^m \overset{k}{q}_{p-m}$$

vel si $-k$ scribas pro k

6. $$(q + \overset{-k}{mk})_p = \overset{-k}{q}_p + m_1 \overset{-k}{k} q_{p-1} + m_2 k^2 \overset{-k}{q}_{p-2} - \ldots$$
$$\ldots\ldots + k^m \overset{-k}{q}_{p-m}$$

et pro $k = 1$

7. $$(q + \overset{-1}{m})_p = \overset{-1}{q}_p + m_1 \overset{-1}{q}_{p-1} + m_2 \overset{-1}{q}_{p-2} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + m_m \overset{-k}{q}_{p-m}.$$

Quo loco ex. gr. $\overset{-1}{q}_p$ designare coefficientem binomialem p^{tum} pro exponente q perspicuum erit; qua re indicem -1 omittamus.

Quando denique accipitur $q = m = p$ prodibit aequatio haec

$$(2p)_p = p_p + p_1 \cdot p_{p-1} + p_2 \cdot p_{p-2} + \ldots\ldots + p_p p_0$$

quumque sit $p_p = p_0 = 1$, $p_{p-1} = p_1$, $p_{p-2} = p_2$, etc. $p_0 = p_p$, manifesto habetur

8. $$(2p)_p = (p_0)^2 + (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 + \ldots + (p_p)^2$$

qua aequatione exhibetur theorema Lagrangianum, de quo supra sermo erat.

Scrib. Gryphiae d. 5. m. Aug. a. MDCCCXLII.

Digitized by Google

XXIX.

Ueber eine Eigenschaft des Kreises.

Von

dem Herausgeber.

Die Gleichung des Kreises in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der xy ist bekanntlich, wenn r den Halbmesser bezeichnet und a, b die Coordinaten des Mittelpunkts sind:

$$1)\quad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Wenn also x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4 die Coordinaten vier beliebiger Punkte dieses Kreises sind, so haben wir die vier folgenden Gleichungen:

$$2)\quad \begin{cases}(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2,\\ (x_2-a)^2+(y_2-b)^2=r^2,\\ (x_3-a)^2+(y_3-b)^2=r^2,\\ (x_4-a)^2+(y_4-b)^2=r^2;\end{cases}$$

welche auch unter der folgenden Form dargestellt werden können:

$$3)\quad \begin{cases}x_1^2+y_1^2-2ax_1-2by_1=r^2-a^2-b^2,\\ x_2^2+y_2^2-2ax_2-2by_2=r^2-a^2-b^2,\\ x_3^2+y_3^2-2ax_3-2by_3=r^2-a^2-b^2,\\ x_4^2+y_4^2-2ax_4-2by_4=r^2-a^2-b^2.\end{cases}$$

Setzen wir jetzt der Kürze wegen

$$4)\quad \begin{cases}f_1= (x_3-x_4)y_2+(x_4-x_2)y_3+(x_2-x_3)y_4,\\ f_2=-\{(x_4-x_1)y_3+(x_1-x_3)y_4+(x_3-x_4)y_1\},\\ f_3= (x_1-x_2)y_4+(x_2-x_4)y_1+(x_4-x_1)y_2,\\ f_4=-\{(x_2-x_3)y_1+(x_3-x_1)y_2+(x_1-x_2)y_3\};\end{cases}$$

oder, was dasselbe ist:

$$5)\quad \begin{cases}f_1=-\{(y_3-y_4)x_2+(y_4-y_2)x_3+(y_2-y_3)x_4\},\\ f_2= (y_4-y_1)x_3+(y_1-y_3)x_4+(y_3-y_4)x_1,\\ f_3=-\{(y_1-y_2)x_4+(y_2-y_4)x_1+(y_4-y_1)x_2\},\\ f_4= (y_2-y_3)x_1+(y_3-y_1)x_2+(y_1-y_2)x_3;\end{cases}$$

Digitized by Google

so ist, wovon man sich durch ganz einfache Rechnung leicht überzeugen kann:

$$6)\begin{cases} f_1+f_2+f_3+f_4=0, \\ x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+x_4f_4=0, \\ y_1f_1+y_2f_2+y_3f_3+y_4f_4=0. \end{cases}$$

Multiplicirt man also die vier Gleichungen 3) nach der Reihe mit f_1, f_2, f_3, f_4, und addirt dieselben dann zu einander, so erhält man wegen der Gleichungen 6) auf der Stelle die Gleichung

$$\begin{aligned} 7)\ 0 = {} & (x_1^2+y_1^2)\ \{(x_3-x_4)y_2+(x_4-x_2)y_3+(x_2-x_3)y_4\} \\ & -(x_2^2+y_2^2)\ \{(x_4-x_1)y_3+(x_1-x_3)y_4+(x_3-x_4)y_1\} \\ & +(x_3^2+y_3^2)\ \{(x_1-x_2)y_4+(x_2-x_4)y_1+(x_4-x_1)y_2\} \\ & -(x_4^2+y_4^2)\ \{(x_2-x_3)y_1+(x_3-x_1)y_2+(x_1-x_2)y_3\} \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} 8)\ 0 = {} & (x_1^2+y_1^2)\ \{(y_3-y_4)x_2+(y_4-y_2)x_3+(y_2-y_3)x_4\} \\ & -(x_2^2+y_2^2)\ \{(y_4-y_1)x_3+(y_1-y_3)x_4+(y_3-y_4)x_1\} \\ & +(x_3^2+y_3^2)\ \{(y_1-y_2)x_4+(y_2-y_4)x_1+(y_4-y_1)x_2\} \\ & -(x_4^2+y_4^2)\ \{(y_2-y_3)x_1+(y_3-y_1)x_2+(y_1-y_2)x_3\}. \end{aligned}$$

Dies ist eine allgemeine Relation zwischen den rechtwinkligen Coordinaten vier in einem Kreise liegender Punkte.

Um nun die geometrische Bedeutung der in dieser Relation vorkommenden Grössen zu erforschen, wollen wir jetzt die vier in dem Kreise liegenden Punkte, deren rechtwinklige Coordinaten $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4$ sind, respective durch A_1, A_2, A_3, A_4, den Anfang der Coordinaten aber durch O bezeichnen. Dann ist zuvörderst bekanntlich

$$\begin{aligned} A_1O^2 &= x_1^2+y_1^2, \\ A_2O^2 &= x_2^2+y_2^2, \\ A_3O^2 &= x_3^2+y_3^2, \\ A_4O^2 &= x_4^2+y_4^2. \end{aligned}$$

Ferner wollen wir die übrigens schon oft behandelte Aufgabe: die Fläche eines Dreiecks durch die rechtwinkligen Coordinaten seiner Spitzen auszudrücken, vollständig auflösen, weil wir bei derselben über das Vorzeichen des Ausdrucks, den man für die Fläche des Dreiecks gewöhnlich zu geben pflegt, eine Bemerkung zu machen haben, welche, wie es uns scheint, sehr mit Unrecht nicht immer gehörig hervorgehoben wird.

Die Spitzen des Dreiecks, dessen gesuchten Flächeninhalt wir durch Δ bezeichnen wollen, seien A_1, A_2, A_3, und $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ seien deren Coordinaten in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz. Offenbar wird man immer ein dem primitiven Systeme der xyz paralleles Coordinatensystem der $x'y'z'$, dessen Anfang O' sein mag, so annehmen können, dass in diesem Systeme die Coordinaten der Spitzen A_1, A_2, A_3, welche durch $x'_1, y'_1; x'_2, y'_2; x'_3, y'_3$ bezeichnet werden mögen, sämmtlich positiv sind. Betrachten wir nun, für

jetzt immer dieses letztere Coordinatensystem in's Auge fassend, zuerst den Fall, wenn der Punkt A_3 zwischen den Ordinaten der beiden Punkte A_1 und A_2 liegt, so können in diesem ersten Hauptfalle offenbar bloss die vier verschiedenen, in Taf. IV. Fig. 5. dargestellten Nebenfälle Statt finden. In dem ersten dieser vier Fälle ist, wie sogleich erhellen wird,

$$\begin{aligned} 2\Delta = &\quad (x'_1 - x'_2)\,(y'_1 + y'_2) \\ &+ (x'_2 - x'_3)\,(y'_2 + y'_3) \\ &+ (x'_3 - x'_1)\,(y'_3 + y'_1) \end{aligned}$$

$$2\Delta = -\{(x'_2 - x'_3)y'_1 + (x'_3 - x'_1)y'_2 + (x'_1 - x'_2)y'_3\}.$$

In dem zweiten Falle ist, wie eben so leicht erhellet,

$$\begin{aligned} 2\Delta = &- (x'_1 - x'_2)\,(y'_1 + y'_2) \\ &- (x'_2 - x'_3)\,(y'_2 + y'_3) \\ &- (x'_3 - x'_1)\,(y'_3 + y'_1) \end{aligned}$$

$$= (x'_2 - x'_3)y'_1 + (x'_3 - x'_1)y'_2 + (x'_1 - x'_2)y'_3.$$

In dem dritten Falle ist auf ähnliche Weise

$$\begin{aligned} 2\Delta = &\quad (x'_1 - x'_2)\,(y'_1 + y'_2) \\ &+ (x'_2 - x'_3)\,(y'_2 + y'_3) \\ &+ (x'_3 - x'_1)\,(y'_3 + y'_1) \end{aligned}$$

$$= -\{(x'_2 - x'_3)y'_1 + (x'_3 - x'_1)y'_2 + (x'_1 - x'_2)y'_3\}.$$

Endlich ist in dem vierten der in der Figur dargestellten Fälle

$$\begin{aligned} 2\Delta = &- (x'_1 - x'_2)\,(y'_1 + y'_2) \\ &- (x'_2 - x'_3)\,(y'_2 + y'_3) \\ &- (x'_3 - x'_1)\,(y'_3 + y'_1) \end{aligned}$$

$$= (x'_2 - x'_3)y'_1 + (x'_3 - x'_1)y'_2 + (x'_1 - x'_2)y'_3.$$

Folglich ist überhaupt

$$2\Delta = \mp\{(x'_2 - x'_3)y'_1 + (x'_3 - x'_1)y'_2 + (x'_1 - x'_2)y'_3\},$$

wo im ersten und dritten Falle das obere, im zweiten und vierten Falle das untere Zeichen genommen werden muss; d. h., wie leicht in die Augen fällt, man muss das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem man sich, um von dem Punkte A_1 durch den Punkt A_2 zu dem Punkte A_3 zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss. Wenn der Punkt A_2 zwischen den Ordinaten der Punkte A_1 und A_3 liegt, so ist nach dem Vorhergehenden, indem man die Coordinaten der Punkte A_2 und A_3 gegeneinander vertauscht,

$$2\Delta = \mp\{(x'_3 - x'_2)y'_1 + (x'_2 - x'_1)y'_3 + (x'_1 - x'_3)y'_2\}$$

oder, was dasselbe ist,

$$2\Delta = \pm\{(x'_3 - x'_2)y'_1 + (x'_2 - x'_1)y'_3 + (x'_1 - x'_3)y'_2\},$$

Digitized by Google

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem man sich, um von dem Punkte A_1 durch den Punkt A_2 zu dem Punkte A_3 zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss. Weil nun aber die Richtung von A_1 durch A_2 zu A_3 der Richtung von A_1 durch A_3 zu A_2 offenbar entgegengesetzt ist, so ist augenscheinlich

$$2\Delta = \mp\{(x'_2 - x'_3)y'_1 + (x'_3 - x'_1)y'_2 + (x'_1 - x'_2)y'_3\},$$

wenn man nur das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem man sich, um von dem Punkte A_1 durch den Punkt A_2 zu dem Punkte A_3 zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss. Wenn endlich der Punkt A_1 zwischen den Ordinaten der Punkte A_2 und A_3 liegt, so ist nach dem ersten der beiden vorhergehenden Fälle, wenn man für x'_1, y'_1; x'_2, y'_2; x'_3, y'_3 respective x'_2, y'_2; x'_3, y'_3; x'_1, y'_1 setzt, offenbar

$$2\Delta = \mp\{(x'_3 - x'_1)y'_2 + (x'_1 - x'_2)y'_3 + (x'_2 - x'_3)y'_1\}$$

oder, was dasselbe ist,

$$2\Delta = \mp\{(x'_2 - x'_3)y'_1 + (x'_3 - x'_1)y'_2 + (x'_1 - x'_2)y'_3\},$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem man sich, um von dem Punkte A_2 durch den Punkt A_3 zu dem Punkte A_1 zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hinbewegen muss. Weil nun aber die Richtung von A_2 durch A_3 zu A_1 offenbar mit der Richtung von A_1 durch A_2 zu A_3 völlig einerlei ist, so ist

$$2\Delta = \mp\{(x'_2 - x'_3)y'_1 + (x'_3 - x'_1)y'_2 + (x'_1 - x'_2)y'_3\},$$

und in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem man sich, um von dem Punkte A_1 durch den Punkt A_2 zu dem Punkte A_3 zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss.

Nehmen wir nun alles Vorhergehende zusammen, so ist in völliger Allgemeinheit

$$2\Delta = \mp\{(x'_2 - x'_3)y'_1 + (x'_3 - x'_1)y'_2 + (x'_1 - x'_2)y'_3\},$$

wenn man nur in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem man sich, um von dem Punkte A_1 durch den Punkt A_2 zu dem Punkte A_3 zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven

Digitized by Google

Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss.

Bezeichnen wir jetzt die Coordinaten des Anfangspunktes des secundären Systems der $x'y'$ in Bezug auf das primitive System der xy durch a, b; so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten bekanntlich in völliger Allgemeinheit

$$x = a + x', \; y = b + y'$$

oder

$$x' = x - a, \; y' = y - b,$$

und folglich

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 - a, \; y'_1 = y_1 - b; \\ x'_2 &= x_2 - a, \; y'_2 = y_2 - b; \\ x'_3 &= x_3 - a, \; y'_3 = y_3 - b. \end{aligned}$$

Also ist nach der vorher gefundenen Gleichung

$$\left.\begin{aligned} 2\Delta = \mp \{ &[(x_3 - a) - (x_2 - a)]\,(y_1 - b) \\ &+ [(x_2 - a) - (x_1 - a)]\,(y_3 - b) \\ &+ [(x_1 - a) - (x_3 - a)]\,(y_2 - b) \end{aligned}\right\}$$

oder

$$2\Delta = \mp \{(x_3 - x_2)\,(y_1 - b) + (x_1 - x_1)\,(y_2 - b) + (x_1 - x_3)\,(y_3 - b)\},$$

und folglich, weil

$$(x_3 - x_2) + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_3) = 0,$$

also auch

$$b(x_3 - x_2) + b(x_2 - x_1) + b(x_1 - x_3) = 0$$

ist, in völliger Allgemeinheit

$$9)\quad 2\Delta = \mp \{(x_3 - x_2)y_1 + (x_2 - x_1)y_2 + (x_1 - x_3)y_3\},$$

wo man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem man sich, um von dem Punkte A_1 durch den Punkt A_2 zu dem Punkte A_3 zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss.

Kehren wir nun wieder zu dem oben betrachteten Falle, wenn die vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 in einem Kreise liegen, zurück, und nehmen an, dass dieselben in dem Kreise nach der Ordnung der Zahlen 1, 2, 3, 4 auf einander folgen, so sind, weil keiner dieser Punkte innerhalb des durch die drei andern bestimmten Dreiecks liegt, offenbar die Richtungen, nach denen man sich bewegen muss, um von A_1 durch A_2 zu A_3, von A_2 durch A_3 zu A_4, von A_3 durch A_4 zu A_1, von A_4 durch A_1 zu A_2 zu gelangen, nicht von einander verschieden, und nach 9) ist folglich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander jederzeit

Digitized by Google

$$2\Delta A_2A_3A_4 = \mp\{(x_3-x_4)y_2+(x_4-x_2)y_3+(x_2-x_3)y_4\},$$
$$2\Delta A_3A_4A_1 = \mp\{(x_4-x_1)y_3+(x_1-x_3)y_4+(x_3-x_4)y_1\},$$
$$2\Delta A_4A_1A_2 = \mp\{(x_1-x_2)y_4+(x_2-x_4)y_1+(x_4-x_1)y_2\},$$
$$2\Delta A_1A_2A_3 = \mp\{(x_2-x_3)y_1+(x_3-x_1)y_2+(x_1-x_2)y_3\}.$$

Also ist nach 7) jederzeit

$$\begin{aligned} 0 = &\mp A_1O^2\,.\,\Delta A_2A_3A_4 \\ &\pm A_2O^2\,.\,\Delta A_3A_4A_1 \\ &\mp A_3O^2\,.\,\Delta A_4A_1A_2 \\ &\pm A_4O^2\,.\,\Delta A_1A_2A_3, \end{aligned}$$

und folglich immer

$$\begin{aligned} 0 = &\;\; A_1O^2\,.\,\Delta A_2A_3A_4 \\ &- A_2O^2\,.\,\Delta A_3A_4A_1 \\ &+ A_3O^2\,.\,\Delta A_4A_1A_2 \\ &- A_4O^2\,.\,\Delta A_1A_2A_3. \end{aligned}$$

Weil der Anfang O der Coordinaten natürlich ganz willkührlich ist, so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar der folgende nicht uninteressante Satz vom Kreise:

Wenn A_1, A_2, A_3, A_4 vier beliebige Punkte eines Kreises sind, die auf dem Kreise nach der Ordnung der Zahlen 1, 2, 3, 4 auf einander folgen, so ist für jeden Punkt O in der Ebene dieses Kreises

$$\begin{aligned} 0 = &\;\; A_1O^2\,.\,\Delta A_2A_3A_4 \\ &- A_2O^2\,.\,\Delta A_3A_4A_1 \\ &+ A_3O^2\,.\,\Delta A_4A_1A_2 \\ &- A_4O^2\,.\,\Delta A_1A_2A_3 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &A_1O^2\,.\,\Delta A_2A_3A_4 + A_3O^2\,.\,\Delta A_4A_1A_2 \\ =\,&A_2O^2\,.\,\Delta A_3A_4A_1 + A_4O^2\,.\,\Delta A_1A_2A_3. \end{aligned}$$

Anmerkung. Nachdem dieser Aufsatz ausgearbeitet und zum Druck abgeschickt war, fand ich, dass Herr Dr. Luchterhand denselben Satz vom Kreise gefunden und in Crelle's Journal. B. XXIII. H. 4. mitgetheilt, auch auf die Kugel erweitert hat. Wegen der anderweitigen in diesem Aufsatze enthaltenen Bemerkungen, und weil der vorstehende Satz vom Kreise jedenfalls weiter bekannt zu werden verdient, wollte ich aber diesen Aufsatz nicht unterdrücken, wie ich sonst gethan haben würde. Natürlich gebührt Herrn Dr. Luchterhand die Priorität der Erfindung.

Digitized by Google

XXX.

Ueber einen Reihenausdruck für den Umfang der Ellipse.

Von

Herrn R. Hoppe

Candidaten des höhern Schulamts zu Greifswald.

Gewöhnlich wird der Umfang einer Ellipse durch folgende unendliche Reihe dargestellt:

$$E = 2\pi - 2\pi \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}\right)^2 \frac{\varepsilon^{2n}}{2n-1},$$

wo die grosse Halbaxe $= 1$, die Excentricität $= \varepsilon$ gesetzt ist. Er lässt sich jedoch in eine weit schneller convergirende Reihe entwickeln.

Ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

die Gleichung der Ellipse, und setzt man

$$\frac{x}{a} = \cos\varphi;$$

so ist $\frac{y}{b} = \sin\varphi$, und man hat

$$\frac{dx}{d\varphi} = -a \sin\varphi; \quad \frac{dy}{d\varphi} = b \cos\varphi.$$

Nennt man s den zugehörigen Ellipsenbogen, so ist

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} = \sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2(1 - \cos 2\varphi) + \tfrac{1}{2}b^2(1 + \cos 2\varphi)}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) - \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)\cos 2\varphi}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2 + b^2)}\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\cos 2\varphi}.$$

Nun ist der ganze Umfang der Ellipse

Digitized by Google

$$E = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi;$$

daher

$$E = 2\sqrt{2(a^2+b^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cos 2\varphi};$$

also, wenn man die letzte Quadratwurzel in eine Reihe entwickelt,

$$E = 2\sqrt{2(a^2+b^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \Big[1 - \frac{1}{2}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cos 2\varphi$$
$$-\frac{1}{2.4}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 \cos^2 2\varphi - \frac{1.3}{2.4.6}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^3 \cos^3 2\varphi$$
$$-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^4 \cos^4 2\varphi \ldots\Big].$$

Nun ist bekanntlich

$$\int_0^{\pi} \cos^{2n+1}\varphi d\varphi = 0,$$
$$\int_0^{\pi} \cos^{2n}\varphi d\varphi = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}\,\frac{\pi}{2^{2n}}.$$

Setzt man hier 2φ statt φ, so hat man

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} 2\varphi d\varphi = 0,$$
$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} 2\varphi d\varphi = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}\,\frac{\pi}{2^{2n}}.$$

In unserm Ausdrucke für E können wir demzufolge die Glieder mit ungeraden Potenzen von cos 2φ weglassen, und es bleibt noch

Digitized by Google

$$E = 2\sqrt{2(a^2+b^2)}\left[\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1\cdot 3\ldots(4n-3)}{2\cdot 4\ldots 4n}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} 2\varphi d\varphi\right]$$

$$= \pi\sqrt{2(a^2+b^2)}\left[1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1\cdot 3\ldots(4n-3)\,(2n)\,(2n-1)\ldots(n+1)}{2\cdot 4\ldots 4n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots n\cdot 2^{2n}}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^{2n}\right].$$

Der Coefficient des allgemeinen Gliedes der Summe lässt sich vereinfachen; man kann ihn schreiben:

$$\frac{1\cdot 3\ldots(4n-3)\;(2n)\;(2n-1)\ldots(n+1)}{1\cdot 2\ldots n(n+1)\;(n+2)\ldots(2n)\cdot 1\cdot 2\ldots,n\cdot 2^{4n}},$$

das ist

$$\frac{1\cdot 3\ldots(4n-3)}{(1\cdot 2\ldots n)^2\;2^{4n}} = \frac{1\cdot 3\ldots(4n-3)}{(4\cdot 8\cdot 12\ldots 4n)^2}.$$

Hiernach erhält man

$$E = \pi\sqrt{2(a^2+b^2)}\;\left[1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1\cdot 3\ldots(4n-3)}{(4\cdot 8\cdot 12\ldots 4n)^2}\;\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^{2n}\right].$$

Setzen wir noch die grosse Halbaxe $a = 1$ und die Excentricität $\sqrt{a^2-b^2} = \varepsilon$, so ist

Digitized by Google

$$E = \pi\sqrt{2(2-\varepsilon^2)}\,\left[1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1\,.\,3\,\ldots\,(4n-3)}{(4\,.\,8\,.\,12\,\ldots\,4n)^2}\,\left(\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon^2}\right)^{2n}\right].$$

Beispiel. Es sei $\varepsilon = \frac{1}{3}$, dann ist

$$\pi\sqrt{2(2-\varepsilon^2)} = \frac{\pi}{3}\sqrt{34},\ \left(\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon^2}\right)^2 = \frac{1}{289};$$

daher

$$E = \frac{\pi}{3}\sqrt{34} - \frac{\pi}{3}\sqrt{34}\,.\,\frac{1}{4^2}\,\frac{1}{289} - \frac{\pi}{3}\sqrt{34}\,.\,\frac{1\,.\,3\,.\,5}{4^2\,.\,8^2}\,\frac{1}{289^2}$$

$$- \frac{\pi}{3}\sqrt{34}\,.\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9}{4^2\,.\,8^2\,.\,12^2}\,\frac{1}{289^3} - \frac{\pi}{3}\sqrt{34}\,.\,\frac{1\,.\,3\,\ldots\,.\,13}{4^2\,.\,8^2\,.\,12^2\,.\,16^2}\,\frac{1}{289^4} - \ldots$$

$$= u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 - \ldots$$

Nun ist $\frac{\pi}{3}\sqrt{34} = \frac{1}{3}\sqrt{34\pi^2}$

$$\pi^2 = 9{,}8696044010893586\ldots$$

$$\frac{\pi}{3}\sqrt{34} = 6{,}10615854542716 = u_1$$

$$u_2 = \frac{1}{4^2\,.\,289} \qquad u_1 = 0{,}00132053601761$$

$$u_3 = \frac{3\,.\,5}{8^2\,.\,289} \qquad u_2 = 0{,}0000001070937$$

$$u_4 = \frac{7\,.\,9}{12^2\,.\,289} \qquad u_3 = 0{,}0000000001621$$

$$u_5 = \frac{11\,.\,13}{16^2\,.\,289} \qquad u_4 = 0{,}0000000000003$$

$$\text{Summe} = 0{,}0013206432737$$

$$u_1 = 6{,}1061585454272$$

$$E = 6{,}1048379021535$$

Digitized by Google

XXXI.

Ueber die Methode der unbestimmten Coeffizienten und verwandte Gegenstände.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

Zur Verwandlung der Funktionen in Reihen bedient man sich immer noch so häufig der Methode der unbestimmten Coeffizienten, dass es wohl nicht überflüssig sein dürfte, auf die Mängel solcher Entwickelungsweisen genauer hinzuweisen und das Gebiet ihrer Anwendbarkeit näher zu bestimmen.

1) Das Verfahren besteht bekanntlich darin, dass man die zu entwickelnde Funktion

$$f(x) = a + bx + cx^2 + \ldots\ldots$$

und die noch unbestimmten Coeffizienten $a, b, c, \ldots$ mittelst irgend einer Eigenschaft der Funktion $f(x)$ bestimmt. Das ist aber bei weitem nicht genug. Es müsste nun auch noch gezeigt werden, dass jene Eigenschaft die Funktion $f(x)$ vollkommen charakterisirt, d. h. dass es keine andere Funktion $\varphi(x)$ giebt, welche die nämliche Eigenschaft besitzt, ohne mit $f(x)$ identisch zu sein *). Geschieht diess nicht, so kann man, wenn umgekehrt $a, b, c \ldots$ gegeben sind, von der Summe der Reihe

$$a + bx + cx^2 + \ldots$$

nichts Anderes sagen, als: es ist dieselbe eine gewisse Funktion von x, welche die und die Eigenschaft hat, dass u. s. w. Als Beispiel will ich nach der gewöhnlichen Weise zeigen, wie sich diejenige Funktion von x in eine Reihe verwandeln lässt, welcher die Eigenschaften zukommen:

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x-y}{1+xy}\right), \quad \text{Lim}\,\frac{f(\delta)}{\delta} = 1 \text{ für abnehmende } \delta.$$

---

*) So haben die Funktionen $\frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ und $\cos ax$ die Eigenschaft gemein, dass $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$ ist, und die Funktionen $\frac{1}{2}a(b^{\frac{x}{a}} + b^{\frac{x}{a}}$ und $ax + b$ die, dass $\frac{f(x+h) + f(x-h)}{f(x)}$ nicht mehr von x abhängt, u. s. w.

Digitized by Google

Aus der ersten Gleichung folgt für $y=x$, $0=f(0)$, also darf die fragliche Reihe kein von x freies Glied besitzen; ferner für $x=0$ giebt die Benutzung des eben Gefundenen $-f(y)=f(-y)$, so dass mithin nur ungerade Potenzen von x vorkommen können. Wir setzen daher

$$f(x)=a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\ldots\ldots$$

woraus folgt

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=a_1\frac{x-y}{x-y}+a_3\frac{x^3-y^3}{x-y}+a_5\frac{x^5-y^5}{x-y}+\ldots\ldots \quad (1)$$

Vermöge der ersten für $f(x)$ angegebenen Eigenschaft muss aber auch sein

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=a_1\frac{1}{1+xy}+a_3\frac{(x-y)^2}{(1+xy)^3}+\ldots\ldots \quad (2)$$

Bekanntlich hat man aber für jedes positive ganze $n>0$

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}$$

folglich für $y=x$

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=nx^{n-1}.$$

Nehmen wir auch in (1) und (2) $y=x$, so ist vermöge dieses Satzes

$$a_1+3a_3x^2+5a_5x^4+\ldots\ldots$$

$$=\frac{a_1}{1+x^2}=a_1-a_1x^2+a_1x^4-\ldots\ldots$$

Durch Vergleichung der Coeffizienten gleicher Potenzen von x erhalten a_1, a_3, a_5, ... ihre Bestimmung und es wird dadurch

$$f(x)=a_1(x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\ldots\ldots).$$

Der Coeffizient a_1 findet sich vermöge der Eigenschaft $\mathrm{Lim}\frac{f(\delta)}{\delta}=1$. Derselbe ist $=1$, und somit sind wir zu folgendem Theorem gelangt:

Die Summe der Reihe

$$x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\ldots$$

ist diejenige Funktion von x, welche die Eigenschaften besitzt:

$$f(x)-f(y)=f\left(\frac{x-y}{1+xy}\right),\ \mathrm{Lim}\frac{f(\delta)}{\delta}=1,\ \text{für abnehmende } \delta.$$

Welche nun diese Funktion sei lässt sich auf elementarem Wege nicht gut entdecken. Weiss man umgekehrt aus anderen Betrachtungen, dass die Summe der vorliegenden Reihe Arctan x ist, so kann allenfalls jene Rechnung als ein elementarer Beweis dienen, dass die genannten Eigenschaften für den Arctan. charakteristisch sind.

Jene nothwendige Vervollständigung lässt sich aber nur bei wenigen Funktionen geben, nämlich dann wenn $f(x)$ der Quotient zweier Reihen von der Form $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\ldots$ oder wenn

Digitized by Google

$f(x)=a^x$ und $=\log(1+x)$ ist. (Cauchy, Cours d'Analyse, I. partie, Chap. V.)

2) Ein zweiter Vorwurf, welcher die Methode der unbestimmten Coeffizienten trifft, wie sie bisher angewendet wurde, ist die Nichtbeachtung des Restes der entspringenden Reihe, wodurch die natürlichste Bestimmung der Convergenz oder Divergenz derselben verloren geht. Wie man vielmehr jene Methode anzuwenden habe, will ich hier an einem Beispiele zeigen, welchem ich jedoch einen Satz von den bestimmten Integralen vorausschicken muss.

Wenn M und N das Maximum und Minimum der Funktion $\varphi(x)$ innerhalb des Intervalles $x=\alpha$ bis $x=\beta$ sind und $\psi(x)$ eine Funktion bedeutet, welche während des nämlichen Intervalles positiv bleibt so ist jederzeit

$$M\int_\alpha^\beta \psi(x)dx > \int_\alpha^\beta \varphi(x)\ \psi(x)dx > N\int_\alpha^\beta \psi(x)dx. \quad (3)$$

Denn vermöge der Bedeutung von M und N ist für das ganze Intervall

$$M-\varphi(x) \text{ positiv, } N-\varphi(x) \text{ negativ,}$$

folglich, weil $\psi(x)$ und dx positiv sind, auch

$$[M-\varphi(x)]\ \psi(x)dx \text{ positiv, } [N-\varphi(x)]\ \psi(x)dx \text{ negativ}$$

und ebenso

$$\int_\alpha^\beta [M-\varphi(x)]\ \psi(x)dx \text{ positiv, } \int_\alpha^\beta [N-\varphi(x)]\ \psi(x)dx \text{ negativ.}$$

Durch Integration der einzelnen Glieder folgt daraus sogleich das ausgesprochene Theorem.

Ich will nun setzen

$$(1+x)^\mu = 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + R_n$$

eine Annahme, die sich für ganze positive Exponenten durch gemeine Multiplikation und für andere μ durch die Analogie rechtfertigt. Nun beweist die Differenzialrechnung unabhängig vom Binomialtheorem, dass für jedes beliebige reelle μ, $d(x^\mu)=\mu x^{\mu-1}dx$ ist. Vermöge dieses Satzes haben wir

$$\mu(1+x)^{\mu-1} = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \frac{dR_n}{dx}$$

und durch Multiplikation mit $(1+x)$,

$$\mu(1+x)^\mu = a_1 + (2a_2+a_1)x + \ldots\ldots (na_n + \overline{n-1}a_{n-1})x^{n-1} + na_nx^n + (1+x)\frac{dR_n}{dx}.$$

Aus der für $(1+x)^\mu$ angenommenen Reihe folgt aber

$$\mu(1+x)^\mu = \mu + \mu a_1x + \ldots\ldots + \mu a_{n-1}x^{n-1} + \mu a_nx^n + \mu R_n.$$

Durch Vergleichung der Coeffizienten von $x^0, x^1, \ldots x^{n-1}$ erhalten wir

$$a_1 = \frac{\mu}{1},\ a_2 = \frac{\mu-1}{2}a_1, \ldots\ldots a_n = \frac{\mu-n+1}{n}a_{n-1}$$

$$= \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}, \qquad = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2\ldots\ldots n}.$$

Durch diesen Werth von a_n werden aber die mit x^n multiplizirten Glieder nicht identisch; es muss daher im Uebrigen sein

$$na_nx^n + (1+x)\frac{dR_n}{dx} = \mu a_n x^n + \mu R_n$$

oder

$$(1+x)\frac{dR_n}{dx} - \mu R_n = (\mu - n)a_n x^n.$$

Um aus dieser Differenzialgleichung R_n zu finden, sei

$$R_n = (\mu - n)a_n(1+x)^\mu y$$

wo y eine noch zu bestimmende Funktion von x ist. Die Differenzialgleichung wird jetzt folgende.

$$(\mu-n)a_n[(1+x)^{\mu+1}\frac{dy}{dx} + \mu(1+x)^\mu y - \mu(1+x)^\mu y]$$

$$= (\mu - n)a_n x^n$$

d. i. sehr einfach

$$(1+x)^{\mu+1}\frac{dy}{dx} = x^n$$

woraus

$$y = \int \frac{x^n dx}{(1+x)^{\mu+1}} + \text{Const.}$$

und

$$R_n = (\mu-n)a_n(1+x)^\mu\left[\int\frac{x^n dx}{(1+x)^{\mu+1}} + \text{Const}\right] \quad (4)$$

folgt. Dieser Rest ist es nun, welcher die gefundene Reihe

$$(1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2\ldots\ldots n}x^n \quad (5)$$

ergänzt. Für ein positives ganzes $\mu = n$ bricht die Reihe bei dem Gliede x^n ab, weil das nächste den Faktor $n - n = 0$ enthält. An dieses wäre dann noch der obige Rest anzuhängen, der aber ebenfalls den Faktor $\mu - n = 0$ enthält und daher sich annullirt. Für jedes andere μ dagegen wird keins der Glieder unserer Reihe $= 0$ und es liegt daher sehr nahe, sie ins Unendliche fortgehen zu lassen. Dabei fragt es sich aber noch, was aus dem Reste werden wird. Würde derselbe über alle Gränze hinaus wachsen, so wäre durch die unendliche Verlängerung der Reihe Nichts gewonnen, weil sich dann der ganze Ausdruck auf das vieldeutige Resultat $(1+x)^\mu = \infty - \infty$ reduziren würde; wir müssen desshalb den

Digitized by Google

Rest so einzurichten suchen, dass sich derselbe bei wachsendem n entweder einer endlichen bestimmten Gränze oder der Null nähert.

Um zuvörderst die Constante der Integration in (4) zu bestimmen, setzen wir in (5) $x=0$, wodurch sich die Reihe auf die identische Gleichung $1=1$ reduzirt. Es muss also dann der Rest $=0$ oder

$$\text{Const} = -\int \frac{x^n dx}{(1+x)^{\mu+1}} \text{ (für } x=0)$$

sein. Es ist aber sehr leicht einzusehen, dass dieses Integral für $x=0$ verschwindet, also Const $=0$ wird. Geben wir ferner x den grössten absoluten Werth c, so können wir schreiben

$$R_n = (\mu-n)a_n(1+c)^{\mu}\left[\int^{x=c} \frac{x^n dx}{(1+x)^{\mu+1}} - \int_{x=0} \frac{x^n dx}{(1+x)^{\mu+1}}\right]$$

$$= (\mu-n)a_n(1+c)^{\mu}\int_0^c \frac{x^n dx}{(1+x)^{\mu+1}}.$$

Ohne diese Integration auszuführen, können wir leicht mittelst des früher bewiesenen Lemma von den bestimmten Integralen den Rest in zwei Gränzen einschliessen. Bezeichnen wir das Integral mit J und setzen $\alpha=0$, $\beta=c$, $\varphi(x)=\frac{1}{(1+x)^{\mu+1}}$, $\psi(x)=x^n$, so ist $M=1$, $N=\frac{1}{(1+x)^{\mu+1}}$, und mithin

$$\int_0^c x^n dx > J > \frac{1}{(1+c)^{\mu+1}}\int_0^c x^n dx$$

oder

$$\frac{c^{n+1}}{n+1} > J > \frac{1}{(1+c)^{\mu+1}} \cdot \frac{c^{n+1}}{n+1}$$

und daher:

$$(\mu-n)a_n(1+c)^{\mu}\,\frac{c^{n+1}}{n+1} > R_n > (\mu-n)a_n(1+c)^{-1}\cdot\frac{c^{n+1}}{n+1}$$

oder, weil $a_{n+1}=\frac{\mu-n}{n+1}\,a_n$ ist,

$$(1+c)^{\mu}a_{n+1}c^{n+1} > R_n > (1+c)^{-1}a_{n+1}c^{n+1}.$$

Daraus geht hervor, dass der Rest in den nämlichen Fällen wachsen oder abnehmen wird, in welchen diess mit den Gliedern der Reihe

$$(1+x)^{\mu} = 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \text{ (für } x=c)$$

geschieht. Bezeichnen wir a_nc^n mit p_n, so ist

$$p_{n+1} = p_n\cdot\frac{\mu-n}{n+1}c = -p_n\left(1-\frac{\mu+1}{n+1}\right)c$$

$$p_{n+2} = +p_n\left(1-\frac{\mu+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{\mu+1}{n+2}\right)c^2$$

$$p_{n+3} = -p_n\left(1-\frac{\mu+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{\mu+1}{n+2}\right)\left(1-\frac{\mu+1}{n+3}\right)c^3$$

u. s. f.

Digitized by Google

Soll nun abgesehen vom Zeichen $\ldots p_{n+3} < p_{n+2} < p_{n+1} < p_n$ sein, d. h. die Grösse p_n bei wachsenden n beständig abnehmen, so folgt daraus

$$(1-\frac{\mu+1}{n+3})\,c<1,\ (1-\frac{\mu+1}{n+2})\,c<1,\ (1-\frac{\mu+1}{n+1})\,c<1,$$

was bei dem wachsenden n auf das gemeinsame Resultat

$$c<1$$

hinausgeht. In jedem anderen Falle nehmen die Glieder p_n, $p_{n+1}\ldots$. nicht ins Unendliche ab, sondern werden entweder am Ende constant oder unendlich gross, und das Nämliche gilt dann von dem Rest der Reihe. Schliessen wir diese Fälle aus, so bleibt

$$(1+x)^\mu = 1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\ldots\ldots \text{ in inf.},$$

$$+1>x>-1$$

eine Reihe, deren Glieder immer kleiner werden und deren Rest verschwindet, d. h. eine convergente.

In dieser Weise muss die Methode der unbestimmten Coeffizienten angewendet werden, wenn man auf Strenge Anspruch machen will. Hätte man früher diesen an und für sich so natürlichen Weg verfolgt, so würde der leidige Streit über Convergenz und Divergenz der Reihen gar nicht entstanden sein. Statt dessen liess man gleich die Reihe ins Unbestimmte fortgehen und bemühte sich später den offenbar widersinnigen Resultaten (sobald eine Divergenz eintrat) eine irgend plausible Bedeutung zu vindiciren. Wie es scheint hat man sich immer daran gehalten, dass durch eine richtige Rechnung auch etwas Richtiges zum Vorschein kommen müsse. Dazu gehört auch Richtigkeit der Voraussetzung. Wenn man aber eine Funktion einer unendlichen Reihe gleich setzt, so will man damit sehr oft der ersteren eine Form aufzwingen, die sie gar nicht annehmen kann.

Dergleichen Fälle giebt es mehr. Setzt man z. B.

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx + \ldots$$

multiplizirt beiderseits mit $\frac{2}{\pi}\sin nx\,dx$ und integrirt zwischen 0 und π, so findet man

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx = a_n.$$

Man nehme z. E. $f(x)=1$, so hat man darnach

$$\frac{\pi}{4} = \sin x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \tfrac{1}{5}\sin 5x + \ldots$$

Aber für $x=0$ oder $x=\pi$ kommt der Widerspruch $\frac{\pi}{4}=0$ zum Vorschein. Darüber braucht sich Niemand zu wundern, denn es liegt diess lediglich in der Form der Reihe, die für $f(x)$ angenommen wurde. Hier kann man die Unrichtigkeit der Voraussetzung für $x=0$ und $x=\pi$ gleich a priori erkennen, bei den nach Potenzen von x fortschreitenden Reihen dagegen erst a posteriori

Digitized by Google

durch die Betrachtung des Restes; aber gerade diese letztere hat man gewöhnlich vernachlässigt und daher der ganze Streit.

Zu welchen entsetzlichen Resultaten man durch dergleichen Nachlässigkeiten gelangen kann, will ich hier an einer Rechnung zeigen, die ich parallel einer von Euler herrührenden fortführen will *). Nach der Formel

$$\cos\,(n+1)x = 2\cos\,nx\,\cos\,x - \cos\,(n-1)x$$

ist

$$\left.\begin{aligned}
\cos\,x &= \cos\,x \\
\cos\,2x &= 2\cos\,x\,\cos\,x - 1 \\
\cos\,3x &= 2\cos\,2x\,\cos\,x - \cos\,x \\
\cos\,4x &= 2\cos\,3x\,\cos\,x - \cos\,2x \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

u. s. w. in inf.

Also, wenn man das Aggregat der Grössen auf der linken Seite der Gleichheitszeichen $= S$ setzt,

$$S = \cos\,x + 2S\,\cos\,x - 1 - S,$$

woraus man sogleich erhält

$$S = \cos\,x + \cos\,2x + \cos\,3x + \ldots \text{ in inf.} = -\tfrac{1}{2}.$$

Entwickelt man jeden Cosinus in eine Reihe, so ist

$$\begin{aligned}
S = -\tfrac{1}{2} = \quad & 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \\
& - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots)\,\frac{x^2}{1\,.\,2} \\
& + (1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots\ldots\ldots)\,\frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

woraus augenblicklich folgt

$$\begin{aligned}
1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \text{ in inf.} &= -\tfrac{1}{2} \\
1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots &= 0 \\
1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots\ldots\ldots &= 0 \text{ u. s. f.}
\end{aligned}$$

Dazu werden sich schwerlich Gläubige finden!

Untersuchen wir nun, worin der Fehler liegt. Nehmen wir die Reihe erst als endliche bis zum $n$ten Gliede, setzen

$$S_n = \cos\,x + \cos\,2x + \ldots\ldots + \cos\,nx$$

---

*) Supplemente zu Klügels Wörterbuch S. 536.

Digitized by Google

und denken uns zu der obigen Darstellung (6) noch das letzte Glied

$$\cos nx = 2\cos(n-1)\cos x - \cos(n-2)x$$

hinzugeschrieben, so ist jetzt

$$S_n = \cos x + 2S_{n-1}\cdot\cos x - 1 - S_{n-2}$$

und weil $S_{n-1} = S_n - \cos nx$, $S_{n-2} = S_n - (\cos nx + \cos(n-1)x)$ ist, so findet sich leicht nach einiger Reduktion

$$S_n = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx$$

$$= -\tfrac{1}{2} + \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

Für wachsende n nähert sich aber der Sinusquotient (der Rest der Reihe) keineswegs der Null, sondern oszillirt beständig zwischen $+\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}$ und $-\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}$, so dass also jene Reihe ins Unendliche fortgesetzt gar keine bestimmte Summe hat. Entwickelt man dagegen auf der linken Seite die Cosinus und auf der rechten den Sinusquotienten nach Potenzen von x, so erhält man durch Vergleichung

$$1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots + n^0 = n$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2\cdot 3}$$

u. s. w.

die ohnehin schon bekannten Formeln. Auf gleiche Weise kann man die übrigen Reihen der Art prüfen und wird immer den alten Fehler finden, dass ein Rest (der Quotient zweier trigonometrischen Funktionen) weggelassen worden ist, ohne dass er für wachsende n sich der Null nähert. (Die Frage des Herrn Dr. Hellerung, Archiv Theil I. Heft 3. S. 321. erledigt sich dadurch von selbst.)

Vielleicht ist es nicht überflüssig, zur Ergötzlichkeit der Leser noch einige Folgerungen aus den gewöhnlichen Resultaten zu ziehen.

Wir fanden

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = -\tfrac{1}{2} + \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x} \quad (7)$$

und wenn wir $\pi - x$ für x schreiben

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x + \ldots \pm \cos nx = \tfrac{1}{2} \mp \frac{\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\cos\frac{1}{2}x},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Nun soll aber auctore Eulero sein

Digitized by Google

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots \text{ in inf.} = -\tfrac{1}{2}$$
$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \ldots \text{ in inf.} = +\tfrac{1}{2}$$

also müsste, wenn wir in unseren Formeln $n = \infty$ nehmen, auch sein

$$\sin \infty x = 0, \quad \mp \cos \infty x = 0$$

folglich

$$\sin^2 \infty x + \cos^2 \infty x = 0. \quad (!)$$

Man multiplizire ferner die erste Reihe mit $f(x)dx$ und integrire zwischen zwei Gränzen 0 und a so kommt

$$\int_0^a f(x)dx + 2\Big[\int_0^a f(x) \cos x \, dx + \int_0^a f(x) \cos 2x \, dx + \ldots \text{ in inf.}\Big] = 0 \quad (8)$$

während dagegen die Summe derselben nach (7)

$$= \text{Lim} \int_0^a \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{\sin \frac{1}{2}x} f(x)dx, \text{ für wachsende } n$$

ist, worüber man einen früheren Aufsatz von mir (Archiv Theil I. S. 417) nachsehen kann. So würde aus jener Reihe (8) für $f(x) = e^{-x}$, $a = \infty$ folgen

$$1 + \frac{2}{1^2+1} + \frac{2}{2^2+1} + \frac{2}{3^2+1} + \ldots \text{ in inf.} = 0 \quad (!)$$

Doch genug von diesen Verkehrtheiten, deren Zahl sich leicht vermehren liesse. Schliesslich noch ein Paar Worte über die Methode der unbestimmten Coeffizienten. Wirft man einen Blick auf die oben gegebene Darstellung, so ergiebt sich von selbst, wo die fragliche Methode ihren Platz finden kann. In der allgemeinen Arithmetik wird man sie ausser zur Entwickelung von Reihenquotienten nicht benutzen können, weil die zu strenger Untersuchung nöthigen Vervollständigungen die Kräfte der niederen Analysis übersteigen. Es ist daher besser nicht von der Entwickelung in Reihen, sondern von der Summirung derselben auszugehen und dabei mit der Binomialformel anzufangen, aus welcher sich die übrigen Reihen für die wichtigsten Funktionen ableiten lassen. Das Bedürfniss der Convergenz stellt sich hier von selbst dar, weil man nicht eher die Bestimmung einer Reihensumme unternehmen wird, als bis man weiss, dass eine solche in endlicher Form existirt. Dieser Weg, den unter Andern Cauchy in seinem Cours d'Analyse eingeschlagen hat, bleibt daher jedenfalls der strengste.

Digitized by Google

XXXII.

Ueber die Integration unendlicher Reihen.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

Der Missbrauch, den man mit unendlichen Reihen, welche nicht jederzeit convergiren, getrieben hat, führte unter Andern auch dazu, dass man Reihen der Art zwischen Gränzen integrirte, innerhalb deren sie nicht beständig convergiren. Dass diess im Allgemeinen nicht erlaubt sei, ist leicht einzusehen. Denn ein bestimmtes Integral

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

ist bekanntlich die Gränze, welcher sich der Ausdruck

$$\delta\{f(\alpha)+f(\alpha+\delta)+f(\alpha+2\delta)+\ldots\ldots+f(\alpha+\overline{n-1}\delta)\},$$

$$\delta=\frac{\beta-\alpha}{n},\ (n \text{ eine positive ganze Zahl})$$

für wachsende n, also abnehmende δ nähert. Will man nun für $f(x)$ unter dem Integralzeichen eine unendliche Reihe setzen, so wird man erst den vorliegenden Ausdruck um die Befugniss dazu befragen müssen. In demselben durchläuft x stetig die Werthe

$$\alpha,\ \alpha+\delta,\ \alpha+2\delta,\ \ldots\ldots\ \beta-\delta,$$

und mithin wird jene Reihenverwandlung dann erlaubt sein, wenn die Reihe für $f(x)$ für alle diese Werthe von x richtig ist, d. h. convergirt.

Wie leicht man bei der Nichtbeachtung dieser Regel auf Irrthümer stossen kann, zeigt u. A. folgendes Beispiel. Es ist bekanntlich

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}=\frac{\pi}{n\tan\frac{m\pi}{n}},$$

folglich für $m=1,\ n=2$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2}=0.$$

Wollte man unter dem Integralzeichen statt $\frac{1}{1-x^2}$ die Reihe

Digitized by Google

$$1 + x^3 + x^4 + x^6 + \ldots .$$

setzen, so würde man dagegen erhalten

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^3} = \infty + \tfrac{1}{3}\infty^3 + \tfrac{1}{5}\infty^5 + \ldots$$

also überhaupt das Integral $= \infty$, ein ganz falsches Resultat.

Indessen fehlt es auch nicht an Beispielen, dass trotz der Vernachlässigung jener Regel richtige Resultate zum Vorschein gekommen sind. Dies liegt dann an einer besonderen Beschaffenheit des Restes der Reihe. Vorausgesetzt dass

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + R_n$$

eine Reihe sei, welche für $x = \beta$ divergirt, d. h. in welcher für wachsende n sowohl der Rest, als die vorhergehende Summe unbegränzt wachsen, so trifft es sich doch häufig, dass in dem Ausdrucke

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = a_0(\beta-\alpha) + a_1 \frac{\beta^2-\alpha^2}{2} + \ldots .$$

$$\ldots + a_n \frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{n+1} + \int_\alpha^\beta R_n dx$$

das letzte Glied für wachsende n abnimmt und folglich das Nämliche herauskommt, als wenn man den Rest gar nicht berücksichtigt hätte.

Der Sicherheit wegen ist es daher immer nöthig den Rest mit zu nehmen, sobald die Integrationsgränzen die Werthe von x für welche allein die Reihe convergirt, übersteigen. Natürlich ist diess in manchen Fällen eine blosse Vervollständigung, durch die man nichts Neues erfährt, die aber von einer strengen Begründung wohl verlangt wird.

So hat man z. B. die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x}, \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1-x}, \quad (1)$$

mit deren Entwickelung sich ein Theil des Aufsatzes vom Herrn Herausgeber, Archiv Theil II. Heft 3. S. 283—301 beschäftigt, auch auf einem sehr kurzen Wege entwickelt, welcher aber gerade jene Vervollständigung nöthig hat *). Es sollen desshalb jene Integrale hier besonders betrachtet werden.

1) Theilen wir in dem ersten derselben, welches kurz J heissen möge, das Intervall 0 bis ∞ in zwei andere von 0 bis 1 und 1 bis ∞, so ist

$$J = \int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{1+x} + \int_1^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x}.$$

*) Supplemente zum mathem. Wörterb. 1ste Abth. S. 154. Wahrscheinlich hat auch der Herr Herausgeber das Ungenügende jenes Beweises gefühlt, und daher in seinem Aufsatze einen zwar längeren aber gründlicheren Beweis gegeben.

Digitized by Google

Nehmen wir in dem Integral von 1 bis ∞, $x = \frac{1}{z}$, so wird $x^{a-1}dx = -z^{-a-1}.dz$ und $\frac{x^{a-1}dx}{1+x} = \frac{-z^{-a}dz}{z+1}$. Die Integrationsgränzen für z müssen $=0$ und $=1$ genommen werden, damit sie mit denen für x identisch werden. Also ist nun

$$J = \int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{1+x} - \int_1^0 \frac{z^{-a}dz}{z+1}$$

oder, wenn wir im zweiten Integrale die Integrationsgränzen vertauschen und x für z schreiben:

$$J = \int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{1+x} + \int_0^1 \frac{x^{-a}dx}{1+x}.$$

Bekanntlich ist nun identisch

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots\ldots, + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

Wollen wir diese Reihe unter das Integralzeichen substituiren, so dürfen wir sie nicht ins Unendliche fortsetzen, weil sie für $x=1$, der oberen Integrationsgränze, nicht convergirt. Wir haben dann folgende Entwickelung

$$\begin{aligned}
J = &\int_0^1 [x^{a-1} - x^a + x^{a+1} - \ldots\ldots + (-1)^{n-1}x^{a+n-2}]dx \\
&\qquad + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{a+n-1}dx}{1+x} \\
&+ \int_0^1 [x^{-a} - x^{-a+1} + x^{-a+2} - \ldots\ldots + (-1)^{n-1}x^{-a+n-1}]dx \\
&\qquad + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{-a+n}dx}{1+x} \\
= &\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} - \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{a+n-1} \\
&+ \frac{1}{-a+1} - \frac{1}{-a+2} + \ldots\ldots + (-1)^{n-2}\frac{1}{-a+n-1} \\
&\qquad + (-1)^{n-1}\frac{1}{-a+n} \\
&+ (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{a+n-1}dx}{1+x} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{-a+n}dx}{1+x}.
\end{aligned}$$

Damit nun keines der Glieder jener beiden Reihen unendlich gross werde ist nöthig, dass a ein positiver ächter Bruch sei. Ziehen wir ferner beide Reihen durch Vereinigung der unter einander stehenden Glieder in eine zusammen, so ist noch

$$\left.\begin{aligned}
J = &\frac{1}{a} + \frac{2a}{1^2 - a^2} - \frac{2a}{2^2 - a^2} + \ldots\ldots + (-1)^{n-2}\frac{2a}{(n-1)^2 - a^2} \\
&\qquad + (-1)^{n-1}\frac{1}{n-a} \\
&+ (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{a+n-1}dx}{1+x} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{-a+n}dx}{1+x}
\end{aligned}\right\} (3).$$

Lassen wir nun das beliebige n ins Unendliche wachsen, so wird die obenstehende Reihe eine unendliche convergente, wovon man sich sehr leicht überzeugen kann. Es fragt sich nur noch, was in diesem Falle aus den angehängten Integralen wird.

Jedes derselben lässt sich nach dem Theorem (3) in dem vorhergehenden Aufsatze über die Methode der unbestimmten Coefficienten in zwei Gränzen einschliessen, wenn man das dortige $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\varphi(x) = \frac{1}{1+x}$, $\psi(x) = x^{a+n-1}$ oder $= x^{-a+n}$ setzt. Vermöge der Bedeutung von M und N a. a. O. ist

$$M = \frac{1}{1+0}, \quad N = \frac{1}{1+1},$$

folglich wenn wir $a+n-1$ und $-a+n$ mit m bezeichnen, welches gleichzeitig mit n wächst:

$$\int_0^1 x^m dx > \int_0^1 \frac{x^m dx}{1+x} > \tfrac{1}{2} \int_0^1 x^m dx$$

oder

$$\frac{1}{m+1} > \int_0^1 \frac{x^m dx}{1+x} > \frac{1}{2(m+1)}.$$

Für wachsende m nähern sich aber beide Gränzwerthe der Null und mithin verschwindet auch das Integral selbst für $n = m = \infty$. Lassen wir daher in (3) die beiden Integrale weg und setzen die Reihe ins Unendliche fort, so ist

$$J = \frac{1}{a} + \frac{2a}{1^2 - a^2} - \frac{2a}{2^2 - a^2} + \frac{2a}{3^2 - a^2} - \ldots \text{ in inf. } (4)$$

Die Summe dieser Reihe ist aber bekanntlich $= \frac{\pi}{\sin a\pi}$, und also haben wir, uns an die Bedeutung von J erinnernd,

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad +1 > a > 0 \ . \ (5)$$

Für $a = \frac{m}{n}$, wo also $n > m$ sein muss, und $x = z^n$ ergiebt sich noch

$$\int_0^\infty \frac{z^{m-1} dz}{1+z^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}, \quad n > m. \ (6).$$

Man findet auch leicht durch unmittelbare Integration, dass diese Formeln noch für $a = 1$, $m = n$, richtig sind, was aber wegen des Unendlichwerdens derselben keinen Nutzen gewährt.

2) Der bisher verfolgte Weg führt auch unter einigen Modifikationen zur Kenntniss des ähnlichen Integrales

$$J = \int_0^\infty \frac{x^{a-1} dx}{1-x}.$$

Nimmt man mit demselben die Reduktionen vor, welche früher den Ausdruck (1) in (2) verwandelten, so findet sich

Digitized by Google

$$J=\int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{1-x} - \int_0^1 \frac{x^{-a}dx}{1-x}$$

und, weil

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots\ldots\ldots+x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x}$$

ist, auch

$$J=\int_0^1 [x^{a-1}+x^a+x^{a+1}+\ldots\ldots\ldots+x^{a+n-2}]dx + \int_0^1 \frac{x^{a+n-1}dx}{1-x}$$

$$-\int_0^1 [x^{-a}+x^{-a+1}+x^{-a+2}+\ldots\ldots+x^{-a+n-1}]dx - \int_0^1 \frac{x^{-a+n}dx}{1-x}$$

$$=\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{a+n-1}$$

$$-\frac{1}{-a+1}-\frac{1}{-a+2}-\ldots\ldots\ldots-\frac{1}{-a+n-1}-\frac{1}{-a+n}$$

$$+\int_0^1 \frac{x^{a+n-1}dx}{1-x} - \int_0^1 \frac{x^{-a+n}dx}{1-x}$$

$$=\frac{1}{a}-2a\left[\frac{1}{1^2-a^2}+\frac{1}{2^2-a^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{(n-1)^2-a^2}\right] - \frac{1}{n-a} + \int_0^1 \frac{x^{a+n-1}-x^{n-a}}{1-x}dx. \quad (8).$$

Wollte man die früher, auf die in (3) angehängten Integrale angewendeten Schlüsse hier wieder für die beiden Integrale in der vorletzten Reihe benutzen, so würde man für jedes das Unendliche als Gränzwerth finden. Desshalb wurden sie in der letzten Reihe in ein Integral zusammengezogen, was wegen der gleichen Integrationsgränzen leicht geschehen konnte. Dasselbe lässt sich aber auch so schreiben

$$\int_0^1 \frac{1-x^{1-2a}}{1-x}\, x^{n+a-1}dx$$

worin wir $1-2a$ mit b, $n+a-1$ mit m bezeichnen wollen. Um nun für dieses Integral zwei Gränzwerthe angeben zu können, nehmen wir in dem früher citirten Satze von den bestimmten Integralen $\varphi(x)=\frac{1-x^b}{1-x}$, $\psi(x)=x^m$, $\alpha=0$, $\beta=1$. Es wären nun für das Intervall $x=0$ bis $x=1$ das Maximum und Minimum (M und N) der Funktion $\varphi(x)$ zu bestimmen. Diess könnte nach der gewöhnlichen Weise geschehen wenn b in Zahlen gegeben ist, für unseren Zweck reicht es aber hin zu bemerken, dass dieselben endliche Grössen sind. Denn während des Intervalles 0 bis 1 kann

die Funktion $\frac{1-x^b}{1-x}$ nicht unendlich werden. Dazu würde nöthig sein, dass der Nenner $=0$, also $x=1$ wäre; dann wird aber auch der Zähler $=0$ und der wahre Werth des Symboles $\frac{0}{0}$ findet sich nach den gewöhnlichen Regeln $=b$. Eben so wenig kann jene Funktion $=0$ werden, weil dann der Zähler $=0$ sein müsste, in welchem Falle auch der Nenner sich annullirt und wieder das Vorige eintritt. Also sind M und N zwei endliche Grössen, und wir haben in Folge des früher citirten Theorems

$$M\int_0^1 x^m dx > \int_0^1 \frac{1-x^b}{1-x}\, x^m dx > N\int_0^1 x^m dx$$

oder, wenn wir die Integrationen ausführen und die Werthe von m und b wieder einführen

$$\frac{M}{n+a} > \int_0^1 \frac{1-x^{1-2a}}{1-x}\, x^{a+n-1} dx > \frac{N}{n+a}$$

woraus sich ergiebt, dass für wachsende n das Integral sich unbegränzt der Null nähert. Lassen wir dasselbe in (8) weg und setzen die vorhergehende Reihe ins Unendliche fort, so ist nun

$$J=\frac{1}{a}-2a\left\{\frac{1}{1^2-a^2}+\frac{1}{2^2-a^2}+\frac{1}{3^2-a^2}+\ldots\ldots \text{in inf.}\right\}$$

Vorausgesetzt dass a ein positiver ächter Bruch ist, haben wir π cot $a\pi$ als Summe dieser Reihe, und mithin

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1-x} = \frac{\pi}{\tan a\pi},\quad +1>a>0, \quad (9).$$

woraus für $a=\frac{m}{n}$, $x=z^n$ sich noch ergiebt

$$\int_0^\infty \frac{z^{m-1}dz}{1-z^n} = \frac{\pi}{n\tan\frac{m\pi}{n}},\quad n>m. \quad (10)$$

Die bisher befolgte Methode ist noch vieler Anwendungen fähig. So findet man z. B. leicht die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{x^a dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\cos\frac{a\pi}{2}},\quad +1\geqq a\geqq 0.$$

$$\int_0^1 \frac{x^a - x^{-a}}{1-x^2}dx = -\frac{\pi}{2}\tan\frac{a\pi}{2},\quad 1>a>0$$

die viel Analogie zu den oben entwickelten besitzen.

XXXIII.

Die Algebra in Italien seit Fibonacci *).

Von dem

Herrn Doctor Gerhardt

Lehrer am Gymnasium zu Salzwedel.

Die Algebra, namentlich die Auflösung der Gleichungen, hat seit den denkwürdigen Arbeiten der italienischen Mathematiker des 16ten Jahrhunderts wenig Fortschritte gemacht und die Hemmnisse, die sie nicht zu beseitigen vermochten, sind im Allgemeinen noch jetzt vorhanden. Es scheint der Mühe werth zu sein, den Weg zu verfolgen, welchen die Wissenschaft seit dem Auftreten Fibonacci's zu Anfang des 13ten Jahrhunderts einschlug, bis sie zu jenem Höhepunkte gelangte.

Jahrhunderte vergingen, ehe jemand auftrat, der den hohen Verdiensten Fibonacci's sich hätte würdig zur Seite stellen können. Dieses Factum, so wie dass die Arbeiten dieses Mannes Jahrhunderte hindurch fortwährend benutzt und die Gränzen der Wissenschaft, wie er sie gesteckt, erst nach langer Zeit erweitert wurden, veranlassen uns zu behaupten, dass Fibonacci unter die bedeutendsten Mathematiker des Mittelalters gerechnet werden muss. Zwar haben wir gesehen, dass er theilweise nach arabischen Vorbildern arbeitete; dies thut jedoch seinen Verdiensten wenig Eintrag, denn er hat gezeigt, dass er allein in jenen Zeiten der tiefsten Unwissenheit dem Fluge der Wissenschaft, den sie bei den Arabern genommen, zu folgen und sie in sich aufzunehmen vermochte.

Nach ihm finden wir im 13ten Jahrhundert kaum die Namen einiger Mathematiker erwähnt; von ihren Werken ist wenig bis auf uns gekommen. So schrieb ein Dominikaner Leonardo von Pistoja um 1280 über Geometrie und Arithmetik, dessen Werke wir aber gegenwärtig nicht mehr haben, und um dieselbe Zeit ein von Ximenes erwähnter Anonymus einen Abbaco. Auch beschäftigte man sich mit Uebersetzungen aus dem Arabischen; so übersetzte Guglielmo di Lunis eine Schrift: die Regel über die Algebra (Regola dell' Arcibra) aus dem Arabischen ins Italienische. Man hat dieses Werk für eine Uebersetzung der Algebra des Mohammed ben Musa gehalten; dieser Annahme jedoch widerstreitet das, was

*) Grösstentheils nach Libri histoire des mathématiques en Italie; dabei benutzt sind die Werke von Montucla, Chasles und Kästner.

Digitized by Google

Ghaligai daraus mittheilt. Späterhin schrieben Franzesco di Donati Michelozzi, Paolo Gherardi, Pietro Strozzi und Antonio Biliotti, genannt dall' Abbaco, sämmtlich aus Toskana, wo Fibonacci's Einfluss nicht ohne Wirkung gewesen war, über Arithmetik und wahrscheinlich auch über Algebra; der berühmteste aber unter den Florentinischen Mathematikern der damaligen Zeit war Paolo Dagomari, genannt auch Paolo dall' Abbaco oder Paul der Geometer († 1365). Er besass ein ausserordentliches Talent und gleichzeitige Schriftsteller haben ihn neben Dante und Petrarca gestellt. Von seinen Schriften existiren noch handschriftlich Bücher über den Abbaco, worin zuerst das Komma gebraucht wird, um grosse Zahlen in Gruppen zu 3 Ziffern zu theilen; ferner eine Schrift über Arithmetik und Algebra, welche für Kaufleute bestimmt, die Auflösung der Gleichungen der beiden ersten Grade, die der zweitheiligen cubischen Gleichungen und mehrere schwierige Probleme aus der unbestimmten Analysis enthält. Dagomari gab auch zuerst in Italien einen Almanach heraus, den man damals Taccuino nannte. Um dieselbe Zeit schrieb Giovanni Danti von Arezzo eine Abhandlung über den Algorismus nach den Werken des Boetius, und eine Geometrie, wobei er arabische Schriftsteller benutzte. Ein anderer Florentiner, Raphael Canacci, verfasste im 14ten Jahrhundert in italienischer Sprache eine Abhandlung über die Algebra, die für die Geschichte der Mathematik von Wichtigkeit ist und eine nähere Berücksichtigung verdiente. Sie findet sich noch handschriftlich in der Palatinischen Bibliothek zu Florenz.

Prosdocimo Beldomando von Padua verfasste gegen das Ende des 14ten Jahrhunderts ausser andern mathematischen Schriften eine Abhandlung über den Algorismus, die 1483 zu Padua gedruckt wurde, und unter seinen noch handschriftlich vorhandenen Werken giebt es eines, das nach indischen Vorbildern gearbeitet ist.

Dies sind die bekanntesten Männer, die nach Fibonacci im 13ten und 14ten Jahrhundert über Arithmetik und Algebra geschrieben haben. Ausser ihnen liessen sich noch viele Namen mathematischer Schriftsteller anführen, die zwar nicht unmittelbar die Wissenschaft weiter förderten, aber doch zu ihrer Verbreitung beitrugen und das Jahrhundert des Ferro und Tartaglia vorbereiteten.

Die noch handschriftlich vorhandenen Werke über die Algebra aus dieser Zeit enthalten gewöhnlich die Auflösung der Gleichungen des ersten Grades und allgemeine Regeln, öfters jedoch ohne Beweis, für die Lösung der quadratischen. Einige Schriftsteller haben Gleichungen des 3ten und höherer Grade behandelt, die zur Lösung derselben gegebenen Regeln sind aber falsch; für den Fall nämlich, dass diese Gleichungen dreitheilig sind, haben sie mittelst Induction Formeln gemacht, die denen ähnlich sind, die zur Lösung der quadratischen Gleichungen dienen; für Gleichungen, die aus 4 oder mehr Gliedern bestehen, gaben sie sehr bizarre Regeln, die auf falsche Principien gegründet waren *). — In diesen Manu-

*) Libri ist im Besitz eines Manuscripts aus dem 14ten Jahrhundert, wo eine Regel zur Auflösung der Gleichung von der Form $px^3 = ax + b$ gegeben wird; nach derselben soll $x = \frac{a}{2p} + \sqrt[3]{(\frac{a}{2p})^3 + b}$ sein. —

Digitized by Google

scripten findet man auch Probleme der beiden ersten Grade aus der unbestimmten Analysis und einige Bemerkungen über Wurzelausdrücke. Die Zeichen der Addition und Subtraction finden sich noch nicht: die Addition wird dadurch angezeigt, dass die beiden zu addirenden Ausdrücke neben einander gestellt werden, und die andern Operationen werden durch Umschreibung ausgedrückt. Das Wort Binom findet sich schon, nicht aber das Wort Gleichung; das Wort Algebra wird sehr häufig getroffen, Almucabala weit seltener. Einige Anwendungen der Algebra auf Geometrie, die im Allgemeinen keinen andern Zweck zu haben scheinen, als die Probleme aus der unbestimmten Analysis zu construiren, und einige leichte Untersuchungen über Maxima vervollständigen öfters die wissenschaftlichsten dieser Werke. So kommen z. B. in dem oben erwähnten Manuscript über Algebra, die für Kaufleute geschrieben war, wie ausdrücklich am Eingange bemerkt ist, folgende Aufgaben vor: 1) Es sollen in einem Kreise, in einem Dreiecke oder in einem Quadrate eine gegebene Anzahl Kreise, gleichschenkliger Dreiecke oder Quadrate beziehungsweise eingeschrieben werden, so dass die Summe der Flächen der eingeschriebenen Figuren ein Maximum ist; 2) in einem Kubus eine dreiseitige Pyramide einzuschreiben, so dass der Inhalt derselben ein Maximum ist; 3) es sollen die Gleichungen

$$4yx^4 - x^2 = y^2,$$

$$x^2 = \frac{py^2}{z^2 - py^2},$$

$$x^4 - yx^2 = y^2$$

in ganzen Zahlen gelöst werden; u. s. w.: sämmtlich Probleme, die beweisen, dass es dem unbekannten Verfasser nicht an Sagacität gefehlt hat.

In der ersten Hälfte des 15ten Jahrhunderts widmete man sich vorzugsweise dem Studium der classischen Werke des Alterthums; daher begegnen wir in dieser Zeit keinem Namen, der in den Wissenschaften etwas geleistet hätte. Damals wurden die Untersuchungen über die Algebra unterbrochen. In der zweiten Hälfte dieses Jahrhunderts beschäftigten sich einige Gelehrte mit den Schriften der Mathematiker des Alterthums; sie wurden übersetzt und erläutert, oder auch vervollständigt und angefangene Untersuchungen weiter fortgeführt; besonders mit der Geometrie war dies der Fall, während andere sich ausschliesslich mit der Algebra befassten und ihr einen Grad von Allgemeinheit gaben, der von den Alten nicht geahndet wurde und den zum Theil die Mathematiker der neueren Zeit nicht haben übersteigen können.

Maurolykus (geb. 1494 zu Messina, gest. 1575) gehört zwar zu denen, die ihre ganze Thätigkeit auf das Studium der griechischen Geometer verwandten; er hat sich jedoch auch mit Algebra beschäftigt, wiewohl er sie für eine barbarische Wissenschaft hielt. Seine Schrift über die Algebra ist zwar verloren gegangen, indes-

---

Uebrigens ist zu bemerken, dass wenn hier von Gleichungen die Rede ist, stets numerische zu verstehen sind.

Digitized by Google

sen beschränkte sie sich nach dem, was wir davon wissen, auf die ersten Elemente. Die Arithmetik des Maurolykus enthält interessante Untersuchungen über die Theorie der Zahlen; unter andern sind darin die Eigenschaften der Polygonalzahlen weit vollständiger behandelt, als es von Diophantus geschehen ist.

Die Reihe der Algebraisten Italiens im 16ten Jahrhundert eröffnet Lucas Pacioli *), von seinem Geburtsorte Borgo San Sepolcro in Toskana Lucas di Borgo S. Sepulchri genannt. Er wurde daselbst gegen die Mitte des 15ten Jahrhunderts geboren und trat in den Orden der Minoriten. Von seinem Leben ist wenig bekannt; aus den Vorreden seiner Schriften und aus den Registern der Universitäten, wo er lehrte, geht hervor, dass er nach und nach zu Perugia, Neapel, Pisa und Venedig Professor war. Später begab er sich nach Mailand an den Hof des Ludwig Moro, wo er mit Leonardo da Vinci zusammentraf, mit dem er auch bei der Ankunft der Franzosen die Lombardei verliess. Die letzten Jahre seines Lebens scheint er zu Florenz und Venedig zugebracht zu haben. Er starb wahrscheinlich bald nach 1509.

Das Hauptwerk Pacioli's ist: Summa de Arithmetica Geometria Proportioni e Proportionalita; es wurde zum ersten Mal 1494 zu Venedig gedruckt und 1523 nochmals aufgelegt. Da dieses Werk vorzugsweise den Mathematikern des 16ten Jahrhunderts als Basis ihrer Forschungen gedient hat, so mag hier eine ausführliche Darstellung seines Inhalts folgen. Es besteht aus 2 Haupttheilen, von denen der erste Arithmetik und Algebra, der zweite Geometrie enthält. Die Unterabtheiluugen heissen distinctiones. In der ersten ist zum Theil die Arbeit Fibonacci's über die Quadratzahlen, die in neuerer Zeit verloren gegangen ist, enthalten. Aus derselben reproducirt hier Pacioli die Auflösung mehrerer unbestimmter Gleichungen des 2ten und 4ten Grades nach einer Methode, die ohne allgemein zu sein, dennoch bemerkt zu werden verdient **). Der Beweis fehlt; Leonardo von Pisa hatte sie durch geometrische Betrachtungen und an Figuren bewiesen. Diese Auflösungen, besonders die der Gleichung $x^2 + y^2 = H$, sind von denen Diophant's verschieden, und man hielt früher Euler für den ersten Erfinder derselben; eine nähere Bekanntschaft jedoch mit den algebraischen Schriften der Indier hat gelehrt, dass sie sich schon in der Algebra des Brahmegupta finden, aus der sie die Araber entlehnten, denen

---

*) Nicht Paciolo; er selbst nennt sich Frater Lucas de Borgo Sancti Sepulchri, oder Frater Lucas Patiolus Burgensis, oder Pacioli.

**) Nach derselben setzt man, um die Gleichung $x^4 - b^2 = z^2$ in rationalen Zahlen aufzulösen,

$$\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} = u^2,$$

dann wird

$$x = \frac{2n^2 + 2n + 1}{u}$$

sein. Sind z. B. die Gleichungen

$$x^2 + 6 = y^2$$
$$x^2 - 6 = v^2$$

Digitized by Google

ja Fibonacci seine Kenntnisse verdankte *). Ausserdem finden sich noch in dieser ersten Distinction die Summen einiger numerischen Reihen und eine Tafel der vollkommenen Zahlen. Die zweite enthält die 4 Species mit allen damals gebräuchlichen Arten der Multiplication und Division, mit den Rechnungsvortheilen, die sich beim Gebrauch von 7 und 9 ergeben; ferner die Rechnung mit den einfachsten Wurzelgrössen, Regeln zur Bestimmung der Summe der Reihen der Quadrate und Cubikzahlen, die ebenfalls von Fibonacci entlehnt sind und den jetzt gebräuchlichen Formeln vollkommen entsprechen, und die Auflösung einiger sehr interessanten arithmetischen Probleme. In den beiden folgenden Distinctionen wird die Buchstabenrechnung vorgetragen; die fünfte enthält die Regel de tri und schliesst mit einer Darstellung der von Pacioli gebrauchten algebraischen Bezeichnungen. Die sechste behandelt die Progressionen im Allgemeinen. Die Regel Helcataym oder die regula falsi findet sich in der siebenten, zugleich mit einer grossen Anzahl Vorschriften für die Lösung der Probleme des ersten Grades. Die achte Distinction enthält die Algebra e Almucabala, auch Arte Cosa oder Arte maggiore genannt. Pacioli vervollständigt hier die Rechnung mit Wurzelgrössen; er lehrt wie man bei der Multiplication und Division mit ihnen verfährt, und wie in gewissen Fällen die Wurzel aus einem Binom gezogen wird; er lehrt ferner die arithmetischen Operationen mit irrationalen Grössen und beweist den grössten Theil der Sätze aus dem 10ten Buche der Elemente Euklids. Sodann geht er zu den Gleichungen des 2ten Grades über, die er ähnlich, wie es in der Algebra des Muhammed ben Musa und bei Fibonacci geschieht, in einfache d. h. reine quadratische und zusammengesetzte eintheilt; von den letzteren unterscheidet Pacioli 3 Fälle, die sich durch Gleichungen von der Form

$$x^2 + mx = a,\quad x^2 = mx + a,\quad x^2 + a = mx$$

ausdrücken lassen. Die Auflösungen derselben sind in Verse gebracht, welche Kästner in seiner Geschichte der Mathematik Bd. I. p. 70. ff. mitgetheilt hat. Wir werden weiter unten sehen, dass auch Tartaglia die Regeln für die Auflösung der cubischen Gleichungen in Verse fasste. Es folgen nun die Gleichungen höherer Grade, die sich auf quadratische zurückführen lassen; hierbei unterscheidet Pacioli 8 Fälle, die sich auf folgende Art ausdrücken lassen:

$$\begin{aligned} x^4 &= a & x^4 + ax &= bx^2 \\ x^4 &= ax & x^4 + a &= bx^2 \\ x^4 &= ax^2 & x^4 + ax^2 &= b \\ x^4 + ax^2 &= bx, & x^4 &= a + bx. \end{aligned}$$

Die Auflösungen der drei ersten und der drei letzten werden mit-

---

gegeben, so setzt man $n = 1$ und erhält $u^2 = 4$, folglich $x = \frac{5}{2}$, $x^2 - 6 = v^2 = \frac{1}{4}$, $x^2 + 6 = y^2 = \frac{49}{4}$, mithin $y = \frac{7}{2}$, $v = \frac{1}{2}$.

*) Eine sehr interessante Darstellung hierüber bei Chasles p. 494. 495.

Digitized by Google

getheilt; die der vierten und fünften hält er für unmöglich, was beweist, dass da diese beiden Gleichungen sich nicht auf quadratische zurückführen lassen, die Auflösung der Gleichungen des 3ten Grades damals noch nicht gefunden war. Ueberhaupt hat sich Pacioli mit der Lösung aller Arten von Gleichungen, die sich auf quadratische zurückbringen lassen, beschäftigt; unter andern giebt er auch die Auflösung einer vollständigen Gleichung des 4ten Grades nach einer Methode, die sich auch in andern Fällen anwenden lässt, so wie die Auflösung gewisser Exponentialgleichungen durch Näherung. In der neunten Distinction endlich, welche den ersten Haupttheil beschliesst, finden sich die Regel der Gesellschaftsrechnung und eine Menge von Aufgaben, die sich auf Handelsoperationen beziehen, bei deren Lösung zuerst Spuren der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommen. Auch ist dieser Distinction eine Abhandlung über den Handel, die von einem gewissen Chiarini herrührt, vollständig einverleibt, wo zum ersten Mal von der doppelten Buchhaltung gesprochen wird.

Der zweite Haupttheil der Summa umfasst in 8 Distinctionen eine vollständige Abhandlung der theoretischen und praktischen Geometrie. Die Ueberschrift eines Capitels der 3ten Distinction: Modus solvendi varios casus figurarum quadrilaterarum rectangularum per viam algebre, zeigt, dass hier schon Anwendung der Algebra auf Geometrie vorkommt, die überhaupt viel älter ist, als man gewöhnlich annimmt.

Dieses grosse, inhaltreiche Werk Pacioli's ist nur eine Compilation aus den damals vorhandenen Schriften über Arithmetik, Algebra und Geometrie; namentlich sind die Fibonacci's benutzt, ja der Verfasser sagt sogar, dass wenn er einen Schriftsteller citire, ohne seinen Namen zu nennen, er aus Leonardo von Pisa entlehne. Die Wissenschaft selbst hat weder an Umfang noch in der Behandlung gewonnen; die Gleichungen werden noch immer durch Worte ausgedrückt; nur zur Abkürzung bedient sich Pacioli hier und da der Buchstaben p (più d. h. plus) und m (meno d. h. minus). Das Zeichen $=$ kommt nicht vor, dafür gebraucht er das Wort eguale. Für das Wurzelzeichen steht der Buchstabe R, und die Unbekannte x wird durch co. (cosa), x^2 durch ce. (censo), x^3 durch cu. (cubo), x^4 durch ce. ce. (censo censo) u. s. w. ausgedrückt. Auch der Charakter dieses Werkes ist von dem der früheren nicht verschieden; es beruht auf einer beständigen Vereinigung der Algebra mit der Geometrie; eine Eigenthümlichkeit, die demnächst beinahe in allen mathematischen Schriften des 16ten Jahrhunderts gefunden wird.

Pacioli ist noch der Verfasser eines zweiten Werkes, das jedoch nicht dieselbe Wichtigkeit hat, als das eben besprochene; der Titel desselben ist: Lucae Pacioli divina proportione, opera a tutti glingegni perspicaci e curiosi necessaria: ove ciacun studioso di philosophia, prospettiva, pictura, sculptura, architectura, musica e altre matematiche, soavissima, sottile e admirabile dottrina consequira e delectarassi con varie questione di secretissima scientia. Venetiis 1509. in fol. *). Unter proportio divina versteht der Ver-

*) Eine vollständige Darstellung seines Inhaltes bei Kästner, Gesch. der Math. Bd. I. p. 417. sqq.

Digitized by Google

fasser die Theilung einer geraden Linie in das mittlere und äussere Verhältniss, die auch sonst sectio aurea oder der goldene Schnitt genannt wird; er will sie zur Grundlage aller der im Titel des Werkes erwähnten Wissenschaften und Künste machen. Gegenwärtig ist dasselbe nur insofern noch von Interesse, dass Leonardo da Vinci mit eigener Hand die Figuren dazu gravirt und vielleicht selbst Antheil an der Redaction gehabt hat *).

Kurz nach der Divina proportione erschien im Jahre 1521 zu Florenz ein für die Geschichte der Mathematik höchst wichtiges Werk: Die Summa de arithmetica des Franzesco Ghaligai, das wir schon häufig citirt haben. Es besteht aus 13 Büchern, und enthält die Lösung der Gleichungen der beiden ersten Grade, die mehrerer sehr schwierigen Probleme aus der unbestimmten Analysis (im 8ten Buche, das wiederum nach Fibonacci gearbeitet ist) und die Rechnung mit den einfachsten Wurzelgrössen. Aber namentlich dadurch gewährt dieses Werk ein eigenthümliches Interesse, dass es gewissermassen ein historisches Repertorium ist, denn man findet darin bedeutende Fragmente aus den Schriften Fibonacci's, Auszüge aus einer Algebra, die von dem oben erwähnten Guglielmo di Lunis aus dem Arabischen übersetzt wurde, einige Untersuchungen aus den Schriften des Giovanni del Sodo, welcher der Lehrer des Ghaligai war, und wiederholte Anführungen eines Benedetto, dessen Werke wir gegenwärtig nicht mehr kennen.

Diese Schrift Ghaligai's ist weniger weitschweifig, als die Pacioli's, und desshalb musste sie auch zu ihrer Zeit mehr Einfluss auf das Studium der Mathematik haben. Sie enthält ein sehr gutes Résumé von dem, was man damals wusste, und zeichnet sich in dieser Hinsicht vor allen früheren Schriften ähnlicher Art aus.

Ausser diesen beiden, die ganze Wissenschaft der damaligen Zeit umfassenden Werken erschienen nun noch zu Anfange des 16ten Jahrhunderts einige Abbachi, die zwar nur die ersten Elemente enthalten, die aber ihres Alterthums wegen hier eine Stelle finden mögen. Sie sind:

Pellos, compendion de abacho, Thaurino 1492. 4. (im Dialekt von Nizza geschrieben);

Pietro di Borgo, libro de abacho, Venetia 1561. 4.;

Sfortunati von Siena, nuovo lume di arithmetica, Venet. 1561. 4.;

Uberti, thesoro universale de abacho, Vinegia 1548. 8.;

Feliciano, libro di arithmetica e geometria, intitulato scala grimaldelli, Vinegia 1550. 4.;

Verini, specchio del mercatante, Milano 1542. 8..

Catani von Siena, practica delle due prime matematiche, Venetia 1546. 4.;

---

*) Montucla (Hist. des math. Tom. I. p. 552.) und Chasles (Geschichte der Geomet. d. Uebers. p. 637) führen noch ein drittes Werk von Pacioli an: „Libellus in tres partiales tractatus divisus quorumcunque corporum regularium et dependentium active perscrutationis, Venedig 1508. in 4.; aus Kästner's Gesch. der Math. Bd. I. p. 438 geht jedoch hervor, dass dasselbe nur eine besondere Abtheilung der Divina proportione ist. Hiermit scheint Libri übereinzustimmen, der es nicht erwähnt hat.

Digitized by Google

Ortega, summa de arithmetica, Roma 1515. fol. (Juan de Ortega war ein Spanier, der dieses Werk in Italien verfasste) *).

Alle diese Werke, die Hauptwerke Pacioli's und Ghaligai's mit eingeschlossen, behandeln nur Gleichungen der beiden ersten und solche höherer Grade, die sich auf den zweiten zurückführen lassen, und auch diese nicht einmal vollständig, denn man zog, wie es auch die Araber und nach ihnen Fibonacci gethan hatten, weder die negativen noch die imaginären Wurzeln in Betracht, und hielt die Gleichungen für unlöslich, bei denen man auf solche Wurzeln kam. Kaum hatte man in einzelnen Fällen die Mehrheit der Wurzeln erkannt. Vergleichen wir hiermit den Zustand der Algebra, wie er sich aus den um dieselbe Zeit in Deutschland erschienenen Werken ergiebt, so bietet sich ein in der That erfreulicher Unterschied dar; die Arithmetica integra von Michael Stifel, die 1544 zu Nürnberg erschien, legt eine tiefere Kenntniss und eine ältere Ausbildung der Wissenschaft dar, als wir in den bisher betrachteten italienischen Werken sahen. Besonders bemerkt man in derselben eine Annäherung an die abstrakte Form, welche die Algebra seitdem angenommen hat. Ausser den Zeichen + und − **), den jetzt gebräuchlichen Wurzelzeichen, der Bezeichnung der Unbekannten durch Symbole u. s. w. findet sich darin das Princip der Mehrheit der Wurzeln einer höhern Gleichung ausdrücklich erwähnt und bewiesen. Dieses Werk von Stifel ist aber nur eine Bearbeitung einer im Jahre 1524 erschienenen Schrift des Christoph Rudolph von Jauer ***), mithin muss jene glückliche Ausbildung der Algebra in Deutschland wenigstens zu dieser Zeit, oder auch noch früher statt gefunden haben, und in der That hat Drobisch in der neuesten Zeit in einem alten Rechenbuche des Joh. Wiedemann von Eger vom Jahre 1489 die Zeichen + und − schon gefunden †). — Vielleicht wird einmal, wenn die Bibliotheken des südlichen Deutschlands durchforscht, und aus den noch vorhandenen Manuscripten über den Zustand der Mathematik im 15ten und 16ten Jahrhundert neue Aufschlüsse gewonnen sein werden, diese bisher räthselhafte Erscheinung sich aufklären.

Wir kehren nach Italien zurück. Wir sahen, dass daselbst die Algebra zu Anfange des 16ten Jahrhunderts noch nicht über die ersten Elemente hinaus vorgeschritten war; aus diesem Zustande

---

*) Eine spanische, zu Sevilla gedruckte Schrift desselben Verfassers über Arithmetik und Geometrie führt Kästner Gesch. der Math. Bd. I. p. 96—99 an.

**) Libri sagt zwar, dass diese Zeichen zuerst in den Manuscripten des Leonardo da Vinci sich fänden; derselbe muss sie jedoch nicht mitgetheilt haben, denn Pacioli, der zugleich mit ihm am Hofe des Ludwig Moro lebte, gebraucht sie nicht.

***) Diese Schrift ist höchst selten und schon Stifel klagt, dass zu seiner Zeit, also ohngefähr 20 Jahr nach ihrem Erscheinen, kein Exemplar um den drei- oder vierfachen Preis zu haben sei. Sie muss sehr bald eine grosse Verbreitung erlangt haben, denn es existirt von ihr eine in Italien angefertigte lateinische Uebersetzung, die noch unter den Manuscripten der Königl. Bibliothek zu Paris vorhanden ist. Siehe Chasles p. 638.

†) Drobisch, de Joan. Widmanni Egerani compendio arithmeticae mercatorum etc. Lips. 1840.

aber wurde sie gegen die Mitte dieses Jahrhunderts durch die vereinten Anstrengungen eines Ferro, Tartaglia und Cardan bis zur Lösung der allgemeinen Gleichungen des 3ten und 4ten Grades erhoben, und die Rechnung mit imaginären Grössen wurde erfunden.

Die Auflösung der cubischen Gleichungen gelang nicht auf einmal; Libri theilt Auszüge aus zwei alten Manuscripten des 14ten und 15ten Jahrhunderts mit, die sich in seinem Besitz befinden, in welchen mehrfache Versuche zur Lösung solcher Gleichungen gemacht sind. Die grösste Schwierigkeit hierbei war die, dass man nicht auf analogem Wege, wie bei den Gleichungen des 2ten Grades, dahin gelangen konnte, sondern dass neue Methoden geschaffen werden mussten. Der Name des ersten Erfinders einer solchen ist nur durch Zufall auf uns gekommen; kein gleichzeitiger Schriftsteller gedenkt seiner und sein Verfahren ist unbekannt geblieben. Scipione Ferro, von 1496 bis 1525 Professor zu Bologna, löste zuerst die Gleichung, die man damals „capitulum cubi et rerum numero aequalium" (d. h. $x^3 + mx = a$) nannte, allgemein auf; er starb aber, ohne seine Entdeckung bekannt gemacht zu haben. Die gefundene Formel hatte er jedoch dem Antonio Fiore anvertraut, der unterschiedenen Geometern, so auch 1535 dem Tartaglia, Probleme zur Lösung vorlegte, die nur mit Hülfe der Formel, in deren Besitz er war, erhalten werden konnte. Da Fiore nur ein gewöhnlicher Rechner war, so glaubte anfangs Tartaglia, dass er selbst nicht im Besitz der Lösung seiner Probleme sei; als aber Fiore versicherte, dass ihm die Methode dazu vor 30 Jahren von einem grossen Mathematiker mitgetheilt worden sei, so beschäftigte Tartaglia sich ernstlich damit und fand die Lösung *). So findet sich die Erzählung in Tartaglia's Schrift: Quesiti et inventioni diverse (Venet. 1554.); Ferro's Name wird jedoch nicht genannt, Cardan indessen kommt auf denselben Gegenstand in dem ersten Capitel seiner Ars magna zu sprechen und citirt den Scipione Ferro als den, welcher dem Fiore seine Entdeckung mitgetheilt habe. So war demnach das erste Hinderniss beseitigt, das Pacioli und alle andere nach ihm für unübersteiglich gehalten hatten, und die Bahn zu weiteren Fortschritten war eröffnet. — Mit welcher Freude die Entdeckung Ferro's und Tartaglia's von ihren Zeitgenossen aufgenommen wurde, davon giebt nicht allein Cardan Zeugniss **), sie verursachte eine allgemeine Bewegung in Italien. Es wurden öffentliche Wettkämpfe veranstaltet, woran alle Classen der Bevölkerung Theil nahmen. Von allen Seiten wurden Probleme vorgelegt; Fürsten, Mönche, Gelehrte, Gesandte, Professoren, Architekten wetteiferten in der Lösung derselben. Die oben erwähnten Quesiti

*) Auch sie ist unbekannt geblieben; Tartaglia sagt nur, dass er mit Hülfe einer geometrischen Construction, die den Cubus der Summe zweier Geraden giebt, dahin gekommen sei.

**) Temporibus nostris, Scipio Ferreus Bononiensis, capitulum cubi et rerum numero aequalium invenit, rem sane pulchram et admirabilem. Quum omnem humanam subtilitatem, omnis ingenii mortalis claritatem ars haec superet, donum profecto coeleste, experimentum autem virtutis animorum, atque adeo illustre, ut qui haec attigerit, nihil non intelligere posse se credat. Cardan. Ar. mag. cap. I.

Digitized by Google

etc. des Tartaglia enthalten eine Sammlung von Antworten, die er auf die ihm vorgelegten Probleme gab. Ohngeachtet dieses allgemeinen Enthusiasmus wurde jedoch der Name des ersten Erfinders kaum genannt.

Der bemerkenswertheste Incidenzpunkt dieser langen Discussionen war der Streit, der zwischen Cardan und Tartaglia sich erhob. Der letztere war nämlich nicht bloss bei der Lösung des erwähnten Falles stehen geblieben, er hatte sich indessen in Besitz der Lösung aller übrigen Arten der cubischen Gleichungen gesetzt. Diese Entdeckung, die er sorgfältig geheim hielt, machte Aufsehen. Hieronymus Cardan zu Mailand, der, obgleich Arzt, sich dennoch vielfältig mit Algebra beschäftigte, interessirte sich lebhaft dafür. Zu verschiedenen Malen bat er nicht nur selbst, sondern liess auch durch andere den Tartaglia um Mittheilung seiner Methode bitten. Nachdem dieser es mehrmals verweigert hatte, erhielt Cardan endlich im Jahre 1539 einige Verse, in welchen die Art und Weise beschrieben war, wie man die Wurzel einer jeden cubischen Gleichung erhalten könnte. Cardan fand dazu den Beweis, der ihm nicht mitgetheilt worden war. Er stimulirte nun seine Schüler, unter welchen Ferrari der bedeutendste war, die Entdeckung des Tartaglia durch andere zu überbieten. Ferrari fand die Auflösung der Gleichungen des 4ten Grades; man legte sich wiederum gegenseitig Probleme vor, es erfolgten Herausforderungen und öffentliche Wettkämpfe zu Mailand im Jahre 1547. Das aber reizte den Tartaglia am meisten, dass Cardan ohngeachtet des feierlichsten Versprechens von seiner Seite in seiner Ars magna die Auflösung der cubischen Gleichungen bekannt machte. Zwar hatte er die Priorität des Geometers von Brescia gebührend anerkannt; diesem war es jedoch höchst unangenehm, seine Entdeckung zum ersten Male in einem fremden Werke veröffentlicht zu sehen. Er beklagte sich schmerzlich darüber; dazu hatte er auch alle Ursache, denn die Formel Tartaglia's zur Lösung der cubischen Gleichungen trägt den Namen Cardan's.

Nachdem wir so den Gang der Wissenschaft im Zusammenhange dargestellt haben, dürfte es nicht ohne Interesse sein, die dabei auftretenden Personen etwas näher kennen zu lernen. Scipione Ferro, den ersten Erfinder der Auflösung der cubischen Gleichungen, kennen wir nur dem Namen nach; umständlichere Nachrichten besitzen wir von dem zweiten, Nicolo Tartaglia. Geboren zu Brescia im Anfange des 16ten Jahrhunderts war er kaum 6 Jahr alt, als er seinen Vater verlor, der ein Postillon war. Da derselbe kein Vermögen hinterliess, so befand sich die Mutter mit ihren drei Kindern — Tartaglia hatte noch zwei Brüder — in traurigen Umständen. Unser Nicolo war noch ein Kind, als Gaston de Foix jene furchtbare Metzelei zu Brescia anrichtete, vor welcher sich die Familie in die Cathedrale flüchtete. Wiewohl sie sich daselbst vollkommen sicher glaubte, so wurde Nicolo dennoch von einem Soldaten verwundet und schrecklich verstümmelt. Seine Hirnschale war an drei Stellen durchlöchert und das Gehirn lag offen da. Er erhielt quer über das Gesicht einen Schlag, der seine beiden Kinnbacken spaltete und den Gaumen bloss legte. So konnte er weder sprechen noch essen. Da auch das Haus der armen Familie von den Franzosen verwüstet worden war, so litt die Mutter mit ihren 3 Söhnen die grösste Noth; um ihr verunstal-

tetes Kind zu pflegen, leckte sie nach Art der Hunde die Wunden desselben. Sie heilten, aber Nicolo stotterte noch lange nachher, wesshalb man ihn Tartaglia nannte. Diesen Spitznamen behielt er bei, da er den Namen seines Vaters nicht mehr wusste. Tartaglia bildete sich selbst: im fünften Jahre lernte er lesen, im 14ten nahm er Schreibunterricht, der jedoch schon beim Buchstaben *K* wieder aufhörte, weil er seinen Lehrer nicht bezahlen konnte; er sah sich dessbalb genöthigt, die übrigen Buchstaben des Alphabeths allein nachzubilden. Seitdem hatte er niemals einen Lehrer wieder, aber unermüdlich fleissig studirte er eifrig die Schriften der grossen Männer früherer Zeiten. So hatte es Tartaglia in seinem 30sten Jahre so weit gebracht, dass er das Geheimniss des Ferro entschleierte und die allgemeine Lösung der cubischen Gleichungen fand, um welche sich die Mathematiker schon so lange vergeblich bemüht hatten. Durch diese Entdeckung gewann erst die neuere Zeit ein Uebergewicht über die Zeiten der Griechen und Araber, denn bisher war in den mathematischen Wissenschaften noch kein wesentlicher Schritt vorwärts geschehen.

Tartaglia überliess dem Cardan seine Entdeckung und dieser erndtete die Frucht davon; wer würde sich nicht ebenso bitter, wie er, darüber beklagt haben? Ein unglückliches Loos verfolgte ihn überall; man rief ihn nach Mailand, nach Venedig, aber bald gerieth er in Vergessenheit: seine Vaterstadt wünschte ihn wieder in ihren Mauern zu sehen, jedoch auch hier kümmerte man sich wenig um ihn und behandelte ihn mit Geringschätzung. Tartaglia kehrte nach Venedig zurück, wo er im Jahre 1559 starb. Das ist das Leben eines der grössten Männer des 16ten Jahrhunderts. Man hat gesagt und wiederholt es noch fortwährend, dass Tartaglia einen sehr reizbaren Charakter gehabt habe; es mag sein — wer aber dürfte unter so bewandten Umständen wohl mehr unsere Nachsicht in Anspruch nehmen?

Tartaglia hat viele Werke geschrieben, aber das, worin er die Auflösung der cubischen Gleichungen und seine algebraischen Untersuchungen überhaupt niederzulegen gedachte, ist nicht erschienen. Sein grosses Werk: General trattato di numeri e misure (Vinegia, 1556. 6 part. in fol.) enthält einen vollständigen Cursus der reinen Mathematik. Man findet darin Arithmetik, Algebra, Geometrie und Kegelschnitte nach einander abgehandelt. Unter andern bemerkenswerthen Sachen enthält dieses Werk die Entwickelung eines Binoms für ganze positive Exponenten nach einer Regel, aus der sich eine allgemeine Formel ableiten lässt; ferner Probleme aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren richtige Lösung aber von Pacioli bereits gesucht, von Tartaglia ebenfalls nicht getroffen wurde. Die Rechnung mit Wurzelgrössen wird vollständiger abgehandelt, geometrische Probleme mittelst einer einzigen Cirkelöffnung gelöst und algebraische Gleichungen construirt. Ferner finden sich in diesem umfassenden Werke Probleme über Maxima und Minima algebraischer Funktionen, die rein algebraisch behandelt werden; unter anderen ein Problem, das Tartaglia von Cardan vorgelegt wurde: die Zahl 8 in zwei Theile so zu theilen, dass das Produkt, welches entsteht, wenn der eine mit dem andern und mit der Differenz beider multiplicirt wird, ein Maximum ist. Dieses Werk ist übrigens nicht vollendet; dem Verfasser fehlte es wahrscheinlich an Zeit die Redaction selbst zu verbessern, und

Digitized by Google

mehrere Abschnitte sind erst nach seinem Tode erschienen. Indessen alle darin abgehandelten Gegenstände sind für die Geschichte der Wissenschaft von Interesse: der grosse Streit des Verfassers mit Cardan und Ferrari wird vollständig erzählt, und die von den verschiedenen Theilnehmern am Streite vorgelegten Fragen sind beinahe sämmtlich erwähnt. Sie beziehen sich vorzugsweise auf die Lösung cubischer Gleichungen und geometrischer Probleme.

Tartaglia hat auch der Ballistik die erste wissenschaftliche Grundlage gegeben. In der Schrift: Scientia nova (Venetia 1550. 4.) findet sich das merkwürdige Resultat, dass man die grösste Wirkung erhält, wenn unter einem Winkel von 45° gerichtet wird. Tartaglia war schon im Jahre 1532 darauf gekommen. Ohngeachtet aller Anstrengungen gelang es ihm aber dennoch nicht, die Wurflinie zu bestimmen und die Wahrheit dieses richtigen Satzes zu beweisen. Eben so wenig vermochte er die Mechanik wissenschaftlich zu begründen, denn er verstand nicht, die hergebrachten Definitionen und Eintheilungen zu verlassen und an ihre Stelle neue zu schaffen. Indessen sieht man dennoch aus seinen Irrthümern einige richtige Grundgesetze der Mechanik hervorschimmern, und man muss es ihm Dank wissen, dass er zuerst die Geometrie auf die Bestimmung der krummlinigen Bewegung und auf den Fall der Körper anwandte. Auch diese Schrift, die aus fünf Büchern bestehen sollte, ist unvollendet geblieben, denn die beiden letzten fehlen. Das fünfte, das nach des Verfassers Ankündigung eine Art Handbuch über Chemie in ihrer Anwendung auf Verfertigung des Pulvers und der Kunstfeuer im Allgemeinen werden sollte, würde gegenwärtig interessante Beiträge zur Geschichte der Pyrologie darbieten.

Das schon oben erwähnte Werk Tartaglia's: Quesiti et inventioni diverse, enthält eine grosse Anzahl Probleme, die dem Verfasser von vielen, namentlich erwähnten Personen vorgelegt wurden, zugleich mit den darauf gegebenen Antworten. In den drei ersten Büchern beschäftigt er sich auch mit der Artillerie und Ballistik; man findet unter andern darin die Dimensionen der damals gebräuchlichen Stücke, ihr Kaliber und das Verfahren, die innere Weite derselben zu bestimmen, so wie auch verschiedene Recepte zur Anfertigung von Pulver; er spricht daselbst von der allmähligen Entzündung des Pulvers und erklärt aus der Erhitzung des Stücks und aus der daraus entstehenden Verdünnung der Luft die Absorption, welche man zuweilen bemerkt; er berücksichtigt den Widerstand der Luft bei der Bestimmung der Schussweite und zeigt, dass die Wurflinie niemals eine Gerade sein wird. Das fünfte Buch enthält die Feldmesskunst und das Aufnehmen der Ebenen. Die Instrumente, die damals die Feldmesser gebrauchten, werden beschrieben; auch findet sich hier eine Abbildung der damals gebräuchlichen Form der Boussole. In den folgenden Büchern finden sich Untersuchungen über Fortification, Statik und Algebra, und das neunte enthalt, wie schon erwähnt, die Streitfragen in Betreff der cubischen Gleichungen, die Tartaglia von Fiore und andern Personen vorgelegt wurden. Hier wird erzählt, durch welche Mittel und durch welche Versprechungen Cardan endlich den Tartaglia zur Mittheilung der allgemeinen Formel zur Lösung der cubischen Gleichungen bewog. Zugleich ergiebt sich auch,

Digitized by Google

dass letzterer seit dem Jahre 1541 das Princip der Mehrheit der Wurzeln bei cubischen Gleichungen erkannt hatte, falls dieselben mehrere positive Wurzeln haben, denn die negativen lässt Tartaglia, selbst bei den Gleichungen, die sich auf quadratische zurückführen lassen, unberücksichtigt: eine merkwürdige Thatsache, die sich nur aus der hergebrachten Gewohnheit erklären lässt. Er vermochte aber nicht die Anzahl der Wurzeln zu bestimmen, denn er sagt, dass die cubischen Gleichungen immer zwei Auflösungen, und vielleicht auch mehr zulassen.

Tartaglia hat den Euklid ins Italienische übertragen, und auch die erste nach dem griechischen Original gefertigte Uebersetzung der Schriften Archimeds (Archimedis opera. Venet. 1546. 4.) geliefert. Von der Abhandlung Archimeds „über die schwimmenden Körper (de infidentibus)" kannte er noch das griechische Original, das seitdem verloren gegangen ist, so dass gegenwärtig seine Uebersetzung die Stelle desselben vertritt *). Aus der Bearbeitung dieser Abhandlung ging wahrscheinlich Tartaglia's Schrift: Travagliata inventione, hervor, worin er sich mit den Anstalten beschäftigt, gesunkene Schiffe wieder emporzuheben, und von der das dritte Buch eine kleine Abhandlung über Meteorologie enthält. Er nahm später diesen Gegenstand wieder auf und erweiterte ihn in dem Ragionamenti sopra la travagliata inventione (Venet. 1551. 4.). Unter andern findet man hier eine Tafel der specifischen Schwere einer grossen Anzahl von Körpern, wobei die Schwere des Wassers als Einheit genommen ist. Sie scheint zwar im Allgemeinen sehr ungenau zu sein; man muss jedoch bedenken, dass Tartaglia die Versuche zu Venedig anstellte und wahrscheinlich unmittelbar Seewasser dazu gebrauchte, indem er nur angenäherte Bestimmungen zum Behuf des Emporhebens gesunkener Schiffe haben wollte.

Alle diese Werke Tartaglia's enthalten nur Mathematik und Anwendungen derselben auf verschiedene Wissenschaften. Er kümmerte sich weder um die zu seiner Zeit so hoch geschätzten geheimen Wissenschaften, noch um die verschiedenen philosophischen Systeme, die damals so rasch entstanden, um ebenso bald wieder zu vergehen.

Von ganz verschiedenem Charakter war sein Rival, Hieronymus Cardan, geb. 1501 zu Pavia **). Mit den ausgezeichnetsten Geistesfähigkeiten ausgerüstet, huldigte er dennoch vollständig den Schwachheiten seines Zeitalters. Auf der einen Seite zitterte er vor jeder Vorhersagung und vor jedem Traume, auf der andern verwarf er kühn jede Autorität und folgte nur der Intelligenz als Führerin in das Reich der Wissenschaften, von denen keine seiner Aufmerksamkeit entging. Bald lebte er schwelgerisch, bald ging er in Lumpen einher, und dennoch hat er bei seiner ungeregelten Lebensweise zahlreiche Werke geschrieben, die das ganze Gebiet

---

*) Wahrscheinlich war es diese Uebersetzung Tartaglia's, die Commandin verbesserte. Vergl. Kästner's Gesch. der Math. Bd. II. p. 201.

**) Die Erzählung de Thou's, dass Cardan im 75sten Jahre freiwillig den Hungertod gestorben sei, um seine Vorhersagung in Erfüllung gehen zu lassen, hat Tiraboschi (Storia della litt. ital., Vol. XI. p. 431.) zu widerlegen versucht.

Digitized by Google

des Wissens umfassen. Die gedruckten allein füllen 10 Bände in fol., aber sie sind nicht die Hälfte von dem, was Cardan geschrieben hat. Uns interessiren hier nur die mathematischen, besonders die algebraischen Schriften, in welchen er sich als ein gewandter und erfindungsreicher Analyst zeigt. In seiner Ars magna spricht er nicht allein von der Mehrheit der Wurzeln, sondern er berücksichtigt daselbst auch zuerst die negativen Wurzeln, die er falsae seu fictae nennt. Ganz besonders ist aber hervorzuheben, dass Cardan zum ersten Male imaginäre Wurzeln erwähnt, deren Duplicität er nachweist. Man verdankt ihm auch eine Methode zur Lösung der Gleichungen durch Näherung; er substituirt nämlich nach einander für die Unbekannte zwei Zahlen, findet hierbei ein Zeichenwechsel statt, so schliesst er, dass zwischen diesen beiden Zahlen die Wurzel enthalten sein muss. Cardan hat unter andern auch die Theoreme gefunden, dass jede cubische Gleichung sich durch die Unbekannte vermindert um die Wurzel dividiren lässt, und dass der Coefficient des zweiten Gliedes der Summe aller Wurzeln mit entgegengesetztem Vorzeichen gleich ist; ferner hat er die gleichen Wurzeln gekannt und behandelt; er näherte sich sogar dem Theorem des Descartes über Zeichenwechsel und Zeichenfolge, und er würde gewiss noch mehr Entdeckungen gemacht haben, wenn er sämmtliche Glieder der Gleichung auf eine Seite gebracht und $=0$ gesetzt hätte; aber zu seiner Zeit verfuhr man noch ganz nach der Art und Weise der Araber, welche die Glieder der Gleichungen auf beide Seiten des Gleichheitszeichens vertheilten, um sie sämmtlich positiv zu machen *).

Obgleich Cardan das Vorhandensein der drei Wurzeln einer cubischen Gleichung nicht allgemein bewiesen hat, falls sie sämmtlich imaginär sind, so hat er doch ihre Existenz in sehr vielen Fällen gezeigt, indem er sie überhaupt auf geometrischem Wege durch Kegelschnitte bestimmte. Zwar hatten die Araber schon ähnliche Untersuchungen gemacht, aber Cardan kannte sie nicht, und seine Construction der allgemeinen cubischen Gleichung verdient bemerkt zu werden, weil sie zuerst zeigt, wie ein zwischen zwei Grössen bestehendes Verhältniss durch Abscissen und Ordinaten einer Curve allgemein dargestellt werden kann.

In allen Schriften Cardan's kommen mathematische Untersuchungen vor; er versuchte sogar die Mathematik auf die Medicin anzuwenden, indem er die Frage behandelte, ob die durch die Medicamente hervorgebrachten Wirkungen in arithmetischer oder geometrischer Proportion zu den gegebenen Dosen stehen.

Unter den Schülern Cardan's war der ausgezeichnetste, Luigi Ferrari aus Bologna, der zu Mailand und später in seiner Vaterstadt Professor war. Er entdeckte, wie schon erwähnt, die Auflösung der Gleichungen des 4ten Grades, die er nach damaliger Sitte geheim hielt. Cardan veröffentlichte sie jedoch in seiner Ars magna, und eine ausführliche Darstellung findet sich in der Algebra des Bombelli. Ersterer entwirft kein besonderes Bild von dem Charakter des Ferrari; so ausgezeichnet er in der Mathematik war, so wenig zeigte er sich mit den Regeln des Anstandes im Leben vertraut.

---

*) Siehe Kästner's Gesch. der Math. Bd. I, p. 150 ff.

Digitized by Google

Er war sehr reizbar und hatte schon im 17ten Jahre alle Finger der rechten Hand in einem Streite verloren. Er starb 1565 in der Blüthe seines Lebens, 43 Jahr alt, wie man glaubte, von seiner Schwester vergiftet. Von ihm sind nur einige Briefe gedruckt. Seine Abhandlung über den Irrthum, den man bei der Bestimmung des Osterfestes begeht, war noch 1731 als Manuscript vorhanden, und Cardan erwähnt, dass Ferrari auch über Geometrie geschrieben habe.

Zu den Männern, die sich um die Algebra so ausgezeichnete Verdienste erwarben, gesellt sich als der letzte Raphael Bombelli. Von seinem Leben weiss man nur so viel, dass er in der Vaterstadt Ferro's und Ferrari's, zu Bologna — um welche Zeit, ist unbekannt — geboren wurde, und im Dienste des Bischofs von Melfi als Ingenieur stand, der ihn auch veranlasste, sein berühmtes Werk über die Algebra zu schreiben. Es erschien 1572, und ist in 3 Bücher getheilt, von denen das erste die Elemente, die Rechnung mit Wurzeln und imaginären Grössen enthält, das zweite die Gleichungen behandelt, und das dritte eine Sammlung von Problemen ist, unter welchen einige sehr schwierige aus der unbestimmten Analysis sich finden. Die ganze Algebra der damaligen Zeit wird in demselben gründlich dargestellt, und die Beweise sind streng und vollständig. Einiger eigenthümlichen Bezeichnungen bedient sich Bombelli; es ist z. B.

$$\overset{1}{\smile} = x^1,\ \overset{2}{\smile} = x^2,\ \overset{3}{\smile} = x^3 \ldots,$$

also

$$2\overset{2}{\smile}\ m20\overset{1}{\smile}\ p22 = 2x^2 - 20x + 22;$$

ferner ist

$$R.q = \sqrt[2]{\ },\ R.c = \sqrt[3]{\ } \ldots$$

Die Rechnung mit Wurzelgrössen *), so wie auch die allgemeine Theorie der imaginären Grössen, wovon Bombelli eine glückliche Anwendung auf den irreduciblen Fall macht, finden sich hier vollständig aus einander gesetzt. Er hat ferner zuerst allgemein ausgesprochen, dass jede cubische Gleichung drei Wurzeln hat, falls dieselben sich sämmtlich unter imaginärer Form darstellen, und hat seine Behauptung in sehr vielen Fällen durch unmittelbares Ausziehen der Wurzeln aus beiden Binomen dargethan. Bombelli benutzt zwar die Schriften Leonardo's von Pisa und Pacioli's, aber er vervollkommnet die Beweise, so dass seine Algebra zu den Fortschritten der Wissenschaft nicht wenig beigetragen hat.

Seit den Zeiten Bombelli's nahm das Interesse für das Studium der Algebra in Italien ab. Nur Pietro Antonio Cataldi **), Pro-

---

*) Leibnitz und Hutton, nach diesem auch Klügel (Wörterbuch, Theil I. Art. Algebra) haben das Gegentheil behauptet, indem sie Bombelli hierin Unvollständigkeit nachweisen; Plana hat jedoch in einer längeren Note (Libri, histoire des mathém. tom. III. p. 446. sq.) das Urtheil von Leibnitz widerlegt. Derselbe führt auch mehrere Stellen aus Lagrange's Vorlesungen an, die dieser 1795 an der Normalschule gehalten hat, worin ebenfalls zu Gunsten Bombelli's entschieden wird.

**) Von Montucla nicht erwähnt.

Digitized by Google

fessor an der Universität zu Bologna, legte sich später mit einigem Erfolge auf die Wissenschaft. Unter seinen zahlreichen Werken — er schrieb deren mehr als 30 — verdienen nur die wenigsten unsere Aufmerksamkeit, die meisten enthalten nichts Neues. Besonders ist hier zu erwähnen sein Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri (Bologna 1613. in fol.); es findet sich nämlich hierin nicht allein ein Verfahren, wie man näherungrweise eine Quadratwurzel ausziehen kann, so dass dieselbe unter der Form einer unendlichen Reihe erhalten wird, sondern Cataldi bedient sich auch zu eben dem Zwecke der Kettenbrüche, deren ersten Gebrauch man sonst dem Lord Brouncker zuschrieb. Er setzt z. B.

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \ldots}}}$$

und beweist, dass je nachdem man zum letzten Nenner einen neuen Bruch hinzugefügt oder weglässt, Zahlen erhalten werden, die abwechselnd grösser und kleiner sind als der wahre Werth, und demselben zugleich immer näher kommen. Nachdem er so 15mal den Bruch $\frac{2}{8}$ wiederholt hat, erhält er zuletzt einen Werth von $\sqrt{18}$, bei dem man noch um einen Bruch irrt, dessen Zähler $= 1$ und dessen Nenner eine 23 ziffrige Zahl ist. Auch stellt Cataldi eine Vergleichung dieser beiden Näherungsmethoden an. Es ist überhaupt merkwürdig, dass sich schon in dieser Schrift die ersten Spuren der Entdeckungen finden, die sonst gewöhnlich Wallis zugeschrieben werden.

Unter den algebraischen Schriften Cataldi's sind ferner noch die zu erwähnen, worin er die Ausziehung der Cubikwurzel aus gewissen Binomen und sogar Trinomen lehrt (Nova algebra proportionale, Bologna 1619 in fol. und Elementi delle quantità irrationali, Bolog. 1620 in fol.). Viele Geometer hatten sich schon mit Problemen ähnlicher Art beschäftigt, um namentlich die Schwierigkeiten, welche die Cardanische Formel verursacht, zu beseitigen; Cataldi nimmt in diesen beiden Schriften den Gegenstand von neuem mit Erfolg war.

Besonders hat aber Cataldi in den Anwendungen der Algebra die Schärfe seines Geistes dargelegt. Seine Algebra discorsiva numerale et lineare (Bolog. 1618 3 part. in fol.) enthält analytische Geometrie; er gebraucht hier Linien anstatt der Zahlen und construirt allgemein die Gleichung des zweiten Grades. Auch in der Algebra applicata (Bolog. 1622 in fol.) finden sich viele beachtenswerthe Sachen; es existirt ferner von ihm eine trigonometrische Algebra (Algèbre triangulaire), die, wie alle übrigen Werke Cataldi's, sehr selten zu sein scheint.

Cataldi hat sich auch mit Geometrie beschäftigt. Er commentirte den Euclid und vertheidigte ihn gegen die Angriffe Molina's *); ebenso nahm er sich auch für Archimed gegen die Anmassungen

*) Cataldi, elementi di Euclide, Bolog. 1620. 21. 25. 3 voll. in fol., und Difesa d'Euclide, Bolog. 1626 in fol. (wahrscheinlich seine letzte Schrift).

Scaliger's auf (Difesa d'Archimede, trattato del misurare o trovare la grandezza del cerchio, Bologna 1620, in fol.). Auch hat Cataldi den berüchtigten Satz über den Parallelismus zweier Geraden zu beweisen versucht (Operetta delle linee rette equidistanti, Bolog. 1603. 4.), jedoch der Fehlschluss darin ist sehr leicht zu bemerken.

Cataldi war um 1563 Professor zu Florenz; aber schon 1572 finden wir ihn an der Academie und Universität zu Perugia. 1584 wurde er zum Professor der Mathematik an der Universität zu Bologna ernannt, wo er bis zu seinem Tode blieb, der nach 1626 erfolgte. Schon in seinem 17ten Jahre schrieb er den ersten Theil seiner Pratica aritmetica, der jedoch erst 1602 erschien, worauf dann 1606 der zweite Theil folgte. In Bologna gründete er eine Academie für Mathematik, vielleicht die älteste, die wir kennen; sie wurde jedoch vom Senate, ohne dass man wusste warum, aufgehoben. Die Vorlesungen, die Cataldi daselbst hielt, sind erschienen (Due lettioni date nell' Accademia Erigenda, Bolog. 1613. 4.).

Ohnstreitig verdient Cataldi einen ausgezeichneten Platz unter den Mathematikern seiner Zeit, wenn er sich auch nicht mit den grossen Geistern des 17ten Jahrhunderts vergleichen lässt. Er besass einen erfinderischen Geist und eine ausgebreitete Gelehrsamkeit, und nahm von Allem Notiz, was im Auslande erschien. Die Namen Vieta's, van Ceulen's finden sich in den Vorreden zu seinen Schriften erwähnt. Um die Ausbreitung seiner Wissenschaft war ihm so sehr zu thun, dass er seine Schriften in mehr als 100 Städten Italiens mehrmals an Handwerker und Arme umsonst vertheilen liess.

So sind wir bis zum Zeitalter Galiläi's gekommen, der an demselben Tage (18. Febr. 1564) zu Pisa geboren wurde, an welchem Michel Angelo starb. Durch ihn erhielten die mathematischen Studien in Italien eine andere Richtung. Er ist der Schöpfer der Mechanik und der wissenschaftlichen Physik; in beiden Disciplinen haben die Italiener bis auf die neueste Zeit Bedeutendes geleistet.

XXXIV.

Ueber Reihenentwickelungen nach der Methode der unbestimmten Coefficienten

Von

Herrn T. Wittstein

Lehrer am Lyceum zu Hannover.

Es ist in diesen Blättern mehrfach von der Unzulässigkeit der Methode der unbestimmten Coefficienten zum Behuf der Entwicke-

Digitized by Google

lung der Funktionen in Reihen die Rede gewesen, und es möchte desshalb nicht unpassend sein, hier auch die Gründe dieser Unzulässigkeit vollständig zusammengestellt zu sehen. Man trennt sich ungern von einer Methode, die so leicht und einfach ihrem Ziele zuführt, man sucht die Mängel zu verbessern, die Lücken zu ergänzen; und wenn auch das Resultat nicht die gewünschte Befriedigung bringt, so trägt man wenigstens den Gewinn davon, dass man mit Ueberzeugung die Methode fallen lässt.

Als Fundamental-Lehrsatz der Methode der unbestimmten Coefficienten muss ein Satz angesehen werden, den man gewöhnlich in folgender Weise ausspricht:

Wenn zwei auf gleiche Weise nach Potenzen von x geordnete Reihen

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots \text{ und } B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots$$

einander gleich sein sollen, so müssen die Coefficienten gleicher Potenzen von x in beiden gleich sein.

Dieser Lehrsatz pflegt in den Lehrbüchern entweder gar nicht, oder nur mangelhaft bewiesen zu werden. Im ersten Falle verwechselt man ihn offenbar mit seinem Umgekehrten:

Wenn die Coefficienten gleicher Potenzen von x in jenen Reihen übereinstimmen, so sind beide Reihen gleich;

welches auf der Stelle klar ist, so lange nur beide Reihen weder unbestimmte noch unendliche Resultate geben, in welchem Falle der Begriff von Gleichheit wegfällt. Im zweiten Falle aber, wo man im Laufe des Beweises wiederholt durch x dividirt und sodann $x = 0$ setzt, begeht man den Fehler, dass man beide Seiten einer Gleichung durch 0 dividirt und die Quotienten wieder gleich setzt, da ja bekanntlich der Satz „Gleiches durch Gleiches dividirt giebt Gleiches" eine Ausnahme erleidet, sobald 0 der Divisor ist. Dieser Beweis lässt sich indessen mit Hülfe von Grenzbetrachtungen in ein völlig strenges Gewand einkleiden, wobei jedoch zugleich der zu beweisende Satz selbst einige Modifikation erleidet, nämlich in folgender Weise.

Lehrsatz. Wenn zwei auf gleiche Weise nach Potenzen von x geordnete Reihen

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots \text{ und } B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots$$

für alle Werthe von x zwischen $x = 0$ und $x = \varepsilon$ gleiche Resultate geben sollen, so müssen die Coefficienten gleicher Potenzen von x in beiden gleich sein.

Beweis. Da die Gleichung

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots$$

für $x = 0$ bestehen soll, so hat man sofort

$$1)\quad A_0 = B_0.$$

Daraus folgt ferner

$$A_1 x + A_2 x^2 + \ldots = B_1 x + B_2 x^2 + \ldots \text{ innerhalb } \begin{cases} x = 0 \\ x = \varepsilon \end{cases}$$

$$\frac{A_1 x + A_2 x^2 + \ldots}{x} = \frac{B_1 x + B_2 x^2 + \ldots}{x} \text{ innerhalb } \begin{cases} x = 0 \text{ excl.} \\ x = \varepsilon \end{cases}$$

Digitized by Google

folglich wenn man x, von $x=\varepsilon$ anfangend, sich dem Werthe $x=0$ nähern lässt, wo

$$\lim \frac{A_1x+A_2x^2+\ldots}{x} = \lim \frac{x}{x} \cdot \lim (A_1+A_2x+\ldots) = A_1$$

$$\lim \frac{B_1x+B_2x^2+\ldots}{x} = \lim \frac{x}{x} \cdot \lim (B_1+B_2x+\ldots) = B_1$$

wird,

$$2)\ A_1 = B_1.$$

Ferner ist daraus

$$A_2x^2+A_3x^3+\ldots = B_2x^2+B_3x^3+\ldots \text{ innerhalb } \begin{cases} x=0 \\ x=\varepsilon \end{cases}$$

$$\frac{A_2x^2+A_3x^3+\ldots}{x^2} = \frac{B_2x^2+B_3x^3+\ldots}{x^2} \text{ innerhalb } \begin{cases} x=0 \text{ excl.} \\ x=\varepsilon \end{cases}$$

und durch Uebergang zu den Grenzen, wie vorhin,

$$3)\ A_2 = B_2,$$

u. s. w.

Hiermit ist der vorliegende Satz vollständig bewiesen. Aus der Beschaffenheit dieses Beweises zeigt sich sofort, wesshalb in dem Lehrsatze die Forderung aufgestellt werden musste, dass für alle Werthe von x zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=\varepsilon$ (von denen die letztere hier durchaus willkürlich ist) obige Reihen gleiche Resultate geben sollen; es war nämlich zur Auffindung der im Beweise erforderlichen Grenzwerthe für $x=0$ nöthig, dass man von einem von 0 verschiedenen Werthe für x, für welchen die supponirte Gleichung noch gültig blieb, ausgehen konnte, um sich von da aus der 0 zu nähern. Mehr aber bedurfte es nicht, und die frühere Weise den Satz auszusprechen, wo man Gleichheit beider Reihen für alle Werthe von x (natürlich mit Ausschluss derjenigen, für welche der Begriff der Gleichheit keine Bedeutung mehr hat) verlangte, war desshalb fehlerhaft, weil die Bedingung in diesem Umfange in dem Beweise nicht zur Anwendung kommen kann, mithin der Satz mehr behauptete, als der Beweis beweiset.

Es lässt sich hieran noch die Folgerung knüpfen, dass, wenn man eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe hat, die innerhalb bestimmter Grenzen für x (unter denen auch 0 vorkommt) die Entwickelung einer gegebenen Funktion von x liefert, es keine von dieser verschiedenen Reihe mehr geben kann, die innerhalb derselben Grenzen gleichfalls als Entwickelung dieser Funktion könnte angesehen werden. Diese Folgerung auszusprechen kann insofern von Nutzen sein, als es dadurch noch unentschieden bleibt, ob es vielleicht innerhalb anderer in jenen nicht enthaltenen Grenzen eine andere Reihenentwickelung der vorgelegten Funktion geben könne.

Der Gang, den die Methode der bestimmten Coefficienten (um zu dieser selbst jetzt überzugehen) nimmt, um eine gegebene

Digitized by Google

Funktion $f(x)$ in eine Reihe zu entwickeln, die nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitet, besteht im allgemeinen darin, dass man, die Möglichkeit einer solcher Entwickelung voraussetzend, die Gleichung

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots\ldots$$

aufstellt, von welcher ausgehend man durch verschiedene Kunstgriffe — deren Erörterung nicht weiter zur Methode selbst gehört, insofern die eigenthümliche Beschaffenheit der Funktion $f(x)$ sie an die Hand geben muss *) — dahin zu gelangen sucht, dass auf jede Seite des Gleichheitszeichens eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe zu stehen kommt, worauf sich die Bestimmung der Coefficienten A_0, A_1, A_2, ... unmittelbar durch den vorstehenden Lehrsatz ergibt.

Dieser Gang gibt zu zwei Bemerkungen Veranlassung. Zunächst nämlich ist klar, dass die Voraussetzung, dass irgend eine willkürlich vorgelegte Funktion sich in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe soll entwickeln lassen, im allgemeinen durch gar nichts gerechtfertigt wird; man kann im voraus nicht wissen, ob die gegebene Funktion die Form, die man ihr aufdringen will, wird annehmen können, und in der That gibt es Funktionen, die eine Reihenentwickelung in jener Form nicht gestatten, z. B. $\log x$, $\cot x$. Wenn man daher dennoch jene Voraussetzung macht, und, darauf gestützt, die Coefficienten der supponirten Reihe zu bestimmen sucht, so muss man es sich auch gefallen lassen, wenn man dabei zu unbrauchbaren Resultaten gelangt. So z. B. wenn man setzt

$$\log x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots.$$

und nun zu beiden Seiten die derivirten Funktionen nimmt, so hat man

$$\frac{1}{x} = A_1 + 2A_2 x + \ldots.,$$

woraus

$$1 = A_1 x + 2A_2 x^2 + \ldots.,$$

welche Gleichung offenbar für ein veränderliches x ohne Sinn ist. Es leuchtet aber ein, dass, wenn die Rechnung wirklich zu bestimmten Coefficienten führt, die Voraussetzung selbst auch nichts ungereimtes enthalten hat, und mithin kann von dieser Seite die Methode der unbestimmten Coefficienten kein Vorwurf treffen.

Ferner liegt in der Voraussetzung, dass ohne weitere Beschränkung

---

*) In vielen Fällen reicht der Uebergang zu den derivirten Funktionen zu dem beabsichtigten Zwecke aus. Lacroix in seinem Traité élémentaire findet auf diesem Wege vermittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten die Taylorsche Reihe; er weicht jedoch darin ab, dass er auch die Exponenten der supponirten Reihe als unbestimmt voraussetzt und sie aus der letzten Gleichsetzung bestimmen will, welches begreiflich nicht angeht, da es ja zum Wesen der Methode der unbestimmten Coefficienten gehört, dass sie die Exponenten von x bestimmt vorschreibt.

Digitized by Google

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots.$$

sein soll, implicite die Bedingung ausgesprochen, dass für jeden besondern Werth des x der Werth der Funktion mit demjenigen, den die Reihe dafür liefert, übereinstimmen soll. Hier ist nun sofort klar, dass diese Bedingung aufhört, ihre Gültigkeit zu behalten, für alle diejenigen Werthe von x, für welche entweder die Funktion oder die Reihe aufhört endlich und bestimmt zu bleiben, weil in diesem Falle der Begriff der Gleichheit seine Anwendung verliert; und es tritt mithin namentlich in Bezug auf die gefundene Reihe hier mit Nothwendigkeit die Forderung auf, die Reihe hinsichtlich ihrer Convergenz zu untersuchen, um die unbrauchbaren Werthe ausschliessen zu können. Aber dieses allein genügt nicht. Der obige Lehrsatz verlangt nämlich zu seiner Anwendbarkeit das Stattfinden der Gleichheit innerhalb der Grenzen $x=0$ und $x=\varepsilon$, wo ε also nicht über derjenigen Grenze hinaus, für welche der Begriff der Gleichheit verschwindet, aber der 0 so nahe liegen darf als man will. Es sei nun α derjenige positive oder derjenige negative Werth von x, der, wenn man von 0 ausgeht, der erste ist, mit welchem entweder die vorgelegte Funktion oder die gefundene Reihe aufhört endlich und bestimmt zu bleiben, so darf jedenfalls ε nicht über α hinaus liegen; ob man aber $\varepsilon=\alpha$ setzen dürfe, das ist nicht ohne weiteres klar, denn es bleibt noch immer die Möglichkeit offen, dass es innerhalb 0 und α Werthe von x geben könne, für welche die Reihe ein Resultat liefert, welches nicht mit dem correspondirenden Werthe der gegebenen Funktion übereinstimmt. Um dies durch ein Beispiel zu erläutern, welches allerdings nicht ganz hieher gehört, so liefert die bekannte Reihe

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \frac{1}{\pi}\cos x \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\, dx \\ + \frac{1}{\pi}\cos 2x \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2x\, dx + \ldots \\ + \frac{1}{\pi}\sin x \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\, dx \\ + \frac{1}{\pi}\sin 2x \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 2x\, dx + \ldots.\end{aligned}$$

welche als Entwickelung von $f(x)$ gefunden wird und von $-\pi$ bis π convergent bleibt, wenn nur $f(x)$ zwischen diesen Grenzen nicht discontinuirlich wird, für $x=\pm\pi$ das Resultat $\frac{1}{2}(f(\pi)+f(-\pi))$, welches mit dem correspondirenden Funktionswerthe $f(\pi)$ nicht zusammenfällt, es sei denn dass man habe $f(\pi)=f(-\pi)$ (vgl. Lejeune Dirichlet in Crelle's Journal B. 4. S. 157. seqq.). — Wenn man nun, wie es gewöhnlich geschieht, in Ermangelung des nöthigen Kriteriums geradezu $\varepsilon=\alpha$ setzt, so spricht man damit eine Behauptung aus, die erst noch des Beweises bedarf, und dies ist die eigentliche schwache Seite der Methode der unbestimmten Coefficienten. Also nicht etwa darin, dass die Methode divergente Reihen liefert, — denn hierauf scheint manche Aeusserung hinzudeuten, — sondern darin ist der Grund für die Unzulässigkeit der Methode der unbestimmten Coefficienten zu suchen, dass sie nicht lehrt, innerhalb welcher Grenzen die gefundene Reihe wirklich als

Entwickelung der gegebenen Funktion gültig ist. Dieser Mangel findet sich bei denjenigen Methoden nicht, welche, nach dem Vorgange von Cauchy und Ampère, bei jeder Entwickelung zugleich den ergänzenden Rest der Reihe mit in Betracht ziehen.

XXXV.

Beitrag zur Lösung des, im II. Bd. des Archivs S. 220 angeregten, Euler-Pfaffschen Theorems über geometrische Progressionen.

Von dem

Herrn Doctor A. R. Luchterhandt

zu Königsberg i. d. N.

Wir beabsichtigen hier zunächst die allgemeine Entwickelung der Gleichung des $n$ten Grades, durch welche bei einer vorgelegten Gleichung des $2n$ten Grades die Hülfsgrösse u bestimmt wird, zu geben.

Zu dem Ende wollen wir die allgemeine Gleichung vom $2n$ten Grade

$$z^{2n} + Az^{2n-1} + Bz^{2n-2} + Cz^{2n-3} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + Cz^3 + Bz^2 + Az + 1 = 0,$$

auf folgende Art schreiben:

$$z^{2n} + [n]_1 z^{2n-1} + [n]_2 z^{2n-2} + [n]_3 z^{2n-3} + \ldots$$
$$\ldots + [n]_3 z^3 + [n]_2 z^2 + [n]_1 z + 1 = 0, \ldots (1)$$

so dass also die Symbole $[n]_1$, $[n]_2$, $\ldots$. $[n]_m$ den ersten, zweiten $\ldots$ $m$ten Coefficienten vom Anfang und Ende in der Gleichung des $2n$ten Grades vorstellen. Solcher Symbole sind der Zahl nach $2n-1$, und das mittelste ist $[n]_{n-1}$.

Wir denken uns die Gleichung (1) auf die Form

$$(z^2 + a_1 z + 1)(z^2 + a_2 z + 1)(z^2 + a_3 z + 1)\ldots\ldots$$
$$\ldots (z^2 + a_{n-1} z + 1)(z^2 + a_n z + 1) = 0 \ldots . (2)$$

gebracht, und wollen nun untersuchen, wie die Coefficienten der Gleichung (1) aus den Grössen a_1, a_2, a_3, $\ldots$ a_n gebildet sind.

Wir werden das Bildungsgesetz auf dem Wege der Induction suchen, und dann seine allgemeine Gültigkeit darthun. Wir bemerken noch, dass wir mit dem Symbole $\overset{p}{C}_m$ die Combinationen ohne Wiederholungen der $m$ten Klasse der p ersten Elemente α_1, α_2, α_3, ... α_p bezeichnen werden und erinnern an die bekannten Relationen

$$\left.\begin{aligned} \overset{p+1}{C}_m &= \overset{p}{C}_m + \alpha_{p+1} \cdot \overset{p}{C}_{m-1} \\ \text{und} \qquad & \\ \alpha_{m+1} \overset{m}{C}_m &= \overset{m+1}{C}_{m+1} \cdot \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (3)$$

Wir haben also zunächst

$$x^2 + [1]_1 x + 1 = x^2 + \alpha_1 x + 1 = x^2 + \overset{1}{C}_1 x + 1,$$

ferner

$$x^4 + [2]_1 x^3 + [2]_2 x^2 + [2]_1 x + 1$$

$$= (x^2 + \overset{1}{C}_1 x + 1)\ (x^2 + \alpha_2 x + 1)$$

$$= x^4 + (\alpha_2 + \overset{1}{C}_1) x^3 + (2 + \alpha_2 \overset{1}{C}_1) x^2 + (\alpha_2 + \overset{1}{C}_1) x + 1$$

$$= x^4 + \overset{2}{C}_1 x^3 + (2 + \overset{2}{C}_2) x^2 + \overset{2}{C}_1 x + 1;$$

ferner

$$x^6 + [3]_1 x^5 + [3]_2 x^4 + [3]_3 x^3 + [3]_2 x^2 + [3]_1 x + 1$$

$$= \{x^4 + \overset{2}{C}_1 x^3 + (2 + \overset{2}{C}_2) x^2 + \overset{2}{C}_1 x + 1\}\ (x^2 + \alpha_3 x + 1)$$

$$= x^6 + (\alpha_3 + \overset{2}{C}_1) x^5 + (3 + \alpha_3 \overset{2}{C}_1 + \overset{2}{C}_2) x^4$$

$$+ (2\alpha_3 + 2\overset{2}{C}_1 + \alpha_3 \overset{2}{C}_2) x^3 + (3 + \alpha_3 \overset{2}{C}_1 + \overset{2}{C}_2) x^2$$

$$+ (\alpha_3 + \overset{2}{C}_1) x + 1$$

$$= x^6 + \overset{3}{C}_1 x^5 + (3 + \overset{3}{C}_2) x^4 + (2\overset{3}{C}_1 + \overset{3}{C}_3) x^3 + (3 + \overset{3}{C}_2) x^2$$

$$+ \overset{3}{C}_1 x + 1,$$

ferner

$$x^8 + [4]_1 x^7 + [4]_2 x^6 + [4]_3 x^5 + [4]_4 x^4 + [4]_3 x^3 + [4]_2 x^2$$

$$+ [4]_1 x + 1$$

$$= \{x^4 + \overset{3}{C}_1 x^3 + (3 + \overset{3}{C}_2) x^4 + (2\overset{3}{C}_1 + \overset{3}{C}_3) x^3$$

$$+ (3 + \overset{3}{C}_2) x^2 + \overset{3}{C}_1 x + 1\}\ (x^2 + \alpha_4 x + 1)$$

$$= x^8 + (a_4 + \overset{3}{C}_1)x^7 + (4 + a_4\overset{3}{C}_1 + \overset{3}{C}_2)x^6$$
$$+ (3a_4 + 3\overset{3}{C}_1 + a_4\overset{3}{C}_2 + \overset{3}{C}_3)x^5 + (6 + 2a_4\overset{3}{C}_1 + 2\overset{3}{C}_2 + a_4\overset{3}{C}_3)x^4$$
$$+ (3a_4 + 3\overset{3}{C}_1 + a_4\overset{3}{C}_2 + \overset{3}{C}_3)x^3 + (4 + a_4\overset{3}{C}_1 + \overset{3}{C}_2)x^2$$
$$+ (a_4 + \overset{3}{C}_1)x + 1$$
$$= x^8 + \overset{4}{C}_1 x^7 + (4 + \overset{4}{C}_2)x^6 + (3\overset{4}{C}_1 + \overset{4}{C}_3)x^5$$
$$+ (6 + 2\overset{4}{C}_2 + \overset{4}{C}_4)x^4 + (3\overset{4}{C}_1 + \overset{4}{C}_3)x^3 + (4 + \overset{4}{C}_2)x^2$$
$$+ \overset{4}{C}_1 x + 1,$$

ferner

$$x^{10} + [5]_1 x^9 + [5]_2 x^8 + \ldots\ldots + [5]_2 x^2 + [5]_1 x + 1$$
$$= \{x^8 + \overset{4}{C}_1 x^7 + (4 + \overset{4}{C}_2)x^6 + (3\overset{4}{C}_1 + \overset{4}{C}_3)x^5$$
$$+ (6 + 2\overset{4}{C}_2 + \overset{4}{C}_4)x^4 + (3\overset{4}{C}_1 + \overset{4}{C}_3)x^3 + (4 + \overset{4}{C}_2)x^2$$
$$+ \overset{4}{C}_1 x + 1\}$$
$$\times (x^2 + a_4 x + 1)$$
$$= x^{10} + \overset{5}{C}_1 x^9 + (5 + \overset{5}{C}_2)x^8 + (4\overset{5}{C}_1 + \overset{5}{C}_3)x^7$$
$$+ (10 + 3\overset{5}{C}_2 + \overset{5}{C}_4)x^6 + (6\overset{5}{C}_1 + 2\overset{5}{C}_3 + \overset{5}{C}_5)x^5$$
$$+ (10 + 3\overset{5}{C}_2 + \overset{5}{C}_4)x^4 + (4\overset{5}{C}_1 + \overset{5}{C}_3)x^3 + (5 + \overset{5}{C}_2)x^2$$
$$+ \overset{5}{C}_1 x + 1;$$

ferner

$$x^{12} + [6]_1 x^{11} + [6]_2 x^{10} + \ldots. + [6]_2 x^2 + [6]_1 x + 1$$
$$= x^{12} + \overset{6}{C}_1 x^{11} + (6 + \overset{6}{C}_2)x^{10} + (5\overset{6}{C}_1 + \overset{6}{C}_3)x^9$$
$$+ (15 + 4\overset{6}{C}_2 + \overset{6}{C}_4)x^8 + (10\overset{6}{C}_1 + 3\overset{6}{C}_3 + \overset{6}{C}_6)x^7$$
$$+ (20 + 6\overset{6}{C}_2 + 2\overset{6}{C}_4 + \overset{6}{C}_6)x^6 + (10\overset{6}{C}_1 + 3\overset{6}{C}_3 + \overset{6}{C}_5)x^5$$
$$+ (15 + 4\overset{6}{C}_2 + \overset{6}{C}_4)x^4 + (5\overset{6}{C}_1 + \overset{6}{C}_3)x^3 + (6 + \overset{6}{C}_2)x^2$$
$$+ \overset{6}{C}_1 x + 1,$$

ferner

$$x^{14}+[7]_1x^{13}+[7]_2x^{12}+\ldots+[7]_2x^2+[7]_1x+1$$
$$=x^{14}+\overset{7}{C}_1x^{13}+(7+\overset{7}{C}_2)x^{12}+(6\overset{7}{C}_1+\overset{7}{C}_3)x^{11}$$
$$+(21+5\overset{7}{C}_2+\overset{7}{C}_4)x^{10}+(15\overset{7}{C}_1+4\overset{7}{C}_3+\overset{7}{C}_5)x^9$$
$$+(35+10\overset{7}{C}_2+3\overset{7}{C}_4+\overset{7}{C}_6)x^8+(20\overset{7}{C}_1+6\overset{7}{C}_3+2\overset{7}{C}_5+\overset{7}{C}_7)x^7+\ldots$$

ferner

$$x^{16}+[8]_1x^{15}+[8]_2x^{14}+\ldots[8]_2x^2+[8]_1x+1$$
$$=x^{16}+\overset{8}{C}_1x^{14}+(8+\overset{8}{C}_2)x^{14}+(7\overset{8}{C}_1+\overset{8}{C}_3)x^{13}$$
$$+(28+6\overset{8}{C}_2+\overset{8}{C}_4)x^{12}+(21\overset{8}{C}_1+5\overset{8}{C}_3+\overset{8}{C}_5)x^{11}$$
$$+(56+15\overset{8}{C}_2+4\overset{8}{C}_4+\overset{8}{C}_6)x^{10}+(35\overset{8}{C}_1+10\overset{8}{C}_3+3\overset{8}{C}_5+\overset{8}{C}_7)x^9$$
$$+(70+20\overset{8}{C}_2+6\overset{8}{C}_4+2\overset{8}{C}_6+\overset{8}{C}_8)x^8+\ldots$$

und endlich

$$x^{18}+[9]_1x^{17}+[9]_2x^{16}+\ldots\ldots+[9]_2x^2+[9]_1x+1$$
$$=x^{18}+\overset{9}{C}_1x^{17}+(9+\overset{9}{C}_1)x^{16}+(8\overset{9}{C}_1+\overset{9}{C}_3)x^{15}$$
$$+(36+7\overset{9}{C}_2+\overset{9}{C}_4)x^{14}+(28\overset{9}{C}_1+6\overset{9}{C}_3+\overset{9}{C}_5)x^{13}$$
$$+(84+21\overset{9}{C}_2+5\overset{9}{C}_4+\overset{9}{C}_6)x^{12}+(56\overset{9}{C}_1+15\overset{9}{C}_3+4\overset{9}{C}_5+\overset{9}{C}_7)x^{11}$$
$$+(126+35\overset{9}{C}_2+10\overset{9}{C}_4+3\overset{9}{C}_6+\overset{9}{C}_8)x^{10}$$
$$+(70\overset{9}{C}_1+20\overset{9}{C}_3+6\overset{9}{C}_5+2\overset{9}{C}_7+\overset{9}{C}_9)x^9+\ldots.$$

Hiernach ergeben sich also durch Vergleichung der Coefficienten der gleichen Potenzen in den einzelnen Gleichungen die Relationen:

$$[1]_1=\overset{1}{C}_1,\ [2]_1=\overset{2}{C}_1,\ [3]_1=\overset{3}{C}_1,\ [4]_1=\overset{4}{C}_1,\ [5]_1=\overset{5}{C}_1 \text{ u. s. w.}$$

$$[2]_2=2+\overset{2}{C}_2,\ [3]_2=3+\overset{3}{C}_2,\ [4]_2=4+\overset{4}{C}_2,\ [5]_2=5+\overset{5}{C}_2, \text{ u. s. w.}$$

$$[3]_3=2\overset{3}{C}_1+\overset{3}{C}_3,\ [4]_3=3\overset{4}{C}_1+\overset{4}{C}_3,\ [5]_3=4\overset{5}{C}_1+\overset{5}{C}_3, \text{ u. s. w.}$$

$$[4]_4=6+2\overset{4}{C}_2+\overset{4}{C}_4=\frac{4\cdot3}{1\cdot2}+(4-2)\overset{4}{C}_2+\overset{4}{C}_4,$$

$$[5]_4=10+3\overset{5}{C}_2+\overset{5}{C}_4=\frac{5\cdot4}{1\cdot2}+(5-2)\overset{5}{C}_2+\overset{5}{C}_4,$$

$$[6]_4=15+4\overset{6}{C}_2+\overset{6}{C}_4=\frac{6\cdot5}{1\cdot2}+(6-2)\overset{6}{C}_2+\overset{6}{C}_4,$$

$$[7]_4=21+5\overset{7}{C}_2+\overset{7}{C}_4=\frac{7\cdot6}{1\cdot2}+(7-2)\overset{7}{C}_2+\overset{7}{C}_4,$$

$$[5]_4 = 6\overset{5}{C}_1 + 2\overset{5}{C}_2 + \overset{5}{C}_3 = \frac{4\cdot3}{1\cdot2}\overset{5}{C}_1 + (5-3)\overset{5}{C}_2 + \overset{5}{C}_3,$$

$$[6]_4 = 10\overset{6}{C}_1 + 3\overset{6}{C}_2 + \overset{6}{C}_3 = \frac{5\cdot4}{1\cdot2}\overset{6}{C}_1 + (6-3)\overset{6}{C}_2 + \overset{6}{C}_3,$$

$$[7]_4 = 15\overset{7}{C}_1 + 4\overset{7}{C}_2 + \overset{7}{C}_3 = \frac{6\cdot5}{1\cdot2}\overset{7}{C}_1 + (7-3)\overset{7}{C}_2 + \overset{7}{C}_3,$$

. . . .

. . . .

$$[6]_4 = 20 + 6\overset{6}{C}_2 + 2\overset{6}{C}_4 + \overset{6}{C}_6 = \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3} + \frac{4\cdot3}{1\cdot2}\overset{6}{C}_2 + (6-4)\overset{6}{C}_4 + \overset{6}{C}_6,$$

$$[7]_4 = 35 + 10\overset{7}{C}_2 + 3\overset{7}{C}_4 + \overset{7}{C}_6 = \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3} + \frac{5\cdot4}{1\cdot2}\overset{7}{C}_2 + (7-4)\overset{7}{C}_4 + \overset{7}{C}_6,$$

$$[8]_4 = 56 + 15\overset{8}{C}_2 + 4\overset{8}{C}_4 + \overset{8}{C}_6 = \frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3} + \frac{6\cdot5}{1\cdot2}\overset{8}{C}_2 + (8-4)\overset{8}{C}_4 + \overset{8}{C}_6,$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$[7]_7 = 20\overset{7}{C}_1 + 6\overset{7}{C}_2 + 2\overset{7}{C}_4 + \overset{7}{C}_7 = \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}\overset{7}{C}_1 + \frac{4\cdot3}{1\cdot2}\overset{7}{C}_2 + (7-5)\overset{7}{C}_4 + \overset{7}{C}_7,$$

$$[8]_7 = 35\overset{8}{C}_1 + 10\overset{8}{C}_2 + 3\overset{8}{C}_4 + \overset{8}{C}_7 = \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}\overset{8}{C}_1 + \frac{5\cdot4}{1\cdot2}\overset{8}{C}_2 + (8-5)\overset{8}{C}_4 + \overset{8}{C}_7,$$

$$[9]_7 = 56\overset{9}{C}_1 + 15\overset{9}{C}_2 + 4\overset{9}{C}_4 + \overset{9}{C}_7 = \frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\overset{9}{C}_1 + \frac{6\cdot5}{1\cdot2}\overset{9}{C}_2 + (9-5)\overset{9}{C}_4 + \overset{9}{C}_7,$$

. . . .

. . . .

$$[8]_8 = 70 + 20\overset{8}{C}_2 + 6\overset{8}{C}_4 + 2\overset{8}{C}_6 + \overset{8}{C}_8 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}\overset{8}{C}_2 + \frac{4\cdot3}{1\cdot2}\overset{8}{C}_4 + (8-6)\overset{8}{C}_6 + \overset{8}{C}_8,$$

$$[9]_6 = 126 + 35\overset{9}{C}_2 + 10\overset{9}{C}_4 + 3\overset{9}{C}_6 + \overset{9}{C}_8 = \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} + \frac{7.6.5}{1.2.3}\overset{9}{C}_2 + \frac{5.4}{1.2}\overset{9}{C}_4 + (9-6)\overset{9}{C}_6 + \overset{9}{C}_8,$$

$$[9]_7 = 70\overset{9}{C}_1 + 20\overset{9}{C}_3 + 6\overset{9}{C}_5 + 2\overset{9}{C}_7 + \overset{9}{C}_9 = \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\overset{9}{C}_1 + \frac{6.5.4}{1.2.3}\overset{9}{C}_3 + \frac{4.3}{1.2}\overset{9}{C}_5 + (9-7)\overset{9}{C}_7 + \overset{9}{C}_9,$$

Aus dem Entwickelten lässt sich nun schliessen, dass allgemein sein werde:

$$[n]_1 = \overset{n}{C}_1,$$

$$[n]_2 = n + \overset{n}{C}_2,$$

$$[n]_3 = (n-1)\overset{n}{C}_1 + \overset{n}{C}_3,$$

$$[n]_4 = \frac{n(n-1)}{1.2} + (n-2)\overset{n}{C}_2 + \overset{n}{C}_4,$$

$$[n]_5 = \frac{(n-1)\ (n-2)}{1.2}\overset{n}{C}_1 + (n-3)\overset{n}{C}_3 + \overset{n}{C}_5,$$

$$[n]_6 = \frac{n(n-1)\ (n-2)}{1.2.3} + \frac{(n-2)\ (n-3)}{1.2}\overset{n}{C}_2 + (n-4)\overset{n}{C}_4 + \overset{n}{C}_6,$$

$$[n]_7 = \frac{(n-1)\ (n-2)\ (n-3)}{1.2.3}\overset{n}{C}_1 + \frac{(n-3)\ (n-4)}{1.2}\overset{n}{C}_3 + (n-5)\overset{n}{C}_5 + \overset{n}{C}_7,$$

$$[n]_8 = \frac{n(n-1)\ (n-2)\ (n-3)}{1.2.3.4} + \frac{(n-2)\ (n-3)\ (n-4)}{1.2.3}\overset{n}{C}_2 + \frac{(n-4)\ (n-5)}{1.2}\overset{n}{C}_4 + (n-6)\overset{n}{C}_6 + \overset{n}{C}_8,$$

$$[n]_9 = \frac{(n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ (n-4)}{1.2.3.4}\overset{n}{C}_1 + \frac{(n-3)\ (n-4)\ (n-5)}{1.2.3}\overset{n}{C}_3 + \frac{(n-5)\ (n-6)}{1.2}\overset{n}{C}_5 + (n-7)\overset{n}{C}_7 + \overset{n}{C}_9,$$

$$[n]_{2m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(m-1))}{m!} + \frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-m)}{(m-1)!}\overset{n}{C}_2 + \frac{(n-4)(n-5)\ldots(n-(m+1))}{(m-2)!}\overset{n}{C}_4$$

$$+ \ldots + \frac{(n-(2m-2k))\,.\,(n-(2m-(2k-1)))\ldots(n-(2m-(k+1)))}{k!}\overset{n}{C}_{2m-2k} + \ldots$$

$$+ (n-(2m-2))\overset{n}{C}_{2m-2} + \overset{n}{C}_{2m},$$

$$[n]_{2m+1} = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}{m!}\overset{n}{C}_1 + \frac{(n-3)(n-4)\ldots(n-(m+1))}{(m-1)!}\overset{n}{C}_3 + \frac{(n-5)(n-6)\ldots(n-(m+2))}{(m-2)!}\overset{n}{C}_5$$

$$+ \ldots + \frac{(n-(2m+1-k))\,(n-(2m+1-(k-1)))\ldots(n-(2m-k))}{k!}\overset{n}{C}_{2m+1-2p} + \ldots$$

$$+ (n-(2m-1))\overset{n}{C}_{2m-1} + \overset{n}{C}_{2m+1},$$

wo $p! = 1\,.\,2\,.\,3\ldots(p-1)\,.\,p$ gesetzt ist.

Angenommen, dass dieses Bildungsgesetz der Coefficienten für alle Zahlen von 1 bis n gültig sei, so wollen wir zeigen, dass dasselbe auch für $n+1$ stattfinde. — Denkt man sich nun die Gleichung vom $2n$ten Grade in z mit $z^2 + a_{n+1}z + 1$ multiplicirt, so erhellet leicht, dass, mit Ausnahme des ersten und letzten, jeder Coefficient der neuen Gleichung gebildet wird aus drei auf einander folgenden Coefficienten der vorhergehenden Gleichung und zwar nach folgendem Gesetze:

$$[n+1]_h = [n]_{h-2} + a_{n+1}[n]_{h-1} + [n]_h \ldots\ldots (4)$$

Für den ersten und letzten Coefficienten hat man

$$[n+1]_1 = a_{n+1} + [n]_1,$$

oder man kann sich auch allgemein der Gleichung (4) bedienen, wenn man nur $[n]_0 = 1$ und $[n]_{-1} = 0$ setzt.

Mit steter Berücksichtigung der Gleichung (3) hat man also

$$[n+1]_1 = a_{n+1} + \overset{n}{C}_1 = \overset{n+1}{C}_1,$$

$$[n+1]_2 = 1 + a_{n+1}[n]_1 + [n]_2 = 1 + a_{n+1}\overset{n}{C}_1 + n + \overset{n}{C}_2$$

$$= n + 1 + a_{n+1}\overset{n}{C}_1 + \overset{n}{C}_2 = n + 1 + \overset{n+1}{C}_2,$$

$$[n+1]_3 = [n]_1 + a_{n+1}[n]_2 + [n]_3 = \overset{n}{C}_1 + a_{n+1}n + a_{n+1}\overset{n}{C}_2$$

$$+ (n-1)\overset{n}{C}_1 + \overset{n}{C}_2 = a_{n+1}n + n\overset{n}{C}_1 + a_{n+1}\overset{n}{C}_2 + \overset{n}{C}_2$$

$$= n(a_{n+1} + \overset{n}{C}_1) + a_{n+1}\overset{n}{C}_2 + \overset{n}{C}_2 = n\overset{n+1}{C}_1 + \overset{n+1}{C}_2,$$

$$[n+1]_4 = [n]_2 + a_{n+1}[n]_3 + [n]_4 = n + \overset{n}{C}_2 + a_{n+1}\overset{n}{C}_1$$

$$+ (n-1)\overset{n}{C}_1 + a_{n+1}\overset{n}{C}_2 + \frac{n(n-1)}{1.2} + (n-2)\overset{n}{C}_2 + \overset{n}{C}_4$$

$$= \frac{(n+1)n}{1.2} + (n-1)\overset{n+1}{C}_2 + \overset{n+1}{C}_4.$$

Digitized by Google

$$[n+1]_{2m} = [n]_{2m-2} + a_{n+1}[n]_{2m-1} + [n]_{2m} = \frac{n(n-1)\ (n-2)\dots(n-(m-2))}{(m-1)!} + \frac{(n-2)\ (n-3)\dots(n-(m-1))}{(m-2)!}\overset{n}{C}_2$$

$$+\frac{(n-4)\ (n-5)\dots(n-m)}{(m-3)!}\overset{n}{C}_4+\dots+\frac{(n-(2m-2k))\ (n-(2m-2k+1))\dots(n-(2m-k-2))}{(k-1)!}\overset{n}{C}_{2m-2k}$$

$$+\dots+(n-(2m-4))\overset{n}{C}_{2m-4}+\overset{n}{C}_{2m-2}$$

$$+a_{n+1}\frac{(n-1)\ (n-2)\dots(n-(m-1))}{(m-1)!}\overset{n}{C}_1+a_{n+1}\cdot\frac{(n-3)\ (n-4)\dots(n-m)}{(m-2)!}\overset{n}{C}_3+\dots$$

$$+a_{n+1}\cdot\frac{(n-(2m+1-2k))\ (n-(2m+2-2k))\dots(n-(2m-k-1))}{(k-1)!}\cdot\overset{n}{C}_{2m+1-2k}+\dots$$

$$+a_{n+1}(n-(2m-3))\overset{n}{C}_{2m-3}+a_{n+1}\overset{n}{C}_{2m-1}$$

$$+\frac{n(n-1)\dots(n-(m-1))}{m!}+\frac{(n-2)\ (n-3)\dots(n-m)}{(m-1)!}\overset{n}{C}_2+\frac{(n-4)\ (n-5)\dots(n-(m+1))}{(m-2)!}\overset{n}{C}_4+\dots$$

$$+\frac{(n-(2m-2k))\ (n-(2m-2k+1))\dots(n-(2m-k-1))}{k!}\overset{n}{C}_{2m-2k}+\dots(n-(2m-2))\overset{n}{C}_{2m-2}+\overset{n}{C}_{2m}$$

$$=\frac{(n+1)n\dots(n+1-(m-1))}{m!}+a_{n+1}\frac{(n-1)\ (n-2)\dots(n-(m-1))}{(m-1)!}\overset{n}{C}_1+\frac{(n-2)\ (n-3)\dots(n-(m-1))}{(m-2)!}\left(1+\frac{n-m}{m-1}\right)\overset{n}{C}_2$$

$$+a_{n+1}\frac{(n-3)\ (n-4)\dots(n-m)}{(m-2)!}\overset{n}{C}_3+\frac{(n-4)\ (n-5)\dots(n-m)}{(m-3)!}\left(1+\frac{n-(m+1)}{m-2}\right)\overset{n}{C}_4$$

$$+a_{n+1}\frac{(n-5)\ (n-6)\dots(n-(m+1))}{(m-3)!}\overset{n}{C}_5+\frac{(n-6)\ (n-7)\dots(n-(m+1))}{(m-4)!}\left(1+\frac{n-(m+2)}{m-3}\right)\overset{n}{C}_6+\dots$$

. . . . . .

$$+ a_{n+1}\frac{(n-(2m-2k-1))\,(n-(2m-2k))\,..\,(n-(2m-k-2))}{k!}\,{}^{n}C_{2m-2k-1}$$

$$+\frac{(n-(2m-2k))\,(n-(2m-2k+1))\,....\,(n-(2m-k-2))}{(k-1)!}\,(1+\frac{n-(2m-k-1)}{k!})\,{}^{n}C_{2m-2k}+..$$

$$+ a_{n+1}\,(n-(2m-3))\,{}^{n}C_{2m-3}+(1+n-(2m-2))\,{}^{n}C_{2m-2}+a_{n+1}\,{}^{n}C_{2m-1}+{}^{n}C_{2m}$$

$$=\frac{(n+1)n....(n+1-(m-1))}{m!}+\frac{(n-1)\,(n-2).....(n-(m-1))}{(m-1)!}\,(a_{n+1}\,{}^{n}C_{1}+{}^{n}C_{2})$$

$$+\frac{(n-3)\,(n-4)...(n-m)}{(m-2)!}\,(a_{n+1}\,{}^{n}C_{3}+{}^{n}C_{4})+\frac{(n-5)\,(n-6)....(n-(m+1))}{(m-3)!}\,(a_{n+1}\,{}^{n}C_{5}+{}^{n}C_{6})+....$$

$$+\frac{(n-(2m-2k-1))\,(n-(2m-2k))\,.....(n-(2m-k-2))}{k!}\,(a_{n+1}\,{}^{n}C_{2m-2k-1}+{}^{n}C_{2m-2k})+..$$

$$+(n-(2m-3))\,)\,(a_{n+1}\,{}^{n}C_{2m-3}+{}^{n}C_{2m-2})+a_{n+1}\,{}^{n}C_{2m-1}+{}^{n}C_{2m}$$

$$=\frac{(n+1)n...(n+1-(m-1))}{m!}+\frac{(n-1)\,(n-2)...(n-(m-1))}{(m-1)!}\,{}^{n+1}C_{2}+\frac{(n-3)\,(n-4)....(n-m)}{(m-2)!}\,{}^{n+1}C_{4}+...$$

$$+\frac{(n-(2m-2k-1))\,(n-(2m-2k))....(n-(2m-k-2))}{k!}\,{}^{n+1}C_{2m-2k}+...(n-(2m-3))\,{}^{n+1}C_{2m-2}+{}^{n+1}C_{2m}.$$

Desgleichen ist

$$[n+1]_{2m+1} = [n]_{2m-1} + a_{n+1}[n]_{2m} + [n]_{2m+1}$$

$$= \frac{(n-1)\ (n-2)\ \dots\ (n-(m-1))}{(m-1)!}\overset{n}{C}_1 + \frac{(n-3)\ (n-4)\ \dots\ (n-m)}{(m-2)!}\overset{n}{C}_3 + \frac{(n-5)\ (n-6)\ \dots\ (n-(m+1))}{(m-3)!}\overset{n}{C}_5 + \dots$$

$$+ \frac{(n-(2m-2k+1))\ (n-(2m-2k+2))\ \dots\ (n-(2m-k-1))}{(k-1)!}\overset{n}{C}_{2m+1-2k} + \dots + (n-(2m-3))\overset{n}{C}_{2m-3} + \overset{n}{C}_{2m-1}$$

$$+ a_{n+1}\cdot\frac{n(n-1)\dots(n-(m-1))}{m!} + a_{n+1}\cdot\frac{(n-2)\ (n-3)\dots(n-m)}{(m-1)!}\overset{n}{C}_2 + a_{n+1}\cdot\frac{(n-4)\ (n-5)\dots(n-(m+1))}{(m-2)!}\overset{n}{C}_4 + \dots$$

$$+ a_{n+1}\cdot\frac{(n-(2m-2k))\ (n-(2m-2k+1))\dots(n-(2m-k-1))}{k!}\overset{n}{C}_{2m-2k} + \dots + a_{n+1}(n-(2m-2))\overset{n}{C}_{2m-2} + a_{n+1}\overset{n}{C}_{2m}$$

$$+ \frac{(n-1)\ (n-2)\dots(n-m)}{m!}\overset{n}{C}_1 + \frac{(n-3)\ (n-4)\dots(n-(m+1))}{(m-1)!}\overset{n}{C}_3 + \frac{(n-5)\ (n-6)\dots(n-(m+2))}{(n-2)!}\overset{n}{C}_5 + \dots$$

$$+ \frac{(n-(2m-2k+1))\ (n-(2m-2k+2))\dots(n-(2m-k))}{k!}\overset{n}{C}_{2m+1-2k} + \dots + (n-(2m-1))\overset{n}{C}_{2m-1} + \overset{n}{C}_{2m+1}$$

$$= a_{n+1}\frac{n(n-1)\dots(n-(m-1))}{m!} + \frac{(n-1)\ (n-2)\dots(n-(m-1))}{(m-1)!}\left(1+\frac{n-m}{m}\right)\overset{n}{C}_1$$

$$+ a_{n+1}\frac{(n-2)\ (n-3)\dots(n-m)}{(m-1)!}\overset{n}{C}_2 + \frac{(n-3)\ (n-4)\dots(n-m)}{(m-2)!}\left(1+\frac{n-(m+1)}{m-1}\right)\overset{n}{C}_3$$

$$+ a_{n+1}\frac{(n-4)\ (n-5)\dots(n-(m+1))}{(m-2)!}\overset{n}{C}_4 + \frac{(n-5)\ (n-6)\dots(n-(m+1))}{(m-3)!}\left(1+\frac{n-(m+2)}{m-2}\right)\overset{n}{C}_5$$

$$+ \quad .$$

$$+ a_{n+1} \cdot \frac{(n-(2m-2k))\,(n-(2m-2k+1))\ldots(n-(2m-k-1))}{k!}\,{}^{n}C_{2m-2k}$$

$$+ \frac{(n-(2m-2k+1))\,(n-(2m-2k+2))\ldots.(n-(2m-k-1))}{(k-1)!}\,(1+\frac{n-(2m-k)}{k})\,{}^{n}C_{2m+1-2k}$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+ a_{n+1}(n-(2m-2))\,{}^{n}C_{2m-2} + (1+n-(2m-1))\,{}^{n}C_{2m-1} + a_{n+1}\,{}^{n}C_{2m} + {}^{n}C_{2m+1}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-(m-1))}{m!}\,(a_{n+1}+{}^{n}C_{1}) + \frac{(n-2)\,(n-3)\ldots.(n-m)}{(m-1)!}\,(a_{n+1}\,{}^{n}C_{2}+{}^{n}C_{3})$$

$$+ \frac{(n-4)\,(n-5)\ldots(n-(m+1))}{(m-2)!}\,(a_{n+1}\,{}^{n}C_{4}+{}^{n}C_{5}) + \frac{(n-6)\,(n-7)\ldots.(n-(m+2))}{(m-3)!}\,(a_{n+1}\,{}^{n}C_{6}+{}^{n}C_{7})$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+ \frac{(n-(2m-2k))\,(n-(2m-2k+1))\ldots(n-(2m-k-1))}{k!}\,(a_{n+1}\,{}^{n}C_{2m-2k}+{}^{n}C_{2m+1-2k})$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+(n+1-(2m-1))\,(a_{n+1}{}^{n}C_{2m-2}+{}^{n}C_{2m-1})+a_{n+1}{}^{n}C_{2m}+{}^{n}C_{2m+1}$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-(m-1))^{n+1}}{m!}C_1+\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-m)^{n+1}}{(m-1)!}C_2+\frac{(n-4)(n-5)\ldots(n-(m+1))^{n+1}}{(m-2)!}C_3$$

$$+\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$+\frac{(n-(2m-2k))\,(n-(2m-2k+1))\ldots\ldots(n-(2m-k-1))^{n+1}}{k!}C_{2m+1-2k}+\ldots\ldots$$

$$+(n+1-(2m-1))\,{}^{n+1}C_{2m-1}+{}^{n+1}C_{2m+1}.$$

Hieraus ersieht man nun, dass das oben angenommene Bildungsgesetz der Coefficienten auch für $n+1$ gültig ist; denn wenn man in den für $[n]_{2m}$ und $[n]_{2m+1}$ aufgestellten Ausdrücken $n+1$ statt n setzt, so gehen dieselben in die so eben für $[n+1]_{2m}$ und $[n+1]_{2m+1}$ entwickelten über.

Wir wenden uns jetzt zu dem andern Theile der Untersuchung

nämlich zur Bestimmung der verschiedenen $\overset{n}{C}$ aus den Coefficienten der Gleichung vom $2n$ten Grade; wollen aber fortan diese Coefficienten mit A_1, A_2, A_3, ... A_{n-2}, A_{n-1} und A_n bezeichnen. — Durch successive Elimination erhalten wir aus den oben aufgestellten Gleichungen:

$$\overset{n}{C}_1 = A_1,$$

$$\overset{n}{C}_2 = A_2 - n,$$

$$\overset{n}{C}_3 = A_3 - (n-1)A_1,$$

$$\overset{n}{C}_4 = A_4 - (n-2)C_2 - \frac{n(n-1)}{1.2} = A_4 - (n-2)A_2 + \frac{n(n-3)}{1.2},$$

$$\overset{n}{C}_5 = A_5 - (n-3)C_3 - \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}C_1 = A_5 - (n-3)A_3 + \frac{(n-1)(n-4)}{1.2}A_1,$$

$$\overset{n}{C}_6 = A_6 - (n-4)A_4 + \frac{(n-2)(n-5)}{1.2}A_2 - \frac{n(n-4)(n-5)}{3!},$$

$$\overset{n}{C}_7 = A_7 - (n-5)A_5 + \frac{(n-3)(n-6)}{1.2}A_3 - \frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{3!}A_1,$$

$$\overset{n}{C}_8 = A_8 - (n-6)A_6 + \frac{(n-4)(n-7)}{1.2}A_4 - \frac{(n-2)(n-6)(n-7)}{3!}A_2 + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4!},$$

$$\overset{n}{C}_9 = A_9 - (n-7)A_7 + \frac{(n-5)(n-8)}{2!}A_5 - \frac{(n-3)(n-7)(n-8)}{3!}A_3 + \frac{(n-1)(n-6)(n-7)(n-8)}{4!}A_1,$$

$$\overset{n}{C}_{10} = A_{10} - (n-8)A_8 + \frac{(n-6)(n-9)}{2!}A_6 - \frac{(n-4)(n-8)(n-9)}{3!}A_4 + \frac{(n-2)(n-7)(n-8)(n-9)}{4!}A_2 - \frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{5!}.$$

Das Gesetz, nach welchem man die auf einander folgenden $\overset{n}{C}$ aus den Coefficienten A zu bilden hat, liegt deutlich zu Tage, und man schliesst hieraus, dass allgemein sein werde:

Digitized by Google

$$\overset{n}{C}_{2m} = A_{2m} - (n-(2m-2))A_{2m-2} + \frac{(n-(2m-4))\,(n-(2m-1))}{2!}A_{2m-4}$$
$$- \frac{(n-(2m-6))\,(n-(2m-2))\,(n-(2m-1))}{3!}A_{2m-6} + \frac{(n-(2m-8))\,(n-(2m-3))\,(n-(2m-2))\,(n-(2m-1))}{4!}A_{2m-8}$$
$$+ \ldots + (-1)^k \frac{(n-(2m-2k))\,(n-(2m-k+1))\,(n-(2m-k+2))\ldots(n-(2m-1))}{k!}A_{2m-2k} + \ldots$$

und

$$\overset{n}{C}_{2m+1} = A_{2m+1} - (n-(2m-1))A_{2m-1} + \frac{(n-(2m-3))\,(n-2m)}{2!}A_{2m-3} - \frac{(n-(2m-5))\,(n-2m+1)\,(n-2m)}{3!}A_{2m-5} + \ldots$$
$$+ (-1)^k \frac{(n-(2m+1-2k))\,(n-(2m-k+2))\,(n-(2m-k+3))\ldots(n-2m+1)\,(n-2m)}{k!}A_{2m+1-2k} + \ldots$$

Wir wollen nun wieder zeigen, dass, wenn diese Relationen für alle $\overset{n}{C}$ von $\overset{n}{C}_1$ bis $\overset{n}{C}_{2m}$ und $\overset{n}{C}_{2m+1}$ gelten, sie auch für C_{2m+2} und C_{2m+3} gültig sind.

Es ist aber nach dem Obigen

$$\overset{n}{C}_{2m+2} = A_{2m+2} - (n-2m)\overset{n}{C}_{2m} - \frac{n-(2m-2)}{2!}(n-(2m-1))\overset{n}{C}_{2m-2} - \frac{(n-(2m-4))(n-(2m-3))(n-(2m-2))}{3!}\overset{n}{C}_{2m-4}$$

$$- \frac{(n-(2m-6))(n-(2m-5))(n-(2m-4))(n-(2m-3))}{4!}\overset{n}{C}_{2m-6} - \ldots\ldots$$

$$- \frac{(n-(2m+2-2k))(n-(2m+1-2k))(n-(2m-2k))\ldots(n-(2m-k+1))}{k!}\overset{n}{C}_{2m+2-2k} + \ldots$$

$$- \frac{(n-6)(n-7)\ldots(n-(m+3))}{(m-2)!}\overset{n}{C}_4 - \frac{(n-4)(n-5)\ldots(n-(m+2))}{(m-1)!}\overset{n}{C}_4$$

$$- \frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-(m+1))}{m!}\overset{n}{C}_2 - \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}{(m+1)!}.$$

Substituirt man hierin für die verschiedenen ^{n}C ihre Werthe, so ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
{}^{n}C_{2m+2} = {} & A_{2m+2} - (n-2m)\,[A_{2m} - (n-(2m-2))\,A_{2m-2} + \frac{(n-(2m-4))\,(n-(2m-1))}{2!}\,A_{2m-4} \\
& - \frac{(n-(2m-6))\,(n-(2m-2))\,(n-(2m-1))}{3!}\,A_{2m-6} + \ldots\ldots \\
& + (-1)^{k-1}\frac{(n-(2m+2-2k))\,(n-(2m+2-k))\ldots(n-(2m-1))}{(k-1)!}\,A_{2m+2-2k} \\
& + \ldots\ldots - \\
& - \frac{(n-(2m-2))\,(n-(2m-1))}{2!}\,[A_{2m-2} - (n-(2m-4))\,A_{2m-4} + \frac{(n-(2m-6))\,(n-(2m-3))}{2!}\,A_{2m-6} + \ldots \\
& + (-1)^{k-2}\frac{(n-(2m+2-2k))\,(n-(2m+2-(k+1)))\ldots(n-(2m-3))}{(k-2)!}\,A_{2m+2-2k} \\
& + \ldots\ldots \\
& - \frac{(n-(2m-4))\,(n-(2m-3))\,(n-(2m-2))}{3!}\,[A_{2m-4} - (n-(2m-6))\,A_{2m-6} + \frac{(n-(2m-8))\,(n-(2m-5))}{2!}\,A_{2m-8} + \ldots \\
& + (-1)^{k-3}\frac{(n-(2m+2-2k))\,(n-(2m+2-(k+2)))\ldots(n-(2m-5))}{(k-3)!}\,A_{2m+2-2k} \\
& + \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

u. s. w.

Setzt man nun der Kürze wegen $n-2(m+1)=p$, so erhält man für das allgemeine Glied in C^{n}_{2m+2} den Ausdruck:

$$(-1)^k A_{2(m+1)-2k}(p+2k)\left[\frac{(p+k)(p+k-1)\ldots(p+3)}{(k-1)!}\cdot\frac{p+2}{1}-\frac{(p+k+1)(p+k)\ldots(p+5)}{(k-2)!}\cdot\frac{(p+4)(p+3)}{2!}\right.$$
$$+\frac{(p+k+2)(p+k+1)\ldots(p+7)}{(k-3)!}\cdot\frac{(p+6)(p+5)(p+4)}{3!}+\ldots\ldots$$
$$+(-1)^{k-4}\frac{(p+2k-4)(p+2k-5)}{4!}\cdot\frac{(p+2k-6)(p+2k-7)\ldots\ldots(p+k-2)}{(k-3)!}$$
$$+(-1)^{k-3}\frac{(p+2k-3)}{2!}\cdot\frac{(p+2k-4)(p+2k-5)\ldots\ldots(p+k-1)}{(k-2)!}$$
$$+(-1)^{k-2}\frac{(p+2k-2)(p+2k-3)\ldots\ldots\ldots(p+k)}{(k-1)!}$$
$$\left.+(-1)^{k-1}\frac{(p+2k-1)(p+2k-2)\ldots\ldots\ldots(p+k+1)}{k!}\right].$$

Zieht man die beiden letzten Glieder in der Klammer zusammen, so erhält man für deren Summe den Ausdruck

$$(-1)^{k-2}\frac{(p+2k-2)\,(p+2k-3)\ldots.(p+k+2)\,(p+k+1)}{(k-2)!}\cdot\frac{p+k-1}{k};$$

fügt man dazu den drittletzten, so wird die Summe

$$(-1)^{k-3}\frac{(p+2k-3)\,(p+2k-4)\ldots..(p+k+2)\,(p+k+1)}{(k-2)!}$$
$$\times\,(p+k-1)\,(\frac{p+k}{2}-\frac{p+2k-2}{k})$$
$$=(-1)^{k-3}\frac{(p+2k-3)\,(p+2k-4)\ldots(p+k+2)\,(p+k+1)}{2!\,(k-2)!}$$
$$\times\frac{(p+k-1)\,(p+k-2)}{k};$$

hierzu das vierte Glied addirt, giebt:

$$(-1)^{k-4}\frac{(p+2k-4)\,(p+2k-5)\ldots..(p+k+1)}{2!\,(k-3)!}$$
$$\times(p+k-1)\,(p+k-2)\,(\frac{p+k}{3}-\frac{p+2k-3}{k})$$
$$=(-1)^{k-4}\frac{(p+2k-4)\,(p+2k-5)\ldots(p+k+1)}{3!\,(k-3)!}$$
$$\times(p+k-1)\,(p+k-2)\,(p+k-3);$$

und mit Hinzunahme des fünften Gliedes bekommt man

$$(-1)^{k-5}\frac{(p+2k-5)\,(p+2k-6)\ldots..(p+k+1)}{3!\,(k-4)!}$$
$$\times(p+k-1)\,(p+k-2)\,(p+k-3)\,(\frac{p+k}{3}-\frac{p+2k-4}{k})$$
$$=(-1)^{k-5}\frac{(p+2k-5)\,(p+2k-6)\ldots(p+k+1)}{4!\,(k-5)!}$$
$$\times(p+k-1)\,(p+k-2)\,(p+k-3)\,(p+k-4).$$

Man schliesst aus diesen Ergebnissen, dass man für die Summe der g letzten Glieder den Ausdruck

$$(-1)^{k-g}\frac{(p+2k-g)\,(p+2k-(g+1))\ldots..(p+k+1)}{(g-1)!\,(k-g)!}$$
$$\times(p+k-1)\,(p+k-2)\ldots..(p+k-(g-1))$$

erhalten werde. Nimmt man hiezu das vorhergehende, das $(g+1)$te Glied vom Ende, nämlich das Glied

Digitized by Google

$$(-1)^{k-(g+1)} \frac{(p+2k-(g+1))\,(p+2k-(g+2))\ldots(p+k+1)}{g!\,(k-g)!}$$

so ergiebt sich für die Summe der $g+1$ letzten Glieder

$$(-1)^{k-(g+1)} \frac{(p+2k-(g+1))\,(p+2k-(g+2))\ldots(p+k+1)}{(g-1)!\,(k-g)!}$$

$$\times (p+k-1)\,(p+k-2)\ldots(p+k-(g-1))\,\left(\frac{p+k}{g}-\frac{p+2k-g}{k}\right)$$

$$=(-1)^{k-(g+1)} \frac{(p+2k-(g+1))\,(p+2k-(g+2))\ldots(p+k+1)}{g!\,(k-(g+1))!}$$

$$\times p+k-1)\,(p+k-2)\ldots(p+k-g),$$

und dieser Ausdruck geht aus dem vorhergehenden hervor, wenn

man darin $g+1$ statt g setzt. Der fragliche Ausdruck gilt also auch für $g+1$, wenn er für g gilt; nun gilt aber derselbe für 1, 2, 3, 4, 5, also auch für 6, und daher nach einer bekannten Schlussfolge allgemein.

Das zweite Glied vom Anfange ist offenbar das $(k-1)$te vom Ende, und wenn man also $g=k-1$ setzt, so erhält man für die Summe aller Glieder, mit Ausschluss des ersten, den Werth

$$(-1)^1 \frac{p+k+1}{(k-2)!} \cdot \frac{(p+k-1)\,(p+k-2)\ldots.(p+3)\,(p+2)}{k}.$$

Nimmt man dazu das erste Glied, so ergiebt sich für die Gesammtsumme der Glieder in der Klammer der Ausdruck

$$\frac{(p+k-1)\,(p+k-2)\ldots.(p+2)}{(k-2)!}\left(\frac{p+k}{k-1}-\frac{p+k+1}{k}\right)$$

$$=\frac{(p+k-1)\,(p+k-2)\ldots.(p+2)\,(p+1)}{k!},$$

und hiernach, wenn man wieder für p seinen Werth $p=n-2(m+1)$ setzt, für das allgemeine Glied in $\overset{n}{C}_{2m+2}$ der Werth

Digitized by Google

$$(-1)^k A_{2m+2-2k} \frac{(n-(2m+2-2k))\cdot(n-(2m+2-(k-1)))\,(n-(2m+2-(k-2)))\cdots(n-(2m+2-1))}{k!}.$$

Dieser Ausdruck ist aber in $m+1$ eben so gebildet, wie das allgemeine Glied des Ausdruckes für $\overset{n}{C}_{2m}$ in m gebildet ist, und somit ist also das für $\overset{n}{C}_{2m}$ als gültig angenommene Bildungsgesetz auch für $\overset{n}{C}_{2m+2}$ nachgewiesen. Ganz ebenso zeigt sich, dass das für $\overset{n}{C}_{2m+1}$ angenommene Gesetz auch für $\overset{n}{C}_{2m+3}$ gilt. Wir bemerken noch,

Digitized by Google

dass man die Ausdrücke für $\overset{n}{C}_{2m}$ und $\overset{n}{C}_{2m+1}$ in folgenden zusammenfassen kann:

$$\overset{n}{C}_m = A_m - (n-(m-2))A_{m-2} + (n-(m-4))\,\frac{(n-(m-1))}{2!}\,A_{m-4}$$
$$- (n-(m-6))\,.\,\frac{(n-(m-1))\,(n-(m-2))}{3!}A_{m-6} + \ldots$$
$$+ (-1)^k(n-(m-2k))$$
$$\times\frac{(n-(m-1))\,(n-(m-2))\ldots(n-(m-(k-1)))}{k!}A_{m-2k} + \ldots,$$

wobei man nur zu beachten hat, dass $A_0 = 1$ und jedes A mit negativem Index $= 0$ zu setzen ist.

Setzt man hierin nach einander $m = 1, 2, 3 \ldots 9$, so erhält man die von Euler gegebenen, im Archiv. B. II. S. 224 mitgetheilten, Werthe der Coefficienten der neun ersten Glieder der Gleichung für die Hülfsgrösse u.

Nach der Theorie der Gleichungen hat man nun zur Bestimmung der Hülfsgrösse u die Gleichung:

$$u^n - \overset{n}{C}_1 u^{n-1} + \overset{n}{C}_2 u^{n-2} - \overset{n}{C}_3 u^{n-3} + \ldots + (-1)^k \overset{n}{C}_k u^{n-k} \pm \ldots\ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1}\overset{n}{C}_{n-1}u + (-1)^n \overset{n}{C}_n = 0.$$

XXXVI.

Ueber die Entwickelung von $e = \lim (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Von

Herrn T. Wittstein

Lehrer am Lyceum zu Hannover.

In dem ersten Theile (2. Heft S. 204. ff.) dieses Archivs ist von dem Herrn Professor Grunert einer Einwendung Erwähnung geschehen, welche Liouville gegen den von Cauchy gegebenen Beweis des Satzes, dass

$$\lim (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots.$$

Digitized by Google

sei, während x gegen 0 convergirt, gemacht hat. Es wird dort dieselbe Einwendung auf den von Moigno gegebenen Beweis desselben Satzes ausgedehnt; indessen so sehr wir auch bereit sind, die von dem Herrn Herausgeber des Archivs bei dieser Gelegenheit gemachte Bemerkung: „Auf jeden Fall müsste doch bewiesen werden, dass $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ sich wirklich einer bestimmten Grenze nähert, wenn x sich der Null nähert, ... auch fürs Erste ganz abgesehen von der Grösse dieses Werths," aus voller Ueberzeugung zu unterschreiben, so scheint es uns dennoch, es lasse sich die von Moigno gegebene Darstellung — dagegen nicht die von Cauchy in seinen Leçons vorgetragene — noch in einer Weise auffassen, in welcher sie von allem Tadel freizusprechen ist. Wir wollen versuchen unsere Meinung hier aus einander zu setzen.

Moigno beweist nämlich, nach unserem Dafürhalten, auf S. 3 bis 5 seiner Leçons nichts weiter, als dass der Ausdruck $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ für $x=0$ sich einer bestimmten Grenze nähert, welche zwischen den ganzen Zahlen 2 und 3 liegt. Der Gang dieses Beweises, den wir hier etwas ausführlicher darstellen wollen, ist folgender.

Es sei $\frac{1}{x}=m$, und m zunächst eine positive ganze Zahl, so hat man nach dem binomischen Lehrsatze

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=(1+\frac{1}{m})^m=1+\frac{1}{1}+\frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{1}{m^2}+\frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{m-2}{3}\frac{1}{m^3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{m-2}{3}\ldots\frac{m-(m-1)}{m}\frac{1}{m^m},$$

oder indem man die Divisionen ausführt

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}(1-\frac{1}{m})+\frac{1}{1.2.3}(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})+\ldots$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots m}(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})\ldots(1-\frac{m-1}{m})\ldots \quad (1)$$

Wenn x sehr klein oder m sehr gross wird, so sind alle Glieder dieser Reihe positiv, folglich hat man für $x=0$, indem nur die beiden ersten Glieder der Reihe beibehalten werden,

$$\lim (1+x)^{\frac{1}{x}}>2.$$

Vergleicht man aber jene Reihe (1) mit der folgenden

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots\frac{1}{2^m}\ldots\ldots \quad (2)$$

so findet sich für sehr kleine Werthe von x oder sehr grosse Werthe von m, dass die successiven Glieder von (1), von dem dritten Gliede beginnend, sämmtlich kleiner sind als die correspondirenden Glieder der Reihe (2); die letztere aber liefert für $m=\infty$ die Summe 3, folglich hat man

$$\lim (1+x)^{\frac{1}{x}}<3.$$

Ist m eine gebrochene oder negative Zahl, so wird der Beweis auf bekannte Weise auf den vorigen zurückgeführt, was hier, als unwesentlich für den gegenwärtigen Zweck, übergangen werden mag.

Hiemit ist also dargethan, dass der Ausdruck $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ für $x=0$ sich wirklich einer bestimmten Grenze nähert, welche zwischen den ganzen Zahlen 2 und 3 liegt, und zu deren angenäherter Berechnung man nun sofort den Ausdruck selbst gebrauchen kann. Diese Grenze wird mit e bezeichnet, und es ist wichtig zu bemerken, dass hienach e durch die Gleichung

$$e=\lim\,(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

für $x=0$, oder durch die Gleichung

$$e=\lim\left\{1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\ldots\frac{1}{1.2\ldots m}\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\right\}$$

für $m=\infty$, definirt wird.

Um nun aber e durch eine von dem Zeichen „lim" freie Formel darzustellen, bedarf es noch eines Schrittes, der sich in der That in dem Werke von Moigno gar nicht findet; eine solche Formel ist aber auch unwesentlich und mindestens zur Entwickelung der Lehren der Differentialrechnung, wie sich bei Moigno zeigt, unnöthig. Verlangt man sie indessen dennoch, so lässt sie sich leicht aus den Leçons von Moigno herauslesen. Es wird dort nämlich durch den Taylorschen Lehrsatz die Entwickelung von e^x gegeben; es wird bewiesen, dass dieselbe für alle Werthe von x convergent bleibt; setzt man also in ihr $x=1$, so hat man die gewünschte Formel.

XXXVII.

Ueber den Satz vom Parallelogramme der Kräfte.

Von

Herrn Doctor Dippe

Oberlehrer am Gymn. Frider. zu Schwerin.

In dem Beweise, welchen Poisson (Traité de Mécan. I. p. 43—51) von dem Parallelogramme der Kräfte giebt, kommt die Behauptung vor, dass

$$\varphi(x) = 2\cos ax$$

die einzige Function sei, welche der Bedingung

$$\varphi(x)\ \varphi(z) = \varphi(x+z) + \varphi(x-z)$$

Genüge leiste. Da jedoch

$$2\cos ax = e^{ax\sqrt{-1}} + e^{-ax\sqrt{-1}}$$

ist, so liegt der Schluss nahe, dass auch die reelle Function

$$\varphi(x) = e^{ax} + e^{-ax}$$

jene Gleichung befriedigen müsse, was in der That der Fall ist.

Dieser Umstand macht eine Abänderung des von Poisson geführten Beweises nöthig. Vielleicht findet der folgende Versuch Beistimmung.

§. 1.

Von den Kräften, die in einer Ebene auf einen Punkt wirken, wird Folgendes angenommen:

1) Wenn auf einen Punkt zwei gleiche Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen wirken, so ist ihre Resultirende Null.

2) Wenn zwei Kräfte P, Q nach derselben Richtung wirken, so ist ihre Resultirende $P+Q$, und wirkt nach derselben Richtung.

3) Wenn zwei Kräfte P, Q nach entgegengesetzten Richtungen wirken, und $P > Q$ ist, so ist ihre Resultirende $P-Q$, und wirkt nach der Richtung von P.

4) Wenn zwei gleiche Kräfte P, P beliebig gerichtet sind, so ist ihre Resultirende nicht grösser als $P+P$, und nicht kleiner als $P-P$.

5) Wenn die Richtungen von zwei gleichen Kräften mit einander einen Winkel $2x < 180°$ bilden, so halbirt die Richtung der Resultirenden diesen Winkel.

6) Wenn die Richtungen von drei gleichen Kräften Winkel von 120° mit einander bilden, so ist die Resultirende Null; auch ist jede Kraft der Resultirenden der beiden andern gleich, hat aber die entgegengesetzte Richtung.

§. 2.

Wenn zwei gleiche Kräfte einen Winkel von 120° mit einander bilden, so stellt die Diagonale ihres Parallelogrammes die Resultirende nach Grösse und Richtung dar.

Der Beweis ergiebt sich leicht aus §. 1. Nr. 6.

§. 3.

Wenn zwei gleiche Kräfte P, P einen beliebigen Winkel $2x < 180°$ bilden, so stellt die Diagonale ihres Parallelogrammes die Resultirende nach Grösse und Richtung dar.

Digitized by Google

Beweis. Die Richtung der Resultirenden R bildet mit der Richtung jeder Kraft P den Winkel x (§. 1. Nr. 5.), und ihre Intensität kann nur abhängig sein von P und x; folglich ist

$$R = F(P, x).$$

Aendert man die Einheit, welche den Grössen P, R zu Grunde liegt, und sind die neuen Werthe derselben Kräfte P_1, R_1, so muss

$$P : P_1 = R : R_1$$

und zugleich

$$R_1 = F(P_1, x)$$

sein, woraus sich ergiebt

$$P : P_1 = F(P, x) : F(P_1, x)$$

für jeden Werth von x. Diess fordert, dass $F(P, x) = P \cdot f(x)$ sei, oder wenn man $f(x) = 2\varphi(x)$ setzt,

$$R = 2P \cdot \varphi(x).$$

Denkt man sich nun jedes P als Resultirende von zwei gleichen Kräften Q, Q, deren Richtungen mit der Richtung von P den Winkel z bilden, so dass $P = 2Q\varphi(z)$, mithin

$$R = 4Q\varphi(x)\ \varphi(z)$$

wird: dann kann man die vier Kräfte Q paarweise zusammen nehmen. In dem äussern Paare bildet jede Kraft mit der Richtung von R den Winkel $x + z$, und seine Resultirende ist

$$R_1 = 2Q\varphi(x + z).$$

In dem innern Paare bildet jede Kraft mit der Richtung von R den Winkel $x - z$, und seine Resultirende ist

$$R_2 = 2Q\varphi(x - z).$$

Endlich ist die Resultirende der vier Kräfte Q der Resultirenden der zwei Kräfte P gleich, also $R = R_1 + R_2$, mithin

$$4Q\varphi(x)\ \varphi(z) = 2Q\varphi(x + z) + 2Q\varphi(x - z).$$

Daher muss $\varphi(x)$ für jeden Werth $x < 90°$ die folgende Gleichung befriedigen:

$$(1) \ldots 2\varphi(x)\ \varphi(z) = \varphi(x + z) + \varphi(x - z).$$

Nun kann R nicht grösser sein als $P + P = 2P$, und nicht kleiner als $P - P = 0$, und zugleich ist

$$R = 2P\varphi(x),$$

folglich muss $\varphi(x)$ immer zwischen Null und Eins liegen. Daher

giebt es für x einen zwischen Null und 90° liegenden Winkel w, dessen Cosinus dem $\varphi(x)$ gleich ist, also

$$\varphi(x) = \cos w.$$

Nun giebt die Gleichung (1) für $z = 0$

$$2\varphi(x)\ \varphi(0) = 2\varphi(x), \text{ also } \varphi(0) = 1 = \cos 0.$$

Mithin ist $w = x$ für $x = 0$.

Ferner ist für $2x = 120°$ nach §. 3.

$$R = P, \text{ und auch } R = 2P\ \varphi(60°),$$

folglich $\varphi(60°) = \frac{1}{2} = \cos 60°$, also $w = x$ auch für $x = 60°$.

Setzt man ferner $x + z = a$, $x - z = 0$, so giebt die Gleichung (1)

$$\varphi(\tfrac{a}{2})^2 = \frac{\varphi(0) + \varphi(a)}{2}$$

und

$$(2) \ldots \varphi(\tfrac{a}{2}) = \sqrt{\frac{\varphi(0) + \varphi(a)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \varphi(a)}{2}},$$

wo nur das positive Vorzeichen zu nehmen ist, weil $\varphi(x)$ immer positiv ist. Wenn nun $\varphi(a) = \cos a$ ist, so ist auch nach (2)

$$\varphi(\tfrac{a}{2}) = \cos \tfrac{a}{2},$$

und

$$\varphi(\tfrac{a}{4}) = \cos \tfrac{a}{4},$$

wie auch

$$\varphi(\tfrac{a}{2^n}) = \cos \tfrac{a}{2^n}.$$

Aus Gleichung (1) erhält man $\varphi(x + z) = 2\varphi(x)\ \varphi(z) - \varphi(x - z)$; wäre daher für die drei Werthe x, z, $x - z$

$$\varphi(x) = \cos x,\ \varphi(z) = \cos z,\ \varphi(x - z) = \cos (x - z);$$

so würde auch $\varphi(x + z) = 2\cos x \cos z - \cos (x - z) = \cos (x + z)$ sein. Man setze nun $\frac{a}{2^n} = \beta$, mithin $\frac{a}{2^{n-1}} = 2\beta$, und

$$x = 2\beta,\ z = \beta,\ x - z = \beta, \text{ also } x + z = 3\beta,$$

ferner

$$x = 3\beta,\ z = \beta,\ x - z = 2\beta, \text{ also } x + z = 4\beta,$$

so wie

$$x = 4\beta,\ z = \beta,\ x - z = 3\beta, \text{ also } x + z = 5\beta,$$

und allgemein

Digitized by Google

$x = (m-1)\beta$, $z = \beta$, $x - z = (m-2)\beta$, also $x + z = m\beta$.

Dann schliesst man, dass $\varphi(m\beta) = \cos m\beta$, oder

$$\varphi(\tfrac{m}{2n}\,\alpha) = \cos\,(\tfrac{m}{2n}\,\alpha)$$

ist, sobald $\varphi(\beta) = \cos\beta$, $\varphi(2\beta) = \cos 2\beta$ ist. Da letzteres gilt, sobald für einen einzigen Werth $\varphi(\alpha) = \cos\alpha$ ist, und da bewiesen ist, dass

$$\varphi(60°) = \cos 60°$$

ist, so gilt allgemein

$$\varphi(\tfrac{m}{2n}\,60°) = \cos\,(\tfrac{m}{2n}\,60°).$$

Der Ausdruck $\frac{m}{2n}\,60°$ kann jedem beliebigen Winkel x gleich werden, folglich ist $\varphi(x) = \cos x$, und

$$R = 2P\cos x.$$

Aber $2P\cos x$ ist Diagonale in dem Parallelogramme, dessen Seiten P, P den Winkel $2x$ einschliessen, mithin der Satz erwiesen.

§. 4.

Wenn zwei beliebige Kräfte einen beliebigen Winkel einschliessen, so stellt die Diagonale ihres Parallelogrammes die Resultirende nach Grösse und Richtung dar.

Der Beweis ganz wie bei Poisson, indem erst ein rechter Winkel angenommen wird, dann ein beliebiger. Der erste Fall wird auf §. 3., der zweite Fall auf den ersten zurückführt.

XXXVIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

1. In einen Kreis ein Rechteck zu beschreiben, dessen eine Seite durch einen gegebenen Punkt geht und einer gegebenen geraden Linie gleich ist.

2. In einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, dessen eine Seite durch einen gegebenen Punkt geht und einer gegebenen ge-

raden Linie gleich ist, und von welchem eine andere Seite einer der Lage nach gegebenen geraden Linie parallel ist.

3. Ein gleichseitiges Dreieck zu construiren, dessen Spitzen auf drei gegebenen concentrischen Kreislinien liegen.

4. Eine gerade Linie AB von bestimmter Länge sei in dem Punkte C auf beliebige Weise in zwei Theile AC und BC getheilt, und durch den Punkt B sei auf AB ein Perpendikel von unbestimmter Länge errichtet. Man soll in diesem Perpendikel einen Punkt D so bestimmen, dass, wenn man die Linie AD zieht, diese Linie der Summe der beiden Linien BC und BD gleich ist.

5. Wenn in einen Kreis ein gleichseitiges Dreieck ABC beschrieben ist, und von der Spitze A aus eine beliebige die Seite BC in D, die Kreislinie zum zweiten Male in E schneidende gerade Linie AE gezogen ist, so ist immer die Summe der Linien BE und CE der Linie AE gleich.

6. In der Ebene eines Vierecks $ABCD$ einen Punkt O von solcher Lage anzugeben, dass die vier Produkte $OA \cdot BC \cdot CD$, $OB \cdot AD \cdot CD$, $OC \cdot AB \cdot AD$, $OD \cdot AB \cdot BC$ einander gleich sind.

7. Die Seite des in einen Kreis, dessen Halbmesser als Einheit angenommen wird, beschriebenen regulären Zehnecks in einen Kettenbruch entwickelt darzustellen.

8. Wenn in einer Ebene zwei Linien AB und CD der Lage und Grösse nach gegeben sind, und eine Linie MN der Lage nach gegeben ist: in dieser Ebene einen Punkt O so zu bestimmen, dass, wenn man die Linien AO, BO und CO, DO zieht, welche die Linie MN in den Punkten A', B' und C', D' schneiden, die Linien $A'B'$ und $C'D'$ auf der Linie MN in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen.

9. Wenn AB, $A'B'$, $A''B''$ drei einander parallele gerade Linien in derselben Ebene sind, so liegen der Durchschnittspunkt der Linien AA' und BB', der Durchschnittspunkt der Linien AA'' und BB'', der Durchschnittspunkt der Linien $A'A''$ und $B'B''$ jederzeit in derselben geraden Linie.

10. Eine gerade Linie schneide die Seiten AB, AC eines Dreiecks ABC in D, E, die Verlängerung der dritten Seite BC über C hinaus in F. Man soll eine Formel entwickeln, mittelst welcher aus den drei gegebenen Seiten AB, AC, BC des Dreiecks ABC, aus den Linien CE und CF die Linie BD berechnet werden kann.

11. Durch gerade Linien, welche den vier Seiten eines gegebenen Vierecks $ABCD$ parallel und von denselben sämmtlich gleich

Digitized by Google

weit entfernt sind, soll man ein innerhalb des gegebenen Vierecks $ABCD$ liegendes Viereck $A'B'C'D'$ bestimmen, dessen Flächeninhalt zu dem Flächeninhalte des gegebenen Vierecks in einem gegebenen Verhältnisse steht.

12. Wenn man aus einem Punkte A in dem Umfange eines Kreises als Mittelpunkt eine zweit den Umfang des ersten Keises in den Punkten B, C schneidende Kreislinie beschreibt, und dann einen beliebigen Durchmesser dieser letzteren Kreislinie zieht, welcher die gemeinschaftliche Sehne BC beider Kreise in D, die zweite Kreislinie in E, die erste Kreislinie in F schneidet, so ist immmer $AD : AE = AE : AF$.

13. Eine abgestumpfte Pyramide mit zwei einander parallelen Grundflächen durch eine diesen beiden Grundflächen parallele Ebene so zu theilen, dass die beiden Theile in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen.

XXXIX.

Miscellen.

In Nr. 442. der astronomischen Nachrichten hat Herr Th. Clausen das Integral

$$\int \frac{y\,dy}{(y^2+8)\sqrt{y^2-1}},$$

zu welchem Legendre in dem Traité des fonctions elliptiques. Chap. XXVI. Nr. 136. auf einem ziemlich weitläufigen Wege gelangt, auf folgende einfache Weise entwickelt.

Setzt man

$$x = \frac{y-1}{\sqrt{y^2-1}},\quad x' = \sqrt{y^2-1},\quad x'' = \frac{(y-1)^2}{\sqrt{y^2-1}};$$

so wird

$$dx = -\frac{y^3-3y^2+2}{2(y^2-1)^{\frac{3}{2}}}\,dy,$$

$$dx' = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^2-1}},$$

$$dz'' = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{y^4 + 2y^3 - 3y^2 - 4y + 4}{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}}\, dy;$$

und

$$\frac{dz}{1-3z^2} = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{y^2 - 2y - 2}{y^2 - 2y + 4} \cdot \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}},$$

$$\frac{dz'}{z'^2+9} = \tfrac{3}{2} \cdot \frac{y^2}{y^3+8} \cdot \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}},$$

$$\frac{dz''}{z''^2+9} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{y-1}{y+2} \cdot \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Addirt man diese drei Gleichungen, so findet man:

$$\frac{dz}{1-3z^2} + \frac{dz'}{z'^2+9} + \frac{dz}{z''^2+9} = \frac{6ydy}{(y^3+8)\sqrt{y^2-1}};$$

folglich ist:

$$\int \frac{ydy}{(y^3+8)\sqrt{y^2-1}}$$

$$= \frac{1}{12\sqrt{3}} \operatorname{logn} \frac{1+z\sqrt{3}}{1-z\sqrt{3}} + \frac{1}{18} \operatorname{Arctang} \frac{1}{3}z' + \frac{1}{18} \operatorname{Arctang} \frac{1}{3}z'',$$

oder, wenn man für z, z', z'' ihre Werthe substituirt und die Bögen summirt:

$$\int \frac{ydy}{(y^3+8)\sqrt{y^2-1}}$$

$$= \frac{1}{12\sqrt{3}} \operatorname{logn} \frac{\sqrt{y^2+y+1} + \sqrt{y-1}\,.\sqrt{3}}{\sqrt{y^2+y+1} - \sqrt{y-1}\,.\sqrt{3}}$$

$$+ \frac{1}{18} \operatorname{Arctang} \frac{3y(y-1)}{(4-y)\sqrt{y^2-1}}.$$

Druckfehler.

Auf der letzten Seite des 16ten Bogens muss die Pagina 256 statt 356 heissen.

XL.

Ueber die Berechnung der Parallaxen.

Von

dem Herausgeber.

§. 1.

Die Formeln zur Berechnung der Parallaxen sind in jeder Beziehung, natürlich aber vorzüglich für die Astronomie, von so grosser Wichtigkeit, dass es sich wohl der Mühe lohnt, dieselben in dieser Zeitschrift einmal vollständig im Zusammenhange zu entwickeln, wobei ich zugleich beabsichtige, bei dieser Gelegenheit einige, so viel ich weiss, noch nicht bekannte Formeln zur Sprache zu bringen. Auch hoffe ich, dass die Entwickelung sich insbesondere durch ihre Allgemeinheit zu empfehlen geeignet sein wird.

§. 2.

Durch den Mittelpunkt C der Erde, welche wir hier als ein durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstandenes Sphäroid betrachten, und einen beliebigen Punkt O auf ihrer Oberfläche denke man sich zwei beliebige einander parallele rechtwinklige Coordinatensysteme gelegt, und nehme in diesen beiden Systemen, wie man in der analytischen Geometrie bei parallelen Coordinatensystemen bekanntlich immer zu thun pflegt, die positiven Theile jeder zwei gleichnamigen Axen von den entsprechenden Anfangspunkten an nach denselben Seiten hin. Sind x, y, z die Coordinaten eines Weltkörpers in Bezug auf das System, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt C der Erde ist, und x', y', z' die Coordinaten dieses Weltkörpers in Bezug auf das System, dessen Anfangspunkt der Punkt O auf der Oberfläche der Erde ist, in demselben Zeitmomente, so heissen jederzeit x, y, z die wahren, dagegen x', y', z' die scheinbaren Coordinaten dieses Weltkörpers in dem in Rede stehenden Zeitmomente. Sind nun a, b, c die Coordinaten des Punktes O auf der Oberfläche der Erde in Bezug auf das System, dessen Anfangspunkt der Mittel-C der Erde ist, so hat man nach der aus der analytischen Geome-

Digitized by Google

trie bekannten Theorie der Coordinatenverwandlung zwischen den Grössen a, b, c; x, y, z; x', y', z' die folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen:

$$1)\quad x = a + x',\ y = b + y',\ z = c + z'.$$

Jetzt wollen wir uns durch den Mittelpunkt C der Erde noch ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem der XYZ gelegt denken, und wollen zugleich, was offenbar verstattet ist, Folgendes annehmen. Die positiven Theile der Axen der x und X sollen mit einander zusammenfallen. Ferner sollen die positiven Theile der Axen der y und Y so angenommen werden, dass der von denselben eingeschlossene, 180° nicht übersteigende Winkel, welcher durch Θ bezeichnet werden mag, nicht grösser als 90° ist, und dass der positive Theil der Axe der y auf der positiven Seite der Ebene der XY liegt. Endlich sollen die positiven Theile der Axen der z und Z auf einer und derselben Seite der Ebene der xy oder auch der Ebene der XY liegen. Dies vorausgesetzt, hat man, wenn L, M, N die Coordinaten des Punktes O in Bezug auf das System der XYZ bezeichnen, nach den allgemeinen Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} a &= L, \\ b &= M\cos\Theta + N\cos(90^\circ - \Theta), \\ c &= M\cos(90^\circ + \Theta) + N\cos\Theta; \end{aligned}$$

d. i.

$$2)\quad \begin{cases} a = L, \\ b = M\cos\Theta + N\sin\Theta, \\ c = -M\sin\Theta + N\cos\Theta. \end{cases}$$

Folglich ist nach 1)

$$3)\quad \begin{cases} x = L + x', \\ y = M\cos\Theta + N\sin\Theta + y', \\ z = -M\sin\Theta + N\cos\Theta + z'. \end{cases}$$

Nun wollen wir zu polaren Coordinaten übergehen, von denen bekanntlich in der Astronomie vorzugsweise Gebrauch gemacht wird. Zu dem Ende bezeichnen wir der Kürze wegen den in Rede stehenden Weltkörper durch W, die Projectionen der Linien CW und OW auf den Ebenen der xy und $x'y'$ respective durch CP und OP'. Die von CP und OP' mit den positiven Theilen der Axen der x und x' eingeschlossenen Winkel, indem man diese Winkel von den positiven Theilen der Axen der x und x' an durch die von den positiven Theilen der Axen der x und y, und der Axen der x' und y' eingeschlossenen rechten Winkel hindurch immer nach einer Richtung hin von 0 bis 360° zählt, seien λ und λ'. Die 90° nicht übersteigenden Winkel, unter denen die Linien CW und OW gegen die Ebenen der xy und $x'y'$ geneigt sind, indem man diese Winkel als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem die Linien CW und OW auf den positiven oder negativen Seiten der Ebenen der xy und $x'y'$ liegen, seien β und β'.

Bezeichnen nun ϱ und ϱ' die Entfernungen CW und OW des Weltkörpers W von dem Mittelpunkte C der Erde und dem Orte O auf ihrer Oberfläche; so hat man offenbar die folgenden ganz allgemein gültigen Ausdrücke:

$$4)\quad \begin{cases} x = \varrho \cos\lambda \cos\beta, \\ y = \varrho \sin\lambda \cos\beta, \\ z = \varrho \sin\beta \end{cases}$$

und

$$5)\quad \begin{cases} x' = \varrho' \cos\lambda' \cos\beta', \\ y' = \varrho' \sin\lambda' \cos\beta', \\ z' = \varrho' \sin\beta'; \end{cases}$$

und es ist folglich nach 3)

$$6)\quad \begin{cases} \varrho \cos\lambda \cos\beta = L + \varrho' \cos\lambda' \cos\beta', \\ \varrho \sin\lambda \cos\beta = M\cos\Theta + N\sin\Theta + \varrho' \sin\lambda' \cos\beta', \\ \varrho \sin\beta = -M\sin\Theta + N\cos\Theta + \varrho' \sin\beta'. \end{cases}$$

Ist aber CQ die Projection der Linie CO auf der Ebene der XY, und A der von CQ mit dem positiven Theile der Axe der X oder x eingeschlossene Winkel, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der X oder x an durch den von den positiven Theilen der Axen der X und Y eingeschlossenen rechten Winkel hindurch immer nach einer Richtung hin von 0 bis 360° zählt, φ der 90° nicht übersteigende Winkel, unter welchem die Linie CO gegen die Ebene der XY geneigt ist, indem man diesen Winkel als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem die Linie CO auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der XY liegt; so ist auf ganz ähnliche Art wie vorher, wenn wir den Erdhalbmesser $CO = r$ setzen:

$$7)\quad \begin{cases} L = r \cos A \cos\varphi, \\ M = r \sin A \cos\varphi, \\ N = r \sin\varphi; \end{cases}$$

und folglich nach 6)

$$8)\quad \begin{cases} \varrho \cos\lambda \cos\beta = r\cos A\cos\varphi + \varrho' \cos\lambda' \cos\beta', \\ \varrho \sin\lambda \cos\beta = r\sin A\cos\Theta\cos\varphi + r\sin\Theta\sin\varphi \\ \qquad\qquad + \varrho' \sin\lambda' \cos\beta', \\ \varrho \sin\beta = -r\sin A\sin\Theta\cos\varphi + r\cos\Theta\sin\varphi \\ \qquad\qquad + \varrho' \sin\beta'; \end{cases}$$

oder

$$9)\quad \begin{cases} \varrho' \cos\lambda' \cos\beta' = \varrho\cos\lambda\cos\beta - r\cos A\cos\varphi, \\ \varrho' \sin\lambda' \cos\beta' = \varrho\sin\lambda\cos\beta - r\sin A\cos\Theta\cos\varphi \\ \qquad\qquad - r\sin\Theta\sin\varphi, \\ \varrho' \sin\beta' = \varrho\sin\beta + r\sin A\sin\Theta\cos\varphi \\ \qquad\qquad - r\cos\Theta\sin\varphi. \end{cases}$$

Dividirt man die zweite und dritte der Gleichungen 9) durch die erste Gleichung in diesem Systeme, so erhält man

$$10)\begin{cases}\text{tang } \lambda' = \dfrac{\varrho \sin\lambda \cos\beta - r(\sin\Theta \sin\varphi + \cos\Theta \sin A \cos\varphi)}{\varrho\cos\lambda\cos\beta - r\cos A\cos\varphi},\\ \text{tang } \beta' = \dfrac{\cos\lambda'\{\varrho\sin\beta - r(\cos\Theta\sin\varphi - \sin\Theta\sin A\cos\varphi)\}}{\varrho\cos\lambda\cos\beta - r\cos A\cos\varphi};\end{cases}$$

oder, wenn

$$11)\ \sin\pi = \frac{r}{\varrho}$$

gesetzt wird,

$$12)\begin{cases}\text{tang } \lambda' = \dfrac{\sin\lambda\cos\beta - \sin\pi(\sin\Theta\sin\varphi + \cos\Theta\sin A\cos\varphi)}{\cos\lambda\cos\beta - \sin\pi\cos A\cos\varphi},\\ \text{tang } \beta' = \dfrac{\cos\lambda'\{\sin\beta - \sin\pi(\cos\Theta\sin\varphi - \sin\Theta\sin A\cos\varphi)\}}{\cos\lambda\cos\beta - \sin\pi\cos A\cos\varphi}.\end{cases}$$

Auf ganz ähnliche Art erhält man aus den Gleichungen 8)

$$13)\begin{cases}\text{tang } \lambda = \dfrac{\varrho'\sin\lambda'\cos\beta' + r(\sin\Theta\sin\varphi + \cos\Theta\sin A\cos\varphi)}{\varrho'\cos\lambda'\cos\beta' + r\cos A\cos\varphi},\\ \text{tang } \beta = \dfrac{\cos\lambda\{\varrho'\sin\beta' + r(\cos\Theta\sin\varphi - \sin\Theta\sin A\cos\varphi)\}}{\varrho'\cos\lambda'\cos\beta' + r\cos A\cos\varphi};\end{cases}$$

oder, wenn

$$14)\ \sin\pi' = \frac{r}{\varrho'}$$

gesetzt wird,

$$15)\begin{cases}\text{tang } \lambda = \dfrac{\sin\lambda'\cos\beta' + \sin\pi'(\sin\Theta\sin\varphi + \cos\Theta\sin A\cos\varphi)}{\cos\lambda'\cos\beta' + \sin\pi'\cos A\cos\varphi},\\ \text{tang } \beta = \dfrac{\cos\lambda\{\sin\beta' + \sin\pi'(\cos\Theta\sin\varphi - \sin\Theta\sin A\cos\varphi)\}}{\cos\lambda'\cos\beta' + \sin\pi'\cos A\cos\varphi}.\end{cases}$$

Zwischen den Grössen λ, β, ϱ und λ', β', ϱ' hat man nach dem Obigen die Gleichung

$$16)\ r\cos A\cos\varphi = \varrho\cos\lambda\cos\beta - \varrho'\cos\lambda'\cos\beta';$$

und daher zwischen λ, β, π und λ', β', π' die Gleichung:

$$17)\ \cos A\cos\varphi = \frac{\cos\lambda\cos\beta}{\sin\pi} - \frac{\cos\lambda'\cos\beta'}{\sin\pi'}.$$

Auch ergiebt sich aus den Gleichungen 8), wenn man dieselben quadrirt und dann zu einander addirt, leicht

$$18)\ \varrho^2 = r^2 + \varrho'^2 + 2r\varrho'\left\{\begin{array}{r}\cos\lambda'\cos\beta'\cos A\cos\varphi\\ +\sin\lambda'\cos\beta'(\sin\Theta\sin\varphi\\ +\sin A\cos\Theta\cos\varphi)\\ +\sin\beta'(\cos\Theta\sin\varphi\\ -\sin A\sin\Theta\cos\varphi)\end{array}\right\}$$

und auf ganz ähnliche Art ergiebt sich aus den Gleichungen 9)

Digitized by Google

$$19)\quad \varrho'^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \left\{ \begin{array}{l} \cos\lambda\cos\beta\cos A\cos\varphi \\ +\sin\lambda\cos\beta(\sin\Theta\sin\varphi \\ \qquad +\sin A\cos\Theta\cos\varphi) \\ +\sin\beta(\cos\Theta\sin\varphi \\ \qquad -\sin A\sin\Theta\cos\varphi) \end{array} \right\}.$$

Berechnet man den Hülfswinkel ψ mittelst der Formel

$$20)\quad \text{tang}\,\psi = \sin A\cot\varphi,$$

so ist

$$21)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sin\Theta\sin\varphi + \sin A\cos\Theta\cos\varphi = \dfrac{\sin\varphi\sin(\Theta+\psi)}{\cos\psi}, \\ \cos\Theta\sin\varphi - \sin A\sin\Theta\cos\varphi = \dfrac{\sin\varphi\cos(\Theta+\psi)}{\cos\psi}; \end{array} \right.$$

und folglich

$$22)\quad \varrho^2 = r^2 + \varrho'^2 + 2r\varrho' \left\{ \begin{array}{l} \cos\lambda'\cos\beta'\cos A\cos\varphi \\ +\dfrac{\sin\varphi}{\cos\psi}\,[\sin\beta'\cos(\Theta+\psi) \\ \qquad +\sin\lambda'\cos\beta'\sin(\Theta+\psi)] \end{array} \right\}$$

und

$$23)\quad \varrho'^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \left\{ \begin{array}{l} \cos\lambda\cos\beta\cos A\cos\varphi \\ +\dfrac{\sin\varphi}{\cos\psi}\,[\sin\beta\cos(\Theta+\psi) \\ \qquad +\sin\lambda\cos\beta\sin(\Theta+\psi)] \end{array} \right\}.$$

Setzt man nun noch

$$24)\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tang}\,\xi = \sin\lambda\cot\beta, \\ \text{tang}\,\xi' = \sin\lambda'\cot\beta'; \end{array} \right.$$

so wird

$$25)\quad \varrho^2 = r^2 + \varrho'^2 + 2r\varrho' \left\{ \begin{array}{l} \cos\lambda'\cos\beta'\cos A\cos\varphi \\ +\dfrac{\sin\beta'\sin\varphi\cos(\Theta+\psi-\xi')}{\cos\psi\cos\xi'} \end{array} \right\}$$

und

$$26)\quad \varrho'^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \left\{ \begin{array}{l} \cos\lambda\cos\beta\cos A\cos\varphi \\ +\dfrac{\sin\beta\sin\varphi\cos(\Theta+\psi-\xi)}{\cos\psi\cos\xi} \end{array} \right\}.$$

Weil, da r, ϱ, ϱ' die drei Seiten eines Dreiecks sind, immer

$$r+\varrho > \varrho',\quad r+\varrho' > \varrho$$

ist, so ist der absolute Werth von $\varrho - \varrho'$ immer kleiner als r, und also auch immer kleiner als ϱ. Weil nun

$$\frac{r}{\varrho'} = \frac{r}{\varrho-(\varrho-\varrho')} = \frac{r}{\varrho}\left(1-\frac{\varrho-\varrho'}{\varrho}\right)^{-1}$$

ist, so ist nach dem Binomischen Lehrsatze

$$\frac{r}{\varrho'} = \frac{r}{\varrho} + \frac{r}{\varrho}\cdot\frac{\varrho-\varrho'}{\varrho} + \ldots.,$$

und weil nach dem Vorhergehenden der absolute Werth von

$$\frac{r}{\varrho}\cdot\frac{\varrho-\varrho'}{\varrho}$$

immer kleiner als $(\frac{r}{\varrho})^2$, diese Grösse aber in Bezug auf die jederzeit äusserst kleine Grösse $\frac{r}{\varrho}$ von der zweiten Ordnung ist, so sind die Grössen $\frac{r}{\varrho}$ und $\frac{r}{\varrho'}$ oder sin π und sin π' immer nur sehr wenig von einander verschieden, und man kann also näherungsweise

$$\frac{r}{\varrho'} = \frac{r}{\varrho} \text{ oder } \sin\pi' = \sin\pi,$$

also nach 15) näherungsweise

$$27)\quad \begin{cases} \text{tang}\,\lambda = \dfrac{\sin\lambda'\cos\beta' + \sin\pi(\sin\Theta\sin\varphi + \cos\Theta\sin A\cos\varphi)}{\cos\lambda'\cos\beta' + \sin\pi\cos A\cos\varphi}, \\ \text{tang}\,\beta = \dfrac{\cos\lambda\{\sin\beta' + \sin\pi(\cos\Theta\sin\varphi - \sin\Theta\sin A\cos\varphi)\}}{\cos\lambda'\cos\beta' + \sin\pi\cos A\cos\varphi} \end{cases}$$

setzen.

λ und β heissen die wahren, λ' und β' die scheinbaren polaren Coordinaten des Weltkörpers W, und durch die im Vorhergehenden entwickelten Formeln können immer sowohl die ersteren aus den letzteren, als auch die letzteren aus den ersteren gefunden werden. Die Differenzen $\lambda-\lambda'$ und $\beta-\beta'$ heissen die Parallaxen des Weltkörpers W in Bezug auf die durch λ und β oder λ' und β' bezeichneten wahren oder scheinbaren Coordinaten, natürlich für die Zeit, welcher diese wahren und scheinbaren polaren Coordinaten entsprechen.

Mittelst der im Vorhergehenden entwickelten ganz allgemeinen Formeln wollen wir nun die verschiedenen in der Astronomie bei der Parallaxenrechnung vorkommenden speciellen Aufgaben auflösen, indem wir nur noch bemerken, dass zur Berechnung der sogenannten geocentrischen Breite eines Orts O auf der Oberfläche der Erde und des nach demselben gezogenen Erdhalbmessers r aus der Polhöhe dieses Orts und den beiden Halbaxen der Erde schon im ersten Theile des Archiv's S. 177. bei einer andern Gelegenheit die nöthige Anleitung ertheilt worden ist, worauf wir daher der Kürze wegen hier bloss verweisen wollen.

§. 3.

Aufgabe. Aus der wahren Rectascension und Declination α, δ die scheinbare Rectascension und Declination α', δ' zu finden.

Digitized by Google

Auflösung. Wir lassen die Systeme der xyz und XYZ mit einander zusammenfallen, wo dann offenbar $\Theta = 0$ ist. Ferner nehmen wir als Ebene der xy die Ebene des Aequators an, lassen den positiven Theil der Axe der x von dem Mittelpunkte der Erde aus durch den Anfangspunkt des Widders oder den Frühlingspunkt, den positiven Theil der Axe der y von dem Mittelpunkte der Erde aus durch den neunzigsten Grad der Rectascensionen, und den positiven Theil der Axe der z von dem Mittelpunkte der Erde aus durch den Nordpol des Aequators gehen. Unter diesen Voraussetzungen ist im Obigen offenbar $\lambda = \alpha$, $\beta = \delta$; $\lambda' = \alpha'$, $\beta' = \delta'$; der Winkel φ ist die sogenannte geocentrische Breite des Orts O auf der Oberfläche der Erde, und A ist die sogenannte Rectascension der Mitte des Himmels, welche man erhält, wenn man die Sternzeit des Orts O, der die wahren und scheinbaren Rectascensionen und Declinationen α, δ und α', δ' entsprechen, auf bekannte Weise in einen Bogen verwandelt. Hiernach ergeben sich nun aus 12) unmittelbar die Formeln

$$28)\begin{cases} \text{tang } \alpha' = \dfrac{\sin\alpha\cos\delta - \sin\pi\sin A\cos\varphi}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi}, \\ \text{tang } \delta' = \dfrac{\cos\alpha'(\sin\delta - \sin\pi\sin\varphi)}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi}; \end{cases}$$

welche die vollständige Auflösung unserer Aufgabe enthalten.

Man kann aber diese Formeln auf mehrere Arten umgestalten, von denen wir hier nur auf die folgenden aufmerksam machen wollen.

Weil nämlich, wie man leicht findet,

$$\sin\alpha(\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi) - \cos\alpha(\sin\alpha\cos\delta - \sin\pi\sin A\cos\varphi) = \sin\pi\cos\varphi\sin(A-\alpha),$$

$$\cos\alpha(\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi) + \sin\alpha(\sin\alpha\cos\delta - \sin\pi\sin A\cos\varphi) = \cos\delta - \sin\pi\cos\varphi\cos(A-\alpha)$$

und

$$\sin A(\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi) - \cos A(\sin\alpha\cos\delta - \sin\pi\sin A\cos\varphi) = \cos\delta\sin(A-\alpha),$$

$$\cos A(\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi) + \sin A(\sin\alpha\cos\delta - \sin\pi\sin A\cos\varphi) = \cos\delta\cos(A-\alpha) - \sin\pi\cos\varphi$$

ist; so ist, wenn man jede dieser Gleichungen durch

$$\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi$$

dividirt, nach der ersten der beiden Gleichungen 28)

Digitized by Google

$$\sin\alpha - \cos\alpha \operatorname{tang}\alpha' = \frac{\sin\pi\cos\varphi\sin(A-\alpha)}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi},$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha \operatorname{tang}\alpha' = \frac{\cos\delta - \sin\pi\cos\varphi\cos(A-\alpha)}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi}$$

und

$$\sin A - \cos A \operatorname{tang}\alpha' = \frac{\cos\delta\sin(A-\alpha)}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi},$$

$$\cos A + \sin A \operatorname{tang}\alpha' = \frac{\cos\delta\cos(A-\alpha) - \sin\pi\cos\varphi}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi}.$$

Also ist, wie sogleich in die Augen fallen wird,

$$29)\begin{cases}\sin(\alpha-\alpha') = \dfrac{\cos\alpha'\sin\pi\cos\varphi\sin(A-\alpha)}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi},\\ \cos(\alpha-\alpha') = \dfrac{\cos\alpha'\{\cos\delta - \sin\pi\cos\varphi\cos(A-\alpha)\}}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi}\end{cases}$$

und

$$30)\begin{cases}\sin(A-\alpha') = \dfrac{\cos\alpha'\cos\delta\sin(A-\alpha)}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi},\\ \cos(A-\alpha') = \dfrac{\cos\alpha'\{\cos\delta\cos(A-\alpha) - \sin\pi\cos\varphi\}}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi}.\end{cases}$$

Aus diesen Formeln ergiebt sich aber auf der Stelle

$$31)\begin{cases}\operatorname{tang}(\alpha-\alpha') = \dfrac{\sin\pi\cos\varphi\sin(A-\alpha)}{\cos\delta - \sin\pi\cos\varphi\cos(A-\alpha)},\\ \operatorname{tang}(A-\alpha') = \dfrac{\cos\delta\sin(A-\alpha)}{\cos\delta\cos(A-\alpha) - \sin\pi\cos\varphi}.\end{cases}$$

Weil ferner nach der zweiten der Gleichungen 28)

$$\frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi} = \frac{\operatorname{tang}\delta'}{\sin\delta - \sin\pi\sin\varphi}$$

ist, so lassen sich die Gleichungen 29) und 30) auch unter der folgenden Form darstellen:

$$32)\begin{cases}\sin(\alpha-\alpha') = \dfrac{\sin\pi\cos\varphi\sin(A-\alpha)}{\sin\delta - \sin\pi\sin\varphi}\operatorname{tang}\delta',\\ \cos(\alpha-\alpha') = \dfrac{\cos\delta - \sin\pi\cos\varphi\cos(A-\alpha)}{\sin\delta - \sin\pi\sin\varphi}\operatorname{tang}\delta'\end{cases}$$

und

$$33)\begin{cases}\sin(A-\alpha') = \dfrac{\cos\delta\sin(A-\alpha)}{\sin\delta - \sin\pi\sin\varphi}\operatorname{tang}\delta',\\ \cos(A-\alpha') = \dfrac{\cos\delta\cos(A-\alpha) - \sin\pi\cos\varphi}{\sin\delta - \sin\pi\sin\varphi}\operatorname{tang}\delta'.\end{cases}$$

Verbindet man die ersten Gleichungen in diesen beiden Systemen durch Addition und Subtraction mit einander, und bemerkt, dass

$$\sin(\alpha-\alpha')+\sin(A-\alpha')=2\sin\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}\cos\tfrac{1}{2}(A-\alpha),$$
$$\sin(\alpha-\alpha')-\sin(A-\alpha')=-2\cos\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}\sin\tfrac{1}{2}(A-\alpha)$$

ist; so erhält man

$$2\sin\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}\cos\tfrac{1}{2}(A-\alpha)$$
$$=\frac{\cos\delta+\sin\pi\cos\varphi}{\sin\delta-\sin\pi\sin\varphi}\sin(A-\alpha)\tang\delta',$$
$$2\cos\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}\sin\tfrac{1}{2}(A-\alpha)$$
$$=\frac{\cos\delta-\sin\pi\cos\varphi}{\sin\delta-\sin\pi\sin\varphi}\sin(A-\alpha)\tang\delta';$$

also, weil

$$\sin(A-\alpha)=2\sin\tfrac{1}{2}(A-\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(A-\alpha)$$

ist,

$$34)\begin{cases}\sin\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}=\dfrac{\cos\delta+\sin\pi\cos\varphi}{\sin\delta-\sin\pi\sin\varphi}\sin\tfrac{1}{2}(A-\alpha)\tang\delta',\\ \cos\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}=\dfrac{\cos\delta-\sin\pi\cos\varphi}{\sin\delta-\sin\pi\sin\varphi}\cos\tfrac{1}{2}(A-\alpha)\tang\delta';\end{cases}$$

folglich durch Division

$$35)\ \tang\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}=\frac{\cos\delta+\sin\pi\cos\varphi}{\cos\delta-\sin\pi\cos\varphi}\tang\tfrac{1}{2}(A-\alpha).$$

Ganz dieselben Gleichungen erhält man auch, wenn man die zweiten Gleichungen in den beiden Systemen 32) und 33) durch Addition und Subtraction mit einander verbindet.

Hat man mittelst der Formel 35) die scheinbare Rectascension α' gefunden, so ergiebt sich die scheinbare Declination δ' mittelst einer der beiden folgenden unmittelbar aus 34) fliessenden Formeln:

$$36)\begin{cases}\tang\delta'=\dfrac{\sin\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}}{\sin\tfrac{1}{2}(A-\alpha)}\cdot\dfrac{\sin\delta-\sin\pi\sin\varphi}{\cos\delta+\sin\pi\cos\varphi},\\ \tang\delta'=\dfrac{\cos\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}}{\cos\tfrac{1}{2}(A-\alpha)}\cdot\dfrac{\sin\delta-\sin\pi\sin\varphi}{\cos\delta-\sin\pi\cos\varphi}.\end{cases}$$

Wenn man die Gleichungen 34) quadrirt und dann zu einander addirt, so erhält man ohne Schwierigkeit

$$\operatorname{tang} \delta' = \pm \frac{\sin \delta - \sin \pi \sin \varphi}{\sqrt{(\cos \delta + \sin \pi \cos \varphi)^2 \sin \tfrac{1}{2}(A-\alpha)^2 + (\cos \delta - \sin \pi \cos \varphi)^2 \cos \tfrac{1}{2}(A-\alpha)^2}},$$

wo sich nun noch frägt, welches Zeichen man zu nehmen hat. Um hierüber zu völliger Gewissheit zu kommen, müssen wir auf die Gleichungen 9) zurückgehen, welche im vorliegenden Falle die folgende Gestalt:

$$37) \begin{cases} \varrho' \cos \alpha' \cos \delta' = \varrho \cos \alpha \cos \delta - r \cos A \cos \varphi, \\ \varrho' \sin \alpha' \cos \delta' = \varrho \sin \alpha \cos \delta - r \sin A \cos \varphi, \\ \varrho' \sin \delta' = \varrho \sin \delta - r \sin \varphi; \end{cases}$$

oder die Gestalt

Digitized by Google

$$38)\begin{cases}\frac{\varrho'}{\varrho}\cos\alpha'\cos\delta' = \cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi,\\ \frac{\varrho'}{\varrho}\sin\alpha'\cos\delta' = \sin\alpha\cos\delta - \sin\pi\sin A\cos\varphi,\\ \frac{\varrho'}{\varrho}\sin\delta' = \sin\delta - \sin\pi\sin\varphi\end{cases}$$

erhalten. Aus der dritten dieser Gleichungen erhellet, dass die Grössen

$$\sin\delta - \sin\pi\sin\varphi \text{ und } \sin\delta'$$

immer gleiche Vorzeichen haben; und da nun, weil δ', absolut genommen, nie 90° übersteigt, $\sin\delta'$ und $\operatorname{tang}\delta'$ jederzeit gleiche Vorzeichen haben, so haben auch

$$\sin\delta - \sin\pi\sin\varphi \text{ und } \operatorname{tang}\delta'$$

immer gleiche Vorzeichen, woraus sich ergiebt, dass in der oben für $\operatorname{tang}\delta'$ gefundenen Formel immer das obere Vorzeichen genommen, also

Digitized by Google

$$39)\quad \operatorname{tang} \delta' = \frac{\sin \delta - \sin \pi \sin \varphi}{\sqrt{(\cos \delta + \sin \pi \cos \varphi)^2 \sin \tfrac{1}{2}(A-\alpha)^2 + (\cos \delta - \sin \pi \cos \varphi)^2 \cos \tfrac{1}{2}(A-\alpha)^2}}$$

gesetzt werden muss.

Hierbei bemerken wir zugleich, dass bei allen obigen Formeln noch eine besondere Beurtheilung nöthig ist, in welchem Quadranten man sich die gesuchte scheinbare Rectascension α', welche bekanntlich immer positiv ist, aber bis 360° wachsen kann, endigen lassen muss, und es ist sehr wichtig, im Besitz bestimmter Regeln zu sein, nach denen man diese Beurtheilung in allen Fällen mit völliger Sicherheit anstellen kann. In dieser Beziehung bemerken wir daher zuvörderst, dass wegen der beiden ersten Gleichungen in 38) jederzeit

$$\cos \alpha' \cos \delta' \text{ mit } \cos \alpha \cos \delta - \sin \pi \cos A \cos \varphi,$$

$$\sin \alpha' \cos \delta' \text{ mit } \sin \alpha \cos \delta - \sin \pi \sin A \cos \varphi;$$

Digitized by Google

also, weil cos δ' stets positiv ist, jederzeit

$$\cos \alpha' \text{ mit } \cos \alpha \cos \delta - \sin \pi \cos A \cos \varphi,$$

$$\sin \alpha' \text{ mit } \sin \alpha \cos \delta - \sin \pi \sin A \cos \varphi$$

gleiches Vorzeichen hat. Also endigt sich α' im ersten, zweiten, dritten oder vierten Quadrenten, jenachdem von den beiden bekannten Grössen

$$\cos \alpha \cos \delta - \sin \pi \cos A \cos \varphi,$$

$$\sin \alpha \cos \delta - \sin \pi \sin A \cos \varphi$$

die erste positiv und die zweite positiv, die erste negativ und die zweite positiv, die erste negativ und die zweite negativ, die erste positiv und die zweite negativ ist, mittelst welcher Regeln also die verlangte Beurtheilung immer sicher angestellt werden kann.

Berechnet man nun α' und δ' z. B. mittelst der Formeln 28), nämlich mittelst der Formeln

$$\text{tang } \alpha' = \frac{\sin \alpha \cos \delta - \sin \pi \sin A \cos \varphi}{\cos \alpha \cos \delta - \sin \pi \cos A \cos \varphi},$$

$$\text{tang } \delta' = \frac{\cos \alpha' (\sin \delta - \sin \pi \sin \varphi)}{\cos \alpha \cos \delta - \sin \pi \cos A \cos \varphi};$$

so muss sich α' im ersten, zweiten, dritten oder vierten Quadranten endigen, jenachdem in Bezug auf den der Grösse tang α' gleichen Bruch der Nenner positiv und der Zähler positiv, der Nenner negativ und der Zähler positiv, der Nenner negativ und der Zähler negativ, der Nenner positiv und der Zähler negativ ist. Der Ausdruck für tang δ' lässt keinen Zweifel über die Art und Weise, wie δ', welches, absolut genommen, nie 90° übersteigt, zu nehmen ist, zu.

Berechnet man α' und δ' mittelst der beiden aus 28) und 31) fliessenden Formeln

$$\text{tang } (\alpha - \alpha') = \frac{\sin \pi \cos \varphi \sin (A - \alpha)}{\cos \delta - \sin \pi \cos \varphi \cos (A - \alpha)},$$

$$\text{tang } \delta' = \frac{\cos \alpha' (\sin \delta - \sin \pi \sin \varphi)}{\cos \alpha \cos \delta - \sin \pi \cos A \cos \varphi}$$

oder

$$\text{tang } (A - \alpha') = \frac{\cos \delta \sin (A - \alpha)}{\cos \delta \cos (A - \alpha) - \sin \pi \cos \varphi},$$

$$\text{tang } \delta' = \frac{\cos \alpha' (\sin \delta - \sin \pi \sin \varphi)}{\cos \alpha \cos \delta - \sin \pi \cos A \cos \varphi};$$

so hat man zu bemerken, dass die beiden Werthe, welche α' haben kann, immer von der Form α' und $\alpha' + 180°$ sind, wo α' nicht grösser als 180° sein soll. Diesen beiden Werthen von α' entsprechen nun nach der zweiten Formel der beiden obigen Systeme von Formeln immer entgegengesetzte Werthe von tang δ', und da man, weil bekanntlich tang δ' immer einerlei Vorzeichen mit $\sin \delta - \sin \pi \sin \varphi$ hat, das Vorzeichen von tang δ' kennt, so lässt sich offenbar

auch immer ohne Schwierigkeit sicher beurtheilen, welchen der beiden Werthe von α' man zu nehmen hat.

Auf ganz ähnliche Art hat man sich zu verhalten, wenn man α' und δ' mittelst eines der beiden folgenden aus dem Obigen bekannten Systeme von Formeln berechnet:

$$\text{tang } \{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\} = \text{tang } \tfrac{1}{2}(A-\alpha)\,\frac{\cos\delta+\sin\pi\cos\varphi}{\cos\delta-\sin\pi\cos\varphi},$$

$$\text{tang } \delta' = \frac{\sin\{\frac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}}{\sin\frac{1}{2}(A-\alpha)}\cdot\frac{\sin\delta-\sin\pi\sin\varphi}{\cos\delta+\sin\pi\cos\varphi}$$

oder

$$\text{tang } \{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\} = \text{tang } \tfrac{1}{2}(A-\alpha)\,\frac{\cos\delta+\sin\pi\cos\varphi}{\cos\delta-\sin\pi\cos\varphi},$$

$$\text{tang } \delta' = \frac{\cos\{\frac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}}{\cos\frac{1}{2}(A-\alpha)}\cdot\frac{\sin\delta-\sin\pi\sin\varphi}{\cos\delta-\sin\pi\cos\varphi}.$$

Diese beiden letzten Systeme von Formeln sind, so viel ich weiss, bis jetzt noch nicht bekannt gewesen.

Sich die Rechnung nach den obigen Formeln durch die Einführung von Hülfswinkeln zu erleichtern, hat nicht die mindeste Schwierigkeit, und wir wollen dies daher auch nur beispielshalber an den letzten Formeln erläutern.

Setzt man nämlich

$$40)\quad \text{tang } \chi = \frac{\sin\pi\cos\varphi}{\cos\delta},\quad \text{tang } \xi = \frac{\sin\pi\sin\varphi}{\sin\delta};$$

so hat man zur Berechnung von α' die Formeln

$$41)\quad \text{tang } \{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\} = \text{tang } \tfrac{1}{2}(A-\alpha)\ \text{tang } (45^\circ+\chi)$$

oder

$$42)\quad \text{tang } \{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\} = \text{tang } \tfrac{1}{2}(A-\alpha)\ \cot(45^\circ-\chi);$$

und zur Berechnung von δ' hat man die Formeln

$$43)\quad \begin{cases} \text{tang } \delta' = \text{tang } \delta\,\dfrac{\sin\{\frac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}}{\sin\frac{1}{2}(A-\alpha)}\cdot\dfrac{\cos\chi\sin(45^\circ-\xi)}{\cos\xi\sin(45^\circ+\chi)}, \\ \text{tang } \delta' = \text{tang } \delta\,\dfrac{\cos\{\frac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}}{\cos\frac{1}{2}(A-\alpha)}\cdot\dfrac{\cos\chi\sin(45^\circ-\xi)}{\cos\xi\sin(45^\circ-\chi)}; \end{cases}$$

oder auch

$$44)\quad \begin{cases} \text{tang } \delta' = \text{tang } \delta\,\dfrac{\sin\{\frac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}}{\sin\frac{1}{2}(A-\alpha)}\cdot\dfrac{\cos\chi\cos(45^\circ+\xi)}{\cos\xi\cos(45^\circ-\chi)}, \\ \text{tang } \delta' = \text{tang } \delta\,\dfrac{\cos\{\frac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}}{\cos\frac{1}{2}(A-\alpha)}\cdot\dfrac{\cos\chi\cos(45^\circ+\xi)}{\cos\xi\cos(45^\circ+\chi)}. \end{cases}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen in 32) und 33) erhält man leicht

$$45)\quad \begin{cases} \text{tang } \delta' = \dfrac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(A-\alpha)}\left(\dfrac{\sin\delta}{\sin\pi\cos\varphi}-\text{tang }\varphi\right), \\ \text{tang } \delta' = \dfrac{\sin(A-\alpha')}{\sin(A-\alpha)}\left(\text{tang }\delta-\dfrac{\sin\pi\sin\varphi}{\cos\delta}\right); \end{cases}$$

Digitized by Google

und wenn man die erste Gleichung in 32) durch die erste Gleichung in 33) dividirt, so ergiebt sich

$$46)\quad \frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(A-\alpha')} = \frac{\sin\pi\cos\varphi}{\cos\delta}$$

oder

$$47)\quad \sin(A-\alpha') = \frac{\cos\delta\sin(\alpha-\alpha')}{\sin\pi\cos\varphi}.$$

Die zweite der Gleichungen 45) kann man auch unter der Form

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{\sin(A-\alpha)}{\sin(A-\alpha')}\operatorname{tang}\delta' + \frac{\sin\pi\sin\varphi}{\cos\delta}$$

schreiben, und weil nun

$$\operatorname{tang}\delta = \operatorname{tang}\delta' + \frac{\sin(\delta-\delta')}{\cos\delta\cos\delta'}$$

ist, so ist

$$\operatorname{tang}\delta' + \frac{\sin(\delta-\delta')}{\cos\delta\cos\delta'} = \frac{\sin(A-\alpha)}{\sin(A-\alpha')}\operatorname{tang}\delta' + \frac{\sin\pi\sin\varphi}{\cos\delta},$$

also

$$\frac{\sin(A-\alpha')-\sin(A-\alpha)}{\sin(A-\alpha')}\operatorname{tang}\delta' = \frac{\sin\pi\sin\varphi}{\cos\delta} - \frac{\sin(\delta-\delta')}{\cos\delta\cos\delta'},$$

d. i.

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')\cos\{A-\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')\}}{\sin(A-\alpha')}\operatorname{tang}\delta' = \frac{\sin\pi\sin\varphi}{\cos\delta} - \frac{\sin(\delta-\delta')}{\cos\delta\cos\delta'}.$$

Nach 47) ist aber

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')}{\sin(A-\alpha')} = \frac{\sin\pi\cos\varphi}{2\cos\delta\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\sin\pi\cos\varphi\cos\{A-\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')\}}{\cos\delta\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')}\operatorname{tang}\delta' = \frac{\sin\pi\sin\varphi}{\cos\delta} - \frac{\sin(\delta-\delta')}{\cos\delta\cos\delta'},$$

also

$$\sin(\delta-\delta') = \sin\pi\sin\varphi\cos\delta' - \frac{\sin\pi\cos\varphi\sin\delta'\cos\{A-\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')\}}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')}.$$

Setzt man nun

$$48)\quad \cot\zeta = \frac{\cot\varphi\cos\{A-\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')\}}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')};$$

so wird

$$49)\quad \sin(\delta-\delta') = \frac{\sin\pi\sin\varphi}{\sin\zeta}\sin(\zeta-\delta'),$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$50)\quad \mu = \frac{\sin\pi \sin\varphi}{\sin\zeta}$$

setzen,

$$51)\quad \sin(\delta - \delta') = \mu \sin(\zeta - \delta').$$

Nun ist aber

$$\zeta - \delta' = \zeta - \delta + (\delta - \delta');$$

also

$$\sin(\delta - \delta') = \mu\{\sin(\zeta - \delta)\cos(\delta - \delta') + \cos(\zeta - \delta)\sin(\delta - \delta')\},$$

und folglich

$$52)\quad \text{tang}(\delta - \delta') = \frac{\mu \sin(\zeta - \delta')}{1 - \mu\cos(\zeta - \delta')}.$$

Setzt man

$$53)\quad k = \frac{\sin\pi\cos\varphi}{\cos\delta},$$

so ist nach 31)

$$54)\quad \text{tang}(\alpha - \alpha') = \frac{k\sin(A - \alpha)}{1 - k\cos(A - \alpha)}.$$

Wenn man jetzt überhaupt die Gleichung

$$\text{tang}\, u = \frac{x \sin v}{1 - x\cos v}$$

hat, und der absolute Werth von u nicht grösser als der vierte Theil der halben Peripherie ist; so ist nach einer aus der Analysis bekannten Reihe

$$u = \text{tang}\, u - \tfrac{1}{3}\text{tang}\, u^3 + \tfrac{1}{5}\text{tang}\, u^5 - \tfrac{1}{7}\text{tang}\, u^7 + \ldots,$$

und folglich, weil

$$\text{tang}\, u = x \sin v(1 - x\cos v)^{-1}$$

ist,

$$\begin{aligned} u = \quad & x \sin v(1 - x\cos v)^{-1} \\ & - \tfrac{1}{3}x^3 \sin v^3(1 - x\cos v)^{-3} \\ & + \tfrac{1}{5}x^5 \sin v^5(1 - x\cos v)^{-5} \\ & - \tfrac{1}{7}x^7 \sin v^7(1 - x\cos v)^{-7} \\ & + \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Ist nun der absolute Werth von $x\cos v$ kleiner als die Einheit, so ist es verstattet, die sämmtlichen Potenzen von $1 - x\cos v$ nach dem Binomischen Lehrsatze in Reihen zu entwickeln. Thut man dies, und ordnet dann nach den Potenzen von x, so erhält man mittelst der aus der Trigonometrie bekannten Ausdrücke für

die Sinus der vielfachen Bogen ohne alle Schwierigkeit die folgende merkwürdige Reihe:

$$u = \frac{x \sin v}{1} + \frac{x^2 \sin 2v}{2} + \frac{x^3 \sin 3v}{3} + \frac{x^4 \sin 4v}{4} + \ldots,$$

oder, wenn u in Secunden ausgedrückt sein soll,

$$u = \frac{x \sin v}{\sin 1''} + \frac{x^2 \sin 2v}{2\sin 1''} + \frac{x^3 \sin 3v}{3\sin 1''} + \frac{x^4 \sin 4v}{4\sin 1''} + \ldots,$$

oder auch, wenn man nur einige wenige Anfangsglieder der Reihe berücksichtigt, ohne merklichen Fehler

$$u = \frac{x \sin v}{\sin 1''} + \frac{x^2 \sin 2v}{\sin 2''} + \frac{x^3 \sin 3v}{\sin 3''} + \frac{x^4 \sin 4v}{\sin 4''} + \ldots.$$

Hiernach hat man unter der Voraussetzung, dass die absoluten Werthe von $\alpha - \alpha'$ und $\delta - \delta'$ nicht grösser als der vierte Theil der halben Peripherie, und die absoluten Werthe von $k \cos(A - \alpha)$ und $\mu \cos(\zeta - \delta)$ kleiner als die Einheit sind, nach 54) und 52) die Formeln

$$55)\quad \alpha - \alpha' = \frac{k \sin(A-\alpha)}{\sin 1''} + \frac{k^2 \sin 2(A-\alpha)}{2\sin 1''} + \frac{k^3 \sin 3(A-\alpha)}{3\sin 1''} + \frac{k^4 \sin 4(A-\alpha)}{4\sin 1''} + \ldots\ldots\ldots$$

und

$$56)\quad \delta - \delta' = \frac{\mu \sin(\zeta-\delta)}{\sin 1''} + \frac{\mu^2 \sin 2(\zeta-\delta)}{2\sin 1''} + \frac{\mu^3 \sin 3(\zeta-\delta)}{3\sin 1''} + \frac{\mu^4 \sin 4(\zeta-\delta)}{4\sin 1''} + \ldots\ldots\ldots$$

wo nach dem Obigen

$$57)\quad k = \frac{\sin\pi \cos\varphi}{\cos\delta},\quad \mu = \frac{\sin\pi \sin\varphi}{\sin\zeta}$$

ist, und ζ aus der Formel

$$58)\quad \cot\zeta = \frac{\cot\varphi \cos\{A - \frac{1}{2}(\alpha+\alpha')\}}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')}$$

bestimmt werden muss.

Ist man berechtigt mit hinreichender Näherung bei den ersten Gliedern der Reihen 55) und 56) stehen zu bleiben, so erhält man

$$59)\begin{cases}\alpha-\alpha'=\dfrac{\sin\pi\cos\varphi}{\cos\delta\sin 1''}\sin(A-\alpha),\\ \delta-\delta'=\dfrac{\sin\pi\sin\varphi}{\sin\zeta\sin 1''}\sin(\zeta-\delta);\end{cases}$$

oder auch näherungsweise

$$60)\begin{cases}\alpha-\alpha'=\dfrac{\pi\cos\varphi}{\cos\delta}\sin(A-\alpha),\\ \delta-\delta'=\dfrac{\pi\sin\varphi}{\sin\zeta}\sin(\zeta-\delta).\end{cases}$$

Weil aber

$$A-\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')=A-\alpha+\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')$$

ist, so ist nach 58), wie man leicht findet, wenn man

$$\cos\{A-\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')\}$$
$$=\cos(A-\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')-\sin(A-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')$$

setzt,

$$\cot\zeta=\cot\varphi\{\cos(A-\alpha)-\sin(A-\alpha)\tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')\},$$

also nach 59)

$$\delta-\delta'=\frac{\sin\pi\sin\varphi}{\sin 1''}\{\cos\delta-\sin\delta\cot\varphi\cos(A-\alpha)$$
$$+\sin\delta\cot\varphi\sin(A-\alpha)\tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')\},$$

und folglich, weil das Glied

$$\frac{\sin\pi\sin\varphi}{\sin 1''}\sin\delta\cot\varphi\sin(A-\alpha)\tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')$$

offenbar in Bezug auf $\sin\pi\tan\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')$ von der zweiten Ordnung ist, näherungsweise

$$\delta-\delta'=\frac{\sin\pi\sin\varphi}{\sin 1''}\{\cos\delta-\sin\delta\cot\varphi\cos(A-\alpha)\};$$

also, wenn man den Hülfswinkel η mittelst der Formel

$$61)\quad\cot\eta=\cot\varphi\cos(A-\alpha)$$

berechnet,

$$62)\quad\delta-\delta'=\frac{\sin\pi\sin\varphi}{\sin\eta\sin 1''}\sin(\eta-\delta).$$

Daher haben wir jetzt die folgenden Näherungsformeln

$$63)\begin{cases}\cot\eta=\cot\varphi\cos(A-\alpha),\\ \alpha-\alpha'=\dfrac{\sin\pi\cos\varphi}{\cos\delta\sin 1''}\sin(A-\alpha),\\ \delta-\delta'=\dfrac{\sin\pi\sin\varphi}{\sin\eta\sin 1''}\sin(\eta-\delta);\end{cases}$$

oder auch

Digitized by Google

$$64)\begin{cases}\cot\eta = \cot\varphi\cos(A-\alpha),\\ \alpha-\alpha' = \dfrac{\pi\cos\varphi}{\cos\delta}\sin(A-\alpha),\\ \delta-\delta' = \dfrac{\pi\sin\varphi}{\sin\eta}\sin(\eta-\delta).\end{cases}$$

Die Voraussetzungen, unter denen die im Vorhergehenden für $\alpha-\alpha'$ und $\delta-\delta'$ gefundenen Ausdrücke nur gültig sind, haben wir oben angegeben. Will man sich also dieser Ausdrücke mit Sicherheit bedienen, so muss man sich jederzeit vorher überzeugt haben, dass die in Rede stehenden Voraussetzungen sämmtlich erfüllt sind. Vorzüglich scheint dann, wenn die wahre Rectascension α nahe 0 oder nahe 360° ist, Vorsicht nöthig zu sein, weil dann allerdings der absolute Werth von $\alpha-\alpha'$ nicht nahe 0, sondern nahe 360° sein kann, was man also bei praktischen Anwendungen stets wohl zu beachten und zu berücksichtigen hat.

§. 4.

Aufgabe. Aus der scheinbaren Rectascension und Declination α', δ' die wahre Rectascension und Declination α, δ zu finden.

Auflösung. Auf ganz ähnliche Art wie im vorigen Paragraphen erhält man aus den Gleichungen 15) die Gleichungen

$$65)\begin{cases}\text{tang}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha'\cos\delta' + \sin\pi'\sin A\cos\varphi}{\cos\alpha'\cos\delta' + \sin\pi'\cos A\cos\varphi},\\ \text{tang}\,\delta = \dfrac{\cos\alpha(\sin\delta' + \sin\pi'\sin\varphi)}{\cos\alpha'\cos\delta' + \sin\pi'\cos A\cos\varphi}.\end{cases}$$

Da nun diese Gleichungen aus den Gleichungen 28) hervorgehen, wenn man für α, δ, α', δ', π respective α', δ', α, δ, $-\pi'$ setzt, so ist es sehr leicht, alle zur Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe dienenden Formeln aus den im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln durch einfache Substitutionen herzuleiten. Auf diese Weise erhält man aus 31)

$$66)\begin{cases}\text{tang}\,(\alpha-\alpha') = \dfrac{\sin\pi'\cos\varphi\sin(A-\alpha')}{\cos\delta' + \sin\pi'\cos\varphi\cos(A-\alpha')},\\ \text{tang}\,(A-\alpha) = \dfrac{\cos\delta'\sin(A-\alpha')}{\cos\delta'\cos(A-\alpha') + \sin\pi'\cos\varphi};\end{cases}$$

und aus 35) und 36) ergiebt sich

$$67)\ \text{tang}\,\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha')-\alpha\} = \frac{\cos\delta' - \sin\pi'\cos\varphi}{\cos\delta' + \sin\pi'\cos\varphi}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A-\alpha')$$

und

$$68)\begin{cases}\text{tang}\,\delta = \dfrac{\sin\{\frac{1}{2}(A+\alpha')-\alpha\}}{\sin\frac{1}{2}(A-\alpha')}\cdot\dfrac{\sin\delta' + \sin\pi'\sin\varphi}{\cos\delta' - \sin\pi'\cos\varphi},\\ \text{tang}\,\delta = \dfrac{\cos\{\frac{1}{2}(A+\alpha')-\alpha\}}{\cos\frac{1}{2}(A-\alpha')}\cdot\dfrac{\sin\delta' + \sin\pi'\sin\varphi}{\cos\delta' + \sin\pi'\cos\varphi}.\end{cases}$$

Auch die Rechnung nach diesen Formeln kann man sich leicht durch Einführung von Hülfswinkeln erleichtern.

Aus 39) erhält man

$$69)\quad \operatorname{tang}\delta = \frac{\sin\delta' + \sin\pi'\sin\varphi}{\sqrt{(\cos\delta' - \sin\pi'\cos\varphi)^2\sin\frac{1}{2}(A-\alpha')^2 + (\cos\delta' + \sin\pi'\cos\varphi)^2\cos\frac{1}{2}(A-\alpha')^2}},$$

Nach 37) ist

$$\varrho\cos\alpha\cos\delta = \varrho'\cos\alpha'\cos\delta' + r\cos A\cos\varphi,$$

$$\varrho\sin\alpha\cos\delta = \varrho'\sin\alpha'\cos\delta' + r\sin A\cos\varphi,$$

$$\varrho\sin\delta = \varrho'\sin\delta' + r\sin\varphi;$$

oder

$$\frac{\varrho}{\varrho'}\cos\alpha\cos\delta = \cos\alpha'\cos\delta' + \sin\pi'\cos A\cos\varphi,$$

$$\frac{\varrho}{\varrho'}\sin\alpha\cos\delta = \sin\alpha'\cos\delta' + \sin\pi'\sin A\cos\varphi,$$

$$\frac{\varrho}{\varrho'}\sin\delta = \sin\delta' + \sin\pi'\sin\varphi$$

Hieraus erhellet, dass

$\cos\alpha$ mit $\cos\alpha'\cos\delta' + \sin\pi'\cos A\cos\varphi$,

$\sin\alpha$ mit $\sin\alpha'\cos\delta' + \sin\pi'\sin A\cos\varphi$,

$\sin\delta$, und also auch tang δ, mit $\sin\delta' + \sin\pi'\sin\varphi$

jederzeit einerlei Vorzeichen hat. Also endigt sich α im ersten, zweiten, dritten oder vierten Quadranten, jenachdem von den beiden Grössen

$\cos\alpha'\cos\delta' + \sin\pi'\cos A\cos\varphi$,

$\sin\alpha'\cos\delta' + \sin\pi'\sin A\cos\varphi$

die erste positiv und die zweite positiv, die erste negativ und die zweite positiv, die erste negativ und die zweite negativ, die erste positiv und die zweite negativ ist, wodurch sich auf ganz ähnliche Art wie im vorigen Paragraphen immer leicht mit völliger Sicherheit beurtheilen lässt, wie man α zu nehmen hat.

Aus 55) und 56) ergiebt sich

$$70)\quad \alpha' - \alpha = \frac{k\sin(A-\alpha')}{\sin 1''} + \frac{k^2\sin 2(A-\alpha')}{2\sin 1''} + \frac{k^3\sin 3(A-\alpha')}{3\sin 1''} + \frac{k^4\sin 4(A-\alpha')}{4\sin 1''} + \ldots\ldots\ldots$$

und

$$71)\quad \delta' - \delta = \frac{\mu\sin(\zeta-\delta')}{\sin 1''} + \frac{\mu^2\sin 2(\zeta-\delta')}{2\sin 1''} + \frac{\mu^3\sin 3(\zeta-\delta')}{3\sin 1''} + \frac{\mu^4\sin 4(\zeta-\delta')}{4\sin 1''} + \ldots\ldots\ldots$$

wo

$$72)\quad k = -\frac{\sin\pi'\cos\varphi}{\cos\delta'},\quad \mu = -\frac{\sin\pi'\sin\varphi}{\sin\zeta}$$

ist, und ζ mittelst der Formel

$$73)\quad \cot\zeta = \frac{\cot\varphi\cos\{A - \frac{1}{2}(\alpha+\alpha')\}}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')}$$

bestimmt werden muss.

Die so eben entwickelten Ausdrücke von $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ setzen voraus, dass die absoluten Werthe dieser Differenzen den vierten Theil der halben Peripherie nicht übersteigen, und dass die absoluten Werthe von $k \cos (A - \alpha')$ und $\mu \cos (\zeta - \delta')$ kleiner als die Einheit sind.

Aus 63) erhält man

$$74) \begin{cases} \cot \eta = \cot \varphi \cos (A - \alpha'), \\ \alpha' - \alpha = -\dfrac{\sin \pi' \cos \varphi}{\cos \delta' \sin 1''} \sin (A - \alpha') \\ \delta' - \delta = -\dfrac{\sin \pi' \sin \varphi}{\sin \eta \sin 1''} \sin (\eta - \delta'); \end{cases}$$

oder auch

$$75) \begin{cases} \cot \eta = \cot \varphi \cos (A - \alpha'), \\ \alpha' - \alpha = -\dfrac{\pi' \cos \varphi}{\cos \delta'} \sin (A - \alpha'), \\ \delta' - \delta = -\dfrac{\pi' \sin \varphi}{\sin \eta} \sin (\eta - \delta'). \end{cases}$$

In allen vorhergehenden Formeln kann man, wie wir aus §. 2. wissen, für π' näherungsweise π setzen. Wollte man sich dies aber nicht gestatten, so würde man sich auf folgende Art zu verhalten haben.

Nach 18) ist im vorliegenden Falle, wie man leicht findet,

$$76) \quad \varrho^2 = r^2 + \varrho'^2 + 2r\varrho' \{\sin \delta' \sin \varphi + \cos \delta' \cos \varphi \cos (A - \alpha')\},$$

oder, wenn wir

$$77) \quad \cot \sigma = \cot \delta' \cos (A - \alpha')$$

setzen,

$$78) \quad \varrho^2 = r^2 + \varrho'^2 + 2r\varrho' \frac{\sin \delta' \cos (\varphi - \sigma)}{\sin \sigma},$$

oder

$$79) \quad \varrho'^2 + \frac{2r \sin \delta' \cos (\varphi - \sigma)}{\sin \sigma} \varrho' = (\varrho - r)(\varrho + r),$$

mittelst welcher quadratischen Gleichung man aus den gegebenen Grössen r, ϱ, α', δ' die Grösse ϱ', und daraus mittelst der Formel

$$\sin \pi' = \frac{r}{\varrho'}$$

die Grösse π' bestimmen müsste. Weil

$$\varrho = r \operatorname{cosec} \pi, \quad \varrho' = r \operatorname{cosec} \pi'$$

ist. so kann man die Gleichung 79) auch auf die Form

$$\operatorname{cosec} \pi'^2 + \frac{2 \sin \delta' \cos (\varphi - \sigma)}{\sin \sigma} \operatorname{cosec} \pi' = \operatorname{cosec} \pi^2 - 1,$$

d. i. auf die Form

Digitized by Google

$$80)\quad \operatorname{cosec}\pi'^2 + \frac{2\sin\delta'\cos(\varphi-\sigma)}{\sin\sigma}\operatorname{cosec}\pi' = \cot\pi^2$$

bringen, und mittelst dieser Gleichung aus π, α', δ' unmittelbar π bestimmen.

§. 5.

Wenn man an zwei Beobachtungsorten, deren geographische Positionen als genau bekannt angenommen werden können, zu einerlei Zeitmoment *) durch Beobachtungen die scheinbaren Rectascensionen und Declinationen α', δ' und α'_1, δ'_1 eines Weltkörpers bestimmt hat; so ist, wenn α, δ, ϱ die dem in Rede stehenden Zeitmoment entsprechende wahre Rectascension, Declination und Entfernung dieses Weltkörpers vom Mittelpunkte der Erde bezeichnen und A, φ, r, ϱ' und A_1, φ_1, r_1, ϱ'_1 für beide Beobachtungsorte gleiche Bedeutung haben, nach 37)

$$81)\quad \begin{cases} \varrho'\cos\alpha'\cos\delta' = \varrho\cos\alpha\cos\delta - r\cos A\cos\varphi, \\ \varrho'\sin\alpha'\cos\delta' = \varrho\sin\alpha\cos\delta - r\sin A\cos\varphi, \\ \varrho'\sin\delta' = \varrho\sin\delta - r\sin\varphi \end{cases}$$

und

$$82)\quad \begin{cases} \varrho'_1\cos\alpha'_1\cos\delta'_1 = \varrho\cos\alpha\cos\delta - r_1\cos A_1\cos\varphi_1, \\ \varrho'_1\sin\alpha'_1\cos\delta'_1 = \varrho\sin\alpha\cos\delta - r_1\sin A_1\cos\varphi_1, \\ \varrho'_1\sin\delta'_1 = \varrho\sin\delta - r_1\sin\varphi_1. \end{cases}$$

Durch Subtraction erhält man aus diesen Gleichungen auf der Stelle die Gleichungen

$$\varrho'\cos\alpha'\cos\delta' - \varrho'_1\cos\alpha'_1\cos\delta'_1 = r_1\cos A_1^2\cos\varphi_1 - r\cos A\cos\varphi,$$

$$\varrho'\sin\alpha'\cos\delta' - \varrho'_1\sin\alpha'_1\cos\delta'_1 = r_1\sin A_1\cos\varphi_1 - r\sin A\cos\varphi,$$

$$\varrho'\sin\delta' - \varrho'_1\sin\delta'_1 = r_1\sin\varphi_1 - r\sin\varphi;$$

welche nun bloss noch die beiden unbekannten Grössen ϱ' und ϱ'_1 enthalten. Aus den beiden ersten dieser Gleichungen erhält man mittelst gewöhnlicher algebraischer Elimination

$$83)\quad \begin{cases} \varrho' = \dfrac{r_1\sin(A_1-\alpha'_1)\cos\varphi_1 - r\sin(A-\alpha'_1)\cos\varphi}{\sin(\alpha'-\alpha'_1)\cos\delta'}, \\ \varrho'_1 = \dfrac{r_1\sin(A_1-\alpha')\cos\varphi_1 - r\sin(A-\alpha')\cos\varphi}{\sin(\alpha'-\alpha'_1)\cos\delta'_1}; \end{cases}$$

und die letzte der drei obigen Gleichungen, nämlich die Gleichung

---

*) Dies ist möglich, weil man die Längen, wenigstens die Längendifferenz der beiden Beobachtungsorte kennt.

$$84)\quad \varrho' \sin \delta' - \varrho'_1 \sin \delta'_1 = r_1 \sin \varphi_1 - r \sin \varphi$$

kann dann als Prüfungsgleichung benutzt werden.

Aus ϱ' und ϱ'_1 erhält man π' und π'_1 für die beiden Beobachtungsorte mittelst der Formeln

$$85)\quad \sin \pi' = \frac{r}{\varrho'},\ \sin \pi'_1 = \frac{r_1}{\varrho'_1},$$

und kann dann α und δ mittelst der aus dem vorigen Paragraphen bekannten Formeln berechnen, worauf dann ferner zur Berechnung von ϱ die Gleichungen 81) und 82) Wege genug darbieten. Die leichteste Berechnung scheinen jedoch die leicht aus den beiden ersten der Gleichungen 81) und 82) fliessenden Formeln

$$86)\quad \begin{cases} \varrho = r\ \dfrac{\sin (A - \alpha') \cos \varphi}{\sin (\alpha - \alpha') \cos \delta}, \\ \varrho = r_1\ \dfrac{\sin (A_1 - \alpha'_1) \cos \varphi_1}{\sin (\alpha - \alpha'_1) \cos \delta_1}, \end{cases}$$

zu gestatten. Zur Berechnung von π und π_1 für die beiden Beobachtungsorte hat man die Formeln

$$87)\quad \begin{cases} \sin \pi = \dfrac{r}{\varrho} = \dfrac{\sin (\alpha - \alpha') \cos \delta}{\sin (A - \alpha') \cos \varphi}, \\ \sin \pi_1 = \dfrac{r_1}{\varrho} = \dfrac{\sin (\alpha - \alpha'_1) \cos \delta_1}{\sin (A_1 - \alpha'_1) \cos \varphi_1}. \end{cases}$$

Man sieht hieraus, wie man aus gleichzeitigen Bestimmungen der scheinbaren Rectascensionen und Declinationen eines Weltkörpers an zwei Beobachtungsorten, deren geographische Positionen als bekannt vorausgesetzt werden, die dem in Rede stehenden Zeitpunkte entsprechende Entfernung des Weltkörpers vom Mittelpunkte der Erde bestimmen kann, und in der That ist das vorhergehende Verfahren die allgemeinste Methode zur Bestimmung der Entfernungen der Weltkörper von der Erde.

§. 6.

Aufgabe. Aus dem wahren Azimuth und der wahren Höhe ω, h das scheinbare Azimuth und die scheinbare Höhe ω', h' zu finden.

Auflösung. Grösserer Bestimmtheit wegen wollen wir annehmen, dass der Beobachtungsort in der nördlichen Hälfte der Erdoberfläche liegen soll. Die Azimuthe zählen wir von Süden an nach Westen und nach Osten hin von 0 bis 180°, und nehmen westliche Azimuthe positiv, östliche Azimuthe dagegen negativ. Die Polhöhe des Beobachtungsorts bezeichnen wir durch φ'. Die Ebenen der xy und $x'y'$ sind die Ebenen des wahren und scheinbaren Horizonts, die Ebene der XY ist die Ebene des Aequators. Der positive Theil der Axe der x soll von dem Mittelpunkte der Erde nach Osten, der positive Theil der Axe der y vom Mittelpunkte der Erde nach Norden, der positive Theil der Axe der z vom Mittelpunkte der Erde nach dem Zenith des Beobachtungsorts hin gerichtet sein. Nimmt man nun, dies vorausgesetzt, alle in §. 2. ge-

machten Voraussetzungen, wie es verstattet ist, als erfüllt an; so ist offenbar

$$\lambda = 270^\circ - \omega \text{ oder } \lambda = (270^\circ - \omega) - 360^\circ,$$
$$\lambda' = 270^\circ - \omega' \text{ oder } \lambda' = (270^\circ - \omega') - 360^\circ;$$
$$\beta = h,\ \beta' = h';$$
$$\Theta = 90^\circ - \varphi',\ A = 270^\circ;$$

und folglich nach 12), wobei man nur zu überlegen hat, dass immer

$$\sin\lambda = -\cos\omega,\ \cos\lambda = -\sin\omega,\ \operatorname{tang}\lambda = \cot\omega;$$
$$\sin\lambda' = -\cos\omega',\ \cos\lambda' = -\sin\omega',\ \operatorname{tang}\lambda' = \cot\omega'$$

ist,

$$88)\begin{cases}\cot\omega' = \dfrac{\cos\omega\cos h + \sin\pi\sin(\varphi-\varphi')}{\sin\omega\cos h}, \\ \operatorname{tang} h' = \dfrac{\sin\omega'\{\sin h - \sin\pi\cos(\varphi-\varphi')\}}{\sin\omega\cos h};\end{cases}$$

oder, wie hieraus leicht folgt,

$$89)\begin{cases}\operatorname{tang}\omega' = \dfrac{\sin\omega\cos h}{\cos\omega\cos h + \sin\pi\sin(\varphi-\varphi')}, \\ \operatorname{tang} h' = \dfrac{\cos\omega'\{\sin h - \sin\pi\cos(\varphi-\varphi')\}}{\cos\omega\cos h + \sin\pi\sin(\varphi-\varphi')}.\end{cases}$$

Weil nun

$$\sin\omega\{\cos\omega\cos h + \sin\pi\sin(\varphi-\varphi')\} - \sin\omega\cos\omega\cos h = \sin\pi\sin\omega\sin(\varphi-\varphi'),$$

$$\cos\omega\{\cos\omega\cos h + \sin\pi\sin(\varphi-\varphi')\} + \sin\omega\sin\omega\cos h = \cos h + \sin\pi\cos\omega\sin(\varphi-\varphi')$$

ist, so ist, wie man leicht findet, wenn man diese Gleichungen durch

$$\cos\omega\cos h + \sin\pi\sin(\varphi-\varphi')$$

dividirt,

$$\sin\omega - \cos\omega\operatorname{tang}\omega' = \frac{\sin\pi\sin\omega\sin(\varphi-\varphi')}{\cos\omega\cos h + \sin\pi\sin(\varphi-\varphi')},$$

$$\cos\omega + \sin\omega\operatorname{tang}\omega' = \frac{\cos h + \sin\pi\cos\omega\sin(\varphi-\varphi')}{\cos\omega\cos h + \sin\pi\sin(\varphi-\varphi')};$$

d. i.

$$90)\begin{cases}\sin(\omega-\omega') = \dfrac{\sin\pi\sin\omega\cos\omega'\sin(\varphi-\varphi')}{\cos\omega\cos h + \sin\pi\sin(\varphi-\varphi')}, \\ \cos(\omega-\omega') = \dfrac{\cos\omega'\{\cos h + \sin\pi\cos\omega\sin(\varphi-\varphi')\}}{\cos\omega\cos h + \sin\pi\sin(\varphi-\varphi')};\end{cases}$$

folglich, wegen der zweiten der Gleichungen 89)

$$91)\begin{cases}\sin(\omega-\omega')=\dfrac{\sin\pi\sin\omega\sin(\varphi-\varphi')}{\sin h-\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')}\operatorname{tang}h',\\ \cos(\omega-\omega')=\dfrac{\cos h+\sin\pi\cos\omega\sin(\varphi-\varphi')}{\sin h-\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')}\operatorname{tang}h';\end{cases}$$

und hieraus durch Division

$$92)\ \operatorname{tang}(\omega-\omega')=\frac{\sin\pi\sin\omega\sin(\varphi-\varphi')}{\cos h+\sin\pi\cos\omega\sin(\varphi-\varphi')}.$$

Nach den Gleichungen 89) ist ferner, wie man leicht findet,

$$93)\ \sin\omega'=\frac{\sin\omega\cos h}{\sin h-\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')}\operatorname{tang}h'.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der ersten der Gleichungen 91) durch Addition und Subtraction, so erhält man

$$\sin\omega'+\sin(\omega-\omega')=\frac{\cos h+\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')}{\sin h-\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')}\sin\omega\operatorname{tang}h',$$

$$\sin\omega'-\sin(\omega-\omega')=\frac{\cos h-\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')}{\sin h-\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')}\sin\omega\operatorname{tang}h';$$

und folglich

$$94)\begin{cases}\cos(\omega'-\frac{1}{2}\omega)=\dfrac{\cos h+\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')}{\sin h-\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')}\cos\frac{1}{2}\omega\operatorname{tang}h',\\ \sin(\omega'-\frac{1}{2}\omega)=\dfrac{\cos h-\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')}{\sin h-\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')}\sin\frac{1}{2}\omega\operatorname{tang}h';\end{cases}$$

also durch Division

$$95)\ \operatorname{tang}(\omega'-\tfrac{1}{2}\omega)=\frac{\cos h-\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')}{\cos h+\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega.$$

Auch hat man nach 94)

$$96)\begin{cases}\operatorname{tang}h'=\dfrac{\cos(\omega'-\frac{1}{2}\omega)}{\cos\frac{1}{2}\omega}\cdot\dfrac{\sin h-\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')}{\cos h+\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')},\\ \operatorname{tang}h'=\dfrac{\sin(\omega'-\frac{1}{2}\omega)}{\sin\frac{1}{2}\omega}\cdot\dfrac{\sin h-\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')}{\cos h-\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')}.\end{cases}$$

Alle diese Formeln auf ähnliche Weise wie die analogen Formeln in §. 3. durch Einführung zweier Hülfswinkel zur logarithmischen Rechnung bequem einzurichten, hat nicht die mindeste Schwierigkeit.

Auch ergiebt sich aus 94) leicht

$$\tan g\, h' = \frac{\sin h - \sin \pi \cos(\varphi - \varphi')}{\sqrt{\{\cos \psi + \sin \pi \sin(\varphi - \varphi')\}^2 \cos \tfrac{1}{2}\omega^2 + \{\cos \psi - \sin \pi \sin(\varphi - \varphi')\}^2 \sin \tfrac{1}{2}\omega^2}}.$$

Nach 9) ist nun

$$\varrho' \sin \omega' \cos h' = \varrho \sin \omega \cos h,$$

$$\varrho' \cos \omega' \cos h' = \varrho \cos \omega \cos h + r \sin(\varphi - \varphi'),$$

$$\varrho' \sin h' = \varrho \sin h - r \cos(\varphi - \varphi')$$

oder

$$\frac{\varrho'}{\varrho} \sin \omega' \cos h' = \sin \omega \cos h,$$

$$\frac{\varrho'}{\varrho} \cos \omega' \cos h' = \cos \omega \cos h + \sin \pi \sin (\varphi - \varphi'),$$

$$\frac{\varrho'}{\varrho} \sin h' = \sin h - \sin \pi \cos (\varphi - \varphi').$$

Also hat immer sin ω' mit sin ω, cos ω' mit

$$\cos \omega \cos h + \sin \pi \sin (\varphi - \varphi'),$$

und sin h', folglich auch tang h', mit

$$\sin h - \sin \pi \cos (\varphi - \varphi')$$

gleiches Vorzeichen. Daher muss man in dem obigen Ausdrucke von tang h' das obere Zeichen nehmen, und folglich

$$97)\quad \text{tang } \psi' = \frac{\sin h - \sin x \cos(\varphi - \varphi')}{\sqrt{\{\cos\psi + \sin x \sin(\varphi - \varphi')\}^2 \cos^2\tfrac{1}{2}\omega' + \{\cos\psi - \sin x \sin(\varphi - \varphi')\}^2 \sin^2\tfrac{1}{2}\omega'}}$$

setzen.

Betrachtet man die Erde als eine Kugel, so ist $\varphi = \varphi'$, und aus den obigen Gleichungen ergiebt sich daher unter dieser Voraussetzung auf der Stelle $\omega' = \omega$, so dass also, wenn man auf die Abplattung der Erde keine Rücksicht nimmt, jederzeit das wahre und scheinbare Azimuth einander gleich sind. Ferner erhält man aus den obigen Formeln für die sphärische Erde leicht

$$98)\quad \text{tang } h' = \frac{\sin h - \sin x}{\cos h}$$

oder

$$99)\ \text{tang}\ h' = \frac{2\sin\frac{1}{2}(h-\pi)\ \cos\frac{1}{2}(h+\pi)}{\cos h},$$

oder

$$100)\ \text{tang}\ h' = \text{tang}\ h - \frac{\sin\pi}{\cos h},$$

und folglich

$$101)\ \text{tang}\ h - \text{tang}\ h' = \frac{\sin\pi}{\cos h}$$

und

$$1 + \text{tang}\ h\ \text{tang}\ h' = 1 + \text{tang}\ h^2 - \frac{\sin\pi\ \sin h}{\cos h^2},$$

d. i.

$$1 + \text{tang}\ h\ \text{tang}\ h' = \frac{1 - \sin\pi\ \sin h}{\cos h^2}.$$

Also ist

$$102)\ \text{tang}\ (h-h') = \frac{\sin\pi\ \cos h}{1 - \sin\pi\ \sin h}.$$

Aus der Gleichung 101) folgt auch auf der Stelle

$$103)\ \sin(h-h') = \sin\pi\ \cos h'$$

oder

$$\frac{\sin(h-h')}{\cos h'} = \sin\pi,$$

also

$$\frac{\cos h' + \sin(h-h')}{\cos h' - \sin(h-h')} = \frac{1+\sin\pi}{1-\sin\pi}$$

oder

$$\frac{\sin(90^\circ - h') + \sin(h-h')}{\sin(90^\circ - h') - \sin(h-h')} = \frac{1+\cos(90^\circ-\pi)}{1-\cos(90^\circ-\pi)},$$

folglich nach bekannten Formeln

$$104)\ \text{tang}\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}h - h') = \text{tang}\ (45^\circ - \tfrac{1}{2}h)\ \cot(45^\circ - \tfrac{1}{2}\pi)^2$$

oder

$$105)\ \text{tang}\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}h - h') = \text{tang}\ (45^\circ - \tfrac{1}{2}h)\ \text{tang}\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\pi)^2.$$

Bis auf Glieder, die in Bezug auf sin π von der ersten Ordnung sind, ist nach 102) für die sphärische Erde

$$106)\ \text{tang}\ (h-h') = \sin\pi\ \cos h$$

oder auch

$$107)\ h - h' = \pi\ \cos h,\ h' - h = -\pi\ \cos h,$$

welche Formeln bekanntlich in der praktischen Astronomie sehr häufig gebraucht werden.

Digitized by Google

Ueberlegt man, dass die Formeln 89) aus den Formeln 28) erhalten werden, wenn man in letzteren für

$$\alpha,\ \delta,\ \alpha',\ \delta',\ \pi,\ A,\ \varphi$$

respective

$$\omega,\ h,\ \omega',\ h',\ \pi,\ 0,\ 90^\circ + (\varphi - \varphi')$$

setzt, so ergiebt sich aus 45) auf der Stelle

$$108)\begin{cases} \text{tang } h' = \dfrac{\sin(\omega-\omega')}{\sin\omega}\left\{\dfrac{\sin h}{\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')} - \cot(\varphi-\varphi')\right\}, \\ \text{tang } h' = \dfrac{\sin\omega'}{\sin\omega}\left\{\text{tang } h - \dfrac{\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')}{\cos h}\right\}; \end{cases}$$

und aus 55) und 56)

$$109)\ \omega - \omega' = -\frac{k\sin\omega}{\sin 1''} - \frac{k^2\sin 2\omega}{2\sin 1''} - \frac{k^3\sin 3\omega}{3\sin 1''} - \frac{k^4\sin 4\omega}{4\sin 1''} - \ldots\ldots$$

und

$$110)\ h - h' = \frac{\mu\sin(\zeta-h)}{\sin 1''} + \frac{\mu^2\sin 2(\zeta-h)}{2\sin 1''} + \frac{\mu^3\sin 3(\zeta-h)}{3\sin 1''} + \frac{\mu^4\sin 4(\zeta-h)}{4\sin 1''} + \ldots\ldots\ldots,$$

wo nach 57) und 58)

$$111)\ k = -\frac{\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')}{\cos h},\quad \mu = \frac{\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')}{\sin\zeta}$$

ist, und ζ aus der Formel

$$112)\ \cot\zeta = -\frac{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega')}\,\text{tang}\,(\varphi-\varphi')$$

bestimmt werden muss.

Ferner ist nach 64)

$$113)\begin{cases} \cot\eta = -\cos\omega\ \text{tang}\,(\varphi-\varphi'), \\ \omega-\omega' = \dfrac{\pi\sin\omega}{\cos h}\sin(\varphi-\varphi'), \\ h-h' = \dfrac{\pi\sin(\eta-h)}{\sin\eta}\cos(\varphi-\varphi'). \end{cases}$$

Für die sphärische Erde ist $\zeta = 90^\circ$, $\mu = \sin\pi$, und folglich nach 110)

$$114)\quad h - h' = \frac{\sin\pi\cos h}{\sin 1''} + \frac{\sin\pi^2\sin 2h}{2\sin 1''} - \frac{\sin\pi^3\cos 3h}{3\sin 1''} - \frac{\sin\pi^4\sin 4h}{4\sin 1''} + \ldots\ldots,$$

oder, wenn π in Secunden ausgedrückt ist:

$$115)\quad h - h' = \pi\cos h + \tfrac{1}{2}\pi^2\sin 2h\,.\,\sin 1'' - \tfrac{1}{3}\pi^3\cos 3h\,.\,(\sin 1'')^2 - \tfrac{1}{4}\pi^4\sin 4h\,.\,(\sin 1'')^3 + \ldots\ldots\ldots$$

§. 7.

Aufgabe. Aus dem scheinbaren Azimuth und der scheinbaren Höhe ω', h' das wahre Azimuth und die wahre Höhe ω, h zu finden.

Auflösung. Auf ganz ähnliche Art wie im vorigen Paragraphen erhält man aus 15) die Formeln

$$116)\quad \begin{cases} \cot\omega = \dfrac{\cos\omega'\cos h' - \sin\pi'\sin(\varphi-\varphi')}{\sin\omega'\cos h'}, \\ \operatorname{tang} h = \dfrac{\sin\omega\{\sin h' + \sin\pi'\cos(\varphi-\varphi')\}}{\sin\omega'\cos h'}; \end{cases}$$

aus denen sich leicht

$$117)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\omega = \dfrac{\sin\omega'\cos h'}{\cos\omega'\cos h' - \sin\pi'\sin(\varphi-\varphi')}, \\ \operatorname{tang} h = \dfrac{\cos\omega\{\sin h' + \sin\pi'\cos(\varphi-\varphi')\}}{\cos\omega'\cos h' - \sin\pi'\sin(\varphi-\varphi')} \end{cases}$$

ergiebt. Da diese Gleichungen aus den Gleichungen 89) hervorgehen, wenn man in den letzteren für

$$\omega,\ h,\ \omega',\ h',\ \pi,\ \varphi,\ \varphi'$$

respective

$$\omega',\ h',\ \omega,\ h,\ -\pi',\ \varphi,\ \varphi'$$

setzt, so ist es leicht, die der jetzigen Aufgabe entsprechenden Formeln aus den im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln unmittelbar abzuleiten.

Aus 91) erhält man auf diese Weise

$$118)\quad \begin{cases} \sin(\omega-\omega') = \dfrac{\sin\pi'\sin\omega'\sin(\varphi-\varphi')}{\sin h' + \sin\pi'\cos(\varphi-\varphi')}\operatorname{tang} h, \\ \cos(\omega-\omega') = \dfrac{\cos h' - \sin\pi'\cos\omega'\sin(\varphi-\varphi')}{\sin h' + \sin\pi'\cos(\varphi-\varphi')}\operatorname{tang} h; \end{cases}$$

Digitized by Google

und aus 92) ergiebt sich

$$119)\quad \text{tang}\,(\omega-\omega') = \frac{\sin\pi'\,\sin\omega'\,\sin(\varphi-\varphi')}{\cos h' - \sin\pi'\,\cos\omega'\,\sin(\varphi-\varphi')}.$$

Ferner erhält man aus 95)

$$120)\quad \text{tang}\,(\omega-\tfrac{1}{2}\omega') = \frac{\cos h' + \sin\pi'\,\sin(\varphi-\varphi')}{\cos h' - \sin\pi'\,\sin(\varphi-\varphi')}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\omega',$$

und aus 96) ergiebt sich

$$121)\quad \begin{cases} \text{tang}\,h = \dfrac{\cos(\omega-\frac{1}{2}\omega')}{\cos\frac{1}{2}\omega'}\cdot\dfrac{\sin h' + \sin\pi'\,\cos(\varphi-\varphi')}{\cos h' - \sin\pi'\,\sin(\varphi-\varphi')}, \\ \text{tang}\,h = \dfrac{\sin(\omega-\frac{1}{2}\omega')}{\sin\frac{1}{2}\omega'}\cdot\dfrac{\sin h' + \sin\pi'\,\cos(\varphi-\varphi')}{\cos h' + \sin\pi'\,\sin(\varphi-\varphi')}. \end{cases}$$

Zu bemerken hat man auch, dass immer sin ω mit sin ω', cos ω mit

$$\cos\omega'\,\cos h' - \sin\pi'\,\sin(\varphi-\varphi'),$$

und sin h, also auch tang h, mit

$$\sin h' + \sin\pi'\,\cos(\varphi-\varphi')$$

gleiches Vorzeichen hat.

Aus 97) ergiebt sich

$$122)\ \operatorname{tang} h = \frac{\sin h' + \sin \pi' \cos(\varphi - \varphi')}{\sqrt{\{\cos h' - \sin \pi' \sin(\varphi - \varphi')\}^2 \cos \frac{1}{2}\omega'^2 + \{\cos h' + \sin \pi' \sin(\varphi - \varphi')\}^2 \sin \frac{1}{2}\omega'^2}}.$$

Für die sphärische Erde ist nach 98)

$$123)\ \operatorname{tang} h = \frac{\sin h' + \sin \pi'}{\cos h'},$$

oder

$$124)\ \operatorname{tang} h = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(h' + \pi') \cos \frac{1}{2}(h' - \pi')}{\cos h'},$$

oder auch

$$125)\ \operatorname{tang} h = \operatorname{tang} h' + \frac{\sin \pi'}{\cos h'}.$$

Ferner ist nach 102)

$$126)\quad \text{tang}\,(h-h') = \frac{\sin\pi'\cos h'}{1+\sin\pi'\sin h'},$$

und nach 104)

$$127)\quad \text{tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}h' - h) = \text{tang}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}h')\,\cot\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\pi')^2$$

oder

$$128)\quad \text{tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}h' - h) = \text{tang}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}h')\,\text{tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\pi')^2.$$

Nach 106) ist näherungsweise für die sphärische Erde

$$129)\quad \text{tang}\,(h-h') = \sin\pi'\cos h',$$

oder nach 107)

$$130)\quad h-h' = \pi'\cos h',\quad h'-h = -\pi'\cos h'.$$

Für die sphäroidische Erde ist nach 108)

$$131)\quad \begin{cases} \text{tang}\,h = \dfrac{\sin(\omega-\omega')}{\sin\omega'}\left\{\dfrac{\sin h'}{\sin\pi'\sin(\varphi-\varphi')} + \cot(\varphi-\varphi')\right\}, \\ \text{tang}\,h = \dfrac{\sin\omega}{\sin\omega'}\left\{\text{tang}\,h' + \dfrac{\sin\pi'\cos(\varphi-\varphi')}{\cos h'}\right\}. \end{cases}$$

Nach 109) ist

$$132)\quad \omega-\omega' = \frac{k\sin\omega'}{\sin 1''} + \frac{k^2\sin 2\omega'}{2\sin 1''} + \frac{k^3\sin 3\omega'}{3\sin 1''} + \frac{k^4\sin 4\omega'}{4\sin 1''} + \ldots\ldots$$

und nach 110) ist

$$133)\quad h-h' = -\frac{\mu\sin(\zeta-h')}{\sin 1''} - \frac{\mu^2\sin 2(\zeta-h')}{2\sin 1''} - \frac{\mu^3\sin 3(\zeta-h')}{3\sin 1''} - \frac{\mu^4\sin 4(\zeta-h')}{4\sin 1''} - \ldots\ldots\ldots,$$

wo

$$134)\quad k = \frac{\sin\pi'\sin(\varphi-\varphi')}{\cos h'},\quad \mu = -\frac{\sin\pi'\cos(\varphi-\varphi')}{\sin\zeta}$$

ist, und ζ mittelst der Formel

$$135)\quad \cot\zeta = -\frac{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega')}\,\text{tang}\,(\varphi-\varphi')$$

bestimmt werden muss.

Aus 113) ergiebt sich

$$136)\quad \begin{cases} \cot\eta = -\cos\omega'\,\text{tang}\,(\varphi-\varphi'), \\ \omega-\omega' = \dfrac{\pi'\sin\omega'}{\cos h'}\sin(\varphi-\varphi'), \\ h-h' = \dfrac{\pi'\sin(\eta-h')}{\sin\eta}\cos(\varphi-\varphi'). \end{cases}$$

Für die sphärische Erde ist nach 114)

$$137)\quad h - h' = \frac{\sin \pi' \cos h'}{\sin 1''} - \frac{\sin \pi'^2 \sin 2h'}{2\sin 1''} - \frac{\sin \pi'^3 \cos 3h'}{3\sin 1''} + \frac{\sin \pi'^4 \sin 4h'}{4\sin 1''} + \ldots\ldots\ldots,$$

oder, wenn π' in Secunden ausgedrückt ist,

$$138)\quad h - h' = \pi' \cos h' - \tfrac{1}{2}\pi'^2 \sin 2h' . \sin 1'' - \tfrac{1}{3}\pi'^3 \cos 3h' . (\sin 1'')^2 + \tfrac{1}{4}\pi'^4 \sin 4h' . (\sin 1'')^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dass man in allen vorhergehenden Formeln für π' näherungsweise π schreiben kann, ist aus §. 2. bekannt. Wollte man sich dies aber nicht gestatten, so würde man sich auf folgende Art zu verhalten haben.

Nach 18) ist im vorliegenden Falle, wie man leicht findet,

$$139)\quad \varrho^2 = r^2 + \varrho'^2 + 2r\varrho'\{\sin h' \cos (\varphi - \varphi') - \cos \omega' \cos h' \sin (\varphi - \varphi')\},$$

oder, wenn man

$$140)\quad \cot \sigma = \cos \omega' \cot h'$$

setzt,

$$141)\quad \varrho^2 = r^2 + \varrho'^2 + 2r\varrho' \frac{\sin h' \sin (\sigma - \varphi + \varphi')}{\sin \sigma},$$

oder

$$142)\quad \varrho'^2 + \frac{2r \sin h' \sin (\sigma - \varphi + \varphi')}{\sin \sigma} \varrho' = (\varrho - r)(\varrho + r),$$

mittelst welcher quadratischen Gleichung man ϱ', und daraus mittelst der Formel

$$\sin \pi' = \frac{r}{\varrho'}$$

π' bestimmen müsste. Auch ist, wie man leicht auf ähnliche Art wie in §. 4. findet,

$$143)\quad \operatorname{cosec} \pi'^2 + \frac{2\sin h' \sin (\sigma - \varphi + \varphi')}{\sin \sigma} \operatorname{cosec} \pi' = \cot \pi^2,$$

mittelst welcher Gleichung π' unmittelbar gefunden werden kann.

§. 8.

Aufgabe. Aus der wahren Länge und Breite λ, β die scheinbare Länge und Breite λ', β' zu finden.

Auflösung. Die Ebenen der xy und XY seien respective die Ebene der Ekliptik und die Ebene des Aequators. Die mit einander zusammenfallenden positiven Theile der Axen der x und X seien von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Anfangspunkte des Widders oder dem Frühlingspunkte hin gerichtet. Die positiven Theile der Axen der y und Y gehen vom Mittelpunkte der Erde respective durch den neunzigsten Grad der Längen und den neunzigsten Grad der Rectascensionen. Die positiven Theile der Axen der z und Z sind vom Mittelpunkte der Erde respective nach dem Nordpole der Ekliptik und dem Nordpole des Aequators hin gerichtet. Dies vorausgesetzt ist, wenn ε die Schiefe der Ekliptik bezeichnet, und A und φ ganz dieselbe Bedeutung haben wie in §. 3., nach 12) offenbar

$$144)\quad \begin{cases} \text{tang } \lambda' = \dfrac{\sin\lambda\cos\beta - \sin\pi(\sin\varepsilon\sin\varphi + \cos\varepsilon\sin A\cos\varphi)}{\cos\lambda\cos\beta - \sin\pi\cos A\cos\varphi}, \\ \text{tang } \beta' = \dfrac{\cos\lambda'\{\sin\beta - \sin\pi(\cos\varepsilon\sin\varphi - \sin\varepsilon\sin A\cos\varphi)\}}{\cos\lambda\cos\beta - \sin\pi\cos A\cos\varphi}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Beobachtungsorts in Bezug auf die Systeme der xyz und XYZ jetzt durch x_1, y_1, z_1 und X_1, Y_1, Z_1, dessen polare Coordinaten in Bezug auf das System der xyz durch L, B, r; so ist, weil A, φ, r offenbar seine polaren Coordinaten in Bezug auf das System der XYZ sind *):

$$145)\quad \begin{cases} x_1 = r\cos L\cos B, \\ y_1 = r\sin L\cos B, \\ z_1 = r\sin B \end{cases}$$

und

$$146)\quad \begin{cases} X_1 = r\cos A\cos\varphi, \\ Y_1 = r\sin A\cos\varphi, \\ Z_1 = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten ist aber

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1, \\ y_1 &= Y_1\cos\varepsilon + Z_1\cos(90^\circ - \varepsilon), \\ z_1 &= Y_1\cos(90^\circ + \varepsilon) + Z_1\cos\varepsilon; \end{aligned}$$

d. i.

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1, \\ y_1 &= Y_1\cos\varepsilon + Z_1\sin\varepsilon, \\ z_1 &= -Y_1\sin\varepsilon + Z_1\cos\varepsilon; \end{aligned}$$

also nach 145) und 146)

---

*) Um die Begriffe zu fixiren, denken wir uns den Beobachtungsort auf der nördlichen Hälfte der Erde liegend.

Digitized by Google

$$147)\begin{cases}\cos L\cos B=\cos A\cos\varphi,\\ \sin L\cos B=\sin\varepsilon\sin\varphi+\cos\varepsilon\sin A\cos\varphi,\\ \sin B=\cos\varepsilon\sin\varphi-\sin\varepsilon\sin A\cos\varphi;\end{cases}$$

und folglich nach 144)

$$148)\begin{cases}\text{tang }\lambda'=\dfrac{\sin\lambda\cos\beta-\sin\pi\sin L\cos B}{\cos\lambda\cos\beta-\sin\pi\cos L\cos B},\\ \text{tang }\beta'=\dfrac{\cos\lambda'(\sin\beta-\sin\pi\sin B)}{\cos\lambda\cos\beta-\sin\pi\cos L\cos B};\end{cases}$$

wobei wir bemerken, dass L und B eigentlich bloss als zwei so, dass den drei Gleichungen 147) genügt wird, zu bestimmende Hülfswinkel zu betrachten sind.

Aus den Gleichungen 147) erhält man auf der Stelle

$$149)\begin{cases}\text{tang }L=\dfrac{\sin\varepsilon+\cos\varepsilon\sin A\cot\varphi}{\cos A\cot\varphi},\\ \sin B=\sin\varphi(\cos\varepsilon-\sin\varepsilon\sin A\cot\varphi);\end{cases}$$

und folglich, wenn man den Hülfswinkel w mittelst der Formel

$$150)\ \text{tang }w=\sin A\cot\varphi$$

berechnet,

$$\text{tang }L=\frac{\sin(\varepsilon+w)}{\cos A\cos w\cot\varphi},$$

$$\sin B=\frac{\sin\varphi\cos(\varepsilon+w)}{\cos w};$$

oder, weil

$$\cos w\cot\varphi=\frac{\sin w}{\sin A}$$

ist,

$$151)\begin{cases}\text{tang }L=\dfrac{\text{tang }A}{\sin w}\sin(\varepsilon+w),\\ \sin B=\dfrac{\sin\varphi}{\cos w}\cos(\varepsilon+w);\end{cases}$$

mittelst welcher Formeln L und B leicht berechnet werden können.

Nach 147) ist

$$152)\begin{cases}\cos L\cos B=\cos A\cos\varphi,\\ \sin L\cos B=\dfrac{\sin\varphi}{\cos w}\sin(\varepsilon+w),\\ \sin B=\dfrac{\sin\varphi}{\cos w}\cos(\varepsilon+w);\end{cases}$$

und da L und B so bestimmt werden müssen, dass diesen drei Gleichungen zugleich genügt wird, so muss man, indem man den absoluten Werth von B, was offenbar verstattet ist, nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$ nimmt, mittelst der ersten der beiden Formeln 151) die Grösse L immer so bestimmen, dass

$\cos L$ mit $\cos A$

und

$$\sin L \text{ mit } \frac{\sin(\varepsilon+\omega)}{\cos\omega}$$

gleiches Vorzeichen erhält.

Die Gleichungen 148) gehen aus den Gleichungen 28) hervor, wenn man in den letzteren für

$$\alpha,\ \delta,\ \alpha',\ \delta',\ \pi,\ A,\ \varphi$$

respective

$$\lambda,\ \beta,\ \lambda',\ \beta',\ \pi,\ L,\ B$$

setzt. Also ist nach 31)

$$153)\begin{cases}\operatorname{tang}(\lambda-\lambda') = \dfrac{\sin\pi\cos B\sin(L-\lambda)}{\cos\beta-\sin\pi\cos B\cos(L-\lambda)},\\ \operatorname{tang}(L-\lambda') = \dfrac{\cos\beta\sin(L-\lambda)}{\cos\beta\cos(L-\lambda)-\sin\pi\cos B}.\end{cases}$$

Nach 35) ist

$$154)\ \operatorname{tang}\{\tfrac{1}{2}(L+\lambda)-\lambda'\} = \frac{\cos\beta+\sin\pi\cos B}{\cos\beta-\sin\pi\cos B}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(L-\lambda),$$

und nach 36) ist

$$155)\begin{cases}\operatorname{tang}\beta' = \dfrac{\sin\{\frac{1}{2}(L+\lambda)-\lambda'\}}{\sin\frac{1}{2}(L-\lambda)}\cdot\dfrac{\sin\beta-\sin\pi\sin B}{\cos\beta+\sin\pi\cos B},\\ \operatorname{tang}\beta' = \dfrac{\cos\{\frac{1}{2}(L+\lambda)-\lambda'\}}{\cos\frac{1}{2}(L-\lambda)}\cdot\dfrac{\sin\beta-\sin\pi\sin B}{\cos\beta-\sin\pi\cos B}.\end{cases}$$

Auch ist zu bemerken, dass

$$\cos\lambda' \text{ mit } \cos\lambda\cos\beta-\sin\pi\cos L\cos B,$$

$$\sin\lambda' \text{ mit } \sin\lambda\cos\beta-\sin\pi\sin L\cos B,$$

und $\sin\beta'$, also auch $\operatorname{tang}\beta'$, mit

$$\sin\beta-\sin\pi\sin B$$

gleiches Vorzeichen hat.

Nach 39) ist

156) $$\text{tang } \beta' = \frac{\sin \beta - \sin \pi \sin B}{\sqrt{(\cos \beta + \sin \pi \cos B)^2 \sin^2 \frac{1}{2}(L-\lambda)^2 + (\cos \beta - \sin \pi \cos B)^2 \cos^2 \frac{1}{2}(L-\lambda)^2}}.$$

Aus 45) ergiebt sich

157) $$\begin{cases} \text{tang } \beta' = \dfrac{\sin (\lambda - \lambda')}{\sin (L-\lambda)} \left(\dfrac{\sin \beta}{\sin \pi \cos B} - \text{tang } B\right), \\ \text{tang } \beta' = \dfrac{\sin (L-\lambda')}{\sin (L-\lambda)} \left(\text{tang } \beta - \dfrac{\sin \pi \sin B}{\cos \beta}\right). \end{cases}$$

Nach 53) und 56) ist

Digitized by Google

$$158)\quad \lambda - \lambda' = \frac{k \sin (L-\lambda)}{\sin 1''} + \frac{k^2 \sin 2(L-\lambda)}{2\sin 1''} + \frac{k^3 \sin 3(L-\lambda)}{2\sin 1''} + \frac{k^4 \sin 4(L-\lambda)}{4\sin 1''} + \ldots\ldots\ldots$$

und

$$159)\quad \beta - \beta' = \frac{\mu \sin (\zeta-\beta)}{\sin 1''} + \frac{\mu^2 \sin 2(\zeta-\beta)}{2\sin 1''} + \frac{\mu^3 \sin 3(\zeta-\beta)}{3\sin 1''} + \frac{\mu^4 \sin 4(\zeta-\beta)}{4\sin 1''} + \ldots\ldots\ldots$$

wo

$$160)\quad k = \frac{\sin \pi \cos B}{\cos \beta},\quad \mu = \frac{\sin \pi \sin B}{\sin \zeta}$$

ist, und ζ mittelst der Formel

$$161)\quad \cot \zeta = \frac{\cot B \cos \{L - \frac{1}{2}(\lambda+\lambda')\}}{\cos \frac{1}{2}(\lambda-\lambda')}$$

bestimmt werden muss.

Nach 64) ist

$$162)\quad \begin{cases} \cot \eta = \cot B \cos (L-\lambda), \\ \lambda - \lambda' = \dfrac{\pi \cos B}{\cos \beta} \sin (L-\lambda), \\ \beta - \beta' = \dfrac{\pi \sin B}{\sin \eta} \sin (\eta - \beta). \end{cases}$$

§. 9.

Aufgabe. Aus der scheinbaren Länge und Breite λ', β' die wahre Länge und Breite λ, β zu finden.

Auflösung. Ganz auf ähnliche Art wie in der vorigen Aufgabe erhält man aus 16)

$$163)\quad \begin{cases} \text{tang } \lambda = \dfrac{\sin \lambda' \cos \beta' + \sin \pi' (\sin \varepsilon \sin \varphi + \cos \varepsilon \sin A \cos \varphi)}{\cos \lambda' \cos \beta' + \sin \pi' \cos A \cos \varphi}, \\ \text{tang } \beta = \dfrac{\cos \lambda \{\sin \beta' + \sin \pi' (\cos \varepsilon \sin \varphi - \sin \varepsilon \sin A \cos \varphi)\}}{\cos \lambda' \cos \beta' + \sin \pi' \cos A \cos \varphi}; \end{cases}$$

welche Formeln aus 144) hervorgehen, wenn man für

$$\lambda,\ \beta,\ \lambda',\ \beta',\ \pi,\ \varepsilon,\ A,\ \varphi$$

respective

Digitized by Google

$$\lambda',\ \beta',\ \lambda,\ \beta,\ -\pi',\ \varepsilon,\ A,\ \varphi$$

setzt. Also hat man nach 150) und 151)

$$164)\quad \text{tang } w = \sin A \cot \varphi$$

und

$$165)\begin{cases} \text{tang } L = \dfrac{\text{tang } A}{\sin w} \sin(\varepsilon + w), \\ \sin B = \dfrac{\sin \varphi}{\cos w} \cos(\varepsilon + w); \end{cases}$$

und mittelst der ersten dieser beiden Gleichungen muss, indem man den absoluten Werth von B nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$ nimmt, L so bestimmt werden, dass

$$\cos L \text{ mit } \cos A$$

und

$$\sin L \text{ mit } \frac{\sin(\varepsilon + w)}{\cos w}$$

gleiches Vorzeichen erhält.

Nach 153) ist

$$166)\begin{cases} \text{tang } (\lambda' - \lambda) = -\dfrac{\sin \pi' \cos B \sin(L - \lambda')}{\cos \beta' + \sin \pi' \cos B \cos(L - \lambda')}, \\ \text{tang } (L - \lambda) = \dfrac{\cos \beta' \sin(L - \lambda')}{\cos \beta' \sin(L - \lambda') + \sin \pi' \cos B}. \end{cases}$$

Nach 154) und 155) ist

$$167)\quad \text{tang } \{\tfrac{1}{2}(L + \lambda') - \lambda\} = \frac{\cos \beta' - \sin \pi' \cos B}{\cos \beta' + \sin \pi' \cos B} \text{tang } \tfrac{1}{2}(L - \lambda')$$

und

$$168)\begin{cases} \text{tang } \beta = \dfrac{\sin \{\frac{1}{2}(L + \lambda') - \lambda\}}{\sin \frac{1}{2}(L - \lambda')} \cdot \dfrac{\sin \beta' + \sin \pi' \sin B}{\cos \beta' - \sin \pi' \cos B}, \\ \text{tang } \beta = \dfrac{\cos \{\frac{1}{2}(L + \lambda') - \lambda\}}{\cos \frac{1}{2}(L - \lambda')} \cdot \dfrac{\sin \beta' + \sin \pi' \sin B}{\cos \beta' + \sin \pi' \cos B}. \end{cases}$$

Auch ist zu bemerken, dass

$$\cos \lambda \text{ mit } \cos \lambda' \cos \beta' + \sin \pi' \cos L \cos B,$$
$$\sin \lambda \text{ mit } \sin \lambda' \cos \beta' + \sin \pi' \sin L \cos B,$$

und $\sin \beta'$, also auch tang β', mit

$$\sin \beta' + \sin \pi' \sin B$$

gleiches Vorzeichen hat.

Nach 156) ist

Digitized by Google

169) $$\text{tang } \beta = \frac{\sqrt{(\cos \beta' - \sin \pi' \cos B)^2 \sin^2 \frac{1}{2}(L-\lambda')^2 + (\cos \beta' + \sin \pi' \cos B)^2 \cos^2 \frac{1}{2}(L-\lambda')^2}}{\sin \beta' + \sin \pi' \sin B}$$

Nach 157) ist

$$170) \begin{cases} \text{tang } \beta = \dfrac{\sin (\lambda - \lambda')}{\sin (L - \lambda')} \left(\dfrac{\sin \beta'}{\sin \pi' \cos B} + \text{tang } B \right), \\ \text{tang } \beta = \dfrac{\sin (L - \lambda)}{\sin (L - \lambda')} \left(\text{tang } \beta' + \dfrac{\sin \pi' \sin B}{\cos \beta'} \right). \end{cases}$$

Nach 158) und 159) ist

$$171)\quad \lambda' - \lambda = \frac{k \sin (L-\lambda')}{\sin 1''} + \frac{k^2 \sin 2(L-\lambda')}{2\sin 1''} + \frac{k^3 \sin 3(L-\lambda')}{3\sin 1''} + \frac{k^4 \sin 4(L-\lambda')}{4\sin 1''} + \ldots\ldots\ldots$$

und

$$172)\quad \beta' - \beta = \frac{\mu \sin (\zeta-\beta')}{\sin 1''} + \frac{\mu^2 \sin 2(\zeta-\beta')}{2\sin 1''} + \frac{\mu^3 \sin 3(\zeta-\beta')}{3\sin 1''} + \frac{\mu^4 \sin 4(\zeta-\beta')}{4\sin 1''} + \ldots\ldots\ldots$$

wo

$$173)\quad k = -\frac{\sin \pi' \cos B}{\cos \beta'},\quad \mu = -\frac{\sin \pi' \sin B}{\sin \zeta}$$

ist, und ζ mittelst der Formel

$$174)\quad \cot \zeta = \frac{\cot B \cos \{L - \frac{1}{2}(\lambda+\lambda')\}}{\cos \frac{1}{2}(\lambda-\lambda')}$$

bestimmt werden muss.

Nach 162) ist

$$175)\quad \begin{cases} \cot \eta = \cot B \cos (L-\lambda'), \\ \lambda - \lambda' = \dfrac{\pi' \cos B}{\cos \beta'} \sin (L-\lambda'), \\ \beta - \beta' = \dfrac{\pi' \sin B}{\sin \eta} \sin (\eta - \beta'). \end{cases}$$

Dass man in allen diesen Formeln näherungsweise π für π' setzen kann, wissen wir aus §. 2. Wollte man sich diese Näherung nicht gestatten, so müsste man auf ganz ähnliche Art, wie in §. 4. und §. 7. gezeigt worden ist, verfahren, was wir hier der Kürze wegen nicht wiederholen wollen.

§. 10.

Bezeichnet man durch D den aus dem Mittelpunkte C der Erde, durch D' den aus dem Orte O gesehenen scheinbaren Halbmesser des Weltkörpers W, so ist offenbar

$$176)\quad \varrho \sin D = \varrho' \sin D',$$

und folglich

$$177)\quad \frac{\sin D'}{\sin D} = \frac{\varrho}{\varrho'}.$$

Digitized by Google

Weil nun nach 9)

$$178)\quad \begin{cases} \frac{\varrho'}{\varrho}\cos\lambda'\cos\beta' = \cos\lambda\cos\beta - \sin\pi\cos A\cos\varphi, \\ \frac{\varrho'}{\varrho}\sin\lambda'\cos\beta' = \sin\lambda\cos\beta \\ \qquad\qquad - \sin\pi(\sin\Theta\sin\varphi + \sin A\cos\Theta\cos\varphi), \\ \frac{\varrho'}{\varrho}\sin\beta' = \sin\beta - \sin\pi(\cos\Theta\sin\varphi \\ \qquad\qquad - \sin A\sin\Theta\cos\varphi) \end{cases}$$

ist, so ist nach 177)

$$179)\quad \frac{\sin D'}{\sin D} = \frac{\cos\lambda'\cos\beta'}{\cos\lambda\cos\beta - \sin\pi\cos A\cos\varphi} = \frac{\sin\lambda'\cos\beta'}{\sin\lambda\cos\beta - \sin\pi(\sin\Theta\sin\varphi + \sin A\cos\Theta\cos\varphi)} = \frac{\sin\beta'}{\sin\beta - \sin\pi(\cos\Theta\sin\varphi - \sin A\sin\Theta\cos\varphi)}.$$

Multiplicirt man die zweite und dritte der Gleichungen 178) respective mit $\sin\Theta$ und $\cos\Theta$, und addirt die Gleichungen dann zu einander, so erhält man

$$\frac{\varrho'}{\varrho}(\sin\beta'\cos\Theta + \sin\lambda'\cos\beta'\sin\Theta) = \sin\beta\cos\Theta + \sin\lambda\cos\beta\sin\Theta - \sin\pi\sin\varphi,$$

und folglich

$$180)\quad \frac{\sin D'}{\sin D} = \frac{\sin\beta'\cos\Theta + \sin\lambda'\cos\beta'\sin\Theta}{\sin\beta\cos\Theta + \sin\lambda\cos\beta\sin\Theta - \sin\pi\sin\varphi},$$

welcher Ausdruck die Grösse A gar nicht mehr enthält.

Aus diesen allgemeinen Formeln erhält man, wenn die in §. 3. gebrauchten Zeichen auch jetzt ihre dortige Bedeutung behalten:

$$181)\quad \frac{\sin D'}{\sin D} = \frac{\cos\alpha'\cos\delta'}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi} = \frac{\sin\alpha'\cos\delta'}{\sin\alpha\cos\delta - \sin\pi\sin A\cos\varphi} = \frac{\sin\delta'}{\sin\alpha - \sin\pi\sin\varphi}.$$

Eben so hat man, wenn die in §. 6. gebrauchten Zeichen auch jetzt ihre dortige Bedeutung behalten:

Digitized by Google

$$182)\quad \frac{\sin D'}{\sin D} = \frac{\sin \omega' \cos h'}{\sin \omega \cos h}$$
$$= \frac{\cos \omega' \cos h'}{\cos \omega \cos h + \sin \pi \sin (\varphi - \varphi')}$$
$$= \frac{\sin h'}{\sin h - \sin \pi \cos (\varphi - \varphi')}$$
$$= \frac{\sin h' \sin \varphi' - \cos \omega' \cos h' \cos \varphi'}{\sin h \sin \varphi' - \cos \omega \cos h \cos \varphi' - \sin \pi \sin \varphi}.$$

Betrachtet man die Erde als eine Kugel, so ist $\varphi = \varphi'$, und folglich

$$183)\quad \frac{\sin D'}{\sin D} = \frac{\sin h'}{\sin h - \sin \pi}$$

oder

$$184)\quad \frac{\sin D'}{\sin D} = \frac{\sin h'}{2\sin \frac{1}{2}(h - \pi) \cos \frac{1}{2}(h + \pi)}.$$

Unter der in Rede stehenden Voraussetzung ist aber nach §. 6. auch immer $\omega = \omega'$, und folglich nach der ersten und zweiten der Gleichungen 182) auch

$$185)\quad \frac{\sin D'}{\sin D} = \frac{\cos h'}{\cos h}.$$

Endlich hat man, wenn die in §. 8. gebrauchten Zeichen auch jetzt noch ihre dortige Bedeutung behalten:

$$186)\quad \frac{\sin D'}{\sin D} = \frac{\cos \lambda' \cos \beta'}{\cos \lambda \cos \beta - \sin \pi \cos A \cos \varphi}$$
$$= \frac{\sin \lambda' \cos \beta'}{\sin \lambda \cos \beta - \sin \pi (\sin \varepsilon \sin \varphi + \sin A \cos \varepsilon \cos \varphi)}$$
$$= \frac{\sin \beta'}{\sin \beta - \sin \pi (\cos \varepsilon \sin \varphi - \sin A \sin \varepsilon \cos \varphi)}$$
$$= \frac{\sin \beta' \cos \varepsilon + \sin \lambda' \cos \beta' \sin \varepsilon}{\sin \beta \cos \varepsilon + \sin \lambda \cos \beta \sin \varepsilon - \sin \pi \sin \varphi}.$$

Wegen der Kleinheit von D und D' kann man in allen vorhergehenden Formeln näherungsweise

$$\frac{\sin D'}{\sin D} = \frac{D'}{D}$$

setzen.

Digitized by Google

XLI.

Rein geometrische Behandlung der im Archiv der Mathematik und Physik Th. III. Heft 1. S. 40 vorgelegten geodätischen Aufgabe.

Von

Herrn Fr. Seydewitz

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

Aufgabe.

Es seien (Taf. V. Fig. 1.) zwei Punkte M und M_1 gegeben; man soll durch den Punkt M drei unter gegebenen Winkeln gegen einander geneigte gerade Linien MA, MB, MC, durch den Punkt M_1 drei ebenfalls unter gegebenen Winkeln gegen einander geneigte gerade Linien M_1A, M_1B, M_1C so legen, dass das durch die Durchschnittspunkte A, B, C der Linien MA und M_1A, MB und M_1B, MC und M_1C bestimmte Dreieck einem gegebenen Dreiecke ähnlich sei.

Auflösung.

1) Betrachtet man eine jede der Figuren $MABC$ und M_1ABC zunächst für sich und unabhängig von der anderen, z. B. die erstere in der Lage der Figur $MA_1B_1C_1$, und denkt sich durch einen beliebigen Punkt M_1 der Linie MA_1 (oder MB_1, MC_1) mit A_1B_1 und A_1C_1 bezüglich die Parallelen M_1b und M_1c gelegt, welche die Linien MB_1 und MC_1 bezüglich in den Punkten b und c schneiden, so verhält sich:

$$M_1b : A_1B_1 = MM_1 : MA_1 = M_1c : A_1C_1,$$

also

$$M_1b : M_1c = A_1B_1 : A_1C_1.$$

Ferner ist

$$\angle bM_1c = \angle B_1A_1C_1 = \angle BAC.$$

Da nun $\Delta A_1B_1C_1$ oder ABC einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist, so ist das Verhältniss der Linien M_1b und M_1c, und der Winkel Winkel bM_1c gegeben. Es ist aber auch der Punkt M_1 und die gerade Linie MB_1 (MC_1), welcher der Punkt b angehört, gegeben, indem die Linie MA_1 als beliebige, und der Winkel

Digitized by Google

B_1MA_1 gegeben ist; also ist auch, nach einem bekannten Localtheorem, eine gerade Linie $c\gamma$ als Ort des Punktes c gegeben. Dieser Punkt gehört aber auch der Linie MC_1 (MB_1) an, welche durch den Winkel C_1MA_1 gegeben ist; also ist dieser Punkt selbst, und somit sind unter anderen die Winkel MM_1b und MbM_1, und die ihnen gleichen MAB und MBA gegeben. Dasselbe gilt andererseits von den Winkeln M_1AB und M_1BA.

2) Demnach sind auch die Winkel MAM_1 und MBM_1 gegeben, und, da die Punkte M und M_1, so sind auch die Kreise um MAM_1 und um MBM_1 gegeben. Es sind aber auch die Peripherie-Winkel MAB und MBA, folglich die ihnen zugehörigen Bogen dieser Kreise, und somit auf dem Umfange eines jeden ein Punkt S gegeben, in welchem derselbe von der geraden Linie AB geschnitten wird. Also ist die Linie AB der Richtung nach, die Punkte A und B und sonach auch der Punkt C gegeben — oder: weil der Kreis um MAM_1, auf seinem Umfange der Punkt S, und die Winkel MBS und M_1BS gegeben sind, so sind es auch die Kreise um MBS und um M_1BS, also ihr Durchschnittspunkt B, die gerade Linie SB u. s. w.

Konstruktion.

1) Man gebe den geraden Linien Mb und Mc gegen MM_1, und den geraden Linien M_1b_1 und M_1c_1 gegen M_1M bezüglich die Neigungen, welche die Linien MB und MC gegen MA, und die Linien M_1B und M_1C gegen M_1A erhalten sollen. Vom Punkte M_1 fälle man auf eine der Linien Mb, Mc, z. B. auf Mb, die Senkrechte $M_1\beta$, und construire über $M_1\beta$ ein dem gegebenen ähnliches Dreieck $M_1\beta\gamma$, mit Rücksicht auf die Art, wie die Winkel des ersteren den gegebenen Neigungswinkeln der Linien MA, MB, MC entsprechen sollen. Solcher Dreiecke gibt es auf jeder Seite von $M_1\beta$ eines. Auf $M_1\gamma$ errichte man in γ die Senkrechte γc, und verbinde den Punkt c, wo letztere die Linie Mc schneidet, mit M_1 durch M_1c; mache endlich $\angle cM_1b = \angle \gamma M_1\beta$ und verbinde den Punkt b, den Durchschnitt der Linien Mb und M_1b, mit c durch die Linie bc. So erhält man ein Dreieck M_1bc, und durch dasselbe Verfahren in Bezug auf den Punkt M und die Linien M_1b_1, M_1c_1 ein anderes Dreieck Mb_1c_1, welche beide dem gegebenen ähnlich sind.

2) Die entsprechenden Seiten M_1b und Mb_1, M_1c und Mc_1 dieser beiden Dreiecke mögen sich bezüglich in den Punkten S, O schneiden. Man beschreibe nun um die drei Dreiecke MM_1S (oder MM_1O), MbS und M_1b_1S drei Kreise, von denen die beiden letztern sich zum zweiten Mal im Punkte B schneiden, verbinde S mit B durch die gerade Linie SB, die den Kreis um MSM_1 zum zweiten Mal im Punkte A schneidet, endlich den Punkt O mit A durch OA, und den Punkt Q (oder Q_1), wo die Seite bc (oder b_1c_1) den Kreis um MSb (M_1Sb_1) noch einmal schneidet, mit dem Punkte B durch BQ, welche der Linie OA in C begegnet; so sind die Punkte A, B, C die Durchschnitte der gesuchten Linien.

Anmerkung: Da es zwei Dreiecke M_1bc und zwei Dreiecke Mb_1c_1 gibt, so hat die Aufgabe im Allgemeinen vier Auflösungen.

Digitized by Google

Beweis.

1) Da $\angle M_1\gamma c = \angle M_1\beta b = R$, und $\angle \gamma M_1\beta = \angle cM_1b$, also auch $\angle \gamma M_1 c = \angle \beta M_1 b$, so ist $\Delta M_1c\gamma \sim \Delta M_1b\beta$, also verhält sich $cM_1 : bM_1 = \gamma M_1 : \beta M_1$, folglich ist ΔM_1bc dem $\Delta M_1\beta\gamma$ und somit dem gegebenen Dreiecke ähnlich. Ebenso ist ΔMb_1c_1 dem gegebenen ähnlich.

2) Da nun $\angle bM_1c = \angle b_1Mc_1 = \angle SM_1O$, so liegt der Punkt O auf dem Umfange des Kreises um MSM_1; folglich ist

$$\angle BAC = \angle OAS = \angle OM_1S = \angle bM_1c = \angle b_1Mc_1,$$

und

$$\angle CBA = \angle QbS = \angle cbM_1 = \angle c_1b_1M.$$

Also ist das Dreieck ABC dem gegebenen ähnlich.

3) Da einerseits

$$\angle MM_1S = \angle MAS, \text{ und } \angle MbS = \angle MBS;$$

andererseits

$$\angle M_1MS = \angle M_1AS, \text{ und } \angle M_1b_1S = \angle M_1BS;$$

so ist

$$\angle MM_1S - \angle MbS = \angle MAS - \angle MBS \text{ und}$$
$$\angle M_1MS - \angle M_1b_1S = \angle M_1AS - \angle M_1BS, \text{ d. h.}$$
$$\angle bMM_1 = \angle BMA \text{ und } \angle b_1M_1M = \angle BM_1A.$$

4) Da $\Delta MM_1b \sim \Delta MAB$, $\Delta M_1bc \sim \Delta ABC$,
$\Delta M_1Mb_1 \sim \Delta M_1AB$, $\Delta Mb_1c_1 \sim \Delta ABC$,

so verhält sich

$$MM_1 : MA = bM_1 : BA = cM_1 : CA;$$
$$M_1M : M_1A = b_1M : BA = c_1M : CA;$$

also

$$MM_1 : MA = cM_1 : CA;$$
$$M_1M : M_1A = c_1M : CA.$$

Aber auch

$$\angle cM_1M = \angle CAM, \text{ und } \angle c_1MM_1 = \angle CAM_1;$$

folglich

$$\Delta MM_1c \sim \Delta MAC, \text{ und } \Delta M_1Mc_1 \sim \Delta M_1AC,$$

also

$$\angle cMM_1 = \angle CMA, \text{ und } \angle c_1M_1M = \angle CM_1A;$$

q. e. d.

Digitized by Google

XLII.

Einige Sätze von Sechsecken, welche in oder um einen Kegelschnitt beschrieben sind.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

Sei in Taf. V. Fig. 2. *abcdef* ein Sechseck, dessen Spitzen in der Peripherie eines Kegelschnitts liegen. Jede Hauptdiagonale wie *ad* theilt dasselbe in 2 Vierecke *abcd* und *defa*, in welchen wir die einander gegenüberliegenden Seiten verlängern, bis sie die Gerade *ad* in den Punkten α_1 und α_2 schneiden. Verfahren wir ebenso mit den übrigen Hauptdiagonalen und den ihnen gegenüberstehenden Seiten, so entstehen im Ganzen 6 solcher Durchschnitte $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$. Von diesen liegen 3 und 3 in einer Geraden, so dass es zwei solcher Geraden $\alpha_1\beta_2\gamma_2$ und $\alpha_2\beta_1\gamma_1$ giebt, die wir p und q nennen wollen. Nach Pascal's Satz liegen aber auch die Durchschnitte der 3 Paar Gegenseiten, nämlich die Punkte $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, in einer Geraden r. Diese 3 Geraden p, q, r schneiden sich in einem Punkte.

Der vorstehende Doppelsatz lässt sich sehr einfach mit Hülfe der perspectivischen Projektion erweisen, indem man die letztere in ihrer einfachsten Gestalt anwendet, wie dies in einem früheren Aufsatze von mir (Archiv. Band I. S. 248) geschehen ist.

Man nehme zuerst die Gerade $\alpha_1\beta_1$ als Polare des Kegelschnitts an. Dann lässt sich derselbe so projiciren, dass die Projektion ein Kreis ist, in welchem die Geraden AD und BC, BE und AF einander parallel laufen (weil sich die entsprechenden Geraden *ad* und *bc*, *be* und *af* auf der Polare schneiden). Nun sagt aber ein Satz der Elementargeometrie:

> „Zwischen parallelen Sehnen liegen gleiche Kreisbogen“ und umgekehrt: „Sind die Bogen zwischen zwei Sehnen gleich, so laufen die letzteren einander parallel.“

Weil daher in Taf. V. Fig. 3. $AD \parallel BC$, $BE \parallel AF$; so folgt daraus

$$\text{arc } AB = \text{arc } CD, \text{ arc } AB = \text{arc } EF$$

mithin auch

$$\text{arc } CD = \text{arc } EF$$

so dass also $CF \parallel DE$ ist. Der Durchschnitt γ_2 der entsprechen-

Digitized by Google

den Geraden *cf* und *de* in Taf. V. Fig. 2. muss daher mit auf der Polaren $\alpha_1\beta_1$ liegen.

Nimmt man ebenso $\alpha_2\beta_1$ als Polare an, so wird ganz analog gezeigt, dass auch γ_1 auf dieser Geraden liegen muss; und damit ist der erste Theil unseres Satzes bewiesen, dass nämlich sowohl $\alpha_1\beta_2\gamma_2$ als $\alpha_2\beta_1\gamma_1$ eine Gerade bilden.

Es werde jetzt die Gerade $\delta_1\delta_2\delta_3$, in welcher die Durchschnitte der Gegenseiten liegen, als Polare angenommen und demgemäss der Kegelschnitt projizirt. Es entspricht ihm dann in Taf. V. Fig. 4. ein Kreis mit einem Sehnensechseck, dessen Gegenseiten einander paarweis parallel laufen. Auch von diesem muss der obenbewiesene Satz gelten, dass nämlich sowohl $\alpha_1\beta_2\gamma_2$ als $\alpha_2\beta_1\gamma_1$ in einer Geraden liegen. Die gegenseitige Lage dieser beiden Geraden ist leicht zu ermitteln. Denn man hat $\Delta\, AH\gamma_1 \sim \Delta\, DH\gamma_2$, $\Delta\, CH\alpha_1 \sim \Delta\, FH\alpha_2$, endlich $\Delta\, AHF \sim \Delta\, CHD$, woraus der Reihe nach die Proportionen fliessen:

$$AH : H\gamma_1 = DH : H\gamma_2$$
$$CH : H\alpha_1 = FH : H\alpha_2$$
$$AH : DH = FH : CH.$$

Durch Vergleichung der letzteren mit den beiden ersten hat man

$$H\gamma_1 : H\gamma_2 = H\alpha_2 : H\alpha_1$$

oder

$$H\gamma_1 : H\alpha_2 = H\gamma_2 : H\alpha_1$$

woraus folgt, dass $\alpha_2\gamma_1 \parallel \alpha_1\gamma_2$, also auch die Gerade $\alpha_1\beta_2\gamma_2 \parallel \alpha_2\beta_1\gamma_1$ ist, mithin die gleichnamigen Geraden in Taf. V. Fig. 2. sich auf der Polare $\delta_1\delta_2\delta_3$ schneiden. D. h. die 3 Geraden $\alpha_1\beta_2\gamma_2$, $\alpha_2\beta_1\gamma_1$ und $\delta_1\delta_2\delta_3$ schneiden sich in einem Punkte w. z. b. w.

Vermöge der „théorie des polaires réciproques" leitet man daraus den folgenden Satz ab.

Sei abcdef ein beliebiges einem Kegelschnitt umschriebenes Sechseck, dessen Seiten ab, bc, .. u. s. w. der Reihe nach *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* heissen mögen. Von den Durchschnitten je zweier Gegenseiten *a* und *d*, *b* und *e*, *c* und *f* ziehe man Gerade nach den jedesmaligen beiden übrigen Ecken des Sechsecks; also vom Durchschnitt (*ad*) nach c und f u. s. f. So entstehen 6 Gerade, diese schneiden sich zu 3 und 3 in einem Punkte, so dass es zwei solcher Punkte *p*, *q* giebt.

Nach Brianchon's Satz schneiden sich auch die 3 Hauptdiagonalen des Tangentensechsecks in einem Punkte *r*. Diese 3 Punkte *p*, *q*, *r*, liegen in einer Geraden.

Ein anderer mittelst der nämlichen Principien leicht zu erweisender Satz ist folgender.

In einem Sehnensechseck verlängere man diejenigen Diagonalen, welche von demselben ein Dreieck abschneiden, bis sich die einander gegenüberliegenden Diagonalen dieser Art schneiden. Man nenne ε_1 den Durchschnitt von *bf* und *ce*, ε_2 den von *ac* und *df*, ε_3 den von *bd* und *ae*. Je zwei dieser Punkte liegen mit einem der Durchschnitte der Gegenseiten δ_1, δ_2, δ_3 in einer Geraden. Es giebt daher 3 solcher Geraden, nämlich $\varepsilon_1\varepsilon_2\delta_3$, $\varepsilon_1\varepsilon_3\delta_2$, $\varepsilon_2\varepsilon_3\delta_1$.

Digitized by Google

In einem Tangentensechseck, dessen Seiten a, b, c, d, e, f heissen mögen, verbinde man mit einander die Durchschnitte der Seiten b, f und c, e, der Seiten c, a und d, f, und der Seiten d, b und e, a. So entstehen 3 Gerade ε_1, ε_2, ε_3. Sind ferner δ_1, δ_2, δ_3 die 3 Hauptdiagonalen des Sechsecks, so schneiden sich je zwei der Geraden ε mit einer der Diagonalen δ in einem Punkte.

XLIII.

Ueber ausgezeichnete Sehnen im Kreise, die durch einen bestimmten Punkt gehen.

Von dem

Herrn Doctor Büchner

Lehrer der Mathematik am Herzoglichen Gymnasium zu Hildburghausen.

Von den Ergebnissen der folgenden Untersuchung finden sich hin und wieder einige in geometrischen Werken angeführt, der Verfasser kann sich aber nicht erinnern, diese alle, und zugleich unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt vereinigt, vorgefunden zu haben. Es waren sogar ihm etliche gänzlich neu und daher Grund, warum er die Frage in grösserer Ausdehnung der Untersuchung unterwarf. Auch der einfache gewöhnliche Weg, welchen er einschlug, wurde nicht ohne Ursache gewählt, da andere nicht so viele Antworten auf ein Mal darboten.

Wenn durch einen beliebig zu wählenden Punkt (γ, δ) eine gerade Linie so gelegt werden soll, dass sie einen gegebenen Kreis durchschneidet und dass die so entstehende Sehne einen ausgezeichneten Werth erhält, welchen Winkel muss sie mit der Abscissenaxe bilden?

Ist die Gleichung des gegebenen Kreises vom Mittelpunkte aus genommen: $y^2 + x^2 = r^2$, γ, δ Ordinate und Abscisse des willkührlich zu bestimmenden Punktes, und nimmt man letzteren noch zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so wird aus der ersten $(y+\gamma)^2 + (x+\delta)^2 = r^2$. Die trigonometrische Tangente des Winkels, unter welchem die Sehne die Abscissenaxe schneidet, heisse kurz z, so folgt für die Gleichung der in Rede stehenden Geraden: $y = zx$, wofern $\angle z$ kleiner als 90° vorausgesetzt wird. Dann folgt:

$$(zx+\gamma)^2 + (x+\delta)^2 = r^2,$$

Digitized by Google

daher

$$(z^2+1)x^2+2(z\gamma+\delta)x=r^2-\delta^2-\gamma^2,$$

daraus ergeben sich die zwei Abscissen der Durchschnittspunkte der eingelegten Linie mit dem Kreise, oder

$$\left.\begin{matrix}x\\x'\end{matrix}\right\}=\frac{-(z\gamma+\delta)\pm\sqrt{[(r^2-\delta^2-\gamma^2)\ (z^2+1)+(z\gamma+\delta)^2]}}{z^2+1},$$

somit die zugehörigen Ordinaten:

$$\left.\begin{matrix}y\\y'\end{matrix}\right\}=\frac{z(-(z\gamma+\delta)\pm\sqrt{[(r^2-\delta^2-\gamma^2)\ (z^2+1)+(z\gamma+\delta)^2])}}{z^2+1}.$$

Die Länge T der Sehne im Kreise aber wird durch

$$T=\sqrt{[(y-y')^2+(x-x')^2]}$$
$$=\frac{2\sqrt{[(1+z^2)\ ((r^2-\delta^2-\gamma^2)\ (z^2+1)+(z\gamma+\delta)^2)]}}{z^2+1}$$
$$=\frac{2\sqrt{[(r^2-\delta^2)\ z^2+2\gamma\delta z+(r^2-\gamma^2)]}}{\sqrt{(z^2+1)}}=2\sqrt{\left[r^2-\frac{(z\delta-\gamma)^2}{z^2+1}\right]}$$
$$=2\sqrt{[r^2-(\gamma\ \mathrm{Cos}\ z-\delta\ \mathrm{Sin}\ z)^2]}$$

sich ausdrücken lassen.

Hieraus folgt:

$$\frac{dT}{dz}=\frac{\sqrt{(z^2+1)\ [\gamma\delta z^4+(\delta^2-\gamma^2)z^3-(\gamma^2-\delta^2)z-\gamma\delta]}}{\sqrt{[(r^2-\delta^2)z^2+2\gamma\delta z+(r^2-\gamma^2)]}}.$$

Setzt man dieses $=0$, so folgt, wofern man die positiven Werthe von T berücksichtigt:

$$1)\ z^2+1=0;\ z=\sqrt{-1},$$
$$2)\ \mathrm{Sec}\ z^2=0.$$

Der Nenner bringt

$$3)\ z=\frac{-\gamma\delta\pm\sqrt{[\gamma^2\delta^2-(r^2-\gamma^2)\ (r^2-\delta^2)]}}{r^2-\delta^2}=\frac{-\gamma\delta\pm r\sqrt{(\gamma^2+\delta^2-r^2)}}{r^2-\delta^2}.$$

Dieser letzte Werth ist die trigonometrische Tangente des Winkels einer von dem Punkte (γ, δ) aus an den Kreis gehenden Berührenden. Ist aber

$$4)\ \gamma\delta z^4+(\delta^2-\gamma^2)z^3-(\gamma^2-\delta^2)z-\gamma\delta=0,$$

so wird dieser Werth sehr verschiedene Antworten auf unsere Frage geben, je nachdem $\delta\gtrless\gamma$ angenommen wurde. Es sei fürs Erste $\delta>\gamma$, also $\gamma\delta z^4+(\delta^2-\gamma^2)z^3+(\gamma^2-\delta^2)z-\gamma\delta=0$, so folgt: a) $z=+1$; b) $z=-1$; c) $z=\frac{\gamma^2-\delta^2\pm\sqrt{[(\gamma^2-\delta^2)^2-4\gamma^2\delta^2]}}{2\gamma\delta}$. Dieser letzte Ausdruck bleibt brauchbar so lange: $(\gamma^2-\delta^2)^2>4\gamma^2\delta^2$ ist.

Ueber die Art der eminenten Werthe in diesen Fällen gibt:

Digitized by Google

$$\frac{d^2T}{dz^2} = \frac{-4\gamma\delta z^3 - 3(\delta^2-\gamma^2)z^2 + (\delta^2-\gamma^2)}{T}$$

Bescheid. Für $z = +1$ wird: $\frac{d^2T}{dz^2} = \frac{(\gamma-\delta)^2 - 2\delta^2}{T}$, für $z = -1$ aber: $\frac{d^2T}{dz^2} = \frac{(\gamma+\delta)^2 - 2\delta^2}{T}$. Es ergiebt sich demnach im ersten Falle wofern: $(\gamma-\delta)^2 \lessgtr 2\delta^2$ oder wofern $\gamma \lessgtr \delta(\pm\sqrt{2}+1)$, im zweiten Falle, wofern: $(\gamma+\delta)^2 \lessgtr 2\delta^2$ oder $\gamma \lessgtr \delta(\pm\sqrt{2}-1)$ ist, für das obere Zeichen ein Maximum, für das untere Zeichen ein Minimum, sobald T positiv ist, wie vorausgesetzt wurde.

Für $z = \frac{(\gamma^2-\delta^2) \pm \sqrt{[(\gamma^2-\delta^2)^2 - 4\gamma^2\delta^2]}}{2\gamma\delta}$ wird

$$\frac{d^2T}{dz^2} = -\frac{[((\gamma^2-\delta^2)^2 - 4\gamma^2\delta^2)\ ((\gamma^2-\delta^2) \pm \sqrt{(\gamma^2-\delta^2)^2 - 4\gamma^2\delta^2})]}{4\gamma^2\delta^2 T}$$

$$= -\frac{[(\gamma^2-\delta^2)^2 - 4\gamma^2\delta^2]z}{2\gamma\delta T}.$$

Hier gibt es demnach sowohl Maxima als Minima, je nachdem γ, δ, z das Zeichen ändert. Der Werth $(\gamma^2-\delta^2)^2 - 4\gamma^2\delta^2$ muss stets positiv bleiben, damit z möglich wird, T wurde positiv vorausgesetzt, und es hängt somit das Zeichen von $\frac{d^2T}{dz^2}$ bloss von denen des γ, δ und z ab. Die Grösse der ausgezeichneten Sehne wird hierfür aber:

$$T = \sqrt{\{4r^2 - \frac{[\gamma^2+\delta^2 \mp \sqrt{((\gamma^2-\delta^2)^2 - 4\gamma^2\delta^2)}]^2}{[\gamma^2 \pm \sqrt{((\gamma^2-\delta^2)^2 - 4\gamma^2\delta^2)}]\ (\gamma^2-\delta^2)}}$$

Für $z = \pm 1$ lässt sich die Lage der Sehnen durch eine einfache Construction leicht anschaulich machen. Der allgemeine Ausdruck: $T = 2\sqrt{[r^2 - (\gamma \operatorname{Cos} z - \delta \operatorname{Sin} z)^2]}$ kann, je nachdem nämlich γ oder δ positiv oder negativ angenommen wird, durch die einzelnen Quadranten nur folgende Formen:

$$T = 2\sqrt{[r^2 - (\pm\gamma \operatorname{Cos} z \pm \delta \operatorname{Sin} z)^2]}$$

oder

$$T = 2\sqrt{[r^2 - (\pm\gamma \operatorname{Sin} z \pm \delta \operatorname{Cos} z)^2]}$$

haben. Ist nun in Taf. V. Fig. 5.: $FD = \gamma$, $CD = \delta$ und FA die unter dem Winkel $z = \angle FED$ durch den Kreis gehende Sehne, CM so wie DL perpendikulär zu dieser Linie, läuft ferner CL parallel derselben, so wird: $DK = \gamma \operatorname{Cos} z$, $DL = \delta \operatorname{Sin} z$, somit $KL = CM = \gamma \operatorname{Cos} z - \delta \operatorname{Sin} z$,

$$AB = 2\sqrt{[r^2 - (\gamma \operatorname{Cos} z - \delta \operatorname{Sin} z)^2]} = T.$$

Legt man aber Sehne PQ unter dem Winkel $z = \angle QHS$ ein, indem $TG = \gamma$, $CT = \delta$ genommen wird, fällt von C das Perpendikel CN auf PQ und zieht TR parallel hiermit, TW aber

Digitized by Google

perpendikulär zu CN, so folgt: $CW = \delta \operatorname{Sin} x$, $TR = \gamma \operatorname{Cos} x$, also $CN = \delta \operatorname{Sin} x + \gamma \operatorname{Cos} x$, daher ferner

$$PQ = 2\sqrt{[r^2 - (\delta \operatorname{Sin} x + \gamma \operatorname{Cos} x)^2]}.$$

Für $\angle x = 45°$ wird $\operatorname{Cos} x = \operatorname{Sin} x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{Tang} x = 1$;

$T = 2\sqrt{[r^2 - \frac{(\gamma + \delta)^2}{2}]}$. Für $\operatorname{Tang} x = -1$ kommt aber $T = 2\sqrt{[r^2 - \frac{(\gamma - \delta)^2}{2}]}$. Zieht man demnach AB durch den gegebenen Punkt (γ, δ), oder auch PQ durch denselben parallel mit den Seiten eines im Kreise gezeichneten Quadrates, so sind dieses die gewünschten eminenten Sehnen für Fall a) und b).

Weniger kurz wird die Construction für:

$$x = \frac{\gamma^2 - \delta^2 \pm \sqrt{[(\gamma^2 - \delta^2)^2 - 4\gamma^2\delta^2]}}{2\gamma\delta},$$

oder für c) unter Nr. 4.; indessen gelingt sie, wenn man die Bedingung: $(\gamma^2 - \delta^2)^2 > 4\gamma^2\delta^2$ einhält und

$$x = \frac{\gamma}{2\delta} - \frac{\delta}{2\gamma} \pm \sqrt{(\left(\frac{\gamma}{2\delta} - \frac{\delta}{2\gamma}\right)^2 - 1)}$$

auf die Form:

$$x = m - n \pm \sqrt{((m - n) + 1)\ ((m - n) - 1)}$$

bringt, oder wofern man, und was noch mehr Klarheit über die Lage der durch diesen Werth bedingten Sehne verbreitet, folgender Betrachtung folgt. Nennt man den Winkel der Geraden, welche den Mittelpunkt des Kreises und den Punkt (γ, δ) verbindet, mit dem der Abscissenaxe parallelen Radius v, so wird $\frac{\gamma}{\delta} = \operatorname{Tg} v$, daher:

$$x = \frac{\operatorname{Tg} v - \operatorname{Cot} v}{2} \pm \sqrt{(\left(\frac{\operatorname{Tg} v - \operatorname{Cot} v}{2}\right)^2 - 1)}$$

$$= -\operatorname{Cot} 2v \pm \sqrt{((\operatorname{Cot} 2v)^2 - 1)}.$$

Wäre in Taf. V. Fig. 5. nun $CE = EF$, $\angle FCE = \angle EFC = w$, so folgte $\angle FED = 2w = \angle x$, somit $\operatorname{Tg} x = \operatorname{Tg} 2w = \frac{2\operatorname{Tg} w}{1 - (\operatorname{Tg} w)^2}$, woraus ferner $\operatorname{Tg} w = -\operatorname{Cot} 2w \pm \sqrt{((\operatorname{Cot} 2w)^2 + 1)}$ sich ergibt. Der obige Werth von x lässt sich leicht auf diese Form zurückführen, sobald man nur: $\operatorname{Cot} 2v = \pm\sqrt{((\operatorname{Cot} 2w)^2 + 1)}$ setzt. Dann kommt: $\mp\sqrt{((\operatorname{Cot} 2w)^2 + 1)} \pm \operatorname{Cot} 2w = x$. Da nun w ein ganz willkührlicher Winkel ist, so gibt die Substitution: $\operatorname{Cot} 2v = \pm\sqrt{((\operatorname{Cot} 2w)^2 + 1)} = \pm\frac{1}{\operatorname{Sin} 2w}$ oder $\pm\operatorname{Sin} 2w = \operatorname{tg} 2v$ für v auch alle mögliche Grössen. Es entspricht demnach

Digitized by Google

$\text{Cot } 2w = \text{Cot } 45° = 1$; durch diese Substitution: $\text{Cot } 2v = \sqrt{2} = \text{Cot } 35° 16'$;

$\text{Cot } 2w = \text{Cot } 26° 33' = 2$; - - - $\text{Cot } 2v = \sqrt{5} = \text{Cot } 24° 6'$;

$\text{Cot } 2w = \text{Cot } 18° 26' = 3$; - - - $\text{Cot } 2v = \sqrt{10} = \text{Cot } 17° 33'$.

Allgemein, da immer $2v = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \lg \left[\frac{1 + \text{Tg } 2v\sqrt{-1}}{1 - \text{Tg } 2v\sqrt{-1}}\right]$, so folgt $2v = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \lg \left[\frac{1 \pm \text{Sin } 2w\sqrt{-1}}{1 \mp \text{Sin } 2w\sqrt{-1}}\right]$, wovon zwar hier immer nur der eine Werth, weiter unten aber auch der andere seine Verwendung findet. Lässt sich mit dieser Substitution noch die Bedingung: $(\text{Cot } 2v)^2 \gtreqless 1$, somit: $(\text{Cot } 2w)^2 \gtreqless 0$, vereinigen, so ist die Lage der Sehne immer möglich. Letzteres verlangt aber nur: $2w \lesseqgtr 90°$, und es wird $\angle z$ der Aussenwinkel in einem gleichschenkligen Dreieck, von dessen gleichen Winkeln jeder v ist.

Digitized by Google

Dieses alles tritt ein, wofern $\gamma < \delta$ gesetzt wird, was sich recht gut mit $(\gamma^2 - \delta^2)^2 > 4\gamma^2\delta^2$ verträgt.

Nimmt man in der Formel:

$$\gamma\delta z^4 + (\delta^2 - \gamma^2)z^3 - (\gamma^2 - \delta^2)z - \gamma\delta = 0$$

aber $\gamma > \delta$, so genügt derselben: $z = \frac{\gamma}{\delta}$ und $z = -\frac{\delta}{\gamma}$, nebst:

$$z = \frac{\delta^2 - \gamma^2}{2\gamma\delta} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\delta^2 - \gamma^2}{2\gamma\delta}\right)^2 - 1\right]} = \frac{\delta}{2\gamma} - \frac{\gamma}{2\delta} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\delta}{2\gamma} - \frac{\gamma}{2\delta}\right)^2 - 1\right]}$$

$$= \frac{\operatorname{Cot} v - \operatorname{Tg} v}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\operatorname{Cot} v - \operatorname{Tg} v}{2}\right)^2 - 1\right]}$$

$$= \operatorname{Cot} 2v \pm \sqrt{[(\operatorname{Cot} 2v)^2 - 1]},$$

nach den oben gemachten Voraussetzungen. Die ersten beiden Werthe geben für: T stets $2r$ und $2\sqrt{[r^2 - (\gamma^2 + \delta^2)]}$. Auf den letzten lassen sich aber die oben angegebenen Betrachtungen wieder in Anwendung bringen. $T = 2\sqrt{[r^2 - (\gamma^2 + \delta^2)]}$ ist eine kleinste Sehne, wie sich leicht an Taf. V. Fig. 6. zeigen lässt. Ist nämlich $CD = \delta$, $DE = \gamma$, so entspricht die auf CE senkrechte Linie MN dem eben genannten Werthe von T. Jede andere Sehne aber, wie PQ hat, wegen $CL < EC$, wofern CL perpendikulär zu QP steht, auch eine grössere Länge als MN. Dieses ist der Fall, welcher in manchen Lehrbüchern allein, als eine ausgezeichnete Sehne gebend, angeführt wird.

Endlich bringt noch für die vorige Gleichung 4). c): $\gamma = \delta$, $z = \pm\sqrt{-1}$ und $z = \pm 1$ und somit $T = 2r$.

Liegt der Punkt (γ, δ) auf der Peripherie des Kreises, oder ist $\sqrt{(\gamma^2 + \delta^2)} = r$, folglich $\frac{\gamma}{\delta} = z$, $T = 2r$, ebenfalls ein bekannter Fall.

Die ganze Untersuchung gibt nun unter der Voraussetzung, dass $\angle z > 90°$ ist, im Allgemeinen drei wesentlich verschiedene von demselben Punkte durch den Kreis gehende ausgezeichnete Sehnen, abgesehen von der nur unter Umständen als kleinstes anzusehenden Berührenden.

Setzt man gleich anfänglich $\angle z$ grösser als $90°$, also etwa $= 90° + z'$ voraus, so kommt für Tang z nun überall: $-\operatorname{Cot} z'$, was zwar 4). a) und 4). b) nicht, wohl aber 4). c) wesentlich ändert. Wir erhalten im letzten Falle:

$$\operatorname{Tang} z' = \frac{-2\gamma\delta}{\gamma^2 - \delta^2 \pm \sqrt{[(\gamma^2 - \delta^2)^2 - 4\gamma^2\delta^2]}}.$$

Aus 3) der Berührenden wird jetzt eine Normale, ein Resultat, was in mehren Lehrbüchern wieder als einzige ausgezeichnete Sehne angeführt sich vorfindet. Es ist leicht dieses auf andere Weise aufzufinden. Aus $T = \sqrt{[(y-\gamma)^2 + (x-\delta)^2]}$ folgt nämlich, wenn y und x Coordinaten der Peripherie, wie oben, bedeuten, wegen $y^2 + x^2 = r^2$, also wegen $y = f(x)$, $\frac{dT}{dx} = \frac{(y-\gamma)\frac{dy}{dx} + (x-\delta)}{\sqrt{[(y-\gamma)^2 + (x-\delta)^2]}}$, wovon der Zähler $= 0$ genommen, die Gleichung einer vom Punkte

Digitized by Google

(γ, δ) aus an den Kreis gezogene Normale, wie bekannt, darstellt. Wegen $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ ergibt sich: $x\gamma - y\delta = 0$, $\frac{y}{x} = \frac{\gamma}{\delta}$, was $T = 2r$ bringt.

Lässt man $\angle z > 180°$ werden, so ändert sich in den anfänglichen Bestimmungen (für den ersten Quadranten) nichts, wohl aber für $\angle z > 270°$, was alles leicht zu übersehen ist.

XLIV.

Anderer Beweis für die beiden Theoreme in Thl. III. Nr. XXXV.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin.

Wenn

$$z^{2n} + A_1 z^{2n-1} + A_2 z^{2n-2} + \ldots\ldots + A_2 z^2 + A_1 z + 1 =$$
$$(z^2 + \alpha_1 z + 1)\ (z^2 + \alpha_2 z + 1) \ldots\ldots (z^2 + \alpha_n z + 1)$$

gesetzt wird, so ist

1) $A_m = C_m + (n - m + 2)_1\ C_{m-2} + (n - m + 4)_2\ C_{m-4} + \ldots\ldots$

2) $C_m = A_m - [(n - m + 1)_1 + (n - m)_0]\ A_{m-2}$
$+ [(n - m + 2)_2 + (n - m + 1)_1]\ A_{m-4}$
$- [(n - m + 3)_3 + (n - m + 2)_2]\ A_{m-6} + \ldots\ldots,$

wo C_m die Summe der Producte zu m aus den Elementen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ist.

Beweis. 1) Man hat bekanntlich

$$(z^2 + \alpha_1 z + 1)\ (z^2 + \alpha_2 z + 1) \ldots\ldots (z^2 + \alpha_n z + 1) =$$
$$(z^2 + 1 + \alpha_1 z)\ (z^2 + 1 + \alpha_2 z) \ldots\ldots (z^2 + 1 + \alpha_n z) =$$
$$(z^2 + 1)^n + C_1 (z^2 + 1)^{n-1} z + C_2 (z^2 + 1)^{n-2} z^2 + \ldots\ldots + C_n z^n.$$

Da nun A_m der Coeffizient von z^m in der Entwickelung dieses Ausdrucks ist, so darf man, um A_m zu finden, nur die mit z^m behafteten Glieder in der Entwickelung jedes einzelnen Summanden jenes Ausdrucks ausscheiden. Es enthalten aber die auf das Glied $C_m (z^2 + 1)^{n-m} z^m$ folgenden Glieder offenbar nur höhere Potenzen

Digitized by Google

von z als die $m$te. Das genannte Glied enthält die Potenz $C_m z^m$; das vorhergehende Glied $C_{m-1}(z^2+1)^{n-m+1}z^{m-1}$ enthält keine Potenz z^m, weil $(z^2+1)^{n-m+1}$ nur gerade Potenzen von z enthält. Das nächstvorhergehende Glied $C_{m-2}(z^2+1)^{n-m+2}z^{m-2}$ enthält die Potenz $(n-m+2)_1 C_{m-2}z^m$; und so abwechselnd weiter: 0, $(n-m+4)_2 C_{m-4}z^m$, 0, $(n-m+6)_3 C_{m-6}z^m$, 0, ... Folglich hat man

$$A_m = C_m + (n-m+2)_1 C_{m-2} + (n-m+4)_2 C_{m-4} + \ldots\ldots$$

2) Fügt man in der vorgegebenen Gleichung links die gleichweit von der Mitte abstehenden Glieder zu je einem Gliede zusammen, dividirt dann beiderseits durch z^n und setzt zur Abkürzung $z+z^{-1}=x$, so erhält man, wenn der Gleichförmigkeit wegen $1=A_0$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} &A_0(z^n+z^{-n}) + A_1(z^{n-1}+z^{-n+1}) + \ldots + A_{n-1}(z+z^{-1}) + A_n \\ &\quad = (z+z^{-1}+\alpha_1)\,(z+z^{-1}+\alpha_2)\ldots(z+z^{-1}+\alpha_n) \\ &\quad = (x+\alpha_1)\,(x+\alpha_2)\ldots(x+\alpha_n) \\ &\quad = x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n. \end{aligned}$$

Um nun C_m zu finden, darf man nur den ersten dieser Ausdrücke nach Potenzen von x entwickeln. Zu diesem Behufe setze man anstatt A_0, A_1 .... A_n beziehlich u^n, u^{n-1}, ... u^0. Es ist klar dass wenn man den so entstehenden Ausdruck

$$(A)\ldots u^0 + (z+z^{-1})u + (z^2+z^{-2})u^2 + \ldots + (z^n+z^{-n})u^n$$

in Bezug auf x und u entwickelt und dann für u^0, u, ... u^n beziehlich wieder A_n, A_{n-1} .... A_0 einsetzt, die verlangte Entwickelung erhalten werden wird. Die beiden geometrischen Progressionen des letztgenannten Ausdrucks sind leicht zu summiren, und man erhält

$$1 + \frac{zu - z^{n+1}u^{n+1}}{1-zu} + \frac{z^{-1}u - z^{-n-1}u^{n+1}}{1-z^{-1}u}$$

oder nach ausgeführter Addition

$$\frac{1-u^2}{1-xu+u^2} + \frac{(z^n+z^{-n})u^{n+2} - (z^{n+1}+z^{-n-1})u^{n+1}}{1-xu+u^2}.$$

Der zweite dieser Brüche hat in seiner Entwickelung nur höhere Potenzen von u als die $n$te. Da aber der ganze Ausdruck keine solchen Potenzen enthält, so folgt dass dieser zweite Bruch sich gegen die höheren Potenzen von u in der Entwickelung des ersten Bruchs $\frac{1-u^2}{1-xu+u^2}$ hebt, und dass also die verlangte Entwickelung des Ausdrucks (A) aus den ersten Gliedern der Entwickelung von $\frac{1-u^2}{1-xu+u^2}$ bis zur $n$ten Potenz von u einschliesslich besteht. Diese Entwickelung ist nun

$$\begin{aligned} &1 + u(x-u) + u^2(x-u)^2 + u^3(x-u)^3 + \ldots. \\ &- u^2 - u^3(x-u) - u^4(x-u)^2 - u^5(x-u)^3 - \ldots. \end{aligned}$$

Sammelt man in diesem Ausdrucke die $(n-m)$ten Potenzen von x zusammen, so findet sich dass in den beiden Reihen die Glieder

Digitized by Google

$u^{n-m}(x-u)^{n-m}$ und $-u^{n-m+2}(x-u)^{n-m}$ beziehlich die ersten sind, welche eine solche Potenz enthalten, und dass der Coeffizient von x^{n-m} daher folgendermassen ausgedrückt ist:

$$u^{n-m} - (n-m+1)_1 u^{n-m+2} + (n-m+2)_2 u^{n-m+4} - \ldots.$$
$$- u^{n-m+2} + (n-m+1)_1 u^{n-m+4} - \ldots.$$

wo die Potenzen von u nur bis zur $n$ten einschliesslich fortzusetzen sind. Setzt man endlich für u^{n-m}, u^{n-m+2}, ... beziehlich wieder A_m, A_{m+2}, ... ein, so ergiebt sich der Coefficient von x^{n-m}, nämlich C_m,

$$C_m = A_m - [(n-m+1)_1 + (n-m)_0]A_{m-2}$$
$$+ [(n-m+2)_2 + (n-m+1)_1]A_{m-4} - \ldots.$$

Anmerkung. Setzt man $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 0$, während $A_0 = 1$ bleibt, so erhält man

$$C_0 = 1,\ C_1 = 0,\ C_2 = -[(n-1)_1 + (n-2)_0],\ C_3 = 0,$$
$$C_4 = [(n-2)_2 + (n-3)_1],\ C_5 = 0,$$
$$C_6 = -[(n-3)_3 + (n-4)_2], \ldots.$$

folglich die bekannte Entwickelung

$$z^n + z^{-n} = x^n - [(n-1)_1 + (n-2)_0]x^{n-2}$$
$$+ [(n-2)_2 + (n-3)_1]x^{n-4} - \ldots.$$

oder $x = 2\cos y$ gesetzt, wodurch $z = \cos y + i \sin y$ wird,

$$2\cos ny = (2\cos y)^n - [(n-1)_1 + (n-2)_0]\ (2\cos y)^{n-2}$$
$$+ [(n-2)_2 + (n-3)_1]\ (2\cos y)^{n-4} - \ldots,$$

welche auch hätte zu Hülfe genommen werden können, um unmittelbar zum erwünschten Resultate zu gelangen.

Zusatz. In den oben bewiesenen beiden Formeln sind die Summen der Producte der Wurzeln der einen von den beiden Gleichungen

$$z^{2n} + A_1 z^{2n-1} + A_2 z^{2n-2} + \ldots + A_2 z^2 + A_1 z + 1 = 0,$$
$$x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n = 0$$

durch die der andern ausgedrückt. Die Formeln für die Potenzsummen der Wurzeln derselben Gleichungen sind eben so leicht herstellbar und einfach. Bezeichnet nämlich S_m die Summe der $m$ten Potenzen der Wurzeln der ersten Gleichung, s_m die der zweiten, so findet sich:

$$s_m = S_m + mS_{m-2} + m_2 S_{m-4} + \ldots.$$

$$S_m = s_m - [(m-1)_1 + (m-2)_0]s_{m-2}$$
$$+ [(m-2)_2 + (m-3)_1]s_{m-4} - \ldots.$$

In der ersten muss das letzte Glied um die Hälfte vermindert werden, wenn m gerade ist.

Digitized by Google

XLV.

Bemerkung über eine von Ivori gefundene Eigenschaft convokaler Ellipsoide.

Von dem

Herrn Doctor Haedenkamp

Oberlehrer am Gymnasium zu Hamm in Westphalen.

Bekanntlich hat Ivori gefunden, dass es auf zweien convokalen Ellipsoiden je 2 correspondirende Punkte gebe, welche die Eigenschaft haben, dass die von diesen Punkten nach zweien anderen correspondirenden Punkten gezogenen Radien immer wieder gleich sind. Ich will hier zeigen, dass diese sogenannten correspondirenden Punkte die Durchschnittspunkte der beiden convokalen Hyperboloide (mit gebrochener und ununterbrochener Höhlung) mit den beiden convokalen Ellipsoiden sind. Man kann diesen Satz leicht aus der von Ivori selbst geführten Analyse herleiten. Der folgende Beweis deckt noch einige merkwürdige Beziehungen der 3 convokalen Oberflächen zweiter Ordnung auf.

Bezeichnen a, b, c die Quadrate der halben Axen eines Ellipsoids und x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes desselben. Legt man durch den Mittelpunkt des Ellpsoids eine Ebene, die parallel mit der durch (xyz) gelegten Tangenten-Ebene ist; so werden die Quadrate der halben Axen dieses Schnittes die wir durch r_1, r_2 bezeichnen, durch die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x^2}{a-r}+\frac{y^2}{b-r}+\frac{z^2}{c-r}=1$$

bestimmt. Drückt man die Coordinaten xyz durch diese Axen aus, so hat man folgende, für viele Untersuchungen wichtige, Coordinaten-Transformation:

$$1.\quad x^2=\frac{a(a-r_1)\,(a-r_2)}{(a-b)\,(a-c)},\quad y^2=\frac{b(b-r_1)\,(b-r_2)}{(b-a)\,(b-c)},$$

$$z^2=\frac{c(c-r_1)\,(c-r_2)}{(c-a)\,(c-b)}.$$

Legt man nun durch den Punkt (xyz) die beiden Hyperboloiden mit gebrochener und ununterbrochener Höhlung, die dem gegebenen Ellipsoide convokal sind, und nennt man die Quadrate der halben Axen derselben $a_1b_1c_1$ und $a_2b_2c_2$, so werden dieselben folgendermassen durch die Axen des Schnittes ausgedrückt,

Digitized by Google

$$2.\begin{cases} a_1 = a - r_1, \; b_1 = b - r_1, \; c_1 = c - r_1; \\ a_2 = a - r_2, \; b_2 = b - r_2, \; c_2 = c - r_2; \end{cases}$$

daher wird auch nach (1):

$$3. \quad x^2 = \frac{aa_1a_2}{(a-b)\,(a-c)}, \; y^2 = \frac{bb_1b_2}{(b-c)\,(b-a)}, \; z^2 = \frac{cc_1c_2}{(c-a)\,(c-b)}.$$

Die beiden Tangenten-Ebenen im Punkte (xyz) an die beiden confokalen Hyperboloiden gelegt, schneiden die Tangenten-Ebene, welche man in demselben Punkte (xyz) an das Ellipsoid legt, in Linien, die der Richtung der Axen des Schnittes parallel sind. Nennt man die Determinanten dieser Linien (die Abscissen der Winkel die diese Linien mit den Axen bilden, $\xi\eta\zeta$ und $\xi_1\eta_1\zeta_1$, so erhält man leicht

$$\xi = \frac{x}{a_1}\Theta, \; \eta = \frac{y}{b_1}\Theta, \; \zeta = \frac{z}{c_1}\Theta,$$

$$\xi_1 = \frac{x}{a_2}\Theta_1, \; \eta_1 = \frac{y}{b_2}\Theta_1, \; \zeta_1 = \frac{z}{c_2}\Theta_1;$$

wo

$$\frac{1}{\Theta^2} = \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = \frac{(r_1 - r_2)^2}{a_1b_1c_1},$$

$$\frac{1}{\Theta_1^2} = \frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} + \frac{z^2}{c_2^2} = \frac{(r_2 - r_1)^2}{a_2b_2c_2}.$$

Θ und Θ_1 sind die auf die genannte Tangenten-Ebene gefällten Perpendikel.

Da die Durchschnittslinien der Hyperboloiden mit dem Ellipsoide Krümmungslinien sind, so ergibt sich aus den Gleichungen (3), dass für die eine dieser Curven die eine Axe, und für die andere Curve die andere Axe der entsprechenden Schnitte constant ist. Die bekannten Gleichungen der Projectionen dieser Krümmungslinien lassen sich leicht aus den Gleichungen (1) in Verbindung mit der des Ellipsoids ableiten. Die Projectionen der Curven in der Ebene (xy) sind durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$\frac{a-c}{a(a-r_1)}x^2 + \frac{b-c}{b(b-r_1)}y^2 = 1,$$

$$\frac{a-c}{a(a-r_2)}x^2 + \frac{b-c}{b(b-r_2)}y^2 = 1.$$

Die eine dieser Curven ist eine Ellipse, die andere eine Hyperbel, da die eine der Axen r_1 und r_2 zwischen a und b und die andere zwischen b und c liegt. Die Halbmesser der grössten und kleinsten Krümmung im Punkte (xyz) sind:

$$\sqrt{\frac{r_1^3r_2}{abc}}, \; \sqrt{\frac{r_2^3r_1}{abc}}.$$

Mit Hülfe der vorhergehenden Coordinaten-Transformation findet man auch leicht die von Jacobi gefundene Gleichung der kürzesten

Digitized by Google

Linie auf einem dreiaxigen Ellipsoide, wie ich im 22. Bande d. J. f. d. r. u. a. M. S. 188 gezeigt habe.

Denken wir uns ferner ein zweites Ellipsoid, welches dem ersten convokal ist, dessen Quadrate der halben Axen durch $a_0 b_0 c_0$ bezeichnet werden sollen, so wird dieses die genannten Hyperboloide in einem Punkte schneiden, dessen Coordinaten $x_0 y_0 z_0$ nach (3) so ausgedrückt werden:

$$4.\quad x_0^2 = \frac{a_0 a_1 a_2}{(a-b)\,(a-c)},\quad y_0^2 = \frac{b_0 b_1 b_2}{(b-a)\,(b-c)},\quad z_0^2 = \frac{c_0 c_1 c_2}{(c-a)\,(c-b)}.$$

Die Relationen zwischen den Coordinaten der beiden Durchschnittspunkte (xyz) und $(x_0 y_0 z_0)$ sind:

$$5.\quad \frac{x_0}{x} = \sqrt{\frac{a_0}{a}},\quad \frac{y_0}{y} = \sqrt{\frac{b_0}{b}},\quad \frac{z_0}{z} = \sqrt{\frac{c_0}{c}};$$

$$x_0^2 - x^2 + y_0^2 - y^2 + z_0^2 - z^2 = a_0 - a = b_0 - b = c_0 - c.$$

Denken wir uns jetzt zwei andere, den gegebenen Ellipsoiden convokale Hyperboloiden mit gebrochener und ununterbrochener Höhlung, die das erste und zweite Ellipsoid in Punkten schneiden, deren Coordinaten durch $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ bezeichnet werden, so hat man ebenso zwischen diesen Coordinaten die Relationen:

$$\frac{\alpha_0}{\alpha} = \sqrt{\frac{a_0}{a}},\quad \frac{\beta_0}{\beta} = \sqrt{\frac{b_0}{b}},\quad \frac{\gamma_0}{\gamma} = \sqrt{\frac{c_0}{c}};$$

$$\alpha_0^2 - \alpha^2 + \beta_0^2 - \beta^2 + \gamma_0^2 - \gamma^2 = a_0 - a = b_0 - b = c_0 - c.$$

Hieraus erhält man in Verbindung mit den Gleichungen (5):

$$\alpha_0 x = \alpha x_0,\quad \beta_0 y = \beta y_0,\quad \gamma_0 z = \gamma z_0$$

und folglich

$$(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 + (z_0 - \gamma)^2 = (x - \alpha_0)^2 + (y - \beta_0)^2 + (z - \gamma_0)^2;$$

welche Gleichung den Ivorischen Satz ausdrückt.

Digitized by Google

XLVI.

Mechanische Construction der Lemniscate.

Von dem

Herrn Doctor Haedenkamp

Oberlehrer am Gymnasium zu Hamm in Westphalen.

Denkt man sich zwei gleiche Kreise, deren Mittelpunkte C und C', und bewegt eine Linie gleich der Axe CC' so, dass deren Endpunkte sich in entgegengesetzter Richtung in den Peripherien der beiden Kreise bewegen, so beschreibt die Mitte der Linie CC' die Fusspunktencurve einer Hyperbel, deren Gleichung

$$\frac{r^2}{4}\cos^2\psi - \left(\frac{d^2-r^2}{4}\right)\sin^2\psi = \varrho^2$$

ist; in welcher r der Radius der Kreise, d die Entfernung der Mittelpunkte und ϱ ein Radius der Curve. Macht man

$$d^2 = 2r^2,$$

so wird die Curve eine Lemniscate. Diese lässt sich hiernach leicht mechanisch construiren.

XLVII.

Allgemeines Theorem für die Verwandlung einer Funktion in eine unendliche Reihe.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

Die Differenzialrechnung giebt bekanntlich die Methoden an, durch welche man eine beliebige Funktion $F(x)$ in eine Reihe

Digitized by Google

entwickeln kann, die nach den steigenden Potenzen einer anderen willkührlichen Funktion $\psi(x)$ fortläuft, so dass das Resultat die Form hat

$$F(x) = A_0 + A_1\psi(x) + A_2\overline{\psi(x)}^2 + A_3\overline{\psi(x)}^3 + \ldots.$$

Hierher gehört besonders der von Bürmann gefundene Satz *), aus welchem sich für $F(x) = b^x$, $\psi(x) = xa^x$ folgende Reihe ableiten lässt:

$$b^x = 1 + lb \cdot \frac{xa^x}{1} + lb(lb - 2la)^1 \cdot \frac{x^2a^{2x}}{1.2} + lb(lb - 3la)^2 \cdot \frac{x^3a^{3x}}{1.2.3} + \ldots$$

Diese giebt spezieller für $a = b = e$

$$e^x = 1 + \frac{xe^x}{1} - 1^1 \cdot \frac{x^2e^{2x}}{1.2} + 2^2 \cdot \frac{x^3e^{3x}}{1.2.3} - 3^3 \cdot \frac{x^4e^{4x}}{1.2.3.4} + \ldots. \quad (1).$$

Davon kann man folgende elegante Anwendung machen. Man multiplizire durchgängig mit $\varphi(x)dx$, wobei $\varphi(x)$ eine ganz beliebige Funktion bedeutet, und integrire zwischen den willkührlichen Gränzen a und b, so wird

$$\int_a^b e^x\varphi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b xe^x\varphi(x)dx - \frac{1^1}{1.2}\int_a^b x^2e^{2x}\varphi(x)dx + \frac{2^2}{1.2.3}\int_a^b x^3e^{3x}\varphi(x)dx - \frac{3^3}{1.2.3.4}\int_a^b x^4e^{4x}\varphi(x)dx + \ldots. \quad (2)$$

Setzen wir jetzt

$$\int_a^b e^{px}\varphi(x)dx = f(p). \ldots. \quad (3)$$

worin p eine willkührliche Constante bedeutet, so giebt eine $n$malige Differenziation nach p:

$$\frac{d^nf(p)}{dp^n} = \int_a^b \left(\frac{d^ne^{px}}{dp^n}\right)\varphi(x)dx = \int_a^b x^ne^{px}\varphi(x)dx$$

oder, wenn wir nach geschehener Differenziation $p = n$ setzen und den $n$ten Differenzialquotienten von $f(p)$ mit $f^n(p)$ bezeichnen,

$$f^n(p = n) = \int_a^b x^ne^{nx}\varphi(x)dx.$$

Nach dieser Formel und der vorhergehenden (3) lassen sich sämmtliche Integrale in (2) ausführen und wir erhalten sogleich den Satz:

---

*) M. s. hierüber: Lacroix, Traité du calcul différentiel etc. Tome III. pag. 623, oder: Supplemente zum math. Wörterb. Art. Bürmannische Reihe.

Digitized by Google

$$f(1) = f(0) + \frac{f^1(1)}{1} - \frac{f^2(2)}{1.2} + 2^2 \frac{f^3(3)}{1.2.3} - 3^3 \frac{f^4(4)}{1.2.3.4} + \ldots . \quad (4)$$

Ob diese Reihe nach den Potenzen einer in $f(p)$ enthaltenen Constanten fortschreite oder nicht, hängt von der Natur der Funktion $f(p)$ ab, wie man aus den folgenden Beispielen erkennen wird.

1) Es sei $f(p) = (\alpha + p)^\mu$, so ist

$$f^n(p) = \mu(\mu - 1) \ldots (\mu - n + 1)\ (\alpha + p)^{\mu - n},$$

also

$$f^n(n) = \mu(\mu - 1) \ldots . (\mu - n + 1)\ (\alpha + n)^{\mu - n}$$

und demnach:

$$(\alpha + 1)^\mu = \alpha^\mu + \frac{\mu}{1}(\alpha + 1)^{\mu - 1}$$

$$- 1^1 . \frac{\mu(\mu - 1)}{1.2}(\alpha + 2)^{\mu - 2} + 2^2 . \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2)}{1.2.3}(\alpha + 3)^{\mu - 3} - \ldots$$

oder, wenn wir die Binomialkoeffizienten mit μ_0, μ_1, μ_2 u. s. w. bezeichnen:

$$(\alpha + 1)^\mu = \mu_0 \alpha^\mu + \mu_1 (\alpha + 1)^{\mu - 1}$$
$$- 1^1 \mu_2 (\alpha + 2)^{\mu - 2} + 2^2 \mu_3 (\alpha + 3)^{\mu - 3} - 3^3 \mu_4 (\alpha + 4)^{\mu - 4} + \ldots . \quad (5)$$

Aus diesem bemerkenswerthen Satze liesse sich eine Reihe Eigenschaften der Binomialkoeffizienten ableiten, wenn man nämlich Alles auf beiden Seiten nach Potenzen von α ordnete und die Coeffizienten gleicher Potenzen vergliche. So sind z. B. die Coeffizienten von α^0:

$$1 = 1^{\mu - 1}\mu_1 - 1^1 . 2^{\mu - 2}\mu_2 + 2^2 . 3^{\mu - 3}\mu_3 - 3^3 . 4^{\mu - 4}\mu_4 + \ldots$$

oder:

$$1 = 1^\mu \mu_1 - \frac{1^1}{2^2} 2^\mu \mu_2 + \frac{2^2}{3^3} 3^\mu \mu_3 - \frac{3^3}{4^4} 4^\mu \mu_4 + \ldots \quad (6).$$

Will man die Reihe (5) für andere als positive ganze μ brauchen, so muss man darauf sehen, dass sie convergirt, was übrigens in den meisten Fällen statt findet.

2) Es sei $f(p) = l(\alpha + p)$, so wird

$$f^n(p) = (-1)^{n-1} . \frac{1.2.3 \ldots (n-1)}{(\alpha + p)^n},$$

also

$$f^n(n) = (-1)^n . \frac{1.2.3 \ldots . (n-1)}{(\alpha + n)^n}$$

und folglich

$$l(\alpha + 1) = l\alpha + \tfrac{1}{1} \cdot \frac{1}{\alpha + 1} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1^1}{(\alpha + 2)^2} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{2^2}{(\alpha + 3)^3} + \ldots . \quad (7)$$

Digitized by Google

Die Reihe convergirt für jedes positive α und giebt z. B. für $\alpha=1$:

$$\Omega = \tfrac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1^1}{3^2} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{2^2}{4^3} + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{3^3}{5^4} + \ldots\ldots \quad (8)$$

3) Es sei $f(p)=\sin \alpha p$, so hat man $f^n(p)=\alpha^n \sin(\alpha p+\frac{1}{2}n\pi)$, folglich

$$\sin\alpha = \frac{\alpha\cos\alpha}{1} + 1^1\cdot\frac{\alpha^2\sin 2\alpha}{1.2} - 2^2\cdot\frac{\alpha^3\cos 3\alpha}{1.2.3} - 3^3\cdot\frac{\alpha^4\sin 4\alpha}{1.2.3.4} + \ldots\ldots \quad (9)$$

wobei das Zeichen von Paar zu Paar wechselt.

Man erhält ganz ähnlich für $f(p)=\cos \alpha p$:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha\sin\alpha}{1} - 1^1\cdot\frac{\alpha^2\cos 2\alpha}{1.2} + 2^2\cdot\frac{\alpha^3\sin 3\alpha}{1.2.3} + 3^3\cdot\frac{\alpha^4\cos 4\alpha}{1.2.3.4} - \ldots\ldots \quad (10)$$

Beide Reihen convergiren nur, wenn α ein ächter Bruch ist. Nimmt man $f(p)=e^{\alpha p}$, so kommt man auf die Gleichung (1) zurück.

XLVIII.

Auszug aus einem Schreiben von Herrn A. Göpel zu Berlin an den Herausgeber.

Ew. u. s. w. haben in dem Aufsatze Thl. III. Nr. XXIX. eine elegante Eigenschaft des Kreises bewiesen: dass wenn A_1, A_2, A_3, A_4 irgend vier auf einander folgende Punkte seiner Peripherie bezeichnen, dann für jeden andern Punkt O seiner Ebene immer

$$0 = A_1O^2\cdot\Delta A_2A_3A_4 - A_2O^2\cdot\Delta A_3A_4A_1 + A_3O^2\cdot\Delta A_4A_1A_2 - A_4O^2\cdot\Delta A_1A_2A_3$$

ist. So wenig man auch diese Eigenschaft zu verallgemeinern strebt, so gelangt man doch zu einem Satze, der keineswegs einer besondern Kurve, sondern beliebigen fünf Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 und O in einer Ebene zukommt. Man erhält nämlich jenen Ausdruck

Digitized by Google

$$A_1O^2 \cdot \Delta A_2A_3A_4 - \text{u. s. w.} = \text{Const.},$$

d. h. unabhängig von der Lage des Punktes O. Um dies zu beweisen, befolge ich den von Ihnen gebrauchten Gang, indem ich nur statt r beziehlich r_1, r_2, r_3, r_4 setze, um der Bedingung, dass alle 4 Punkte auf einem Kreise liegen, zu entgehen. Auf diese Art erhält man

$$\begin{aligned}
x_1^2 + y_1^2 + (a^2 + b^2) - 2ax_1 - 2by_1 &= r_1^2 \\
x_2^2 + y_2^2 + (a^2 + b^2) - 2ax_2 - 2by_2 &= r_2^2 \\
x_3^2 + y_3^2 + (a^2 + b^2) - 2ax_3 - 2by_3 &= r_3^2 \\
x_4^2 + y_4^2 + (a^2 + b^2) - 2ax_4 - 2by_4 &= r_4^2.
\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen beziehlich mit

$$\Delta A_2A_3A_4, \; -\Delta A_3A_4A_1, \; \Delta A_4A_1A_2, \; -\Delta A_1A_2A_3$$

so ergiebt sich, wegen der in Ihrer Abhandlung bewiesenen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\Delta A_2A_3A_4 - \Delta A_3A_4A_1 + \Delta A_4A_1A_2 - \Delta A_1A_2A_3 = 0 \\
(A)\quad &x_1 \cdot \Delta A_2A_3A_3 - x_2 \cdot \Delta A_3A_4A_1 + x_3 \cdot \Delta A_4A_1A_2 \\
&\qquad - x_4 \cdot \Delta A_1A_2A_3 = 0 \\
&y_1 \cdot \Delta A_2A_3A_4 - y_2 \cdot \Delta A_3A_4A_1 + y_3 \cdot \Delta A_4A_1A_2 \\
&\qquad - y_4 \cdot \Delta A_1A_2A_3 = 0
\end{aligned}$$

schliesslich die Gleichung

$$\begin{aligned}
&(x_1^2 + y_1^2) \cdot \Delta A_2A_3A_4 - (x_2^2 + y_2^2) \cdot \Delta A_3A_4A_1 \\
&+ (x_3^2 + y_3^2) \cdot \Delta A_4A_1A_3 - (x_4^2 + y_4^2) \cdot \Delta A_1A_2A_3 \\
&= r_1^2 \cdot \Delta A_2A_3A_4 - r_2^2 \cdot \Delta A_3A_4A_1 + r_3^2 \cdot \Delta A_4A_1A_3 \\
&\qquad - r_4^2 \cdot \Delta A_1A_2A_3.
\end{aligned}$$

Da nun die Ausdrücke $x_1^2+y_1^2$, $x_2^2+y_2^2$, u. s. w. die Quadrate der Abstände der Punkte A_1, A_2, u. s. w. vom Anfangspunkte der Coordinaten sind, da ferner dieser letztere, so wie auch der Punkt (a, b) ganz willkührlich sind, so erhellet aus dieser Gleichung die Wahrheit des Behaupteten. Um den Werth jener Constanten zu finden, darf man nur dem Punkte (a, b) eine solche besondere Lage geben, welche den obigen Ausdruck möglichst vereinfacht. Liegen z. B. die vier Punkte im Kreise, so sei (a, b) der Mittelpunkt desselben; alsdann ist $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$ und man erhält, wegen der ersten der Gleichungen (A), Null als den Werth der Constanten, womit Ihr Lehrsatz bewiesen ist. Liegen die vier Punkte nicht im Kreise, so sei (a, b) z. B. der Mittelpunkt des durch A_1, A_2, A_3 gehenden Kreises; dann hat man $r_1 = r_2 = r_3$ und, wegen der ersten Gleichung (A),

$$A_1O^2 \cdot \Delta A_2A_3A_4 - \text{u. s. w.} = (r_1^2 - r_4^2)\, \Delta A_1A_2A_3.$$

Hier ist offenbar $r_1^2 - r_4^2$ gleich der Potenz des Kreises $A_1A_2A_3$

Digitized by Google

in Bezug auf den Punkt A_4 oder $P(A_1A_2A_3)A_4$, welcher Ausdruck positiv oder negativ zu nehmen ist, jenachdem A_4 innerhalb oder ausserhalb jenes Kreises liegt. Demnach hat man allgemein den Werth jener Constanten

$$= P(A_1A_2A_3)A_4 \,.\, \Delta A_1A_2A_3,$$

oder auch

$$= -P(A_2A_3A_4)A_1 \,.\, \Delta A_2A_3A_4$$

u. s. w.

Alles Obige gilt natürlich auch noch, wenn man die Beschränkung, dass A_1, A_2, A_3, A_4 die Ecken eines convexen Vierecks sein sollen, aufhebt; wenn man nur noch bestimmt, dass diejenigen Dreiecksinhalte $\Delta A_1A_2A_3$, u. s. w., deren Ecken in derselben Reihenfolge liegen, als positiv (oder negativ), die andern aber als negativ (oder positiv) in Rechnung gezogen werden sollen.

Das Unternehmen des Herrn Strauch, eine Beispielsammlung zur Anwendung des Variationscalculs herauszugeben, ist um so verdienstlicher, je schwieriger eine solche Arbeit bei der Mangelhaftigkeit aller Vorarbeiten ist. Es wird daher gewiss Jeder wünschen, ein derartiges Werk in möglichster Vollkommenheit ausgeführt zu sehen. Um zu diesem Zwecke mit beizutragen und weil der Herr Verfasser selbst zu Bemerkungen über seine Abhandlung aufgefordert hat, trage ich kein Bedenken, Ihnen einige Betrachtungen darüber mitzutheilen; zumal da dieselben von so geringem Gewichte sind, dass sie nur zu ganz leichten Abänderungen veranlassen würden, falls Herr Strauch sie für begründet halten sollte. Auf S. 121. wird der Unterschied zwischen der Differential- und der Variationsrechnung darin gesetzt, dass die erstere die Werthe der unabhängigen Veränderlichen in andere Werthe übergehen lässt, während die letztere Functionen von Veränderlichen in andere Functionen sich verändern lässt. Diese Unterscheidung dürfte eben so unbestimmt sein, als es der Unterschied zwischen Werthen und Functionen ist; insofern nämlich im Calcul die sogenannten speciellen Werthe eben so gut durch unbestimmte Zeichen (Buchstaben) bezeichnet werden, als die Veränderlichen. Der Ausdruck der Unbekannten einer quadratischen Litteralgleichung ist z. B. ein solcher specieller Werth, insofern die Buchstabencoefficienten der Gleichung selbst specielle bestimmte Werthe bedeuten; er ist aber auch eine Function jener Coefficienten, insofern letztere jeden beliebigen Werth haben können. Es darf daher jeder gesuchte Werth einer Unbekannten als Function der übrigen in der Aufgabe vorkommenden Unbestimmten angesehen werden, und dieser Werth wird im Allgemeinen nur dadurch zu einem wirklichen speciellen Werthe, d. h. Ziffernwerthe werden können, dass allen genannten Unbestimmten solche specielle Werthe gegeben werden. Auf der andern Seite darf jede gesuchte Function als ein Werth der Unbekannten angesehen werden, weil man unter Werth jeden Ausdruck (mag er ein Ziffernwerth sein oder noch Buchstaben enthalten) versteht, dessen Substitution an die Stelle der Unbekannten den Bedingungen der Aufgabe genügt. Aus diesen Gründen glaube ich, dass die erwähnte Unterscheidung der Differential- von der Variationsrechnung nicht hinlänglich motivirt ist. Dies wird, ausser

Digitized by Google

an den vom Herrn Verf. gegebenen Beispielen, auch noch an zwei andern Stellen deutlich. Auf Seite 125. wird nämlich als einfachster Fall der mittelst der Variationsrechnung zu behandelnden Aufgabe vom Grössten und Kleinsten die Aufgabe angeführt: diejenige Function y von x zu finden, welche den Werth des Ausdrucks $f(x, y)$ für jeden beliebigen Werth des x zu einem Maximum macht. Diese Aufgabe lässt sich aber bekanntlich vollständig vermittelst der Differentialrechnung lösen; denn sie ist nicht verschieden von der Aufgabe, das Maximum von $f(a, x)$ oder wenn man will $f(3, x)$ für veränderliche Werthe von x zu finden. Wenn daher der Herr Verf. S. 120. sagt, dass er die Probleme der ersten Abtheilung seines Werkes, die nur auf Urfunctionen führen, alle selbst zusammensetzen und ausführen musste, so kann man ihm hierin nicht ganz Recht geben. Es gehören vielmehr alle in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Differentialrechnung und in den Sammlungen für Maximumsaufgaben enthaltenen Beispiele in seine erste Abtheilung. — Die Unterscheidung S. 125. zwischen primären und secundären Grössten und Kleinsten muss nach dem Obigen für unwesentlich gehalten werden. Man wird bald gewahr, dass sie auf eine Eintheilung der Aufgaben in solche, die einen, und solche, die mehrere unabhängig Variable enthalten, hinausläuft. Es würde ebenso passend sein, sie je nach der Anzahl der letzteren in primäre, secundäre, tertiäre, u. s. w. einzutheilen. — Die Folgen der gerügten Ungenügendheit der Unterscheidungen ziehen sich bis in die Beispiele hin. Wenn in Aufgabe 2. die Gleichung $y = fx$ derjenigen Curve gesucht wird, bei welcher der Ausdruck

$$U = y(x - y) + x(a - x)$$

sowohl für alle Nachbarwerthe des x, als auch für alle Nachbarcurven von $y = fx$ ein Maximum wird, und wenn hierauf als Resultat $y = \frac{1}{2}x$ erhalten wird, so muss dies geradezu für unrichtig erklärt werden; denn die Aufgabe wird durch jede Curve gelöst, welche durch den Punkt $(x = \frac{2}{3}a,\ y = \frac{1}{3}a)$ geht. Die beiden Gleichungen $x - 2y = 0$ und $y + a - 2x = 0$, zu denen man gelangt, bestimmen in der That nur die beiden genannten Coordinatenwerthe für x und y und lassen den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ völlig unbestimmt. — Ein Gleiches gilt von den folgenden Aufgaben 17. 31. 32. — Bei dieser Gelegenheit muss ich darauf aufmerksam machen, dass einige von den Bestimmungsgleichungen dieser Aufgaben ohne augenscheinlichen Grund identische, die andern nicht identische Gleichungen genannt werden. So heisst z. B. in der Aufgabe 2. die Gleichung $x - 2y = 0$ eine identische, die andere aber $y + a - 2x = 0$ eine nicht identische. Diese Benennung hat vermuthlich irgend einen Zusammenhang mit der vorhin besprochenen Distinction zwischen Werthen und Functionen, Differential- und Variationsrechnung, primärem und secundärem Maximum; weicht aber dermassen vom üblichen Sprachgebrauch ab, dass eine desfalsige Erklärung des Herrn Strauch erwünscht gewesen wäre. — Die Behandlung der Aufgabe 52. scheint eher zu dem §. 24. von Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten zu gehören, als zu dem citirten §. 35., weil in der Aufgabe zwar ursprünglich 3 Variable eingeführt sind, eine derselben aber vermittelst einer der Bedingungsgleichungen eliminirt wird, ehe zur Variationenberechnung geschritten wird.

Digitized by Google

In der zur zweiten Abtheilung gehörigen Aufgabe 70. wird derjenige Werth von y verlangt, welcher $U=\frac{(py+x)^2}{2p}$ für alle der Gleichung $\frac{y}{p}.x-x^2=A$ genügende Nachbarwerthe von y zu einem Maximum macht. Es findet sich ein Werth von $y=\sqrt{\frac{x^2+A}{3}}$, wodurch

$$U=\frac{8x}{3}.\sqrt{\frac{x^2+A}{3}} \text{ und } \delta^2U=\frac{4x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+A}}.\delta y^2$$

entsteht. Diese Werthe sind beide doppeldeutig. Um nun zwischen Maximum und Minimum zu entscheiden, sagt der Herr Verf., pflegt man sich in solchen Fällen dahin zu entscheiden, dass ein Kleinstes stattfinde, wenn U und δ^2U einerlei Zeichen, ein Grösstes, wenn sie entgegengesetzte Zeichen haben. Ein solcher Usus wäre schwerlich zu rechtfertigen, da er der gewöhnlichen Bedeutung der Ausdrücke Maximum und Minimum widerspräche; auch kommt er, so viel mir bekannt ist, nirgends vor. Bekanntlich findet im vorliegenden Falle ein Minimum statt, wenn x und y dieselben Zeichen, ein Maximum, wenn sie entgegengesetzte Zeichen haben. Jene willkührliche Entscheidung veranlasst den Herrn Verf. zu einer kleinen Uebereilung in Betreff des zweiten, jener Aufgabe genügenden Werthes von y. Dieser ist $y=\sqrt{-x^2-A}$, woraus $U=0$, $\delta^2U=-\frac{4x}{\sqrt{-x^2-A}}.\delta y^2$ entsteht; und es wird nun, wegen der Zeichenlosigkeit von U, behauptet, dass weder ein Maximum noch ein Minimum stattfinde. Diese Behauptung meint der Herr Verf. auch noch durch den Umstand zu bestätigen, dass nicht allein für den gefundenen Kreis $y=\sqrt{-x^2-A}$, sondern auch für alle andere Kreise $U=0$ wird, und mithin von einem Maximum oder Minimum nicht die Rede sein könne. Allein hiergegen kann wohl mit Recht eingewandt werden, dass die besagten Kreise keineswegs die bedungenen Nachbarcurven sind, sondern dass die letzteren vielmehr in der vom Herrn Verf. selbst weiter unten gefundenen Gleichung $y=\sqrt{E(x^2+A)}$ enthalten sind, und folglich im vorliegenden Falle, wo $E=-1$ ist, beiderseits Ellipsen werden.

Im Allgemeinen könnte noch in Betreff der Aufgaben der zweiten Abtheilung angemerkt werden, dass man in den Fällen, wo das y durch mehr als eine Gleichung bedingt wird, meistentheils weit leichter zum Ziele gelangt (z. B. bei Aufgabe 82.), wenn man q und p eliminirt und mittelst Differentiation versucht, ob der für y gefundene Werth allen Gleichungen genügt, als wenn man eine der Bedingungsgleichungen integrirt und das Resultat derselben Probe unterwirft.

Digitized by Google

XLIX.

Ueber Parabeln im Raume.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Wir denken uns, ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz allen unsern folgenden Betrachtungen zum Grunde legend, eine beliebige Parabel im Raume, und bezeichnen die Coordinaten des Brennpunkts und des Scheitels dieser Parabel in Bezug auf das angenommene Coordinatensystem respective durch a, b, c und α, β, γ; so sind

$$1)\quad \begin{cases} x-a=\frac{a-\alpha}{c-\gamma}\,(z-c), \\ y-b=\frac{b-\beta}{c-\gamma}\,(z-c) \end{cases}$$

oder

$$2)\quad \begin{cases} x-\alpha=\frac{a-\alpha}{c-\gamma}\,(z-\gamma), \\ y-\beta=\frac{b-\beta}{c-\gamma}\,(z-\gamma) \end{cases}$$

die Gleichungen der Axe derselben. Fällen wir nun von einem beliebigen Punkte der Parabel, dessen Coordinaten durch x, y, z bezeichnet werden sollen, auf die Axe ein Perpendikel, und bezeichnen die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieses Perpendikels mit der Axe der Parabel durch ξ, η, ζ, die veränderlichen Coordinaten jetzt aber durch X, Y, Z; so sind

$$3)\quad \begin{cases} X-x=\frac{x-\xi}{z-\zeta}\,(Z-z), \\ Y-y=\frac{y-\eta}{z-\zeta}\,(Z-z) \end{cases}$$

oder

$$4)\quad \begin{cases} X-\xi=\frac{x-\xi}{z-\zeta}\,(Z-\zeta), \\ Y-\eta=\frac{y-\eta}{z-\zeta}\,(Z-\zeta) \end{cases}$$

Digitized by Google

die Gleichungen des in Rede stehenden Perpendikels, und nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie hat man also wegen 1) und 3) die Gleichung

$$1+\frac{a-\alpha}{c-\gamma}\cdot\frac{x-\xi}{z-\zeta}+\frac{b-\beta}{c-\gamma}\cdot\frac{y-\eta}{z-\zeta}=0$$

oder

$$5)\ (a-\alpha)\ (x-\xi)+(b-\beta)\ (y-\eta)+(c-\gamma)\ (z-\zeta)=0.$$

Weil aber der Punkt $(\xi\eta\zeta)$ in der Axe der Parabel liegt, so ist nach 2) auch

$$6)\begin{cases}\xi-\alpha=\frac{a-\alpha}{c-\gamma}\ (\zeta-\gamma),\\ \eta-\beta=\frac{b-\beta}{c-\gamma}\ (\zeta-\gamma).\end{cases}$$

Da nun die Gleichung 5) auch auf folgende Art geschrieben werden kann:

$$\left.\begin{aligned}&(a-\alpha)\ \{(x-\alpha)-(\xi-\alpha)\}\\ +&(b-\beta)\ \{(y-\beta)-(\eta-\beta)\}\\ +&(c-\gamma)\ \{(z-\gamma)-(\zeta-\gamma)\}\end{aligned}\right\}=0,$$

so ist

$$\left.\begin{aligned}&(a-\alpha)\ \{(x-\alpha)-\frac{a-\alpha}{c-\gamma}\ (\zeta-\gamma)\}\\ +&(b-\beta)\ \{(y-\beta)-\frac{b-\beta}{c-\gamma}\ (\zeta-\gamma)\}\\ +&(c-\gamma)\ \{(z-\gamma)-\frac{c-\gamma}{c-\gamma}\ (\zeta-\gamma)\}\end{aligned}\right\}=0,$$

und folglich

$$\zeta-\gamma=\frac{(a-\alpha)\ (x-\alpha)+(b-\beta)\ (y-\beta)+(c-\gamma)\ (z-\gamma)}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}\ (c-\gamma).$$

Ueberhaupt aber erhält man nun mittelst dieser Formel und der Gleichungen 6) die folgenden Ausdrücke:

$$\xi-\alpha=\frac{(a-\alpha)\ (x-\alpha)+(b-\beta)\ (y-\beta)+(c-\gamma)\ (z-\gamma)}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}\ (a-\alpha),$$

$$\eta-\beta=\frac{(a-\alpha)\ (x-\alpha)+(b-\beta)\ (y-\beta)+(c-\gamma)\ (z-\gamma)}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}\ (b-\beta),$$

$$\zeta-\gamma=\frac{(a-\alpha)\ (x-\alpha)+(b-\beta)\ (y-\beta)+(c-\gamma)\ (z-\gamma)}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}\ (c-\gamma);$$

und folglich

$$7)\ (\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2+(\zeta-\gamma)^2$$
$$=\frac{\{(a-\alpha)\ (x-\alpha)+(b-\beta)\ (y-\beta)+(c-\gamma)\ (z-\gamma)\}^2}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}.$$

Digitized by Google

Weil nun der Radius Vector eines jeden Punktes (xyz) der Parabel der Summe der Entfernung des Brennpunkts vom Scheitel und der Abscisse des in Rede stehenden Punktes in Bezug auf die Axe der Parabel als Axe, und deren Scheitel als Anfang der Abscissen gleich ist; so haben wir die Gleichung

$$\begin{aligned}&\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}\\ =&\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}\\ +&\sqrt{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2+(\zeta-\gamma)^2},\end{aligned}$$

d. i. nach 7)

$$\begin{aligned}&\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}\\ =&\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}\\ \pm&\frac{(a-\alpha)\,(x-\alpha)+(b-\beta)\,(y-\beta)+(c-\gamma)\,(z-\gamma)}{\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}}\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}&\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}\,.\,\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}\\ =&\quad(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\\ \pm&\{(a-\alpha)\,(x-\alpha)+(b-\beta)\,(y-\beta)+(c-\gamma)\,(z-\gamma)\},\end{aligned}$$

wo sich nun frägt, welches Zeichen man zu nehmen hat, worüber auf folgende Art eine Entscheidung gegeben werden kann. Nähme man nämlich das untere Zeichen, so wäre

$$\begin{aligned}&\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}\,.\,\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}\\ &=(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\\ -&\{(a-\alpha)\,(x-a+(a-\alpha))+(b-\beta)\,(y-b+(b-\beta))\\ &\qquad+(c-\gamma)\,(z-c+(c-\gamma))\}\\ =&-\{(a-\alpha)\,(x-a)+(b-\beta)\,(y-b)+(c-\gamma)\,(z-c)\}\end{aligned}$$

und folglich

$$\frac{\{(a-\alpha)\,(x-a)+(b-\beta)\,(y-b)+(c-\gamma)\,(z-c)\}^2}{\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\;\{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\}}=1.$$

Die Gleichungen des dem Punkte (xyz) der Parabel entsprechenden Radius Vectors sind, wenn wieder X, Y, Z die veränderlichen Coordinaten bezeichnen:

$$8)\begin{cases}X-a=\dfrac{x-a}{z-c}\,(Z-c),\\[2ex] Y-b=\dfrac{y-b}{z-c}\,(Z-c).\end{cases}$$

Bezeichnen wir also jeden der beiden von diesem Radius Vector mit der Axe der Parabel eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch V; so ist wegen der Gleichungen 1) und 8) nach den Principien der analytischen Geometrie

Digitized by Google

$$\cos V^2 = \frac{(1+\frac{a-\alpha}{c-\gamma}\cdot\frac{x-a}{z-c}+\frac{b-\beta}{c-\gamma}\cdot\frac{y-b}{z-c})^2}{\{1+(\frac{a-\alpha}{c-\gamma})^2+(\frac{b-\beta}{c-\gamma})^2\}\ \{1+(\frac{x-a}{z-c})^2+(\frac{y-b}{z-c})^2)\}}$$

oder

$$\cos V^2 = \frac{\{(a-\alpha)\ (x-a)+(b-\beta)\ (y-b)+(c-\gamma)\ (z-c)\}^2}{\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\ \{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\}},$$

und folglich nach dem Obigen

$$\cos V^2 = 1,\ \cos V = \pm 1,$$

also $V = 0$ oder $V = 180°$, welches offenbar nur für den Scheitel der Parabel gilt. Daher muss man in der oben gefundenen Gleichung das obere Zeichen nehmen, folglich

$$9)\ \sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$
$$= (a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2$$
$$+\{(a-\alpha)\ (x-\alpha)+(b-\beta)\ (y-\beta)+(c-\gamma)\ (z-\gamma)\}$$

setzen, wo bloss noch zu untersuchen ist, ob diese Gleichung auch für den Scheitel der Parabel gilt, was aber offenbar der Fall ist, da diese Gleichung eine identische Gleichung wird, wenn man $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ setzt. Also gilt die Gleichung 9) oder die Gleichung

$$10)\ \sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}\cdot\{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$
$$-\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}\}$$
$$= (a-\alpha)\ (x-\alpha)+(b-\beta)\ (y-\beta)+(c-\gamma)\ (z-\gamma)$$

für jeden Punkt der Parabel.

Um die Gleichung 9) rational zu machen, quadrire man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens, so erhält man

$$\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\ \{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\}$$
$$= \{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}^2$$
$$+(a-\alpha)^2\ (x-\alpha)^2+(b-\beta)^2\ (y-\beta)^2+(c-\gamma)^2\ (z-\gamma)^2$$
$$+2\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\ \{(a-\alpha)\ (x-\alpha)$$
$$+(b-\beta)\ (y-\beta)+(c-\gamma)\ (z-\gamma)\}$$
$$+2(a-\alpha)\ (b-\beta)\ (x-\alpha)\ (y-\beta)$$
$$+2(b-\beta)\ (c-\gamma)\ (y-\beta)\ (z-\gamma)$$
$$+2(c-\gamma)\ (a-\alpha)\ (z-\gamma)\ (x-\alpha).$$

Der Theil auf der linken Seite des Gleichheitszeichens kann auf folgende Art dargestellt werden:

Digitized by Google

$$\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\left\{\begin{array}{l}(x-\alpha)^2-2(a-\alpha)(x-\alpha)+(a-\alpha)^2\\+(y-\beta)^2-2(b-\beta)(y-\beta)+(b-\beta)^2\\+(z-\gamma)^2-2(c-\gamma)(z-\gamma)+(c-\gamma)^2\end{array}\right\}$$

$$=\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\}$$

$$-2\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\{(a-\alpha)(x-\alpha)+(b-\beta)(y-\beta)+(c-\gamma)(z-\gamma)\}$$

$$+\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}^2.$$

Hebt man nun auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens der obigen Gleichung auf, was sich aufheben lässt, so erhält man

$$\begin{aligned}&\{(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\,(x-\alpha)^2\\&+\{(c-\gamma)^2+(a-\alpha)^2\}\,(y-\beta)^2\\&+\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}\,(z-\gamma)^2\\=4\{&(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\,\{(a-\alpha)\,(x-\alpha)\\&+(b-\beta)\,(y-\beta)+(c-\gamma)\,(z-\gamma)\}\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$+2(a-\alpha)\,(b-\beta)\,(x-\alpha)\,(y-\beta)$$
$$+2(b-\beta)\,(c-\gamma)\,(y-\beta)\,(z-\gamma)$$
$$+2(c-\gamma)\,(a-\alpha)\,(z-\gamma)\,(x-\alpha),$$

und hieraus ergiebt sich leicht

$$11)\quad \{(b-\beta)\,(x-\alpha)-(a-\alpha)\,(y-\beta)\}^2$$
$$+\{(c-\gamma)\,(y-\beta)-(b-\beta)\,(z-\gamma)\}^2$$
$$+\{(a-\alpha)\,(z-\gamma)-(c-\gamma)\,(x-\alpha)\}^2$$
$$=4\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\,\{(a-\alpha)\,(x-\alpha)$$
$$+(b-\beta)\,(y-\beta)+(c-\gamma)\,(z-\gamma)\}.$$

Wenn nun

$$12)\quad z=Ax+By+C$$

die Gleichung der Ebene ist, in welcher unsere Parabel liegt, so sind deren beide Gleichungen, durch welche dieselbe vollkommen charakterisirt wird, die Gleichungen 11) und 12), und zwischen den neun Constanten a, b, c; α, β, γ; A, B, C hat man die beiden folgenden Gleichungen:

$$13)\quad \begin{cases} Aa+Bb+C=c, \\ A\alpha+B\beta+C=\gamma. \end{cases}$$

Aus den drei Gleichungen

$$c=Aa+Bb+C,$$
$$\gamma=A\alpha+B\beta+C,$$
$$z=Ax+By+C$$

folgt

$$c-\gamma=A(a-\alpha)+B(b-\beta),$$
$$z-\gamma=A(x-\alpha)+B(y-\beta).$$

Also ist offenbar

$$(c-\gamma)\,(y-\beta)-(b-\beta)\,(z-\gamma)$$
$$=-A\{(b-\beta)\,(x-\alpha)-(a-\alpha)\,(y-\beta)\},$$
$$(a-\alpha)\,(z-\gamma)-(c-\gamma)\,(x-\alpha)$$
$$=-B\{(b-\beta)\,(x-\alpha)-(a-\alpha)\,(y-\beta)\};$$

und folglich

$$\{(b-\beta)\,(x-\alpha)-(a-\alpha)\,(y-\beta)\}^2$$
$$+\{(c-\gamma)\,(y-\beta)-(b-\beta)\,(z-\gamma)\}^2$$
$$+\{(a-\alpha)\,(z-\gamma)-(c-\gamma)\,(x-\alpha)\}^2$$
$$=(1+A^2+B^2)\,\{(b-\beta)\,(x-\alpha)-(a-\alpha)\,(y-\beta)\}^2.$$

Daher kann man die Gleichung 11) auch unter der Form

Digitized by Google

13) $(1+A^2+B^2)\,\{(b-\beta)\,(x-\alpha)-(a-\alpha)\,(y-\beta)\}^2$
$=4\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\,\{(a-\alpha)\,(x-\alpha)$
$+(b-\beta)\,(y-\beta)+(c-\gamma)\,(z-\gamma)\}.$

oder unter der Form

14) $$\frac{4\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}}{1+A^2+B^2}$$
$$=\frac{\{(b-\beta)\,(x-\alpha)-(a-\alpha)\,(y-\beta)\}^2}{(a-\alpha)\,(x-\alpha)+(b-\beta)\,(y-\beta)+(c-\gamma)\,(z-\gamma)}$$

darstellen.

Weil $\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}$ die Entfernung des Brennpunkts vom Scheitel ist, so ist, wenn wir den Parameter unserer Parabel durch μ bezeichnen:

15) $$\mu=4\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2},$$

und die Gleichung 13) kann daher auch auf folgende Art ausgedrückt werden:

16) $(1+A^2+B^2)\,\{(b-\beta)\,(x-\alpha)-(a-\alpha)\,(y-\beta)\}^2$
$=\frac{\mu^2}{4}\,\{(a-\alpha)\,(x-\alpha)+(b-\beta)\,(y-\beta)+(c-\gamma)\,(z-\gamma)\}$

oder

17) $4(1+A^2+B^2)\,\{(b-\beta)\,(x-\alpha)-(a-\alpha)\,(y-\beta)\}^2$
$=\mu^2\{(a-\alpha)\,(x-\alpha)+(b-\beta)\,(y-\beta)+(c-\gamma)\,(z-\gamma)\}.$

Wenn die Ebene, in welcher die Parabel liegt, die Ebene der xy ist, so verschwinden die Grössen A, B, c, γ, z, und die Gleichung der Parabel wird

18) $4\{(b-\beta)\,(x-\alpha)-(a-\alpha)\,(y-\beta)\}^2$
$=\mu^2\{(a-\alpha)\,(x-\alpha)+(b-\beta)\,(y-\beta)\}.$

Nimmt man den Scheitel der Parabel als Anfang und deren Axe als Axe der x an, so verschwinden die Grössen α, β, b, und die Gleichung der Parabel wird

19) $$4ay^2=\mu^2x.$$

Weil nun aber $4a=\mu$ ist, so geht diese Gleichung in die bekannte gewöhnliche Form

20) $$y^2=\mu x$$

der Gleichung der Parabel über.

§. 2.

Wir wollen nun die Gleichung der Projection unserer Parabel

Digitized by Google

im Raume auf der Ebene der xy entwickeln. Um diese Gleichung zu finden, müssen wir aus den beiden vorher gefundenen Gleichungen der Parabel im Raume die Grösse z eliminiren. Weil nach dem vorigen Paragraphen bekanntlich

$$z-\gamma = A(x-\alpha)+B(y-\beta)$$

ist, so ist

$$\begin{aligned}(a-\alpha)\,(x-\alpha)+(b-\beta)\,(y-\beta)+(c-\gamma)\,(z-\gamma)\\ =\{a-\alpha+(c-\gamma)A\}\,(x-\alpha)\\ +\{b-\beta+(c-\gamma)B\}\,(y-\beta),\end{aligned}$$

und nach 13) oder 17) ist also die Gleichung der Projection auf der Ebene der xy

$$\begin{aligned}&21)\ (1+A^2+B^2)\,\{(b-\beta)\,(x-\alpha)-(a-\alpha)\,(y-\beta)\}^2\\ &=4\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\\ &\times\{[a-\alpha+(c-\gamma)A]\,(x-\alpha)+[b-\beta+(c-\gamma)B]\,(y-\beta)\}\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}&22)\ 4(1+A^2+B^2)\,\{(b-\beta)\,(x-\alpha)-(a-\alpha)\,(y-\beta)\}^2\\ &=\mu^2\{[a-\alpha+(c-\gamma)A]\,(x-\alpha)+[b-\beta+(c-\gamma)B]\,(y-\beta)\}.\end{aligned}$$

Um nun aber auch noch $c-\gamma$ zu eliminiren, hat man nach dem vorigen Paragraphen

$$c-\gamma = A(a-\alpha)+B(b-\beta),$$

und folglich

$$\begin{aligned}&a-\alpha+(c-\gamma)A\\ &=a-\alpha+A\{(a-\alpha)A+(b-\beta)B\},\\ &b-\beta+(c-\gamma)B\\ &=b-\beta+B\{(a-\alpha)A+(b-\beta)B\}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\\ &=(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+\{(a-\alpha)A+(b-\beta)B\}^2;\end{aligned}$$

oder, wenn der Kürze wegen im Folgenden

$$23)\ \Theta = (a-\alpha)A+(b-\beta)B$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned}a-\alpha+(c-\gamma)A &= a-\alpha+A\Theta,\\ b-\beta+(c-\gamma)B &= b-\beta+B\Theta,\\ (a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c\,\gamma-)^2 &= (a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+\Theta^2;\end{aligned}$$

so dass also die Gleichung der Projection unserer Parabel im Raume auf der Ebene der xy nach dem Obigen

Digitized by Google

$$24)\ (1+A^2+B^2)\ \{(b-\beta)\ (x-\alpha)-(a-\alpha)\ (y-\beta)\}^2$$
$$=4\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+\Theta^2\}$$
$$\times\{(a-\alpha+A\Theta)\ (x-\alpha)+(b-\beta+B\Theta)\ (y-\beta)\}$$

oder

$$25)\ 4(1+A^2+B^2)\ \{(b-\beta)\ (x-\alpha)-(a-\alpha)\ (y-\beta)\}^2$$
$$=\mu^2\{(a-\alpha+A\Theta)\ (x-\alpha)+(b-\beta+B\Theta)\ (y-\beta)\}$$

ist.

Nehmen wir den Scheitel $(\alpha\beta\gamma)$ der Parabel im Raume als den Anfang eines dem primitiven Systeme der xyz parallelen Coordinatensystems der $x_1y_1z_1$ an, so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten

$$26)\ x_1=x-\alpha,\ y_1=y-\beta,\ z_1=z-\beta;$$

und die Gleichungen 24) und 25) lassen sich also auch unter der folgenden Form darstellen:

$$27)\ (1+A^2+B^2)\ \{(b-\beta)x_1-(a-\alpha)y_1\}^2$$
$$=4\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+\Theta^2\}$$
$$\times\{(a-\alpha+A\Theta)x_1+(b-\beta+B\Theta)y_1\}$$

und

$$28)\ 4(1+A^2+B^2)\ \{(b-\beta)x_1-(a-\alpha)y_1\}^2$$
$$=\mu^2\{(a-\alpha+A\Theta)x_1+(b-\beta+B\Theta)y_1\}.$$

Noch wollen wir bemerken, dass, wenn i den Neigungswinkel der Ebene, in welcher die Parabel im Raume liegt, gegen die Ebene der xy bezeichnet, nach den Principien der analytischen Geometrie bekanntlich

$$\cos i^2=\frac{1}{1+A^2+B^2}$$

ist, so dass man also die Gleichungen 27) und 28) auch unter der folgenden Form darstellen kann:

$$29)\ \{(b-\beta)x_1-(a-\alpha)y_1\}^2$$
$$=4\cos i^2\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+\Theta^2\}$$
$$\times\{(a-\alpha+A\Theta)x_1+(b-\beta+B\Theta)y_1\}$$

und

$$30)\ 4\{(b-\beta)x_1-(a-\alpha)y_1\}^2$$
$$=\mu^2\cos i^2\{(a-\alpha+A\Theta)x_1+(b-\beta+B\Theta)y_1\}.$$

Denkt man sich diese Gleichung gehörig entwickelt und auf Null gebracht, so sind die Coefficienten von x_1^2, y_1^2, x_1y_1 respective

$$4(b-\beta)^2,\ 4(a-\alpha)^2,\ -8(a-\alpha)\ (b-\beta),$$

und da nun offenbar

Digitized by Google

$$\{-8(a-\alpha)\ (b-\beta)\}^2 - 4\{4(a-\alpha)^2\}\ \{4(b-\beta)^2\} = 0$$

ist, so ist nach der allgemeinen Theorie der Linien des zweiten Grades die Projection unserer Parabel im Raume auf der Ebene der xy, und eben so natürlich auch deren Projection auf der Ebene der xz und auf der Ebene der yz, eine Parabel.

Um nun die Projection auf der Ebene der xy etwas genauer zu untersuchen, müssen wir zuerst die folgenden allgemeinen Betrachtungen vorausschicken.

§. 3.

Wenn

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

die allgemeine Gleichung einer Parabel für rechtwinklige Coordinaten ist, und man will die Coordinaten p, q des Brennpunkts, und die Gleichung

$$y = Mx + N$$

der Directrix dieser Parabel finden; so bemerkt man sogleich, dass nach den Principien der analytischen Geometrie das Quadrat der Entfernung jedes Punktes (xy) der Parabel von dem Brennpunkte (pq)

$$(x-p)^2 + (y-q)^2,$$

und das Quadrat der Entfernung des Punktes (xy) der Parabel von der Directrix

$$\frac{(y-Mx-N)^2}{1+M^2}$$

ist. Weil nun bekanntlich jeder Punkt einer Parabel vom Brennpunkte eben so weit entfernt ist wie von der Directrix, so erhält man die Gleichung

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = \frac{(y-Mx-N)^2}{1+M^2},$$

oder nach gehöriger Entwickelung die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + M^2y^2 \\ \quad + 2Mxy \\ \quad - 2\{p(1+M^2) + MN\}x \\ \quad - 2\{q(1+M^2) - N\}y \\ \quad + (p^2+q^2)\ (1+M^2) - N^2 \end{array}\right\} = 0,$$

welche offenbar mit der gegebenen Gleichung

$$x^2 + \frac{B}{A}y^2 + \frac{2C}{A}xy + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

Digitized by Google

identisch sein muss, wodurch man zu den folgenden Gleichungen geführt wird:

$$M^2 = \frac{B}{A},$$

$$M = \frac{C}{A},$$

$$p(1+M^2)+MN = -\frac{D}{2A},$$

$$q(1+M^2)-N = -\frac{E}{2A},$$

$$(p^2+q^2)\ (1+M^2)-N^2 = \frac{F}{A}.$$

Soll man den beiden ersten Gleichungen zugleich zu genügen im Stande sein, so muss offenbar

$$\frac{C^2}{A^2} = \frac{B}{A},$$

also $C^2 = AB$ oder

$$C^2 - AB = 0$$

sein, welches nach der Theorie der Linien des zweiten Grades bekanntlich wirklich der Fall ist, da die durch die Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

charakterisirte Curve nach der Voraussetzung eine Parabel ist. Zu der Bestimmung von M hat man also

$$31)\ M = \frac{C}{A},\ M^2 = \frac{B}{A}.$$

Nun ist nach dem Obigen

$$p(1+M^2) = -\frac{D}{2A} - MN,$$

$$q(1+M^2) = -\frac{E}{2A} + N;$$

also

$$p^2(1+M^2)^2 = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{D}{A}\,MN + M^2N^2,$$

$$q^2(1+M^2)^2 = \frac{E^2}{4A^2} - \frac{E}{A}\,N + N^2;$$

folglich, wenn man addirt,

$$(p^2+q^2)\ (1+M^2)^2$$
$$= \frac{D^2+E^2}{4A^2} - \frac{E-DM}{A}\,N + (1+M^2)N^2.$$

Weil nun nach dem Obigen

Digitized by Google

$$(p^2+q^2)\,(1+M^2)=\frac{F}{A}+N^2,$$

also

$$(p^2+q^2)\,(1+M^2)^2=\frac{F}{A}\,(1+M^2)+(1+M^2)N^2$$

ist; so ist, wie sich auf der Stelle ergiebt, wenn man dies mit dem Vorhergehenden vergleicht,

$$\frac{D^2+E^2}{4A^2}-\frac{E-DM}{A}\,N=\frac{F}{A}\,(1+M^2),$$

also

$$\frac{E-DM}{A}\,N=\frac{D^2+E^2}{4A^2}-\frac{F}{A}\,(1+M^2).$$

Nach dem Obigen ist, wie man leicht findet,

$$\frac{E-DM}{A}=\frac{AE-CD}{A^2},\quad \frac{F}{A}\,(1+M^2)=\frac{(A+B)F}{A^2};$$

also

$$32)\quad N=\frac{D^2+E^2-4(A+B)F}{4(AE-CD)}.$$

Endlich erhält man nun mittelst der Gleichungen

$$p(1+M^2)=-\frac{D}{2A}-MN,$$

$$q(1+M^2)=-\frac{E}{2A}+N$$

für die Coordinaten p, q des Brennpunkts leicht die folgenden Ausdrücke:

$$33)\quad \begin{cases} p=-\dfrac{2ADE-C(D^2-E^2)-4(A+B)CF}{4(A+B)\,(AE-CD)}, \\ q=\dfrac{2CDE+A(D^2-E^2)-4(A+B)AF}{4(A+B)\,(AE-CD)}; \end{cases}$$

oder

$$34)\quad \begin{cases} p=-\dfrac{(AE-CD)D+(AD+CE)E-4(A+B)CF}{4(A+B)\,(AE-CD)}, \\ q=-\dfrac{(AE-CD)E-(AD+CE)D+4(A+B)AF}{4(A+B)\,(AE-CD)}. \end{cases}$$

Für $F=0$ ist

Digitized by Google

$$35)\quad \begin{cases} M = \dfrac{C}{A},\ M^2 = \dfrac{B}{A} \\ N = \dfrac{D^2 + E^2}{A(AE - CD)}, \\ p = -\dfrac{2ADE - C(D^2 - E^2)}{A(A+B)\ (AE - CD)} \\ \quad = -\dfrac{(AE - CD)D + (AD + CE)E}{A(A+B)\ (AE - CD)}, \\ q = \dfrac{2CDE + A(D^2 - E^2)}{A(A+B)\ (AE - CD)} \\ \quad = -\dfrac{(AE - CD)E - (AD + CE)D}{A(A+B)\ (AE - CD)}. \end{cases}$$

Von diesen Formeln wollen wir nun die folgenden Anwendungen auf die Projection unserer Parabel im Raume auf der Ebene der xy machen.

§. 4.

Die Gleichung 30) der Projection auf der Ebene der xy giebt gehörig entwickelt

$$\begin{aligned} 36)\ 0 = {} & A(b-\beta)^2 x_1^2 \\ & + A(a-\alpha)^2 y_1^2 \\ & - 8(a-\alpha)\ (b-\beta) x_1 y_1 \\ & - \mu^2 \cos i^2\ (a - \alpha + A\Theta) x_1 \\ & - \mu^2 \cos i^2\ (b - \beta + B\Theta) y_1, \end{aligned}$$

wofür wir der Kürze wegen

$$37)\ 0 = \mathfrak{A} x_1^2 + \mathfrak{B} y_1^2 + 2\mathfrak{C} x_1 y_1 + \mathfrak{D} x_1 + \mathfrak{E} y_1$$

schreiben wollen, wo die Bedeutung der Symbole $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ von selbst erhellen wird.

Um zuerst die Gleichung der Directrix der Projection auf der Ebene der xy zu finden, haben wir nach 35) die folgenden Gleichungen:

$$M = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}},\ N = \frac{\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{E}^2}{A(\mathfrak{A}\mathfrak{E} - \mathfrak{C}\mathfrak{D})}.$$

Führt man nun für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ ihre aus dem Vorhergehenden bekannten Ausdrücke ein, so erhält man auf der Stelle

$$M = -\frac{a - \alpha}{b - \beta}$$

und

$$\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{E}^2 = \mu^4 \cos i^4 \{(a - \alpha + A\Theta)^2 + (b - \beta + B\Theta)^2\},$$

so wie

Digitized by Google

$$\mathfrak{AE} - \mathfrak{CD}$$
$$= -4\mu^2 \cos i^2 \,(b-\beta)^2 \,(b-\beta+B\Theta)$$
$$-4\mu^2 \cos i^2 \,(a-\alpha)\,(b-\beta)\,(a-\alpha+A\Theta)$$
$$= -4\mu^2 \cos i^2 \,(b-\beta)\,\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+\Theta^2\};$$

und folglich, weil nach §. 2.

$$(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2 = (a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+\Theta^2,$$

und nach 15)

$$\mu^2 = 16\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\},$$

also

$$(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+\Theta^2 = \tfrac{1}{16}\mu^2$$

ist:

$$\mathfrak{AE} - \mathfrak{CD} = -\tfrac{1}{4}\mu^4 \cos i^2 \,(b-\beta).$$

Also ist nach dem Obigen

$$N = -\frac{\cos i^2 \,\{(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2\}}{b-\beta},$$

und folglich

$$38)\quad y_1 = -\frac{a-\alpha}{b-\beta}x_1 - \frac{\cos i^2 \,\{(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2\}}{b-\beta},$$

oder

$$39)\quad y-\beta = -\frac{a-\alpha}{b-\beta}(x-\alpha) - \frac{\cos i^2 \,\{(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2\}}{b-\beta},$$

oder

$$40)\quad y-\beta = -\frac{a-\alpha}{b-\beta}(x-\alpha) - \frac{(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2}{(b-\beta)\,(1+A^2+B^2)},$$

oder

$$41)\quad (a-\alpha)\,(x-\alpha)+(b-\beta)\,(y-\beta) = -\cos i^2 \,\{(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2\},$$

oder

$$42)\quad (a-\alpha)\,(x-\alpha)+(b-\beta)\,(y-\beta) = -\frac{(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2}{1+A^2+B^2}$$

die Gleichung der Directrix der Projection der Parabel im Raume auf der Ebene der xy.

Auch ist

Digitized by Google

$$(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2$$
$$=(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+2\{(a-\alpha)A+(b-\beta)B\}\Theta+(A^2+B^2)\Theta^2$$
$$=(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+\Theta^2+(1+A^2+B^2)\Theta^2$$
$$=\tfrac{1}{16}\mu^2+\frac{\Theta^2}{\cos i^2}=\frac{\mu^2\cos i^2+16\Theta^2}{16\cos i^2},$$

und folglich auch

$$43)\quad y-\beta=-\frac{a-\alpha}{b-\beta}(x-\alpha)-\frac{\mu^2\cos i^2+16\Theta^2}{16(b-\beta)}$$

oder

$$44)\quad (a-\alpha)(x-\alpha)+(b-\beta)(y-\beta)=-\frac{\mu^2\cos i^2+16\Theta^2}{16},$$

oder

$$45)\quad (a-\alpha)(x-\alpha)+(b-\beta)(y-\beta)=-(\Theta^2+\tfrac{1}{16}\mu^2\cos i^2)$$

die Gleichung der Directrix der Projection auf der Ebene der xy.

Die Gleichung der durch die Punkte (ab) und $(\alpha\beta)$ gehenden geraden Linie, d. i. die Gleichung der Projection der Axe der Parabel im Raume auf der Ebene der xy, ist

$$46)\quad y-\beta=\frac{b-\beta}{a-\alpha}(x-\alpha),$$

und weil nun

$$1-\frac{a-\alpha}{b-\beta}\cdot\frac{b-\beta}{a-\alpha}=0$$

ist, so steht nach bekannten Principien der analytischen Geometrie die Directrix der Projection der Parabel im Raume auf der Ebene der xy auf der Projection der Axe der Parabel im Raume auf der Ebene der xy senkrecht, und die Projection der Axe der Parabel im Raume auf der Ebene der xy ist daher jederzeit ein Durchmesser der Projection der Parabel im Raume auf der Ebene der xy, oder der Axe dieser Projection parallel.

§. 5.

Um nun ferner die Coordinaten des Brennpunkts der Projection der Parabel im Raume auf der Ebene der xy zu finden, haben wir nach 36)

$$\mathfrak{D}^2-\mathfrak{E}^2=\mu^4\cos i^4\{(a-\alpha+A\Theta)^2-(b-\beta+B\Theta)^2\},$$

und folglich

$$2\mathfrak{M}\mathfrak{D}\mathfrak{E} - \mathfrak{C}(\mathfrak{D}^2 - \mathfrak{E}^2)$$

$$= A(b-\beta)\mu^4 \cos i^4 \left\{ \begin{array}{l} (a-\alpha)\,[(a-\alpha+A\Theta)^2 - (b-\beta+B\Theta)^2] \\ +2(b-\beta)\,(a-\alpha+A\Theta)\,(b-\beta+B\Theta) \end{array} \right\}$$

$$= A(b-\beta)\mu^4 \cos i^4 \left\{ \begin{array}{l} -(a-\alpha+A\Theta)\,[(a-\alpha)^2 + (b-\beta)^2] \\ +(b-\beta+B\Theta)\,[(a-\alpha)^2 - (b-\beta)^2] \end{array} \right\}$$

$$= A(b-\beta)\mu^4 \cos i^4 \left\{ \begin{array}{l} -(a-\alpha+A\Theta)\,[(a-\alpha)^2 + (b-\beta)^2] \\ +(b-\beta+B\Theta)\,[(a-\alpha+A\Theta)^2 - (b-\beta+B\Theta)^2] \end{array} \right\}$$

und

$$2\mathfrak{D}\mathfrak{E} + \mathfrak{M}(\mathfrak{D}^2 - \mathfrak{E}^2)$$

$$= A(b-\beta)\mu^4 \cos i^4 \left\{ \begin{array}{l} (b-\beta)\,[(a-\alpha+A\Theta)^2 - (b-\beta+B\Theta)^2] \\ -2(a-\alpha)\,(a-\alpha+A\Theta)\,(b-\beta+B\Theta) \end{array} \right\}$$

$$= -A(b-\beta)\mu^4 \cos i^4 \left\{ \begin{array}{l} (a-\alpha+A\Theta)\,[(a-\alpha)^2 - (b-\beta)^2] - (b-\beta+B\Theta)\,[(a-\alpha)^2 + (b-\beta)^2] \\ +(b-\beta+B\Theta)\,[(a-\alpha+A\Theta)^2 - (b-\beta+B\Theta)^2] \end{array} \right\}.$$

Weil nun ferner

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\,(\mathfrak{A}\mathfrak{E}-\mathfrak{C}\mathfrak{D}) = -(b-\beta)\,\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}\mu^4 \cos i^2$$

ist, so ist, wenn p, q die Coordinaten des Brennpunkts der Projection der Parabel im Raume auf der Ebene der xy in Bezug auf das primitive System der xyz bezeichnen, nach 35)

Digitized by Google

$$47)\quad \begin{cases} p-\alpha = \dfrac{\cos i^2 \left\{ \begin{matrix} (a-\alpha)\ [(a-\alpha+A\Theta)^2-(b-\beta+B\Theta)^2] \\ +2(b-\beta)\ (a-\alpha+A\Theta)\ (b-\beta+B\Theta) \end{matrix} \right\}}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}, \\ q-\beta = -\dfrac{\cos i^2 \left\{ \begin{matrix} (b-\beta)\ [(a-\alpha+A\Theta)^2-(b-\beta+B\Theta)^2] \\ -2(a-\alpha)\ (a-\alpha+A\Theta)\ (b-\beta+B\Theta) \end{matrix} \right\}}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}; \end{cases}$$

oder

$$48)\quad \begin{cases} p-\alpha = \dfrac{\cos i^2 \left\{ \begin{matrix} (a-\alpha+A\Theta)\ [(a-\alpha)\ (a-\alpha+A\Theta)+(b-\beta)\ (b-\beta+B\Theta)] \\ -(b-\beta+B\Theta)\ [(a-\alpha)\ (b-\beta+B\Theta)-(b-\beta)\ (a-\alpha+A\Theta)] \end{matrix} \right\}}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}, \\ q-\beta = \dfrac{\cos i^2 \left\{ \begin{matrix} (a-\alpha+A\Theta)\ [(a-\alpha)\ (b-\beta+B\Theta)-(b-\beta)\ (a-\alpha+A\Theta)] \\ +(b-\beta+B\Theta)\ [(a-\alpha)\ (a-\alpha+A\Theta)+(b-\beta)\ (b-\beta+B\Theta)] \end{matrix} \right\}}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}; \end{cases}$$

oder

Digitized by Google

$$49)\quad \left\{\begin{aligned} p-\alpha &= \frac{\left\{\begin{aligned}&(a-\alpha)\,[(a-\alpha+A\Theta)^2-(b-\beta+B\Theta)^2]\\ &+2(b-\beta)\,(a-\alpha+A\Theta)\,(b-\beta+B\Theta)\end{aligned}\right\}}{(1+A^2+B^2)\,\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}},\\ q-\beta &= -\frac{\left\{\begin{aligned}&(b-\beta)\,[(a-\alpha+A\Theta)^2-(b-\beta+B\Theta)^2]\\ &-2(a-\alpha)\,(a-\alpha+A\Theta)\,(b-\beta+B\Theta)\end{aligned}\right\}}{(1+A^2+B^2)\,\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}};\end{aligned}\right.$$

oder

$$50)\quad \left\{\begin{aligned} p-\alpha &= \frac{\left\{\begin{aligned}&(a-\alpha+A\Theta)\,[(a-\alpha)\,(a-\alpha+A\Theta)+(b-\beta)\,(b-\beta+B\Theta)]\\ &-(b-\beta+B\Theta)\,[(a-\alpha)\,(b-\beta+B\Theta)-(b-\beta)\,(a-\alpha+A\Theta)]\end{aligned}\right\}}{(1+A^2+B^2)\,\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}},\\ q-\beta &= \frac{\left\{\begin{aligned}&(a-\alpha+A\Theta)\,[(a-\alpha)\,(b-\beta+B\Theta)-(b-\beta)\,(a-\alpha+A\Theta)]\\ &+(b-\beta+B\Theta)\,[(a-\alpha)\,(a-\alpha+A\Theta)+(b-\beta)\,(b-\beta+B\Theta)]\end{aligned}\right\}}{(1+A^2+B^2)\,\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}}.\end{aligned}\right.$$

Aus den vorhergehenden Formeln erhält man durch leichte Rechnung

$$51)\quad \left\{\begin{aligned} &(a-\alpha)\,(p-\alpha)-(b-\beta)\,(q-\beta)\\ &=\cos i^2\,\{(a-\alpha+A\Theta)^2-(b-\beta+B\Theta)^2\},\\ &(b-\beta)\,(p-\alpha)+(a-\alpha)\,(q-\beta)\\ &=2\cos i^2\,(a-\alpha+A\Theta)\,(b-\beta+B\Theta);\end{aligned}\right.$$

oder

Digitized by Google

$$52)\quad \begin{cases} (a-\alpha)\,(p-\alpha)-(b-\beta)\,(q-\beta) \\ =\dfrac{(a-\alpha+A\Theta)^2-(b-\beta+B\Theta)^2}{1+A^2+B^2}, \\ (b-\beta)\,(p-\alpha)+(a-\alpha)\,(q-\beta) \\ =\dfrac{2(a-\alpha+A\Theta)\,(b-\beta+B\Theta)}{1+A^2+B^2}. \end{cases}$$

Auch findet man leicht

$$(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2=\frac{\cos i^4\,\{(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2\}^2}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2},$$

also

$$53)\quad \sqrt{(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2}=\frac{\cos i^2\,\{(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2\}}{\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}}$$

oder

$$54)\quad \sqrt{(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2}=\frac{(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2}{(1+A^2+B^2)\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}},$$

und folglich

$$55)\quad \sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}\,.\,\sqrt{(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2} =\frac{(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2}{1+A^2+B^2}.$$

Daher kann man nach 42) die Gleichung der Directrix der Projection der Parabel im Raume auf der Ebene der xy auch unter der folgenden Form darstellen:

$$56)\quad (a-\alpha)\,(x-\alpha)+(b-\beta)\,(y-\beta) =-\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}\,.\,\sqrt{(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2}.$$

§. 6.

Die Axe der Projection der Parabel im Raume geht durch den Brennpunkt (pq) und ist nach §. 4. der durch die Punkte (ab) und $(\alpha\beta)$ gehenden Linie parallel. Also ist

$$57)\quad y-q=\frac{b-\beta}{a-\alpha}\,(x-p)$$

oder

$$58)\quad (a-\alpha)\,(y-\beta)-(b-\beta)\,(x-\alpha) =(a-\alpha)\,(q-\beta)-(b-\beta)\,(p-\alpha)$$

die Gleichung der Axe der Projection auf der Ebene der xy. Führt man nun für $p-\alpha$ und $q-\beta$ ihre oben gefundenen Ausdrücke ein, so erhält man für die Gleichung der Axe leicht

Digitized by Google

$$59)\quad (a-\alpha)\,(y-\beta)-(b-\beta)\,(x-\alpha)$$
$$=\frac{2\{(a-\alpha)\,(a-\alpha+A\Theta)+(b-\beta)\,(b-\beta+B\Theta)\}\times\{(a-\alpha)\,(b-\beta+B\Theta)-(b-\beta)\,(a-\alpha+A\Theta)\}}{(1+A^2+B^2)\,\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}}$$

oder

$$60)\quad (a-\alpha)\,(y-\beta)-(b-\beta)\,(x-\alpha)$$
$$=\frac{2\cos i^2\,\{(a-\alpha)\,(a-\alpha+A\Theta)+(b-\beta)\,(b-\beta+B\Theta)\}\times\{(a-\alpha)\,(b-\beta+B\Theta)-(b-\beta)\,(a-\alpha+A\Theta)\}}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}.$$

Es ist aber

$$(a-\alpha)\,(a-\alpha+A\Theta)+(b-\beta)\,(b-\beta+B\Theta)$$
$$=(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+\Theta^2=\tfrac{1}{1+\delta}\mu^2$$

und

$$(a-\alpha)\,(b-\beta+B\Theta)-(b-\beta)\,(a-\alpha+A\Theta)$$
$$=\{(a-\alpha)B-(b-\beta)A\}\Theta$$
$$=\{(a-\alpha)\,A+(b-\beta)B\}\,\{(a-\alpha)B-(b-\beta)A\};$$

also

$$61)\quad (a-\alpha)\,(y-\beta)-(b-\beta)\,(x-\alpha)$$
$$=\frac{\mu^2\cos i^2\,\{(a-\alpha)A+(b-\beta)B\}\,\{(a-\alpha)B-(b-\beta)A\}}{8\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}}$$

die Gleichung der Axe der Projection der Parabel im Raume auf der Ebene der xy.

§. 7.

Nach 56) ist

$$(a-\alpha)\,(x-\alpha)+(b-\beta)\,(y-\beta)$$
$$=-\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}\,.\,\sqrt{(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2}$$

die Gleichung der Directrix der Projection der Parabel im Raume auf der Ebene der xy, und folglich, wenn wir den Parameter dieser Projection durch μ_1 bezeichnen, da die Entfernung des Brennpunkts von der Directrix der halbe Parameter, d. i. $\frac{1}{2}\mu_1$ ist, nach den Principien der analytischen Geometrie, wie man leicht findet:

$$(62)\quad \tfrac{1}{2}\mu_1^2 = \frac{\{(a-\alpha)(p-\alpha)+(b-\beta)(q-\beta)+\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}\cdot\sqrt{(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2}\}^2}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}.$$

Nun ist aber, wie man leicht findet, nach 49)

$$\frac{\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}\ \{(a-\alpha)(p-\alpha)+(b-\beta)(q-\beta)\}}{\cos i^2}$$

$$= \{(a-\alpha)^2-(b-\beta)^2\}\ \{(a-\alpha+A\Theta)^2-(b-\beta+B\Theta)^2\}$$
$$+4(a-\alpha)(b-\beta)(a-\alpha+A\Theta)(b-\beta+B\Theta),$$

und nach 53)

Digitized by Google

$$\frac{\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}\,.\,\sqrt{(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2}}{\cos i^2}$$
$$=\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}\,\{(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2\}.$$

Also ist, wie man durch leichte Rechnung findet,

$$\frac{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}{\cos i^2}\Big\{(a-\alpha)\,(p-\alpha)+(b-\beta)\,(q-\beta)$$
$$+\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}\,.\,\sqrt{(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2}\Big\}$$
$$=2\{(a-\alpha)\,(a-\alpha+A\Theta)+(b-\beta)\,(b-\beta+B\Theta)\}^2$$
$$=\frac{1}{128}\mu^4,$$

und folglich

$$(a-\alpha)\,(p-\alpha)+(b-\beta)\,(q-\beta)$$
$$+\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}\,.\,\sqrt{(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2}$$
$$=\frac{\mu^4\cos i^2}{128\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}}.$$

Daher ist nach 62)

$$63)\quad \tfrac{1}{2}\mu_1=\frac{\mu^4\cos i^2}{128\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}}$$

oder

$$64)\quad \mu_1=\frac{\mu^2\cos i^2}{64\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}^{\frac{1}{4}}}.$$

§. 8.

Es ist nun noch übrig, die Coordinaten des Scheitels der Projection der Parabel im Raume auf der Ebene der xy zu finden, wozu man auf folgendem Wege gelangen kann.

Wenn wir der Kürze wegen

$$k=(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2$$

und

$$k'=\frac{2\{(a-\alpha)\,(a-\alpha+A\Theta)+(b-\beta)\,(b-\beta+B\Theta)\}\times\{(a-\alpha)\,(b-\beta+B\Theta)-(b-\beta)\,(a-\alpha+A\Theta)\}}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}$$

setzen, so sind nach 41) und 60)

$$(a-\alpha)\,(x-\alpha)+(b-\beta)\,(y-\beta)=-k\cos i^2$$

und

$$(b-\beta)\,(x-\alpha)-(a-\alpha)\,(y-\beta)=-k'\cos i^2$$

die Gleichungen der Directrix und der Axe. Bezeichnen wir also durch p', q' die Coordinaten des Durchschnittspunkts der Directrix

Digitized by Google

und der Axe, so haben wir zur Bestimmung dieser Coordinaten die beiden Gleichungen:

$$(a-\alpha)\,(p'-\alpha)+(b-\beta)\,(q'-\beta)=-k\cos i^2,$$
$$(b-\beta)\,(p'-\alpha)-(a-\alpha)\,(q'-\beta)=-k'\cos i^2;$$

aus denen sich

$$65)\quad \begin{cases} p'-\alpha=-\dfrac{(a-\alpha)k+(b-\beta)k'}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}\cos i^2, \\ q'-\beta=-\dfrac{(b-\beta)k-(a-\alpha)k'}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}\cos i^2 \end{cases}$$

ergiebt. Hat man mittelst dieser Formeln p' und q' gefunden, so erhält man die Coordinaten p_1, q_1 des Scheitels der Projection der Parabel im Raume auf der Ebene der xy mittelst der bekannten Formeln

$$66)\quad \begin{cases} p_1=\frac{1}{2}(p+p'), \\ q_1=\frac{1}{2}(q+q'); \end{cases}$$

da nämlich der Scheitel einer Parabel jederzeit das zwischen der Directrix und dem Brennpunkte liegende Stück der Axe halbirt. Die weitere Entwickelung dieser Formeln wollen wir dem Leser überlassen.

L.

Besondere Umformungen der Gleichung der Flächen des zweiten Grades, nebst einigen Anwendungen derselben.

Von

Herrn L. Mossbrugger

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

1. Eine Fläche zweiten Grades, deren Gleichung

$$Az^2+By^2+Cx^2+2A'xy+2B'xz+2C'yz$$
$$+2A''z+2B''y+2C''x+D=0 \ldots\ldots 1.$$

Digitized by Google

ist, kann, wenn wir diejenigen Fälle unberücksichtiget lassen, in welchen sie in eine Linie des zweiten Grades, oder in ein System von zwei Geraden übergeht, nur in ein System zweier reeller oder imaginärer Ebenen degeneriren; in diesem Fall aber muss die Gleichung 1) die Form:

$$(x + ay + bx + c)\,(x + a'y + b'x + c') = 0 \ldots\ldots 2.$$

annehmen, es muss daher auch diese mit der Gleichung 1. identisch sein. Durch die Identificierung beider erhalten wir folgende Bestimmungsgleichungen für die Coefficienten a, b, c, a', ...:

$$\left.\begin{aligned} aa' = \frac{B}{A};\ bb' = \frac{C}{A};\ b + b' = \frac{2B'}{A};\ a + a' = \frac{2C'}{A};\\ c + c' = \frac{2A''}{A};\ cc' = \frac{D}{A};\ ac' + a'c = \frac{2B''}{A};\\ bc' + b'c = \frac{2C''}{A};\ ab' + a'b = \frac{2A'}{A}; \end{aligned}\right\} \ldots. 3.$$

Von diesen neun Bedingungsgleichungen reichen sechs zur Bestimmung der Coefficienten a, b, c, a', b', c' hin, und wir erkennen sogleich, dass respective a, a'; b, b'; c, c' die Wurzeln folgender Gleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} X^2 - \frac{2C'}{A}\,X + \frac{B}{A} = 0\\ Y^2 - \frac{2B'}{A}\,Y + \frac{C}{A} = 0\\ Z^2 - \frac{2A'}{A}\,Z + \frac{D}{A} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 4.$$

so dass wir also

$$\left.\begin{aligned} a = \frac{C'}{A} + \frac{\sqrt{C'^2 - AB}}{A},\ a' = \frac{C'}{A} - \frac{\sqrt{C'^2 - AB}}{A}\\ b = \frac{B'}{A} + \frac{\sqrt{B'^2 - AC}}{A},\ b' = \frac{B'}{A} - \frac{\sqrt{B'^2 - AC}}{A}\\ c = \frac{A''}{A} + \frac{\sqrt{A''^2 - AD}}{A},\ c' = \frac{A''}{A} - \frac{\sqrt{A''^2 - AB}}{A} \end{aligned}\right\} \ldots. 5.$$

haben.

Wir können aber auch die drei letzten Gleichungen in 3. unter die Form:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2B''}{A} - (ac' + a'c) = 0,\ \frac{2C''}{A} - (bc' - b'c) = 0,\\ \frac{2A'}{A} - (ab' - a'b) = 0 \end{aligned}\right\} \ldots. 6.$$

bringen. Diese sind nur in dem einzigen Fall wahr, wenn die Gleichung 1. ein System zweier Ebenen ausdrückt; in allen übrigen Fällen werden die Verbindungen der Grössen auf der linken

Digitized by Google

Seite des Gleichheitszeichens dieser Gleichungen nicht gleich Null sein, sondern andere reelle oder imaginäre Werthe haben. Bezeichnen wir diese respective mit p'', p''', p', so haben wir allgemein:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2B''}{A} - (ac' - a'c) = p''; \quad \frac{2C''}{A} - (bc' - b'c) = p'''; \\ \qquad\qquad \frac{2A'}{A} - (ab' - a'b) = p' \end{array}\right\} \ldots\ldots 7.$$

Dadurch geht aber die Gleichung 1. in folgende über:

$$(z + ay + bx + c)\ (z + a'y + b'x + c') + p'xy + p''y + p'''x = 0 \ldots\ldots 8.$$

Diese Gleichung kann, wie wir so eben gezeigt haben, jede Fläche zweiten Grades ausdrücken.

II. Führen wir die in I. 5. gefundenen Werthe von a, b, c, a', ... in die Gleichungen 7. ein, so erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} p' = \frac{2\{AA' - BC' \pm \sqrt{(B^2 - AC)\ (C'^2 - AB)}\}}{A^2} \\ p'' = \frac{2\{AB' - A'C' \pm \sqrt{(C'^2 - AB)\ (A'^2 - AD)}\}}{A^2} \\ p''' = \frac{2\{AC''' - A'B \pm \sqrt{(B^2 - AC)\ (A'^2 - AD)}\}}{A^2} \end{array}\right\} \ldots\ldots 9.$$

Daher folgt auch, dass die Gleichung I. 1. ein System zweier reellen oder imaginären Ebenen ausdrückt, wenn diese Werthe von p', p'', p''' gleich Null sind.

Betrachten wir die Gleichungen in I., 3. etwas genauer, so ist uns klar, dass zur Bestimmung der Coefficienten a, b, c, ... nicht beliebige sechs von jenen neun Gleichungen ausgelesen werden können, sondern dass eine solche Wahl getroffen werden muss, dass jeder von jenen Coefficienten zum wenigsten in zwei von den sechs zu wählenden Bestimmungsgleichungen vorkommt; dass daher eine allgemeine umgeformte Gleichung für die Flächen des zweiten Grades nicht nur allein die Form 8. haben kann. Wie viele, und welches diese Formen sind, wollen wir jetzt untersuchen. Setzen wir daher, um abzukürzen:

den Buchstaben $\mathfrak{A}$ statt der Gleichung $aa' = \frac{B}{A}$;

- - $\mathfrak{B}$ - - - $bb' = \frac{C}{A}$;

- - $\mathfrak{C}$ - - - $cc' = \frac{D}{A}$;

- - $\mathfrak{a}$ - - - $a + a' = \frac{2C'}{A}$;

- - $\mathfrak{b}$ - - - $b + b' = \frac{2B'}{A}$;

- - $\mathfrak{c}$ - - - $c + c' = \frac{2A'}{A}$;

Digitized by Google

die Buchstaben $(\alpha\beta)$ statt der Gleichung $ab' + a'b = \frac{2A}{A}$;

- - $(\alpha\gamma)$ - - - $ac' + a'c = \frac{2B''}{A}$;

- - $(\beta\gamma)$ - - - $bc' + b'c = \frac{2C''}{A}$;

und bemerken besonders, dass jede der Grössen a, b, c, ... wenigstens in zwei von den sechs auszuwählenden Gleichungen vorkommen muss, so ergeben sich uns folgende Combinationen jener sechs Gleichungen, die den eben gestellten Forderungen genügen.

$$\mathfrak{ABC}abc \ldots . \text{ I'.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{AB}\mathfrak{C}ab\begin{Bmatrix}(\beta\gamma)\\(\alpha\gamma)\end{Bmatrix};\ \mathfrak{AB}\mathfrak{C}ac\begin{Bmatrix}(\alpha\beta)\\(\beta\gamma)\end{Bmatrix};\ \mathfrak{AB}\mathfrak{C}bc\begin{Bmatrix}(\alpha\beta)\\(\alpha\gamma)\end{Bmatrix}; \\ \mathfrak{AB}abc\begin{Bmatrix}(\beta\gamma)\\(\alpha\gamma)\end{Bmatrix};\ \mathfrak{A}\mathfrak{C}abc\begin{Bmatrix}(\alpha\beta)\\(\beta\gamma)\end{Bmatrix};\ \mathfrak{B}\mathfrak{C}abc\begin{Bmatrix}(\alpha\beta)\\(\alpha\gamma)\end{Bmatrix}; \end{array}\right\} \ldots . \text{ II'.}$$

$$\mathfrak{AB}\mathfrak{C}a\begin{Bmatrix}(\alpha\beta)&(\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)&(\beta\gamma)\\(\alpha\gamma)&(\beta\gamma)\end{Bmatrix};\ \mathfrak{AB}\mathfrak{C}b\begin{Bmatrix}(\alpha\beta)&(\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)&(\beta\gamma)\\(\alpha\gamma)&(\beta\gamma)\end{Bmatrix};\ \mathfrak{AB}\mathfrak{C}c\left\{\begin{Bmatrix}(\alpha\beta)&(\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)&(\beta\gamma)\\(\alpha\gamma)&(\beta\gamma)\end{Bmatrix};\right. \ldots . \text{ III'.}$$

$$\mathfrak{AB}\mathfrak{C}\ (\alpha\beta)\ (\alpha\gamma)\ (\beta\gamma); \ldots\ldots\ldots \text{ IV'.}$$

$$\mathfrak{AB}ab\ (\alpha\gamma)\ (\beta\gamma);\ \mathfrak{AB}ac\begin{Bmatrix}(\alpha\beta)&(\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)&(\beta\gamma)\\(\alpha\gamma)&(\beta\gamma)\end{Bmatrix};\ \mathfrak{AB}bc\left\{\begin{Bmatrix}(\alpha\beta)&(\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)&(\beta\gamma)\\(\alpha\gamma)&(\beta\gamma)\end{Bmatrix};\ldots\right\} \ldots . \text{ V'.}$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{C}ac\ (\alpha\beta)\ (\beta\gamma);\ \mathfrak{A}\mathfrak{C}ab\begin{Bmatrix}(\alpha\beta)&(\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)&(\beta\gamma)\\(\alpha\gamma)&(\beta\gamma)\end{Bmatrix};\ \mathfrak{A}\mathfrak{C}bc\left\{\begin{Bmatrix}(\alpha\beta)&(\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)&(\beta\gamma)\\(\alpha\gamma)&(\beta\gamma)\end{Bmatrix}\ldots\right\} \ldots . \text{ VI'.}$$

$$\mathfrak{B}\mathfrak{C}bc\ (\alpha\beta)\ (\alpha\gamma);\ \mathfrak{B}\mathfrak{C}ab\begin{Bmatrix}(\alpha\beta)&(\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)&(\beta\gamma)\\(\alpha\gamma)&(\beta\gamma)\end{Bmatrix};\ \mathfrak{B}\mathfrak{C}ac\left\{\begin{Bmatrix}(\alpha\beta)&(\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)&(\beta\gamma)\\(\alpha\gamma)&(\beta\gamma)\end{Bmatrix};\right. \ldots \text{ VII'.}$$

$$\mathfrak{A}abc\begin{Bmatrix}(\alpha\beta)&(\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)&(\beta\gamma)\\(\alpha\gamma)&(\beta\gamma)\end{Bmatrix};\ \mathfrak{B}abc\begin{Bmatrix}(\alpha\beta)&(\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)&(\beta\gamma)\\(\alpha\gamma)&(\beta\gamma)\end{Bmatrix};\ \mathfrak{C}abc\left\{\begin{Bmatrix}(\alpha\beta)&(\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)&(\beta\gamma)\\(\alpha\gamma)&(\beta\gamma)\end{Bmatrix};\ldots\right\} \ldots \text{ VIII'}$$

$$abc\ (\alpha\beta)\ (\alpha\gamma)\ (\beta\gamma) \ldots\ldots\ldots \text{ IX'.}$$

Die Anzahl dieser Verbindungen sind in:

I'.; II'.; III'.; IV'.; V'.;

$$1;\quad 2.\frac{6.5.4}{1.2.3}\frac{.3.2}{.4.5};\quad 3.\frac{3.2}{1.2};\quad \frac{3.2.1}{1.2.3};\quad \left\{\frac{3.2.1}{1.2.3}+2.\frac{3.2}{1.2}\right\};$$

VI'.; VII'.; VIII'.; IX'.

$$\left\{\frac{3.2.1}{1.2.3}+2.\frac{3.2}{1.2}\right\};\quad \left\{\frac{3.2.1}{1.2.3}+2.\frac{3.2}{1.2}\right\};\quad 3.\frac{3.2}{1.2};\quad 1.$$

Digitized by Google

Diese 54 Bestimmungsarten der Coefficienten a, b, c, a', ... lassen eben so viele Formen zu, unter welche die Gleichung I. 1. gebracht werden kann. Bezeichnen wir daher $z + ay + bx + c$ mit M und $z + a'y + b'x + c'$ mit N, so sind diese Gleichungsformen folgende:

1') $MN + p'xy + p''z + p'''x = 0$;
2') $MN + p'xy + p''z + p'''y = 0$;
3') $MN + p'xz + p''y + p'''x = 0$;
4') $MN + p'xz + p''xy + p'''x = 0$;
5') $MN + p'yz + p''y + p'''x = 0$;
6') $MN + p'yz + p''xy + p'''x = 0$;
7') $MN + p'y + p''x + p''' = 0$;
8') $MN + p'xy + p''x + p''' = 0$;
9') $MN + p'x^2 + p''y + p'''x = 0$;
10') $MN + p'x^2 + p''xy + p'''y = 0$;
11') $MN + p'y^2 + p''y + p'''x = 0$;
12') $MN + p'y^2 + p''xy + p'''x = 0$;
13') $MN + p'xz + p''z + p'''x = 0$;
14') $MN + p'xz + p''z + p'''y = 0$;
15') $MN + p'xz + p''xy + p'''z = 0$;
16') $MN + p'yz + p''z + p'''x = 0$;
17') $MN + p'yz + p''z + p'''y = 0$;
18') $MN + p'yz + p''xy + p'''z = 0$;
19') $MN + p'yz + p''xz + p'''x = 0$;
20') $MN + p'yz + p''xz + p'''y = 0$;
21') $MN + p'yz + p''xz + p'''xy = 0$;
22') $MN + p'yz + p''xz + p'''z = 0$;
23') $MN + p'xy + p''z + p''' = 0$;
24') $MN + p'xz + p''x + p''' = 0$;
25') $MN + p'xz + p''y + p''' = 0$;
26') $MN + p'xz + p''xy + p''' = 0$;
27') $MN + p'yz + p''x + p''' = 0$;
28') $MN + p'yz + p''y + p''' = 0$;
29') $MN + p'yz + p''xy + p''' = 0$;
30') $MN + p'x^2 + p''xz + p'''y = 0$;
31') $MN + p'x^2 + p''z + p'''x = 0$;
32') $MN + p'x^2 + p''z + p'''y = 0$;
33') $MN + p'x^2 + p''xy + p'''z = 0$;
34') $MN + p'x^2 + p''yz + p'''x = 0$;

Digitized by Google

35′) $MN + p'x^2 + p''yz + p'''y = 0;$

36′) $MN + p'x^2 + p''xy + p'''yz = 0;$

37′) $MN + p'y^2 + p''yz + p'''x = 0;$

38′) $MN + p'y^2 + p''z + p'''x = 0;$

39′) $MN + p'y^2 + p''z + p'''y = 0;$

40′) $MN + p'y^2 + p''xy + p'''z = 0;$

41′) $MN + p'y^2 + p''xy + p'''x = 0;$

42′) $MN + p'y^2 + p''xz + p'''y = 0;$

43′) $MN + p'y^2 + p''xz + p'''xy = 0;$

44′) $MN + p'x^2 + p''x + p''' = 0;$

45′) $MN + p'x^2 + p''y + p''' = 0;$

46′) $MN + p'x^2 + p''xy + p''' = 0;$

47′) $MN + p'y^2 + p''x + p''' = 0;$

48′) $MN + p'y^2 + p''y + p''' = 0;$

49′) $MN + p'y^2 + p''xy + p''' = 0;$

50′) $MN + p'y^2 + p''x^2 + p'''x = 0;$

51′) $MN + p'y^2 + p''x^2 + p'''y = 0;$

52′) $MN + p'y^2 + p''x^2 + p'''xy = 0;$

53′) $MN + p'y^2 + p''x^2 + p''' = 0;$

54′) $MN + p'xy + p''y + p'''x = 0.$

In jeder dieser Gleichungen haben jedoch die Coefficienten p', p'', p''' wieder andere Werthe, welche jedesmal ähnlich wie die bei I. 7, 8, und II. 9, bestimmt werden müssen.

III. Wir wollen untersuchen, zu welchen Resultaten diese Umwandlungen der allgemeinen Gleichung I. 1. der Flächen des zweiten Grades führen können, und daher jene auf die Bestimmung der Durchschnittscurven zweier solcher Flächen anwenden.

Es seien daher:

$$\left.\begin{aligned} z^2 + By^2 + Cx^2 + 2A'xy + 2B'xz + 2C'yz \\ + 2A''z + 2B''y + 2C''x + D = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 10.$$

$$\left.\begin{aligned} z^2 + \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}x^2 + 2\mathfrak{A}'xy + 2\mathfrak{B}'xz + 2\mathfrak{C}'yz \\ + 2\mathfrak{A}''z + 2\mathfrak{B}''y + 2\mathfrak{C}''x + \mathfrak{D} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 11.$$

die Gleichungen zweier solcher Flächen, welche wir wie in I unter die Formen:

$$\left.\begin{aligned} (z + ay + bx + c)\ (z + a'y + b'x + c') \\ + p'xy + p''y + p'''x = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 12.$$

$$\left.\begin{aligned} (z + \alpha y + \beta x + \gamma)\ (z + \alpha'y + \beta'x + \gamma') \\ + \pi'xy + \pi''y + \pi'''x = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 13.$$

Digitized by Google

gebracht haben, und wo die Coefficienten a, b, c, a', b'. c', p', p'', p''' hier von den in I. 5. und II. 9. gefundenen Werthen nur darin verschieden sind, dass in diesen $A=1$ gesetzt werden muss, um die Werthe von jenen zu erhalten. Die Werthe von α, β, γ, α', β', γ', π', π'', π''' ergeben sich aus jenen von a, b, c, u. s. w., wenn wir respective $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'$, u. s. w. statt B, C, A', u. s. w. schreiben.

Machen wir bei den Gleichungen 12. und 13. die Bedingungen dass:

$$p'=\pi',\ p''=\pi'',\ p'''=\pi'''\} \ldots . 14.$$

sei, so lassen sich diese nach II. 9. auch durch folgende Gleichungen ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{B}'\mathfrak{A}''-B'A''+C'''-\mathfrak{C}''\pm\sqrt{(B'^2-C)\ (A''^2-D)}\\ \mp\sqrt{(\mathfrak{B}'^2-\mathfrak{C})\ (\mathfrak{A}''^2-\mathfrak{D})}\end{aligned}\right\}=0 \ldots 15.$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{C}'\mathfrak{A}''-C'A''+B''-\mathfrak{B}''\pm\sqrt{(C'^2-B)\ (A''^2-D)}\\ \mp\sqrt{(\mathfrak{C}'^2-\mathfrak{B})\ (\mathfrak{A}''^2-\mathfrak{D})}\end{aligned}\right\}=0 \ldots 16.$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'-B'C'+A'-\mathfrak{A}'\pm\sqrt{(B'^2-C)\ (C'^2-B)}\\ \mp\sqrt{(\mathfrak{B}'^2-\mathfrak{C})\ (\mathfrak{C}'^2-\mathfrak{B})}\end{aligned}\right\}=0 \ldots 17.$$

Wir erhalten unter den in 14. oder 15. 16. 17. gegebenen Bedingungen, durch Subtraktion der Gleichungen 12. und 13. folgende:

$$\left.\begin{aligned}(z+ay+bx+c)\ (z+a'y+b'x+c')\\ -(z+ay+\beta x+\gamma)\ (z+\alpha'y+\beta'x+\gamma')\end{aligned}\right\}=0 \ldots 18.$$

Dieser Gleichung wird Genüge geleistet, wenn zugleich:

$$\left.\begin{aligned}&\text{a)}\ z+ay+bx+c=0 \text{ und } z+\alpha y+\beta x+\gamma=0\\ &\text{b)}\ z+a'y+b'x+c'=0 \ - \ z+\alpha'y+\beta'x+\gamma'=0\\ &\text{c)}\ z+ay+bx+c=0 \ - \ z+\alpha'y+\beta'x+\gamma'=0\\ &\text{d)}\ z+a'y+b'x+c'=0 \ - \ z+\alpha y+\beta x+\gamma=0\end{aligned}\right\} \ldots 19.$$

ist; je zwei zusammengehörige dieser Gleichungen drücken die reelle oder imaginäre Durchschnittslinie zweier Ebenen aus, eine solche Durchschnittslinie befindet sich daher auf der durch die Gleichung 18. ausgedrückten Fläche. diese enthält auch alle Durchschnittslinien der Flächen 12. und 13.

IV. Durch die Annahme irgend einer der vier Bedingungen in III. 19.; werden die Gleichungen 12. und 13. auf folgende reducirt:

$$\left.\begin{aligned}p'xy+p''y+p'''x=0\\ \pi'xy+\pi''y+\pi'''x=0\end{aligned}\right\} \ldots . 20.$$

Diese sind aber wegen der Bedingung III. 15. identisch, und jede befriedigt sowohl die Gleichung 12. als 13. Es drückt die Gleichung 20) einen hyperbolischen Cylinder aus, dessen Achse mit der Achse der z parallel ist, und dessen Basis in der Ebene der xy liegt.

Digitized by Google

Beide Flächen 12. und 13. werden sich daher auch auf der Oberfläche dieses Cylinders schneiden. Da wir unbeschadet der Gleichungen 15. 16. und 17. den Coefficienten der Gleichung 13. noch verschiedene Werthe beilegen können, welche doch den letztgenannten genügen, so geht daraus hervor: Dass es viele Flächen zweiten Grades giebt, die sich unter den in 15. 16. und 17. ausgedrückten Bedingungen auf der Oberfläche des Cylinders 20. schneiden, und dass ferner je zwei jener Flächen sich jedesmal noch in einer andern Fläche zweiten Grades durchdringen, deren Gleichung die Form 18. hat; und dass endlich auch jener Cylinder 20. die letztern Flächen in solchen Curven schneiden wird, die zugleich Durchschnittscurven der ersterwähnten Flächen sein werden.

V. Betrachten wir die Gleichungen von 1′. bis 54′. in II., so können wir ohne ähnliche Untersuchungen zu widerholen, folgende Resultate herleiten:

a) Es können mittelst der Gleichungen II. 1′. 2′. 3′. 5′. 6′. 14′. 15′. 16′. 18′. 19′. 20′. 21′. 23′. 25′. 26′. 27′. 29′. 30′. 32′. 33′. 35′. 36′. 37′. 38′. 40′. 41′. 42′. 43′. wie in IV. Systeme von Flächen des zweiten Grades gefunden werden, welche sich alle auf einer Fläche zweiten Grades (Ortsfläche) schneiden, und es werden sich von diesen auf ähnliche Art wie bei den in IV. bestimmten Flächen, je zwei noch auf einer andern Fläche zweiten Grades schneiden, die vorhin genannte Ortsfläche, und je eine dieser letztern werden durch die, mittelst der gehörigen Annahmen bestimmten Flächen, charakterisirt.

b) Ebenso können aus jeder der Gleichungen II. 8′. 9′. 10′. 11′. 12′. 13′. 17′. 24′. 28′. 31′. 39′. 45′. 47′. 49′. 50′. 51′. 52′. 53′. 54′. Systeme von Flächen des zweiten Grades gefunden werden, welche sich alle auf einem Cylinder (Ortscylinder) zweiten Grades schneiden, auch werden sich von den Flächen dieses Systems je zwei noch auf einer andern Fläche zweiten Grades schneiden.

c) Ferner können mittelst der Gleichung II. 4′. Flächen gefunden werden, deren sämmtliche Durchschnittscurven in zwei Ebenen liegen, von welchen eine die Ebene der yz ist, und die andere durch die Achse der x geht. Die Gleichungen 7′. und 22′. dienen zur Bestimmung von Flächen, deren erstere sich auf einer durch die Achse der z gehenden Ebene, und die letztern sich auf der Ebene xy, und in einer durch die Achse der z gehenden Ebene durchdringen. Endlich lassen sich mittelst der Gleichungen II. 44′. 48′. Flächensysteme bestimmen, von welchen die Durchschnittscurven der erstern in zwei mit der Ebene der yz parallelen Ebenen liegen; die Durchschnittscurven der letztern sich aber in zwei mit der Ebene der xz parallelen Ebenen befinden. In allen diesen in c) angegebenen Fällen muss die Fläche III. 18. in eine Ebene degeneriren.

VI. Wir wollen schliesslich noch zeigen, dass die Bedingungsgleichungen in III. 15. 16. 17. identisch sind mit jenen, welche wir erhalten, wenn wir die Relationen zwischen den Coefficienten der Gleichungen von den Flächen III. 10. und 11. oder III. 12. und 13. aufsuchen, welche statt finden müssen, wenn beide Flächen zugleich, von zwei sich schneidenden Ebenen berührt werden sollen.

Da wir bei den vorhergehenden Untersuchungen über die Wahl der Coordinatenebenen keine besondere Bestimmungen ge-

Digitized by Google

macht haben, so können wir jetzt die Ebenen der xz und yz so wählen, dass sie die Fläche III. 10. oder III. 12. berühren. Wir finden für die Gleichung des Schnitts der Ebene der xz mit der Fläche 10. folgende:

$$z^2 + Cx^2 + 2B'xz + 2A''z + 2C''x + D = 0 \ldots . 21.$$

Soll die durch diese Gleichung ausgedrückte Curve in einen Punkt (den Berührungspunkt), oder in ein System zweier Geraden (in welchen ebenfalls eine Ebene von einer Fläche zweiten Grades berührt werden kann) degeneriren, so muss bekanntlich im ersten Fall:

$$\left.\begin{array}{l} B'^2 - C < 0 \\ \text{und} \\ (B'A'' - C'')^2 - (B'^2 - C)\,(A''^2 - D) = 0 \end{array}\right\} \ldots . 22.$$

und im zweiten Fall:

$$\left.\begin{array}{l} B'^2 - C > 0 \\ (B'A'' - C'')^2 - (B'^2 - C)\,(A''^2 - D) = 0 \end{array}\right\} \ldots . 23.$$

sein; diese Relationen müssen zwischen den Coefficienten der Gleichung 10. statt finden, wenn die durch sie ausgedrückte Fläche von der Ebene der xz berührt werden soll. Ebenso erhalten wir für die Bedingungen, dass die Ebene der yz von der Fläche 10. in einem Punkt tangirt werden muss, folgende:

$$\left.\begin{array}{l} C'^2 - B < 0 \\ (C''A'' - B'')^2 - (C'^2 - B)\,(A''^2 - D) = 0 \end{array}\right\} \ldots . 24.$$

und, dass die Fläche 10. von der Ebene der yz in einem System zweier Geraden berührt werden soll:

$$\left.\begin{array}{l} C'^2 - B > 0 \\ (C''A'' - B'')^2 - (C'^2 - B)\,(A''^2 - D) = 0 \end{array}\right\} \ldots . 25.$$

Endlich ist bekanntlich die Gleichung einer Ebene, die einen Kegel in einem Punkte (x', y', z') berührt, folgende:

$$\left.\begin{array}{l} (z' + C'y' + B'x')z + (C'z' + By' + A'x')y \\ \qquad + (B'z' + A'y' + Cx')x = 0 \end{array}\right\} \ldots . 26.$$

wo die berührte Kegelfläche selbst durch die Gleichung:

$$z^2 + By^2 + Cx^2 + 2A'xy + 2B'xz + 2C'yz = 0 \ldots . 27.$$

ausgedrückt ist.

Der Gleichung 26. wird aber Genüge geleistet, wenn

$$z' + C'y' + B'x' = 0;\ C'z' + By' + A'x' = 0;$$
$$B'z' + A'y' + Cx' = 0$$

Digitized by Google

ist. Eliminiren wir aus diesen Gleichungen x', y', z', so erhalten wir zwischen den Coefficienten B, C, A', u. s. w. folgende Bedingungsgleichung:

$$(B'C' - A')^2 - (B'^2 - C)\,(C'^2 - B) = 0 \ldots . 28.$$

Auf gleiche Art erhalten wir, wenn wir bei der Fläche 11. die gleichen Bestimmungen machen, wie so eben bei der Fläche 10., und ebenfalls einen Kegel annehmen, dessen Gleichung:

$$z^2 + \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}x^2 + 2\mathfrak{A}'xy + 2\mathfrak{B}'xz + 2\mathfrak{C}'yz = 0 \ldots . 29.$$

ist, und diesen von einer Ebene berühren lassen, folgende Relationen:

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{B}'^2 - \mathfrak{C} < 0 \\ (\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'' - \mathfrak{C}'')^2 - (\mathfrak{B}'^2 - \mathfrak{C})\,(\mathfrak{A}''^2 - \mathfrak{D}) = 0\end{array}\right\} \ldots . 30.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{B}'^2 - \mathfrak{C} > 0 \\ (\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'' - \mathfrak{C}'')^2 - (\mathfrak{B}'^2 - \mathfrak{C})\,(\mathfrak{A}''^2 - \mathfrak{D}) = 0\end{array}\right\} \ldots . 31.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{C}'^2 - \mathfrak{B} < 0 \\ (\mathfrak{C}'\mathfrak{A}'' - \mathfrak{B}'')^2 - (\mathfrak{C}'^2 - \mathfrak{B})\,(\mathfrak{A}''^2 - \mathfrak{D}) = 0\end{array}\right\} \ldots . 32.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{C}'^2 - \mathfrak{B} > 0 \\ (\mathfrak{C}'\mathfrak{A}'' - \mathfrak{B}'')^2 - (\mathfrak{C}'^2 - \mathfrak{B})\,(\mathfrak{A}''^2 - \mathfrak{D}) = 0\end{array}\right\} \ldots . 33.$$

$$(\mathfrak{B}'\mathfrak{C}' - \mathfrak{A}')^2 - (\mathfrak{B}'^2 - \mathfrak{C})\,(\mathfrak{C}'^2 - \mathfrak{B}) = 0 \ldots . 34.$$

Aus den Gleichungen 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. erhalten wir auch:

$$B'A'' - C' \mp \sqrt{(B'^2 - C)\,(A''^2 - D)} = 0$$
$$C'A' - B'' \mp \sqrt{(C'^2 - B)\,(A''^2 - D)} = 0$$
$$B'C' - A' \mp \sqrt{(B'^2 - C)\,(C'^2 - B)} = 0$$
$$\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'' - \mathfrak{C}' \mp \sqrt{(\mathfrak{B}'^2 - \mathfrak{C})\,(\mathfrak{A}''^2 - \mathfrak{D})} = 0$$
$$\mathfrak{C}'\mathfrak{A}'' - \mathfrak{B}'' \mp \sqrt{(\mathfrak{C}'^2 - \mathfrak{B})\,(\mathfrak{A}''^2 - \mathfrak{D})} = 0$$
$$\mathfrak{B}'\mathfrak{C}' - \mathfrak{A}' \mp \sqrt{(\mathfrak{B}'^2 - \mathfrak{C})\,(\mathfrak{C}'^2 - \mathfrak{D})} = 0.$$

Ziehen wir die erste dieser Gleichungen von der vierten, die zweite von der fünften, und die dritte von der sechsten ab, so erhalten wir folgende:

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'' - B'A'' + C' - \mathfrak{C}' \pm \sqrt{(B'^2 - C)\,(A''^2 - D)} \\ \qquad \mp \sqrt{(\mathfrak{B}'^2 - \mathfrak{C})\,(\mathfrak{A}''^2 - \mathfrak{D})}\end{array}\right\} = 0 \ldots 35.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{C}'\mathfrak{A}'' - C'A'' + B'' - \mathfrak{B}'' \pm \sqrt{(C'^2 - B)\,(A''^2 - D)} \\ \qquad \mp \sqrt{(\mathfrak{C}'^2 - \mathfrak{B})\,(\mathfrak{A}''^2 - \mathfrak{D})}\end{array}\right\} = 0 \ldots 36.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}' - B'C' + A' - \mathfrak{A}' \pm \sqrt{(B'^2 - C)\,(C'^2 - B)} \\ \qquad \mp \sqrt{(\mathfrak{B}'^2 - \mathfrak{C})\,(\mathfrak{C}'^2 - \mathfrak{B})}\end{array}\right\} = 0 \ldots 37.$$

Digitized by Google

Diese Gleichungen sind aber die nemlichen, welche wir in III. 15. 16. 17. gefunden haben. Wir sehen also, dass die in II., III. und IV. gefundenen Sätze von den Bedingungen abhängig sind, dass die Flächen in III. 10. 11. oder III. 12. 13. zugleich von den Ebenen der xz und yz berührt werden. Die Gleichung 37. drückt die Bedingung aus, dass die beiden Kegel in 27. und 29. von den respectiven Flächen 10. und 11. Asymptotenkegel sein müssen. Dieses Wenige wird hinreichend sein, um zu zeigen, wie mannigfach sich die Untersuchungen über die Flächen des zweiten Grades mittelst der in II. gegebenen Umformungen der allgemeinen Gleichung dieser Flächen vervielfältigen lassen.

LI.

Synthetischer Beweis der Incommensurabilität zweier Geraden, die sich wie $\sqrt{3} : 1$ verhalten.

Von

Herrn Professor C. A. Bretschneider

in Gotha.

Synthetische Beweise der Incommensurabilität zweier gerader Linien sind für den Unterricht in der Geometrie immer von Nutzen, und es ist nur zu bedauern, dass deren, so viel mir bekannt, nur erst zwei vorhanden sind, von denen der eine das Verhältniss der Diagonale des Quadrates zu dessen Seite, der andere das Verhältniss des Kreishalbmessers zur Seite des eingeschriebenen Zehneckes betrifft. Ich hoffe daher, dass der nachfolgende Beweis der Incommensurabilität der Seite des gleichseitigen Dreieckes und seines Höhenperpendikels den Lehrern der Geometrie nicht unerwünscht sein wird.

Es sei ABC (Taf. V. Fig. 7.) ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem der Winkel an der Grundlinie 30° beträgt, so ist bekannt, dass AB als Seite eines gleichseitigen Dreieckes und AC als $\frac{2}{1}$ des zu ihm gehörigen Höhenperpendikels betrachtet werden kann, und demgemäss das Verhältniss $AB : AC = \sqrt{3} : 1$ stattfindet. Man mache nun

$BB_1 = BC$ ziehe $B_1C_1 \perp AC$ ferner
$C_1B_2 = B_1C_1$ - $B_2C_2 \perp AB_1$ ferner
$C_2B_3 = B_2C_2$ - $B_3C_3 \perp AB_2$

u. s. w. u. s. w.

so lässt sich leicht nachweisen, dass

$\frac{1}{2}AB_1 = B_1C_1 = CC_1 = C_1B_2$ also auch
$\frac{1}{2}AB_2 = B_2C_2 = C_2B_3$
$\frac{1}{2}AB_3 = B_3C_3 = C_3B_4$

u. s. w.

ingleichen, dass ferner auch:

$$2AC > AB > AC$$
$$AC > AB_1 > AC_1$$
$$\tfrac{1}{2}AB_1 > AB_2 > AC_2$$
$$\tfrac{1}{2}AB_2 > AB_3 > AC_3$$

u. s. w.

sein muss. Es finden daher nothwendig folgende Gleichungen statt:

$AB = AC + AB_1$ oder: $AB = AC + AB_1$
$AC = 2C_1B_2 + AB_2$ $AC = AB_1 + AB_2$
$\frac{1}{2}AB_1 = 2C_2B_3 + AB_3$ $AB_1 = 2AB_2 + 2AB_3$
$\frac{1}{2}AB_2 = 2C_3B_4 + AB_4$ $AB_2 = 2AB_3 + 2AB_4$

u. s. w. u. s. w.

Es folgt hieraus, dass die Messung der Grundlinie AB durch den Schenkel AC immerfort einen Rest lässt, wie weit man auch die Theilung jedes vorangehenden Restes durch den nächstfolgenden fortsetzen mag, d. h. dass Grundlinie und Schenkel incommensurabel sind. Bildet man aus den vorstehenden Gleichungen auf bekannte Weise einen Kettenbruch, so findet man

$$\frac{AB}{AC} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\text{ etc.}}}}} \qquad = 1 + \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+2} = \sqrt{3}$$

wie aus anderen Gründen bereits bekannt ist. Der geometrische Beweis des vorliegenden Verfahrens wird sich für Anfänger am leichtesten gestalten, wenn man nach den Mittelpunkten D_1 D_2 u. s. w. der Abschnitte AB_1 AB_2 u. s. w. die Geraden C_1D_1, C_2D_2 u. s. w. zieht. Denn dann ergiebt sich augenblicklich, dass die Dreiecke

Digitized by Google

$B_1C_1D_1$, $B_2C_2D_2$ u. s. w. gleichseitig
AC_1D_1, AC_2D_2 u. s. w. gleichschenklig

und ausserdem $ABC \sim AC_1D_1 \sim AC_2D_2 \sim$ u. s. w. sein müssen.

LII.

Algebraische Lehrsätze, welche zu beweisen sind.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

Für jedes gerade m ist immer

$$0 = 1 - \frac{m^2}{2^2} + \frac{m^2(m^2-2^2)}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \ldots \quad 1)$$

ferner

$$\left.\begin{aligned} 2m\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \ldots\ldots \mp \frac{1}{m-1}\right)(-1)^{\frac{m}{2}+1} \\ = \frac{m^2}{1^2} - \frac{m^2(m^2-2^2)}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} - \ldots \end{aligned}\right\} 2)$$

Für ein ungerades m gelten dagegen folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} (-1)^{\frac{m-1}{2}} = 1 - \frac{m^2-1^2}{2^2} + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2^2 \cdot 4^2} \\ - \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \ldots \end{aligned}\right\} 3)$$

$$1 = \frac{m^2}{1^2} - \frac{m^2(m^2-1^2)}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} - \ldots \quad 4)$$

Sämmtliche Reihen werden so weit fortgesetzt, bis sie von selbst abbrechen.

Digitized by Google

Nimmt man für m einen beliebigen Bruch, so werden die Reihen unendlich und ihre Summen hängen dann von transcendenten Grössen ab; welche sind diese?

Für jedes beliebige α und β ist:

$$\left.\begin{aligned} 1+\frac{\beta}{\alpha+1}+\frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}+\ldots\ldots+\frac{\beta(\beta+1)\ldots\ldots(\beta+n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots\ldots(\alpha+n)} \\ =\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\left[1-\frac{\beta(\beta+1)\ldots\ldots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)\ldots\ldots(\alpha+n)}\right] \end{aligned}\right\} 5).$$

Ein spezieller Fall dieser Summirung ist bekannt. Wenn nämlich $\beta<\alpha$, so ist $\frac{\beta}{\alpha}$ ein ächter Bruch, und ebenso sind $\frac{\beta+1}{\alpha+1}$, $\frac{\beta+2}{\alpha+2}, \ldots \frac{\beta+n}{\alpha+n}$ ächte Brüche. Geht man daher zur Gränze für wachsende n über, so wird die linke Seite eine unendliche Reihe und auf der rechten nähert sich die Grösse

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\beta+1}{\alpha+1}\cdot\ldots\ldots\frac{\beta+n}{\alpha+n}$$

als ein Produkt unendlich vieler ächter Brüche der Null. Man hat daher

$$\frac{\alpha}{\alpha-\beta}=1+\frac{\beta}{\alpha+1}+\frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}+\ldots \text{ in inf., } \alpha>\beta, \ldots. 6)$$

wie auch der Herr Herausgeber des Archivs in einem Aufsatze in Crelle's Journal angegeben hat.

Bezeichnen wir die Binomialkoeffizienten irgend eines Exponenten μ mit μ_0, μ_1, μ_2 u. s. w. so ist für jedes α und β:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha_0}{\beta+1}-\frac{\alpha_1}{\beta+2}+\frac{\alpha_2}{\beta+3}-\ldots\ldots \\ =\frac{\beta_0}{\alpha+1}-\frac{\beta_1}{\alpha+2}+\frac{\beta_2}{\alpha+3}-\ldots\ldots \end{aligned}\right\} 7).$$

Ist eine der Zahlen α, β ganz und positiv, die andere nicht, so führt obige Gleichung die Summe einer unendlichen Reihe auf die einer endlichen zurück.

Ist n eine ganze positive Zahl, α eine beliebige Grösse, so hat man

$$\left.\begin{aligned} \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\ldots\ldots n}{\alpha+1\,.\,\alpha+2\,.\ldots\ldots\alpha+n} \\ =\frac{1\,.\,\alpha+n+1}{\alpha+1\,.\,n+1}\cdot\frac{2\,.\,\alpha+n+2}{\alpha+2\,.\,n+2}\cdot\frac{3\,.\,\alpha+n+3}{\alpha+3\,.\,n+3}\cdot\ldots \end{aligned}\right\} 8)$$

eine Relation zwischen dem Werthe eines endlichen und eines unendlichen Produkts. (Die Punkte vertreten der Kürze wegen die Stelle der Parenthesen.)

Digitized by Google

LIII.

Verschiedene Bemerkungen.

Von

Herrn R. Wolf

Lehrer der Mathematik an der Realschule zu Bern.

I. Trotz dem, dass in neuerer Zeit die harmonischen Eigenschaften allgemach Eingang in den geometrischen Unterricht finden, habe ich noch in keinem Lehrbuche der Physik den folgenden Satz gefunden: Beim sphärischen Hohlspiegel sind Bild und Gegenstand, in Beziehung auf Mitte und Mittelpunkt des Spiegels als zugeordnete Punkte, einander harmonisch zugeordnet, — einen Satz, aus dem meine Schüler seit Jahren mit der grössten Leichtigkeit sich Rechenschaft über das Spiegelbild geben, — weit leichter als aus der überall mitgetheilten Formel, aus welcher dieser Satz unmittelbar erhalten wird.

II. Praktisch nicht unwichtig ist die Aufgabe: 4 Punkte A, B, C, D (Taf. V. Fig. 8.) liegen in einer Geraden; man hat die Distanz a der Punkte A und B und die Distanz b der Punkte C und D gemessen, so wie die scheinbaren Distanzen α, β, γ der 4 Punkte in Beziehung auf irgend einen Punkt E. Wie gross ist die wahre Distanz x der Punkte B und C. Sehr leicht ergiebt sich die Lösung auf folgendem Wege: Nach den ersten Lehren von den projectivischen Eigenschaften (siehe meine Lehre von den geradlinigen Gebilden u. s. w. Pag. 56. Formel 53) erhält man

$$\frac{a}{a+b+x} : \frac{x}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha+\beta+\gamma)} : \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

und hieraus

$$x = -\frac{a+b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{ab \sin \beta \sin (\alpha+\beta+\gamma)}{\sin \alpha \sin \gamma}}.$$

Führt man nun zur Abkürzung

$$\text{tang } \varphi = \frac{2}{a+b} \sqrt{\frac{\sin \beta \sin (\alpha+\beta+\gamma)}{\sin \alpha \sin \gamma} ab}$$

ein, so erhält man ganz einfach

Digitized by Google

$$x+\frac{a+b}{2}\left[\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\varphi}-1\right]=\frac{a+b}{\cos\varphi}\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

III. In einem Dreiecke *ace* (Taf. V. Fig. 9.) werden zwei Winkel *a* und *e* durch die Linien *ad* und *be* halbirt; was für ein Dreieck ist es, wenn $ad=be$ wird? Diese Frage stellte vor einiger Zeit Herr Professor Steiner in Berlin an verschiedene Mathematiker mit der Bemerkung, dass sie gar nicht so leicht zu beantworten sei, als es zum Anfang scheine, und dieselbe kam seither auch mir zu Ohren. Es ist nun allerdings von selbst klar, dass das gleichschenklige Dreieck die durch die Frage erwähnte Eigenschaft hat, dagegen nicht so ganz leicht zu beweisen, dass kein anderes Dreieck dieselbe Eigenschaft hat. Da auch ich zuerst mehrere Wege fruchtlos fand, so will ich hier denjenigen mittheilen, der mich zum Ziele führte. Ich ging von den beiden folgenden Hülfssätzen aus:

1) Zwei Dreiecksseiten verhalten sich wie die Abschnitte, welche eine ihren Winkel hälftende Linie auf der dritten Seite bildet.

2) Das Product zweier Dreiecksseiten ist gleich dem Produkte jener Abschnitte, vermehrt um das Quadrat der hälftenden Linie.

Nach dem ersteren Satze hat man

$$cd=\frac{ce\,.\,ac}{ac+ae},\quad cb=\frac{ac\,.\,ce}{ce+ae}.$$

Nach dem zweiten aber, mit Hülfe dieser Werthe, ist

$$ae\,.\,ac=cd(ce-cd)+ad^2=\frac{ce^2\,.\,ac\,.\,ae}{(ac+ae)^2}+ad^2$$

$$ae\,.\,ce=cb(ac-cb)+be^2=\frac{ac^2\,.\,ce\,.\,ae}{(ce+ae)^2}+be^2$$

und hieraus folgt, unter Voraussetzung dass $ad=be$,

$$ac-ce=\left[\frac{ce}{(ac+ae)^2}-\frac{ac}{(ce+ae)^2}\right]ac\,.\,ce$$

eine Gleichheit, welche nur für $ac=ce$ oder für ein gleichschenkliges Dreieck richtig ist; denn wäre z. B. $ac>ce$, so wäre auch $ac+ae>ce+ae$, und um so mehr

$$\frac{ac}{(ce+ae)^2}>\frac{ce}{(ac+ae)^2}$$

und es würde somit obige Gleichheit die Ungereimtheit $+=-$ geben.

IV. Ganz kürzlich habe ich eine von Praktikern angewandte Rectification des Kreises in Erfahrung gebracht, welche mir gar nicht übel scheint: Man halbire die Sehne *ab* (Taf. V. Fig. 10.) des Viertelkreises in *c* und ziehe *cd*, so ist *cd* nahe gleich der Länge des Viertelkreises. Für den Halbmesser 1 ist nämlich $cd=1{,}581$ statt $=1{,}571$. Wenn also der Radius gleich einem Fuss, so beträgt der Fehler erst eine Linie, und man kann sich

Digitized by Google

sogar leicht die Regel merken, für jeden Fuss eine Linie abzuziehen.

V. Aufgabe für Schüler. Es soll eine einfache Construction angegeben werden, nach der man ein Dreieck erhalten kann, das einem gegebenen Dreiecke ähnlich und dem Inhalte nach *n*fach, *n* mag eine ganze Zahl oder ein Bruch sein.

VI. Das beste Werk in seiner Art scheint mir folgendes zu sein: Geometrische Constructionen von F. von Ehrenberg. Frankfurt a. M. 1841 fol. Merkwürdig ist aber die Einleitung zu jenem Werke zu lesen, und zugleich zu wissen, dass jenes Werk eine getreue Copie eines Constructionswerkes ist, welches vor vielen Jahren der bekannte Ingenieur-Oberst H. von Pestalozzi aus Zürich für seinen Privatgebrauch anlegte, und dann vor einigen Jahren auf unerklärliche Weise verlor.

VII. Nichts scheint mir fataler, als wenn schon in den Elementen einer strengen Wissenschaft dieselbe Sache verschieden benannt, ja derselbe Name für verschiedene Sachen gebraucht wird.

Für den Winkel, den zwei Ebenen mit einander bilden, habe ich nie einen andern Namen gebraucht als den: Flächenwinkel. Ich könnte ihn heissen Ebenen-Winkel, könnte dieser Name nicht so leicht mit ebener Winkel verwechselt werden. Ich könnte ihn auch allenfalls heissen Winkel an der Kante, nicht eben gerne Kante selbst. — Nun nennen ihn zwar Flächenwinkel: Steiner, Thibaut, Pross, Hohl, Külp, Ohm, Grüson, u. s. w. Dagegen nennen ihn: Keil, Umpfenbach; Raumeckenwinkel Crelle; Neigungswinkel zweier Ebenen Mollweide, Grunert, Blum, Kries, Vega, u. s. w.; Kante Rose, Hasselt, Klügel, Mohs, u. s. w. sogar Kantenwinkel Naumann.

Den Winkel zweier Kanten nenne ich den Regeln der deutschen Sprache gemäss Kantenwinkel. Ebener Winkel ist mir nicht bezeichnend genug dafür, und rückwärts wieder zu ähnlich mit Ebenen-Winkel. Eben so wenig Linienwinkel, und wenn dieser Name gebraucht werden soll, so ist es besser ihn zu gebrauchen für den einem Flächenwinkel als Maass entsprechenden Winkel. — Nun nennen ihn zwar Kantenwinkel Steiner, Pross, Külp, u.s.w. Dagegen Ebener Winkel Mollweide, Hohl, Grunert, Blum, u. s. w.; Linienwinkel Ohm, Tellkampf, u. s. w.

Ich bin bereit Ansichten anderer Geometer über diese Namen zu berücksichtigen, wenn nur eine Stimme vorherrschend bleibt, und diesem Unfug ein Ende macht.

Digitized by Google

LIV.

Eine geometrische Aufgabe.

Von

Herrn G. D. E. Weyer

Assistenten an der Sternwarte zu Hamburg.

Zwei Vierecke zu construiren, welche eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gemeinschaftlich haben, wenn bloss die Seiten dieser Vierecke gegeben sind.

Die Seiten des einen Vierecks seien

$$a,\ b,\ c,\ d$$

und die analogen des andern

$$a',\ b',\ c',\ d',$$

wobei $b = b'$ als die gemeinschaftliche Seite angenommen werde.

Die Winkel (Aussenwinkel)

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$$

und

$$\alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \delta'$$

seien so zu nehmen, dass β den Winkel bezeichnet, welcher von der verlängerten Seite a und der Seite b gebildet wird u. s. w.; so liefert die Tetragonometrie die bekannten Formeln

$$a^2 + b^2 + c^2 - d^2 + 2ab\cos\beta + 2bc\cos\gamma + 2ac\cos(\beta+\gamma) = 0$$

$$a'^2 + b^2 + c'^2 - d'^2 + 2a'b\cos\beta + 2bc'\cos\gamma + 2a'c'\cos(\beta+\gamma) = 0$$

worin β und γ, als die an der Seite b liegenden, beiden Vierecken gemeinschaftlichen Winkel, die zu findenden Unbekannten sind.

Diese Gleichungen haben die Form

$$A + B\cos\beta + C\cos\gamma + \cos(\beta+\gamma) = 0$$
$$A' + B'\cos\beta + C'\cos\gamma + \cos(\beta+\gamma) = 0,$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\frac{a^2+b^2+c^2-d^2}{2ac}=A,\ \frac{b}{c}=B,\ \frac{b}{a}=C,$$

$$\frac{a'^2+b^2+c'^2-d'^2}{2a'c'}=A',\ \frac{b}{c'}=B',\ \frac{b}{a'}=C'.$$

Die Elimination giebt, wenn $\frac{A'-A}{C-C'}=f$ und $\frac{B'-B}{C-C'}=g$ gesetzt wird:

$$(1)\ \ldots\ \cos\gamma=g\cos\beta+f.$$

Nach der Substitution dieses Werthes in

$$A+B\cos\beta+C\cos\gamma+\cos(\beta+\gamma)=0$$

wird hieraus, wenn man noch

$$A+Cf=m$$

und

$$B+Cg+f=n$$

schreibt und nach den Potenzen von cos β ordnet:

$$(2)\ \ldots\ 2g(n-f)\cos\beta^2+(1+n^2+2mg+g^2-f^2)\cos\beta^2 + 2(mn+gf)\cos\beta+m^2+f^2-1=0,$$

wobei, wie aus der Natur der unbekanten Grösse erhellt, nur diejenigen reelen Wurzeln, welche ächte Brüche sind, den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Berichtigung.

In Nr. XI. des Literarischen Berichts S. 172 Z. 10 lese man Boner statt Bauer.

Digitized by Google

IX.
Literarischer Bericht.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Lehrbuch der reinen Elementar-Mathematik von Dr. S. H. A. Herling, Prof. am Gymnasium zu Frankfurt a. M. Mit 151 im Text eingedruckten Figuren. Frankfurt a. M. 1842. 8. 1 Thlr.

Enthält die gewöhnlichen Elemente der Arithmetik und Algebra bis zu den quadratischen Gleichungen, ebene Geometrie, Stereometrie, ebene und sphärische Trigonometrie und die Lehre von den Kegelschnitten.

Die Forst-Mathematik in den Grenzen wirthschaftlicher Anwendung, nebst Hülfstafeln, sowohl für die Forstschätzung, als für den täglichen Forstdienst. Der Forstwissenschaft erste Hauptabtheilung von Dr. G. König, Grossherzogl. Sächsischem Oberforstrathe. Zweite stark vermehrte Ausgabe. Gotha. 1842. 8. 3 Thlr. 12 ggr.

Arithmetik.

Bourdon, elémens d'arithmétique. 19. édit. Paris. 1842. 5 Fr.

W. Foster, Elements of Arithmetic. London. 1842. 12. 2 sh.

Elémens d'arithmétique et d'algebre, à l'usage des écoles de navigation par Fournier. Tome 2. (Conclusion) Paris. 1842. 10 Fr.

Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra von Meier Hirsch. 6te durchgesehene Ausgabe. Berlin. 1841. gr. 8. 1 Thlr. 8 ggr.

Digitized by Google

Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra von A. v. Köller, Pr.-Lieut. und Lehrer der Mathematik. 2te Abtheil. Trier. 1842. gr. 12. (Erste und zweite Abtheil. 1⅓ Thlr.).

Jérôme de la Lande: Tables de logarithmes, à sept décimales, par J. C. Marie; précédées de plusieurs tables contenant les calculs les plus usuels, par Ch. E. Guillery. Bruxelles. 1842. 8. 1 Thlr. 6 ggr.

Tables of Logarithms common and trigonometrical, to five places. 1842. 8. 3 s.

Logarithms (four figures) and Antilogarithms. On a card. 1 s.

Sammlung arithmetischer und algebraischer Aufgaben von Dr. Fr. X. Pollack. Prof. der Math. und Naturgeschichte am k. Lyceum zu Dilingen. Augsb. 1840. 8. 16 ggr.

Sammlung algebraischer Aufgaben, welche aus mehr als 1200 Beispielen sammt den Auflösungen besteht, und worunter sich sehr viele Musteraufgaben mit deren ausführlichen Auflösungen befinden, für Schulen und zum Selbststudium von Dr. Fr. X Pollak, Prof. der Math. und Naturgeschichte am k. Lyceum zu Dilingen. Der Sammlung arithmetischer und algebraischer Aufgaben zweite Abtheilung. Augsburg. 1842. 8. 20 ggr.

Diese Aufgabensammlung enthält in ihrer ersten Abtheilung einen grossen Reichthum von Aufgaben zur Buchstabenrechnung und zur Auflösung gegebener Gleichungen mit einer und mit mehreren unbekannten Grössen des ersten und zweiten Grades, so wie auch zu der Lehre von den Proportionen und Progressionen, auch insbesondere zu der Lehre von den in's Unendliche fortlaufenden geometrischen Reihen, was besonders zu billigen ist, zu der Lehre von den Logarithmen und den mit Hülfe der Logarithmen aufzulösenden Gleichungen, in denen die unbekannte Grösse als Exponent erscheint. Einen eben so grossen Reichthum mit Hülfe der Algebra oder der Gleichungen aufzulösender zusammengesetzter Aufgaben, die sich auf Vorkommenheiten des gemeinen Lebens, Gegenstände der Naturlehre u. s. w. beziehen, enthält die zweite Abtheilung. Unter derselben befindet sich auch eine ziemlich grosse Anzahl von Aufgaben aus der unbestimmten Analytik, aus der Lehre von den Progressionen, von den Logarithmen, aus der Combinationslehre und aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Da uns die Aufgaben meistens zweckmässig gewählt scheinen, und man bei'm Unterrichte eigentlich nicht genug solcher Aufgaben zu einer möglichst reichlichen Auswahl haben kann, so wird auch diese Aufgabensammlung neben den übrigen bekannten Schriften dieser Art, von denen besonders in neuester Zeit eine grössere Anzahl erschienen ist, manchem Lehrer zuweilen gute Dienste leisten. Insbesondere ist die an sich allerdings treffliche Sammlung von Meier Hirsch schon so viel gebraucht und in den Händen so vieler Schüler, dass die in neuerer Zeit in grösserer Anzahl erschienenen

Aufgabensammlungen jedenfalls mit Dank aufzunehmen sind, weil sie eine ziemlich grosse Anzahl neuer, wenn auch oft freilich nur im Ausdruck und den numerischen Daten veränderter Aufgaben, zur Auswahl bei'm Unterrichte darbieten.

Kurzer Leitfaden für den Vortrag der höhern Analysis, höhern Geometrie und analytischen Mechanik von Dr. D. C. L. Lehmus. Mit einer Figurentafel. Berlin. 1842. 8. 1 Thlr.

Dieser kurze Leitfaden verdankt den Vorträgen des Verfassers an der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule zu Berlin seine Entstehung. Von den neuen Untersuchungen über den Rest und die Convergenz der Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe ist nichts in demselben enthalten, und die Darstellung der Principien der Differentialrechnung entfernt sich nicht wesentlich von dem von Lagrange und Lacroix eingeschlagenen Wege, wodurch denn natürlich auch die weitere Begründung der ganzen Wissenschaft und ihrer Anwendung auf Geometrie und Mechanik bedingt wird.

Sammlung von mathematischen, namentlich von Differential- und Integralformeln, nebst den Gleichungen u. s. w. jener krummen Linien, die am häufigsten Anwendung finden. Von Joh. Andr. Schubert. Dresden. 1842. 8. 1 Thlr.

Calculi Variationum Integralium duplicium exercitationes. Auctore Em. Gabr. Björling, Phil. Mag. ad Reg. Acad. Upsal. Mechan. Doc. Upsaliae. 1842. 4.

System elliptischer Bogen, zur Erleichterung der Integralrechnung und zur Bestimmung astronomischer Grössen berechnet von Johann Gotthelf Schmidt, Königl. Professor. Berlin. 1842. 4. 2 Thlr.

Ueber die an sich sehr einfache Einrichtung dieser Tafeln spricht sich der Verfasser in §. 3. des Vorberichts (S. III) auf folgende Art aus: „Im Systeme bezeichnet v den elliptischen Bogen für den relativen Werth der halben grossen Axe (a) und der halben kleinen (b), die von 0,01 bis 1,00 fortschreiten. In der ersten Abtheilung folgen die einzelnen Werthe von $a=0{,}01$ bis $a=0{,}99$ oben, die 100 Werthe von b, unten zur Seite, für jedes Hunderttheilchen von a; in der zweiten die von $b=0{,}01$ bis $b=1{,}00$ oben, die 100 Werthe von a unten zur Seite und die elliptischen Quadranten. Die Bogen habe ich auf 15 und oft auf mehr Decimalen berechnet, und ihre Richtigkeit durch Differenzreihen geprüft, aber nur, weil es hinreichend ist, 11 drucken lassen. Zur Erleichterung der Interpolation sind 2 Differenzreihen der Bogen beigefügt, welche hinreichend sind, um die ersten 6 oder 7 Decimalen der Bogen zu finden, und die man leicht fortsetzen kann, wenn man mehr als 7 Decimalen braucht."

Vollständiges Taschenbuch der Münz- Maass- und Gewichts-Verhältnisse, der Staatspapiere, des Wechsel- und Bankwesens und der Usanzen aller Länder und Handelsplätze. Nach den Bedürfnissen der Gegenwart be-

Digitized by Google

arbeitet von Christ. Noback und Friedr. Noback. Leipzig. 1842. 8.

Erscheint in Heften à 12 ggr. Das dritte Heft ist jetzt erschienen.

Wunderbare Rechnenkünste. Eine Sammlung auserlesener arithmetischer Kunstaufgaben, unter besonderer Berücksichtigung der Zauber-Quadrate, hinsichts ihrer mechanischen Anfertigung, und des Dominospiels, u. s. w. Nebst dem Anhange: Der Kartenleger zur frohen gesell. Unterhaltung für Jedermann. Von C. Ulbricht. Quedlinburg. 1842. 8. 10 ggr.

Geometrie.

Elements of Geometry: consisting of the first four, and the sixth, books of Euclid, chiefly from the text of Dr. R. Simson; with the principal theorems in proportion, and a course of practical geometry on the ground. Also, 4 tracts relating to circles, planes, and solids; with one on spherical geometry. By John Narrien. 8. London. 1842. 10 sh. 6 d.

Lehrbuch der Geometrie von Fr. Wolff. 1. Theil. Ebene Elementar-Geometrie, Trigonometrie, Theilungslehre. 3. verbesserte Ausgabe. Berlin. 1841. gr. 8. 1 Thlr. 16 ggr.

Die ebene Geometrie nach Legendre, von Moritz Beck, Lehrer der Mathematik am Gymnasium zu Bern. Dritte unveränderte Auflage. Bern. 1842. 8. 10 ggr.

Ein ganz kurzer Leitfaden für den Schulunterricht in der ebenen Geometrie nach Legendre.

Die Elemente der geometrischen Aehnlichkeits- und Vergleichungs-Lehre, nebst einer systematischen Anlage der Elemente der Formbildung. Zum Gebrauch für den Unterricht in der reinen Geometrie in den obern Gymnasial-Klassen, von Dr. Ludwig Martin Lauber, Professor und Director des Königlichen Gymnasiums zu Thorn. Berlin. 1842. 8. 8 ggr.

Diese kleine Schrift besteht, wie schon ihr Titel angiebt, aus zwei Abtheilungen. In der ersten giebt der Verf. eine neue Darstellung der Lehre von der Aehnlichkeit, wobei er von der Ansicht ausgeht, dass die gewöhnliche Definition ähnlicher Figuren als solcher, in denen alle Winkel gleich sind und alle ähnlich liegenden Seiten in gleichen Verhältnissen zu einander stehen, logisch falsch sei, indem sie solche Merkmale enthalte, welche sich gegenseitig bedingen, wie z. B. in einem Dreiecke schon die Seiten proportionirt sind, wenn nur Uebereinstim-

Digitized by Google

mung in den Winkeln vorhanden ist. An die Stelle dieser Definition ähnlicher Figuren setzt er daher die folgende neue: „Gleichnamige Formen haben einerlei Bildungsgesetz (Form im engern Sinne), oder sind ähnlich (∞), wenn solche Gegenbeziehungen zwischen gleichnamigen Elementen desselben statt finden — oder auch — wenn ihre Constructionen so von einander, unmittelbar, abhängig gemacht werden, dass die Formen congruent werden, wenn sie in Einem linearischen Elemente übereinstimmen" und gründet auf diese neue Definition die ganze Lehre von der Aehnlichkeit und die Beweise der übrigen bekannten damit zusammenhängenden Sätze. Die zweite Abtheilung enthält als Anhang zu der ersten „eine systematische Anlage der Formbildung" nämlich eine systematische Zusammenstellung aller Begriffsbestimmungen und Sätze der Elementar-Geometrie bis zu denjenigen Abschnitten, welche in der ersten Abtheilung vollständig behandelt sind. Ohne hier weiter auf das Einzelne eingehen und uns auf eine Kritik der Schrift einlassen zu können, glauben wir doch, dass dieselbe der Beachtung allerdings nicht unwerth ist, und dass die neuen Ansichten des Verfassers wohl eine genauere Prüfung verdienen, welcher wir dieselbe denn auch hierdurch empfohlen haben wollen.

Inledning till Geometriens Utöfning, byggd uppå Euclidis och Archimedis Grunder, Samt lämpad efter de Swenska mätnings-sätten. Af Anders Wikström, Math. och Log. Lector i Calmar. Sjette Upplagan. Örebro, Lindh. 1842. 8. 24 sk.

Lärobok i Geometrien, innefattande grunderna för läran om Linier, Ytor (Planimetri och Landtmäteri), solida Figurer (Stereometri), samt deskriptiv Geometri af C. J. L. Almquist. Tredje Upplagan Öfwersedd och Tillökad. Stockholm. 1842. 8. 1 Rdr. 16 sk.

Darstellung der Grundeigenschaften der Prismoide von Joh. Heinr. Traug. Müller. Gotha. 1842. 4. 6 ggr.

Zwei practische Tabellen für Techniker und Mathematiker, aufgestellt von einem Techniker. Altona. 1842. 12. 8 ggr.

Die erste dieser beiden Tafeln enthält: „Die Kreisumfänge und die Kreisflächen in Kreiszollen, Quadratzollen und Quadratfussen ausgedrückt, bei gegebenen um die beständige Differenz von $\frac{1}{4}$ Zoll wachsenden Durchmessern von $\frac{1}{4}$ bis 100 Zoll." Die zweite Tafel enthält: „Die Oberfläche und den Kubikinhalt von Kugeln, deren Durchmesser um die Differenz von $\frac{1}{4}$ der gegebenen Maasseinheit bis zu 12 derselben wachsen." Unter einem Kreiszolle, welcher Ausdruck sonst nicht eben gewöhnlich ist, versteht der Verfasser den Flächeninhalt eines Kreises, dessen Durchmesser einen Zoll lang ist. Diese kleinen nur 10 Blätter füllenden Tafeln sind auf vier Decimalstellen berechnet, und auf schönes starkes Papier mit sehr deutlichen Ziffern gedruckt. Ueber ihre Genauigkeit

Digitized by Google

kann nur öfterer Gebrauch entscheiden. Sie können bei'm Unterricht bei der Lehre vom Kreise und von der Kugel als Exempelbuch gebraucht werden.

Table des diamètres du cercles, depuis 1 jusqu'à 100, avec aires et circonférences correspondantes par J. Cochaux. Bruxelles. 1842. 8. 8 ggr.

De punctis singularibus curvarum algebraicarum simplicis curvaturae disquisitio. Auctore P. N. Ekman. Parisiis (Lipsiae). 1842. 8. 12 ggr.

Specimen disquisitionis curvarum, quae iis quarti ordinis aequationibus continentur, in quibus quantitatibus variabilibus x, y pares tantum exponentes tribuuntur. Dissertatio quam ampl. philosophor. ordinis auctoritate in Academia Vratislaviensi pro summis in philosophia honoribus rite obtinendis die XIII M. Aug. A. MDCCCXLI publice defendet auctor Joannes Theophilus Mauritius Jakobi. Vratislaviae. 4. 16 ggr.

Der Preis von Plückers trefflichen Analytisch-geometrischen Entwickelungen. Essen. 1831. 2 Bde. 4. ist neuerlichst durch die Verlagshandlung von 5 Thlr. 20 Sgr. auf 2 Thlr. herabgesetzt worden.

Praktische Geometrie.

Der selbstlehrende practische Geometer. Eine populäre Anleitung zur Berechnung geometrischer Flächen und Körper, zur Lösung der in technischen Gewerben vorkommenden geometrischen Aufgaben und zum practischen Feldmessen. Zunächst für Gewerbsleute und Landwirthe bearbeitet von F. Herrmann. Grimma. 1842. 12. 8 ggr.

Handbuch der höheren und niederen Messkunde oder gründliche Unterweisung in der gewöhnlichen Feldmesskunst, so wie zu grösseren geodätischen Aufnahmen, zu geographischen Triangulirungen, barometrischen Höhenmessungen, zu Nivellements und zur Instrumentenlehre. Nach dem neuesten Standpunkte der Wissenschaft bearbeitet von Dr. Fr. W. Barfuss. Mit 14 lithographirten Foliotafeln. Weimar. 1842. 8. 2 Thlr. 12 ggr.

Der Zweck dieses Werkes eines schon durch mehrere Arbeiten, insbesondere in Schumachers astronomischen Nachrichten, rühm-

Digitized by Google

lichst bekannten Verfassers ist durch seinen Titel hinreichend bezeichnet, und wir glauben dasselbe Praktikern besonders wegen seiner Deutlichkeit empfehlen zu dürfen, wollen aber auf der andern Seite auch nicht verhehlen, was wir in demselben vermisst haben. Zuerst scheint uns in demselben überhaupt ein systematischer Faden zu fehlen oder wenigstens nicht vollständig fest gehalten zu sein, welcher sich durch das ganze Werk hindurch zieht, wobei wir jedoch gern zugeben wollen, dass es eigenthümliche Schwierigkeiten hat, in einem Lehrbuche der Geodäsie einen solchen Faden zu verfolgen. Dass ein solcher möglichst streng systematischer Gang aber ungeachtet der praktischen Natur der Geodäsie dennoch von der grössten Wichtigkeit ist, wird auf der Stelle einleuchten, wenn man überlegt, dass nur auf diese Weise der Lehrling eine vollständig deutliche Einsicht in die eigentliche Natur und den eigentlichen Zweck aller geodätischen Arbeiten von den kleinsten bis zu den grössten erlangen kann. Ferner scheint uns der Verfasser der Coordinatenmethode eine zu geringe Aufmerksamkeit geschenkt zu haben, da dieselbe jedenfalls für die Geodäsie von der grössten Wichtigkeit ist, wobei wir, um nur etwas Specielles hervorzuheben, u. A. an die schöne Auflösung des Pothenot'schen Problems von Gauss (Astronomische Nachrichten. Nr. 6.), an Hansen's schöne Auflösung einer andern geodätischen Aufgabe (Astronomische Nachrichten. Nr. 419.) und ähnliche Arbeiten anderer Mathematiker erinnern, die sich alle der Coordinatenmethode vorzugsweise bedienen. Letztere Aufgabe und die von Clausen in Nr. 430. der astronomischen Nachrichten gegebene graphische Auflösung derselben hätten, um dies beiläufig zu bemerken, wohl auch eine besondere Berücksichtigung verdient. In einem Werke, wie das vorliegende, welches namentlich auch eine Darstellung der höhern Geodäsie liefern und eine Anleitung zu geographischen Triangulirungen geben soll, wäre wohl eine allgemeine analytische Theorie der Fehler in ebenen und sphärischen Dreiecken ganz an ihrem Orte gewesen, wenn auch der Verfasser allerdings in den einzelnen vorkommenden Fällen die möglichen Fehler immer berücksichtigt und in Rechnung zu nehmen gelehrt hat. Am meisten aber haben wir eine vollständige in's Einzelne gehende Anleitung zur Ausführung der in neuerer Zeit für alle grössereu geodätischen Arbeiten so wichtig gewordenen, auf die Methode der kleinsten Quadrate gegründeten, sogenannten Ausgleichungsrechnungen vermisst. da dasjenige, was über diesen hochwichtigen Gegenstand auf S. 301—S. 305 gesagt worden ist, nach unserer Ueberzeugung keineswegs zur vollständigen Belehrung eines Geodäten welcher grössere Arbeiten seines Fachs auszuführen beabsichtigt, hinreicht. Nehmen wir nun hierzu noch, dass das Werk von den Lehren der sphäroidischen Trigonometrie, dieses neuern für die höhere Geodäsie so überaus wichtigen Theils der reinen Mathematik, so gut wie gar keinen Gebrauch macht *), so werden wir in den Augen der Leser, auch ohne uns auf eine in's Einzelne gehende Kritik einzulassen, gewiss gerecht-

*) Das Wenige, was in §. 18. über die geodätische Linie gesagt worden ist, kann dieses Urtheil nicht entkräften.

Digitized by Google

fertigt erscheinen, wenn wir die in demselben gegebene Darstellung, wenigstens in Bezug auf die höhere Geodäsie, dem neuesten Standpunkte der Wissenschaft nicht ganz entsprechend finden können. Auch bemerken wir noch, dass der Verfasser gar nicht auf die Erleichterung und Abkürzung oft wiederkehrender Rechnungen durch Tafeln Rücksicht genommen hat, so wie denn z. B. in der Lehre von dem Höhenmessen mit dem Barometer die Berechnung, Einrichtung und der Gebrauch der trefflichen Gaussischen Tafeln hätte gezeigt werden sollen, die auch leicht selbst in das Werk hätten aufgenommen werden können, da sie nur etwa den Raum zweier Seiten in Anspruch genommen haben würden, wodurch der praktischen Ausübung des barometrischen Höhenmessens jedenfalls grosser Vorschub geleistet worden wäre. Ungeachtet dieser Ausstellungen wiederholen wir aber gern unser im Eingange ausgesprochenes Urtheil, dass das Werk insbesondere wegen seiner durch die meistens sehr ausführliche Darstellung bewirkten Deutlichkeit, unter den im Obigen angedeuteten Beschränkungen, verdient, von Praktikern nicht unbeachtet gelassen zu werden.

Bei Gelegenheit dieser Anzeige machen wir die Leser noch darauf aufmerksam, dass von dem

Traité de Géodésie par Puissant. 2 vol. in 4.

in diesem Jahre eine dritte Ausgabe (Preis 40 francs) erschienen ist, über die wir nächstens weiter zu berichten Veranlassung nehmen werden.

L'Art du Nivellement et l'Application de cet art à la construction des routes, chemins de fer et de grande communication, par E. du Breuil. 1. et 2. Partie. Paris. 1842. 8. 4 Fr.

Trigonometrisches Nivellement der Oder von Oderberg unterhalb Küstrin bis zur österreichischen Grenze. Auf Befehl des Königlichen Finanz-Ministerii ausgeführt in den Jahren 1839 und 1840 von C. Hoffmann, Bau-Conducteur und Bau-Referendar, und Cand. Salzenberg. Mit 2 Uebersichtskarten. Berlin. 1841. 4. 2 Thlr. 12 ggr.

Beiträge zur Geographie Kurhessens und der umliegenden Gegend. Zweites Heft. Enthaltend die Messungen der Jahre 1835, 1836 und 1837 nebst der definitiven Berechnung der ganzen Arbeit, zur Grundlage für die weitern Vermessungen in Kurhessen. Von Prof. Dr. Gerling. Cassel. 1839. (Erst jetzt in den Buchhandel gekommen). 8. $\frac{2}{3}$ Thlr.

Aus keinem Buche wird man sich mit den für die höhere Geodäsie in neuerer Zeit so wichtig gewordenen, auf die Methode der kleinsten Quadrate gegründeten, sogenannten Ausgleichungsrechnungen besser bekannt machen können als aus dieser in jeder Beziehung trefflichen Schrift, welche Niemand, wer sich mit grössern geodätischen Arbeiten zu beschäftigen beabsichtigt, unbeachtet lassen sollte, und dieselbe kann daher in der so eben in Anregung gebrachten Beziehung in gewisser Rücksicht dem oben angezeigten Buche von Herrn Dr. Barfuss zur Ergänzung dienen.

Digitized by Google

Mechanik.

Versuch einer neuen Begründung der Grundlehren der Mechanik von Joh. Andr. Schubert, Prof. der mathem. Wissenschaften an der technischen Bildungsanstalt zu Dresden. Dresden und Leipzig. 1841. 8. 12 ggr.

Der Verf. findet die strengeren Beweisführungen des Satzes vom Parallelogramme der Kräfte und den Uebergang zu den von demselben abhängigen Gesetzen weder sehr bequem, noch elegant, und sagt, dass dem Anfänger namentlich die wahre Erfassung dieser Grundlehren ungemein schwer, ja dass mancher hierdurch von einem gründlichen Studium der Mechanik ganz abgeschreckt werde. Deshalb versucht er einen andern Weg einzuschlagen, indem er zunächst das Cartesianische Kräftemaass beweiset, hieraus das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, ferner die Bestimmung des Mitteldruckes für Drücke in einer und in verschiedenen Ebenen, und sodann die übrigen Lehren der Statik ableitet. Eine Kritik dieser Darstellung in wissenschaftlicher Beziehung, namentlich in Rücksicht auf Schärfe der Begriffe und Beweise, würde hier einen viel zu grossen Raum einnehmen, und durch blosse kurze Bemerkungen könnte in dem Verf. leicht die Vermuthung erweckt werden, dass ihm unrecht geschehe, weshalb wir dieselben hier lieber ganz unterdrücken und fallen lassen wollen. Was aber die von dem Verf. bei'm Unterrichte gemachten Erfahrungen betrifft, so müssen wir offen gestehen, dass denselben die unsrigen gerade entgegengesetzt sind. Denn nach unsern Erfahrungen haben Schüler, die von einem gründlichen und strengen Studium der elementaren Theile der reinen Mathematik zu dem Studium der elementaren Mechanik übergingen, sich durch die strenge Darstellung des Parallelogrammes der Kräfte immer ganz besonders befriedigt gefühlt *), und sind gerade durch diese an die Strenge der euclidischen Geometrie so lebhaft erinnernden Darstellungen ganz besonders zu einem gründlichen und ausführlichen Studium der Mechanik angeregt und für dasselbe gewonnen worden, indem sie häufig überrascht waren, ganz gegen ihre nicht selten vorgefasste Meinung, in der, einen so praktisch oder technisch klingenden Namen wie die Mechanik führenden Wissenschaft die Strenge der Begriffe und der Beweise des alten, von ihnen so liebgewonnenen Euclides wiederzufinden. Auch haben wir immer die Bemerkung gemacht, dass durch die strengen und nach unserer Ueberzeugung grösstentheils sehr eleganten Herleitungen der übrigen Gesetze der Statik aus dem Parallelogramme der Kräfte, die jedenfalls das beste Muster einer streng systematischen und völlig erschöpfenden Darstellung einer ganzen Wissenschaft liefert, das schwerlich durch irgend etwas Anderes in demselben Grade und mit demselben Nutzen ersetzt werden kann, das Interesse an der Wissenschaft nur fortwährend desto mehr gesteigert und erhöhet wurde, je weiter die Entwicklung fortschritt. Wir würden daher das grösste Bedenken tragen, unsere Vorträge über Mecha-

*) Fast immer haben einige aus eignem Antriebe umfassende Arbeiten über die verschiedenen Beweise des Parallelogrammes der Kräfte unternommen.

Digitized by Google

..... mit dem Cartesianischen Kräftemaass und dem immer eine gewisse Dunkelheit und Unbestimmtheit zurücklassenden Begriffe der virtuellen Geschwindigkeiten, wie der Verf. will, zu beginnen, und können hiernach den von dem Verf. in Vorschlag gebrachten Weg in methodischer Rücksicht — indem wir, wie schon erwähnt, die von der strengen Wissenschaft gemachten Anforderungen jetzt gar nicht weiter in's Auge fassen — nur für verfehlt erklären, und müssen jeden Lehrer von dessen Befolgung dringend abrathen, da durch denselben das Studium der Mechanik den grössten Theil seiner die ganze Ausbildung des Mathematikers so sehr fördernden Kraft nach unserer Ueberzeugung verlieren würde.

Versuch einer objectiven Begründung der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte von Dr. B. Bolzano. Aus den Abhandlungen der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften (V. Folge Bd. 2.) besonders abgedruckt. Prag. 1842. 4. 12 ggr.

Handbuch der Mechanik, mit Bezug auf ihre Anwendung und mit besonderer Rücksicht auf ihre Darstellung ohne Anwendung der höheren Analysis bearbeitet von C. H. A. Kayser, Grossherzogl. Badischem Hofrathe und Professor an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe. Mit 13 lithogr. Tafeln. Karlsruhe. 1842. 8. 4 Thlr

Dieses mit grosser Gründlichkeit verfasste Handbuch der Mechanik enthält ausser der Darstellung der theoretischen Lehren der Mechanik fester und flüssiger Körper die wichtigsten Anwendungen dieser Wissenschaften in so grosser Vollständigkeit mit fortwährender Rücksicht auf die neuesten Erfindungen wie unsers Wissens wenig andere Werke von ähnlicher Tendenz, weshalb wir dasselbe zu einem gründlichen Studium der theoretischen und praktischen Mechanik insbesondere allen Technikern angelegentlich empfehlen, und die Ueberzeugung haben, dass es zu dessen Beförderung und der allgemeinern Verbreitung der neuern Erfindungen auf dem Gebiete der praktischen Mechanik, und einer gründlichen Beurtheilung derselben aus dem theoretischen Gesichtspunkte, gewiss beitragen wird. Dass der Verf. die Anwendung der höhern Analysis zwar, wo es ohne zu grosse Weitläufigkeit anging, vermieden, aber keineswegs gänzlich ausgeschlossen hat, sichert diesem Werke noch einen besondern Vorzug. Die Figurentafeln sind zwar nicht in grossem Maassstabe, aber doch mit für ihren Zweck hinreichender Deutlichkeit und Schärfe ausgeführt. Uebrigens schliesst sich das Werk an des Verfs. früher erschienenes Handbuch der Statik mit Beziehung auf ihre Anwendung. Karlsruhe. 1836. 8. an.

Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik. Mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Anwendung in der Architektur, aufgesetzt von Dr. J. A. Eytelwein. Dritte, mit einem Anhange vermehrte Auflage. Herausgegeben von A. Freiherrn von Forstner. Mit 60 Holzschnitten und 6 Kupfertafeln. Leipzig. 1842. 8. 3 Thlr.

Digitized by Google

Der hochverdiente Verf. dieses in so vielen Beziehungen ausgezeichneten, vorzüglich für den Praktiker so brauchbaren Handbuchs der Mechanik fester Körper und der Hydraulik, welchen ein anhaltendes Augenübel hinderte, sich der Bearbeitung der nöthig gewordenen dritten Auflage selbst zu unterziehen, übertrug dieselbe deshalb dem auf dem Titel genannten Herren Herausgeber, welcher in der Vorrede ausführlich von den Grundsätzen, welche ihn bei der Herausgabe leiteten, Rechenschaft abgelegt hat. Wir bemerken hier in dieser Beziehung nur, dass die Einrichtung des Buchs im Wesentlichen ganz unverändert geblieben, und dass also auch jetzt noch die Hydraulik bei Weitem als dessen Haupttheil, die Mechanik fester Körper eigentlich nur als eine Einleitung zu derselben zu betrachten ist. Einzelne Bemerkungen im theoretischen Theile hat der Herr Herausgeber gleich im Texte eingeschaltet, überall aber auf die neuere Literatur vollständig hingewiesen. Beigegeben ist dieser neuen Auflage ein sich in den frühern Auflagen nicht findender, aus mehrern Theilen bestehender Anhang, dessen einzelne Abschnitte folgende sind. I. Abschnitt. Ueber den Ausfluss des Wassers durch vertikale, rechtwinklichte, oben freie Oeffnungen, wenn dieser Ausfluss frei und ohne Hindernisse erfolgt. II. Abschnitt. Untersuchungen über die Bewegung des Wassers, wenn auf die Contraction, welche beim Durchgange durch verschiedene Oeffnungen stattfindet, und auf den Widerstand, welcher die Bewegung längs den Wänden der Behältnisse verzögert, Rücksicht genommen wird. III. Abschnitt. Von der Bestimmung der Wassermenge eines Stroms. IV. Abschnitt. Ueber Anordnung der Röhrenleitungen mit Verzweigungen und die Bestimmung ihrer Abmessungen unter gegebenen Umständen. V. Abschnitt. Ueber die Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen, mit besonderer Berücksichtigung der Druckhöhe über der Einmündung der Leitröhre. Die in den frühern Auflagen sich findende „Tafel über die Geschwindigkeit, welche ein Körper durch den freien Fall erlangt“ ist in dieser neuen Ausgabe weggelassen worden, weil sie selten gebraucht wird, aber 1½ Bogen einnimmt, und die in ihr enthaltenen Angaben immer leicht unmittelbar nach der bekannten einfachen Formel $c = 2\sqrt{gh} = 2\sqrt{15\frac{1}{6} \cdot h} = 7{,}9\sqrt{h}$ (beinahe) berechnet werden können.

Praktische Mechanik.

Bresson, Carl, Lehrbuch der Mechanik in ihrer Anwendung auf die physischen Wissenschaften, die Künste und Gewerbe. Aus dem Franz. Leipzig. 1842. 4.
Erscheint in Lieferungen à 12 ggr. mit Kupfern in Folio.

Guil. Ed. Weber: De tribus novis librarum construendarum methodis. Gottingae. 1841. 4. 8 ggr.

Digitized by Google

Astronomie.

Populäre Astronomie oder Unterricht über mathematische Geographie, Astronomie und Kalenderwesen von G. A. Schumann. Neue Ausg. Quedlinburg. 1842. 8. 16 ggr.

Ueber das farbige Licht der Doppelsterne. Versuch einer das Bradley'sche Aberrations-Theorem als integrirenden Theil in sich schliessenden allgemeinen Theorie. Von G. Doppler. Aus den Abhandlungen der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften (V. Folge, Bd. 2.) besonders abgedruckt. Prag. 1842. gr. 4. $\frac{1}{4}$ Thlr.

Wir werden später auf diese Abhandlung zurückkommen.

Berliner astronomisches Jahrbuch für 1844. Auf Veranlassung der Ministerien des Unterrichts und des Handels herausgegeben von J. F. Encke, Director der Berliner Sternwarte. Berlin. 1841. 8. 3 Thlr. 4 ggr.

Das Berliner astronomische Jahrbuch, welches von seinem ersten Erscheinen im Jahre 1776 an bis jetzt nur für die Benutzung der darin enthaltenen Angaben von Seiten der Astronomen bestimmt war, erhält mit dem Jahrgange 1844 eine auch für die Folge beizubehaltende neue Einrichtung, indem künftig auch die Data darin enthalten sein sollen, welche hauptsächlich für den Seefahrer von Interesse sind. Demzufolge sind jetzt zu seinem frühern Inhalte, welchen wir als hinreichend bekannt voraussetzen, hinzugekommen: 1. Mond-Distanzen für 1844 auf S. 277—S. 420. 2. Parallaxe und Halbmesser der Planeten für 1844. 3. Lage des Mond-Aequators für 1844. 4. Bewegung der mittleren Länge des Mondes. 5. Tafeln zur Bestimmung der Breite durch Beobachtungen des Polarsterns ausserhalb des Meridians. 6. Hülfstafeln: Tafel I. Refractionstafel. Tafel II. Zur Verwandlung der Stern-Zeit. Tafel III. Zur Verwandlung der Stern-Zeit in mittlere Zeit. Tafel IV. Einfache Interpolation bei einem Intervall von 12 Stunden. Tafel V. Corrections-Tafel für die zweiten Differenzen. In einem Anhange wird endlich über Einrichtung des Jahrbuchs eine sehr ausführliche Nachricht und zu dessen Gebrauch eine sehr vollständige Anleitung gegeben. Jeder Jahrgang erscheint künftig drei Jahre voraus.

So sehr nun auch auf diese Weise das Jahrbuch seiner eigentlichen Bestimmung als unentbehrliches Hülfsmittel bei den astronomischen Beobachtungen näher geführt wird, und so sehr sich alle Beobachter und Seefahrer dem schon so vielfach verdienten Herren Herausgeber zu dem wärmsten Danke für diese neue Einrichtung verpflichtet fühlen müssen: so werden doch auf der andern Seite alle theoretischen Astronomen mit Bedauern die schönen Abhandlungen vermissen, mit denen früher der Herr Herausgeber jeden Jahrgang schmückte. Enthält auch die Vorrede nicht die bestimmte Nachweisung, dass diese Abhandlungen künftig wegbleiben sollen, so sind doch weder in dem Jahrgange für 1844, noch in

Digitized by Google

dem auch bereits erschienenen Jahrgange für 1845 dergleichen theoretische Abhandlungen enthalten, so wie denn auch überhaupt die Einrichtung beider Jahrgänge durchaus dieselbe ist.

Connaissance des tems, pour l'an 1845 avec Additions. Paris. 1842. 8. 3 Thlr.

Physik.

Die ersten Elemente der gesammten Naturlehre zum Gebrauche für höhere Schulen und Gymnasien von Dr. Georg Wilhelm Muncke. Vierte verbesserte Auflage mit zwei Kupfertafeln. Heidelberg. 1842. 8. 20 ggr.

Die Einrichtung dieser vierten Auflage des vorstehenden hinreichend bekannten Lehrbuchs ist im Wesentlichen ganz dieselbe geblieben wie in den vorhergehenden Auflagen. Die neuern Entdeckungen sind, so weit es der Zweck des Buches gestattete, berücksichtigt worden.

Die Naturlehre nach ihrem gegenwärtigen Zustande mit Rücksicht auf mathematische Begründung dargestellt von Dr. Andreas Baumgartner. Siebente Auflage, von Genanntem und von Dr. Andreas v. Ettingshausen gemeinschaftlich umgearbeitet. Mit acht Kupfertafeln. Wien. 1842. 8. 4 Thlr.

Die so eben erschienene siebente Auflage dieses trefflichen Lehrbuchs der Physik unterscheidet sich von den frühern nach des Verfassers eigenen Worten hauptsächlich in folgenden Punkten. „In der Statik wurde der in den früheren Auflagen vorgetragene Beweis Duchayla's für den Satz vom Parallelogramme der Kräfte durch einen anderen ersetzt, der in der Hauptsache mit dem vor langer Zeit von dem trefflichen deutschen Mathematiker Lambert gegebenen, aber wie es scheint wenig beachteten Beweise des genannten Satzes übereinstimmt. Dieser Beweis ist von dem Uebelstande frei, die Zusammensetzung der auf einen isolirten Punkt wirkenden Kräfte auf Prämissen zu gründen, welche das Vorhandensein eines Systems unveränderlich verbundener Punkte voraussetzen und auf Eigenschaften eines solchen Systems beruhen. Die Lehre von den Capillarphänomenen tropfbarer Flüssigkeiten, die Sätze von dem Gleichgewichte der Gase, die Hygrometrie erhielt eine ganz neue Bearbeitung. Die Lehre von der schwingenden Bewegung der Körper wurde als ein selbstständiges Ganzes behandelt, dessen Principien auf gleiche Weise der Betrachtung der Wasserwellen, der Erklärung der Erscheinungen des Schalles, wie auch der Undulationstheorie des Lichtes zum Grunde gelegt werden können. Im zweiten Theile schien es passend die Abschnitte vom Magnetismus und von der Elektricität jener vom Lichte und von der Wärme vorangehen zu lassen. Abgesehen von dem besse-

Digitized by Google

ren Zusammenhange, der dadurch in die Wärmelehre gebracht wird, welche seit Melloni's Arbeiten der Kenntniss der Elektricitätslehre nicht mehr entbehren kann, haben die Lehrer der Physik an unseren Universitäten und Lyceen nicht mehr mit den Schwierigkeiten zu kämpfen, welche vordem die veränderliche Witterung des Frühjahres den wichtigsten optischen Versuchen in den Weg legte. Sämmtliche vier Abschnitte erscheinen radikal umgearbeitet; in der Lehre vom Magnetismus sind die Principien der Arbeiten von Gauss aufgenommen, die Lichtlehre wurde direkt aus der Undulationstheorie entwickelt, der Vortrag der Wärmelehre erhielt durch die wichtigen neuen Funde auf diesem Gebiete eine veränderte Gestalt und gewichtige Zusätze. Am meisten war die Gährung, in der die Wissenschaft sich befindet, und die Schwierigkeit allen Anforderungen zu genügen, bei der Bearbeitung der Elektricitätslehre fühlbar; die schöne Anwendung, welche Poggendorf von dem Ohm'schen Gesetze auf die Theorie der zusammengesetzten Säule machte, kam uns erst zu Gesichte, als die von der Elektricität handelnden Bogen bereits abgedruckt waren; wir halten dieselbe für zu wichtig, um ihr nicht noch einen Platz in einem Nachtrage zu widmen, den wir am Ende des Buches folgen lassen, um so dem Leser die Wissenschaft, so weit es in unseren Kräften steht, in dem neuesten Zustande zu übergeben."

Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie für deutsche Verhältnisse frei bearbeitet von Dr. Joh. Müller, Lehrer der Physik und Mathematik an der Realschule zu Giessen. Mit 1000 in den Text eingedruckten Holzschnitten. 2 Bände, jeder von 40 Bogen, gross Octav. In Lieferungen von 6 Bogen. Jede Lieferung 12 ggr. Braunschweig bei Fr. Vieweg und Sohn. 1842.

Wir werden später auf dieses Werk zurückkommen.

Die Physik in ausführlicher populärer Darstellung Nach dem gegenwärtigen Zustande dieser Wissenschaft, mit den bis auf die neueste Zeit darin gemachten Erfindungen und Entdeckungen, für die Gebildeten beiderlei Geschlechts bearbeitet von Dr. J. H. M. v. Poppe. Mit 292 Abbildungen auf 20 Tafeln. Erster Band. Zürich. 1842.

Von diesem Buche sind bis jetzt die ersten 4 Lieferungen in unsere Hände gelangt. Das Ganze soll aus sieben Lieferungen bestehen, von denen jede 12 ggr. kostet.

Handbuch der Physik für Unterricht und Selbstbelehrung, mit immerwährender Beziehung auf Anwendung. Von Joh. Ph. Neumann. Erster Band. 3te zu einem durchaus neuen Werke umgestaltete Auflage. Mit 7 Kupfertafeln. Wien. 1842. 8. 3 Thlr. 12 ggr.

Wir werden späterhin nach dem vollständigen Erscheinen der 3ten Auflage dieses in mehrfacher Beziehung empfehlenswerthen, aus seinen frühern Auflagen hinreichend bekannten Werks auf dasselbe zurückkommen.

On the connexion of the physical sciences. By Mary Somerville. 6th edition. 8. London. 1842. 10 sh. 6 d.

Guil. Ed. Weber: De fili bombycini vi elastica. Gottingae. 1841. 4. 8 ggr.

Die Lehre von der Wärme und Luft mit besonderer Rücksicht auf die alltäglichen Erscheinungen und gewerblichen Anwendungen. Vorlesungen, gehalten zu Jever im Winter $18\frac{40}{41}$ vor einer Versammlung von Herren und Damen von W. H. Brennecke. Jever. 1842. 8. 12 ggr.

What is a Voltaic Battery? By Rosina M. Zorulin. 2 s. 6 d. 1842.

Repertorium der Physik. Eine Zusammenstellung der neueren Fortschritte dieser Wissenschaft. Band VI. Mit zwei Figurentafeln. Berlin. 1842. 8. 2 Thlr.

Dieser sechste Band des bekannten sehr verdienstlichen Repertoriums der Physik enthält zwei Abschnitte. Der erste von A. Seebek bearbeitete Abschnitt ist der Akustik gewidmet. Der zweite von Peter Riess bearbeitete Abschnitt liefert einen zweiten Bericht über die Fortschritte der Elektricitätslehre, und ist als eine Fortsetzung des im zweiten Bande des Repertoriums gelieferten ersten Berichts über diesen wichtigen Theil der Physik zu betrachten.

Annalen für Meteorologie, Erdmagnetismus und verwandte Gegenstände, redigirt von Grunert, Koller, Kreil, Lamont, Plieninger, Stieffel, herausgegeben von Dr. J. Lamont, Conservator der Königlichen Sternwarte bei München, u. s. w. Jahrgang 1842. 1. Heft. Mit einem Steindrucke. München. 1842. 8. 1 Thlr.

Von dieser schon in Nr. VI. S. 103 des literarischen Berichts vorläufig angekündigten, der Meteorologie und dem Erdmagnetismus vorzugsweise gewidmeten neuen Zeitschrift ist nun das erste Heft wirklich erschienen, und hat den folgenden Inhalt.

Stündlicher Gang der Temperatur und des Luftdruckes im Jahre 1841, mit Hülfe registrirender Instrumente aufgezeichnet an der Königl. Sternwarte bei München, reducirt von Herrn Leonhardt.

Mittlere Temperatur und mittlerer Barometerstand für die Monate, abgeleitet aus den vorhergehenden Beobachtungen.

Dunstdruck, beobachtet an der K. Sternwarte bei München 1841.

Neue Einrichtung des Psychrometers, vom Herausgeber.

Magnetische Beobachtungen, angestellt im Observatorium der K. Sternwarte bei München im Jahre 1840.

Zusammenstellung der täglichen meteorologischen Beobachtungen von Regensburg, Würzburg, Hof und Leipzig, 1841.

Zusammenstellung der monatlichen Mittel des Luftdruckes und der Temperatur in Landsberg, Regensburg, Burglengenfeld, Gunzenhausen, Ansbach, Neustadt an der Aisch, Würzburg, Uffenheim, Hof, Leipzig, Cronberg.

Mittlere magnetische Declination in München, vom Herausgeber.

Meteorologische Uebersicht des Jahres 1841, aus den Regensburger Beobachtungen, von Herrn Prof. v. Schmöger.

Digitized by Google

Erdbeben und Erdstösse in den Jahren 1839, 1840, 1841, nebst Angabe der gleichzeitig in Freysing stattgehabten Aenderung des Barometers von Hrn. Lyceal-Professor X. Meister.

Differential-Instrumente für magnetische Declination und Horizontal-Intensität, vom Herausgeber.

Vermischte Nachrichten vom Herausgeber. — Magnetische Störung vom 25. Sept. 1841. — Supplemental Instructions for the use of magnetical Observatories. — Inductions-Inclinometer von Hrn. Prof. Lloyd. — Magnetische und meteorologische Beobachtungen zu Prag, erster Jahrgang. — Annuaire magnétique et météorologique du corps des Ingénieurs des mines de Russie, 1839. — Auszug aus einem Briefe des Hrn. Colla. — Periodische Aenderung der Horizontal-Intensität von Herrn Prof. Hansteen. — Auszug aus einem Briefe des Hrn. Prof. Hansteen. — Auszug aus einem Briefe des Hrn. Directors Valz. — Beschreibungdes Observatoriums in Dublin, von Hrn. Prof. Lloyd. — Correctionder absoluten Intensitäts-Messungen, wegen des in den Magnetstäben inducirten Magnetismus, vom Herausgeber.

Man wird hieraus den reichhaltigen und lehrreichen Inhalt des vorliegenden ersten Hefts dieser neuen Zeitschrift erkennen. Wir werden den Inhalt eines jeden Hefts in unserm literarischen Berichte mittheilen.

Alle Mittheilungen für die Annalen von grösserem Umfange bittet der Herausgeber ihm durch die G. Franz'sche Buchhandlung in München zukommen zu lassen.

Witterungskunde. Mit Rücksicht auf vermuthliche Witterung überhaupt und des Jahres 1842 insbesondere. Von Ph. Stieffel, Prof. an der Grossherzogl. Badischen polytechnischen Schule zu Karlsruhe. Karlsruhe. 1842. 8. 1 Thlr.

Der Inhalt dieser für Wetterbeobachter vieles Interessante enthaltenden Witterungskunde ist folgender.

Vermuthliche Witterung. Ursachen der Wärme. Ursachen der Erkältung. Leitung der Wärme. Bewölkung und Niederschläge. Veränderung des Luftdruckes. Einfluss des Mondes. Perioden der Witterungswechsel. Rücksicht auf den Einfluss des Mondes. Verschiebung der Perioden. Vermuthliche Witterung im Allgemeinen. Vermuthliche Witterung im Einzelnen. Die Feuchtigkeit der Luft. Die Winde. Chronik der Witterung früherer Jahre zu Karlsruhe. Witterung auf einigen Punkten des Grossherzogthums Baden verglichen mit jener zu Karlsruhe. Des Jahres. — Der Monate, wo bei jedem Monate immer die drei Hauptrubriken: Witterungscharakter, Regeln für die Wetterveränderungen, Vermuthliche Witterung, unterschieden sind, und vorzüglich das Jahr 1842 berücksichtigt ist. — Der Jahreszeiten. — Den Schluss machen Tabellen über die Witterung der Jahre 1839, 1840, 1841 und aller Jahre. — Grossen Fleiss hat der Vf. u. A. auch auf die Sammlung der sogenannten Volks- und Bauernregeln über die bevorstehende Witterung verwendet, die für einen Jeden, wer überhaupt Sinn für dergleichen Dinge hat, gewiss vieles Interesse haben werden, und in dem vorliegenden Buche sich in einer überraschend grossen Anzahl finden. Wir halten die Sammlung derselben daher für recht verdienstlich.

Digitized by Google

X.
Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra. Nach den Quellen bearbeitet von Dr. G. H. F. Nesselmann, Privatdocenten an der Universität zu Königsberg. Erster Theil. Die Algebra der Griechen. Berlin. 1842. 8. 2 Thlr. 6 ggr.

Der Verf. sagt in der Vorrede: „Es war nicht meine Absicht, aus ältern Geschichtswerken eine Menge historischer Data zu excerpiren und dieselben in eine frische Form giessend dem Publikum ein angenehmes Unterhaltungsbuch zu liefern, aus welchem Weniger-Unterrichtete allenfalls hie und da auch etwas Neues lernen könnten. Ebenso wenig lag es in meinem Plane, ein Conglomerat flüchtig von der Oberfläche aufgerafften Thatsachen, die man nach Willkühr reckt und modelt, auf das Prokrustesbette eines philosophischen Systems zu spannen. Ich wollte wie der Titel besagt, eine kritische Geschichte schreiben, ich wollte die Geschichte der Algebra, nicht wie die Tradition sie lehrt, sondern wie sie sich aus dem ausdauernden und gewissenhaften Studium der Quellen ergiebt, erforschen und demgemäss treu darstellen.“ — Je länger leider das Feld der Geschichte der Mathematik brach gelegen hat, und je schwieriger und seltener die Verbindung ausgebreiteter Sprachkenntnisse mit den nöthigen mathematischen Kenntnissen sein dürfte, desto dankenswerther ist jedenfalls jeder neue Anbau dieses Feldes aufzunehmen. Eine ausführliche kritische Würdigung dieses Werks müssen wir den ausschliesslich der Kritik gewidmeten Zeitschriften überlassen.

Galileo-Galilei. Zu seinem Gedächtniss im zweiten Säcularjahr seines Todes. I. Sein Leben und seine Werke, von Libri. Aus dem Französischen mit Anmerkungen von F. W. Carové. Mit Abbildung der Statue Galilei's zu Florenz. Siegen und Wiesbaden. 1842. 8. 18 ggr.

Der Uebersetzer scheint bei dieser Arbeit, der man an mehreren Stellen nicht undeutlich anmerkt, dass sie eine Uebersetzung ist, ganz andere als mathematische Tendenzen zu verfolgen.

Digitized by Google

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Lehrbuch der Mathematik für die obern Klassen höherer Lehranstalten von J. A. Grunert. Erster Theil. Allgemeine Arithmetik. Dritte vermehrte und verbesserte Ausgabe. Brandenburg. 1843. 8.

Diese schon so bald nöthig gewordene dritte Ausgabe meines bekannten Lehrbuchs der allgemeinen Arithmetik für die obern Klassen höherer Lehranstalten. (Die dritte Ausgabe der Stereometrie ist schon früher erschienen. Die dritten Ausgaben der Trigonometrie und ebenen Geometrie werden nächstens erscheinen.) glaube ich mit Recht eine verbesserte und vermehrte Ausgabe nennen zu können. Verbesserungen sind überall, wo es nöthig war, vorgenommen. Unter den Vermehrungen nenne ich nur u. A. Clausens neue Auflösung des irreduciblen Falls durch die Kettenbrüche, mehrerer anderer Zusätze hier nicht weiter zu gedenken, da die frühern Ausgaben bekannt genug sind, und daher die Vermehrungen den Lesern auf der Stelle von selbst in die Augen fallen werden. Dabei habe ich aber Sorge getragen, die Einrichtung so zu treffen, dass die frühern Ausgaben neben der dritten immer noch ohne alle Schwierigkeit auf den Schulen, wo das Buch bereits eingeführt ist, gebraucht werden können.

G.

System der Mathematik von Professor Dr. K. Hummel. 1. Theil. Die Arithmetik. gr. 8. Wien. 1842. 1 Thlr. 8 ggr.

Die reine Elementar-Mathematik nach den Lehrbüchern des Prof. M. Ohm für die untern Klassen der Gymnasien, Militär-, Gewerbe- und höheren Bürgerschulen, sowie auch für den Privat-Unterricht von C. Nübel. Mit einem einleitenden Vorwort des Herrn Prof. M. Ohm. 1. Thl. Elementar-Arithmetik. Wesel. 1842. gr. 12. 12 ggr.

Goetz, Prof. Dr. J., Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien und höhere Lehranstalten. 2. Band. — Auch u. d. Titel: Die ebene Geometrie, die analytische und ebene Trigonometrie und einige Sätze aus der Polygonometrie. gr. 8. Zerbst. 1842. 1 Thlr. 18 ggr.

Goetz, Prof. Dr. J., Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien und höhere Lehranstalten, 3. Band. — A. u. d. T. Die Stereometrie und sphärische Trigonometrie. Mit 3 Figurentafeln (in gr. 4.) gr. 8. Zerbst. 1842. 9 ggr.

Urban, Seminarlehrer, das Gebiet der niedern Mathematik. Zum Gebrauch für die Oberklassen eines Schullehrerseminars, für höhere Bürger- und Realschulen bearbeitet. gr. 8. Berlin. 1843. 1 Thlr. 4 ggr.

Digitized by Google

Elementi di aritmetica, con alcune nozioni di geometria lineare ad uso delle scuole elementari. Torino. 1841. In 8. 45 sc.

Chamber's Educational Course: Treatise on Practical Mathematics. By A. Bell. 2 Vols. 12. 1842. cloth 8 sh.

Arithmetik.

Ein Beitrag zur Vereinfachung des Rechenunterrichts und des mathematischen Unterrichts überhaupt von F. Heime. Berlin. 1842. gr. 8. 8 ggr.

3000 gelöste Rechenaufgaben für Elementarschulen, so eingerichtet, dass sie in einigen Augenblicken in gehöriger Menge und Verschiedenheit gegeben, und ihre Auflösungen eben so schnell geprüft werden können, herausgegeben von Schmidt, Pfarrer und Schulinspector. Trier. 1842. 6 ggr.

Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik in den oberen Klassen der Gymnasien. Nach Ohm. Von Dr. Julius Hartmann, Lehrer am Gymnasium zu Marburg. Marburg. 1843. 8. 12 ggr.

Schon der Titel sagt, dass dieser Leitfaden nach Ohm bearbeitet ist. Indess hat der Verf. keinesweges Ohm nur flüchtig excerpirt, sondern ist häufig seinen eignen Weg gegangen, und das Buch ist allerdings als eine selbstständige Arbeit zu betrachten.

Marckmann, N. W., Regnebog. 8. Kjoebenhavn. 1841. 64 sk.

Raingo, G. B, J., Éléments d'algèbre, contenant les principes du calcul algébrique et du calcul analytique jusqu'aux équations du second dégré inclusivement, de nombreuses applications a l'arithmétique universelle, et un recueil d'exercices et de problèmes variés; 3. édition, revue et corrigée, gr. in. 8. Mons. 1842. 1 Thlr. 12 ggr.

Lefébure de Fourcy, Leçons d'algèbre. In 8. Paris. 1842. 7 Fr. 50 c.

The Principles of Arithmetic and Algebra, containing the most important parts of those subjects, with a variety of examples. By W. B. Hotson, M. A. Pembroke College, Cambridge. 2. Edition. 8. London and Cambridge. 1842. 9 sh.

The general theory and solution of equations of the higher orders: wherein it is attempted to bring the methods of Horner, Budan, Sturm and Fourier, especially the latter, nearer to perfection, as respects their practical application to advanced equations etc. By J. R. Young. 2d ed. greatly enlarged. 1842. 15 s. cloth.

Kritische Betrachtung einiger Lehren der reinen Analysis, welchen der Vorwurf der Ungereimtheit gemacht worden ist, von Professor Dr. F. Schmeisser. Frankfurt a. d. O. 1842. gr. 4. 8 ggr.

Differential and Integral Calculus, by A. de Morgan. London. 1842. 14 sh.

Nuovo calcolo delle funzioni ascendenti e discendenti, ossia calcolo divisionale, die G. Ceroni, dottore in matem. Estratto dai bimestri IV. e V. del 1841. degli Annali delle scienze del Regno Lombardo-Veneto. Vicenza. 1841. In 4. L. 1. 74.

Logarithmische und logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Zum öffentlichen Gebrauche in höhern Schulen überhaupt und für jeden Mathematikbeflissenen insbesondere von Professor G. von Winkler (von Brückenbrand). 2. fehlerfreie Ausgabe. Wien. 1839. gr. 8. 21 ggr.

Geometrie.

Lehrbuch der geometrischen Formenlehre 1. Theil. Planimetrische Formenlehre. Eine Vorbereitung auf das wissenschaftliche Studium der Mathematik für Schüler der Gymnasien und höheren Bürgerschulen und ein Handbuch für Lehrer, von Dr. Jul. Himke, Gymnasial-Lehrer. Nordhausen. 1841. gr. 8. 18 ggr.

Leitfaden der geometrischen Formenlehre 1. Theil: Planimetrische Formenlehre. Für Schüler der Gymnasien und höheren Bürgerschulen von Dr. J. Himke, Gymnasial-Lehrer. Nordhausen. 1841. gr. 8. 6 ggr.

Leitfaden für den ersten Unterricht in der Elementar-Geometrie, besonders zum Gebrauch in Schulen von J. F. H. Rosenberg. 3. verb. Auflage. Hamburg. 1842. gr. 8. 6 ggr.

Fundamente der Geometrie. Vom Professor Dr. M. G. Paucker. Erster bis vierter Cursus. Congruenz. Parallellinien und Aehnlichkeit. Flächeninhalt geradliniger Figuren, einfache Eigenschaften des Kreises. Elemente der Geometrie des Raums. Mit 285 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Mitau. 1842. 8. 18 ggr.

Diese empfehlenswerthe Schrift scheint uns die Beachtung der Lehrer recht sehr zu verdienen, und wir sehen namentlich auch mit Verlangen den beiden folgenden Theilen entgegen, welche folgenden Inhalt haben werden: Metrische Relationen, regelmässige Vielecke, Kreisberechnung. Geradlinige und sphärische Trigonometrie. Inhalt der Körper. Analysiometrie erster Theil: Lösung

Digitized by Google

der Aufgaben durch geometrische und trigonometrische Analysis; Sectio rationis, spatii, determinata. Coordinatenlehre, Gleichung der geraden Linie und des Kreises, ebene Oerter. Parametrie, Berührungen, harmonischer Schnitt, Collineation. Analysiometrie zweiter Theil: Inclinationes, kubische und biquadratische Gleichungen. Krystallometrie. — Man wird hieraus zugleich den reichhaltigen Inhalt dieser Schrift erkennen.

Beiläufig bemerken wir hiebei, dass der Verf. früher (1841. Mitau) auch ein empfehlenswerthes Rechenbuch herausgegeben hat, welches vorzüglich die eigene Geistesthätigkeit der Schüler bei'm Rechenunterrichte zu wecken und in Anspruch zu nehmen bezweckt.

Paucker, Prof. Dr. M. G., geometrisches ABCbuch oder hundert Hauptsätze aus den Fundamenten der Geometrie, Trigonometrie, Metrik und Stereometrie in ihrer Anwendung. Eine Zugabe für Examinanden. gr. 8. Mitau. 1842. 12 ggr.

A. Sautel, cours de géométrie et de trigonométrie. 6. édition. 8. Paris. 1842. 5 Fr.

Elementi di geometria piana di Zoechi. Con note di A. M. Legendre. In 8. Napoli. 1841.

Berg, P. C., Ledetraad ved den foerste geometriske Underviisning, med Figurer. 8. Kjoebenhavn. 1842. 32 sk.

Kauffmann, Präceptor E. F., und Ober-Reallehrer Ch. Schwenk, Aufgaben aus der darstellenden Geometrie. 1. Abth. gr. 8. Stuttgart. 1842. broch. 18 ggr.

A Treatise in which the Elementary Properties of the Ellipse are deduced from the Properties of the Circle, and Geometrically demonstrated. By the Duke of Somerset. 8. 1842. cloth 9 sh. 6 d.

Von den sphärischen Linien, welche durch den Schnitt einer Kugel und der Umdrehungsoberflächen des zweiten Grades entstehen, von Dr. N. Ginsberg. gr. 8. Breslau. 1842. 6 ggr.

Die Uebertragungsprincipien der analytischen Geometrie. Von Dr. N. Druckenmüller, Lehrer der Math. am Gymnasium zu Düsseldorf. Erster Band. Trier. 1842. 8. 2 Thlr.

Ueber dieses den Liebhabern der analytischen Geometrie sehr zu empfehlende Werk erklärt sich der Herr Verf. zu Anfange der Vorrede auf folgende Art: „Wie nach dem Princip der Reciprocität von Gergonne und Poncelet sich ein Punkt und eine gerade Linie entsprechen, so stellt die Collineation von Möbius zwei gerade Linien oder auch zwei Punkte in abhängiger Lage einander gegenüber und die von Magnus und Steiner eingeführte neue Art der Verwandschaft, welche als Collineation der zweiten Ordnung angesehen werden könnte, setzt an die Stelle einer geraden Linie einen Kegelschnitt, der durch drei feste Punkte geht, darum aber auch an die Stelle eines Punktes einen Kegel-

schnitt, welcher drei feste gerade Linien berührt. Neben einander hergehend war jedes dieser drei Principien eine Quelle der schönsten Entdeckungen in der neuern Geometrie. Da alle Eigenschaften der Linien einer beliebigen Ordnung niemals ohne Analogie bei den Linien anderer Ordnungen stehen, so habe ich es versucht, an die Stelle der konischen Directrix in der bisherigen Polarenconstruction eine beliebige Linie höhern Grades zu setzen. Der Erfolg übertraf meine Erwartungen. Dadurch, dass ich für die Polaren der verschiedenen Ordnungen nicht eine geometrische Anschauung, sondern einen analytischen Ausdruck, der sich durch ein einfaches Symbol allgemein darstellen liess, als Definition zu Grunde legte, war die Verbindung solcher Ausdrücke und die Entwickelung der Eigenschaften dieser Polaren auf dem einfachsten und elegantesten Wege möglich. Keine einzige der merkwürdigen Beziehungen, in welchen die gewöhnlichen Polaren unter einander und zu der Directrix stehen, nicht einmal eine der metrischen Relationen geht dabei verloren; sie verallgemeinern sich nur und alle bisherige Uebertragungsprincipien ordnen sich als besondere Fälle unter das hiermit festgestellte allgemeine Princip der Reciprocität, wie es in der zweiten Abtheilung entwickelt ist. Es tritt bei ebenen Figuren, auf welche ich mich beschränkt habe, nicht bloss, wie bisher, ein Punkt mit einer geraden Linie, sondern auch sowohl der Punkt als die gerade Linie mit Curven der verschiedensten Ordnung, so wie die letztern unter sich, in unmittelbare Gegenseitigkeit. Der Keim zu allen diesen Untersuchungen lag für mich in den Transformationsschemen, welche in der ersten Abth. Kap. I. §. 6. niedergelegt sind und später zu der geometrischen Interpretation der Constanten einer beliebigen Gleichung zwischen zwei Veränderlichen geführt haben. Die Folgerungen lagen nahe; ich habe mich begnügt, darauf hinzuweisen und einige beispielsweise anzuführen." So viel hier nur ganz im Allgemeinen über den Standpunkt, welchen dieses einen der schönsten Theile der neuern Geometrie aus einem sehr allgemeinen Gesichtspunkte auffassende Werk einnimmt.

In Nr. 463. der astronomischen Nachrichten befindet sich ein sehr schöner Aufsatz des Herrn Prof. Jacobi zu Königsberg: Ueber einige merkwürdige Curventheoreme, auf den wir später im Archive zurückzukommen hoffen.

Praktische Geometrie.

Winter, G. A., leichtfassliche Anweisung zur Feldmesskunst, so weit diese für das gewöhnliche Leben anzuwenden ist. Für Stadt- und Dorfschulen, so wie zum Selbstunterricht. Leipzig. 1843. 8. 2 ggr.

Instruction für die practische Aufnahme mit Messtisch und Kippregel. Cassel. 1840. 16. 8 ggr.

Digitized by Google

Klemm, Assessor, Mitglied des statistisch-topogr. Bureau, L. W., die Landes-Vermessung und die in ihrem Gefolge befindlichen Arbeiten, erläutert durch die im Königreich Würtemberg zur Ausführung gekommene Vermessung. 1. Heft 1. Abth. Auch u. d. T. Die trigonometrische Aufnahme eines Landes 1. Abth. gr. 8. Stuttgart. 1842. 14 ggr.

(S. Literarischer Bericht Nr. IV. S. 68).

Leitfaden für den Unterricht im militärischen Aufnehmen von Herm. von Plehwe, Premier-Lieutenant. Berlin. 1841. gr. 8. 1 Thlr.

Schreiber, G., Vorlesungen über praktische Geometrie, gehalten an der Grossherzogl. polytechnischen Schule zu Karlsruhe. 1. Theil. gr. 4. Karlsruhe. 1842. 2 Thlr. 18 ggr.

Hierl, Prof. J. E., Lehrbuch der höhern Vermessungskunde, oder: Anleitung zur trigonometrischen Bestimmung der Punkte auf der Erdoberfläche und der Höhen der Berge. Mit 3 lithogr. Figuren-Tafeln. gr. 8. Augsburg. 1842. 1 Thlr.

Considération sur les levers topographiques et emploi d'un nouvel instrument, le métrographe-topographique, dans ces sortes d'opérations, par J. M. Amelin. 1842. 3 Fr.

Application de la géometrie à la topographie, contenant le cours de topographie fait à l'école militaire de Saint-Cyr; par F. C. Dubousset. 2 édit. In 8. Paris. 1842. 10 Fr.

Regnault, Traité de géometrie pratique. In 8. Avec 11 planches. Paris. 1842. 5 Fr.

A Treatise on Engineering Field Work: comprising the Practice of Surveying, Levelling, and Laying-out Works: with Diagrams and Plates. By P. Bruff, C. E. Part 2. Levelling 8. 1842. cloth 6 sh. 6 d.

Spiegel-Niveau, ein neues und vollkommen sicheres Instrument zum Wasserwägen. Eine technische Mittheilung für den Land-, Wasser- und Strassenbau, wie auch für landwirthschaftliche Entwässerung von Romershausen. Leipzig. 1842. 8. 6 ggr.

Rösling, Prof. Dr. C. L., Angabe einer ganz neuen höchst einfachen und wohlfeilen Schrotwage, mit allen nöthigen Vorlehren zum Nivelliren. 2. Ausg. 8. Augsburg. 1842. 9 ggr.

Tafeln zur Ausrechnung der Seigerteufen und Sohlen der Flachenschnüre bei dem Markscheiden; zum Gebrauch für Bergleute, Wasserbau-Ingenieurs, u. s. w. Für zehntheilige Eintheilung des Längenmaasses zusammengestellt vom Markscheider C. F. Leschner. Herausgegeben vom Risszeichner C. W. Weinhold. gr. 4. Freiberg. 1842. 1 Thlr. 16 ggr.

Digitized by Google

Weisbach, Prof. Jul., Tafel der vielfachen Sinus und Cosinus, zum Gebrauche für practische Geometer und Mechaniker überhaupt und für Markscheider besonders. Lex. 8. Leipzig. 1842. 8 ggr.

Adhémar, Prof. d. Mathematik J., die Lehre vom Steinschnitte, zum Gebrauche für Civilingenieure und die Studirenden an Bauschulen, höheren Gewerbsschulen und polytechn. Lehranstalten. Aus dem Französ. frei bearbeitet und durch Zusätze bereichert von O. Möllinger, Prof. der Mathematik. Auch unter d. Tit.: Isometrische Projectionslehre (Perspective). Wissenschaftlich begründet und in ihrer Anwendung auf das technische Zeichnen bearbeitet von Möllinger. Angewandter Theil. 15. u. 8. Lieferung, Schluss. Lex. 8. Solothurn. 1842. broch. 4 Thlr. Complett Text geheft. u. Atlas cart. 8 Thlr.

Lacroix, Leçons de géométrie appliquée aux arts. In 4. Versailles. 1842. 5 Fr.

Trigonometrie.

Elemente der ebenen Trigonometrie und Stereometrie. Lehrbuch für die oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen. Von F. L. Stegmann, Dr. und Lehrer der Math. und Physik an der Realschule und Privatdocent an der Univ. zu Marburg. Marburg. 1843. 8. 16 ggr.

Lefébure de Fourcy, Éléments de trigonométrie. In 8. Paris. 1842. 2 Fr.

Mechanik.

Éléments de mécanique par Kater et Lardner. Traduit de l'anglais par Cournot. Paris. 1842. 12. 5 Fr.

Ewbank's Treatise on Hydraulics. Royal 8. 1842. L. 1. 1 s. (In Amerika erschienen).

W. Walton, a collection of problems in illustration of the principles of theoretical mechanics. 8. Cambridge. 1842. 16 sh.

Digitized by Google

Praktische Mechanik.

Otto, J. E. F., Tafeln für den Bombenwurf. Berlin. 1842. 8. 1 Thlr. 8 ggr.

Nöthigste Vorlehren aus der Mechanik und Hydraulik, mit neuen hydraulischen Lehren für die zu den Berechnungen der Wasserräder u. s. w. besten Ausmittelungen aller Geschwindigkeiten und Gefälle des Triebwassers, und mit einer Beschreibung eines einfachen, wohlfeilen und zum Messen in verschiedenen Tiefen brauchbaren Wassergeschwindigkeitsmessers, vom Prof. Dr. Ch. L. Rösling. Augsburg. 1842. gr. 8. 15 ggr.

Der Maschinenarbeiter. Lehrbuch der praktischen Mechanik, in welchem eine Auflösung der verschiedenen wichtigen Sätze der prakt. Mechanik mit Hülfe der Arithmetik und Elementar-Geometrie gegeben worden ist. Ein unentbehrlicher Führer für künftige Mechaniker, und den Gewerbschulen gewidmet, vom Civil-Ingenieur, Professor C. Armengaud. Aus dem Französ. von Dr. C. Hartmann. Augsburg. 1841. gr. 8. 18 ggr.

Bresson, Traité élémentaire de mécanique appliquée aux sciences physiques et aux autres. Mécanique des corps solides. In 4. Avec atlas. Paris. 1842. 25 Fr.

Lehrbuch der Mechanik in ihrer Anwendung auf die physischen Wissenschaften, die Künste und Gewerbe von Carl Bresson. Aus dem Französischen. Leipzig. 1842. 4. Preis jeder Lieferung 12 ggr.

Von diesem Werke, welches in sechs Lieferungen erscheinen soll, sind bis jetzt zwei, die Grundlehren der Statik, die Seilmaschine und die Kettenlinie enthaltende Lieferungen in unsere Hände gelangt.

Jariez. Cours élém. de mécanique industrielle. 2 vols. Angers. 1842. 8. 4 Fr.

Weisbach, Prof. Jul., Untersuchungen in dem Gebiete der Mechanik und Hydraulik auf eigene Beobachtungen und Versuche gegründet. 1. Abth. — Auch u. d. T.: Versuche über den Ausfluss des Wassers durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile, angestellt und berechnet. gr. 4. Leipzig. 1842. 2 Thlr. 16 ggr.

Theorie der Kraft sich bewegender expansibler flüssiger Massen, oder des pneumatischen Drucks, vorzüglich der Luft, mit Anwendung der Kraft, welche die Luft auf Windmühlenflügel ausübt, von W. Fickler, Ingenieur Prem. Lieuten. a. D. und Wegebaumeister. Crefeld. 1841. gr. 8. 12 ggr.

Knochenhauer, Director der Realschule in Meiningen, K.

Digitized by Google

W., die Statik der Gewölbe, mit Rücksicht auf ihre Anwendung entworfen. gr. 8. Berlin. 1842. 18 ggr.

Olivier: Théorie géométrique des engrenages destinés à transmettre le mouvement de rotation entre deux axes situés ou non situés dans un même plan. 4. Paris. 1842. 10 Fr.

Optik.

Analytische Optik von Dr. L. J. Schleiermacher, Grossherzoglich Hessischem Oberbaudirector und Director des Grossherzoglichen Museums u. s. w. Erster Theil. Darmstadt. 1842. 8. 5 Thlr.

Der Herr Verf. hat sich in diesem Werke bemüht, die zur Construction der optischen Instrumente erforderlichen Formeln mit Berücksichtigung aller merklichen, in und ausser der Axe stattfindenden Abweichungen und der dabei in Betracht kommenden Nebenumstände, für ein beliebiges System von sphärischen brechenden Flächen zu entwickeln und dieselben nicht nur auf diejenigen Probleme anzuwenden, bei denen eine approximative Auflösung hinreicht, sondern vermittelst der Methode der kleinsten Quadrate auch auf diejenigen Probleme, welche eine genaue Kenntniss der Abweichungen erfordern, indem er die letzteren als die Fehler betrachtet, welche durch jene Methode so klein als möglich gemacht werden sollen. Hierdurch gelangt er zu Formeln, welche die Grundlage bei allen seinen Untersuchungen über die Deutlichkeit, Gestalt und Lage der Bilder ausmachen und dazu dienen, die bei der Construction der Instrumente willkührlich gebliebenen Grössen so zu bestimmen, dass dadurch die grösste Deutlichkeit und die grösste Aehnlichkeit mit dem Gegenstande erhalten werden kann. Der zweite Theil wird insbesondere den allgemeinen Anwendungen der im ersten Theile entwickelten Theorie auf Gläser und Spiegel gewidmet sein, sodann die durch die Erfahrung geleiteten speciellen Anwendungen derselben auf die gebräuchlichen Instrumente, und Tafeln, um die Dimensionen der Instrumente mit Leichtigkeit berechnen zu können. Eine Anzeige dieses Werks und eine ausführliche Angabe des dabei zum Grunde gelegten Planes befindet sich schon in Poggendorfs Annalen der Physik und Chemie. Bd. XIV. S. 1. und die drei ersten Kapitel sind schon in dem 9ten und 10ten Bande der Zeitschrift für Physik und Mathematik von Baumgartner und v. Ettingshausen abgedruckt worden. Ueber ein mit so grossem Fleisse und Zeitaufwande abgefasstes, eine nicht geringe Anzahl neuer Untersuchungen enthaltendes Werk hier in einer so kurzen Anzeige ein Urtheil fällen zu wollen, möchte sehr voreilig erscheinen, da insbesondere eine Prüfung der vielen und zum Theil sehr weitläufigen allgemeinen analytischen Rechnungen nur durch ein sehr sorgfältiges Studium des ganzen Werkes gewonnen werden kann. So viel aber lässt sich

Digitized by Google

mit Bestimmtheit behaupten, dass dieses Werk von Keinem, wer sich für die Theorie der optischen Instrumente und deren Vervollkommnung interessirt, unberücksichtigt gelassen werden darf. Dass die Künstler, welche sich mit der Verfertigung optischer Instrumente beschäftigen, nicht im Besitz der analytischen Kenntnisse sind, welche dieses Werk, insbesondere auch aus der neuern analytischen Geometrie, in Anspruch nimmt, ist bekannt genug. Sehr zweckmässig wird es daher gewiss sein, wenn der Herr Verf. am Ende des Werks seine gewonnenen Resultate in einer für Künstler allgemein verständlichen Sprache zusammenstellt, und die von ihm für den zweiten Theil versprochenen Tafeln in einer möglichst grossen Ausdehnung liefert, wodurch er sich gewiss ein wesentliches Verdienst um die praktische Optik erwerben wird.

Göthe's Farbenlehre, 16 Tafeln, und 27 Tafeln zu dessen Beiträgen zur Optik, nebst Erklärung. Als Nachtrag für die Besitzer von Göthe's sämmtlichen Werken zu allen erschienenen Ausgaben. gr. 4. Stuttgart. 1842. broch. 2 Thlr.

Chevalier, E., die Mikroskope und ihr Gebrauch. Oder vollständiges Handbuch der Mikrographie. Bearbeitet und mit Anmerkungen, so wie mit einer Abhandlung über die katadioptrischen Linsen versehen von Dr. F. S. Kirstein. Quedlinburg. 1843. 8. 1 Thlr. 12 ggr.

Lettres au professeur M. Serre de Montpellier, sur l'emploi des verres de lunettes dans le traitement de quelques affections oculaires, par Fl. Cunier. Bruxelles. 1842. 6 ggr.

Die Anwendung der isometrischen Perspective von Jos. Jopling, Architect. Aus dem Engl. von Carl von König. Wien. 1840. gr. 8. 21 ggr.

The Elements of Linear Perspective, and the Projection of Shadows: adapted to the use of Mathematical and Drawing Classes and Private Students. With 61 Diagrams on Wood. By W. Barnes, of St. John's College, Cambridge. 12. 1842. cloth 2 sh. 6 d.

Astronomie.

C. F. Blunt, the beauty of the heavens; a pictorial display of the astronomical phenomena of the universe; with a lecture on astronomy. 4. London. 1842. 28 sh.

Die Erd- und Mondbahn. Zur Erläuterung einer neuen Veranschaulichungsmaschine des Erd- und Mondlaufes, ein Vortrag in der Lehrerconferenz zu Langensalza den 7. October und 2. December 1840 gehalten von Dr. F. A. Günther. gr. 8. Sondershausen. 1842. 12 ggr.

Digitized by Google

L'anti-Copernic, astronomie nouvelle, suivie de plusieurs problèmes, par P. Matalene. 1842. 4½ Fr.

Die Sonnenfinsterniss vom 8. Juli 1842., beschrieben von Stampfer. Wien. 1842. 6 ggr.

De annulo Saturni commentatus est Elto Martini Beima, Mus. hist. nat. publ. conservator. Lugduni Batavorum. 1842. 4. 3 Thlr.

Dieses Werk enthält eine fleissige Zusammenstellung der bisherigen Untersuchungen über den Ring des Saturn. Was dem Vf. besonders eigenthümlich ist, giebt er selbst in der Vorrede mit folgenden Worten an: „Postquam consilium cepi, hanc materiam tractandi, hoc inprimis statuebam, ut nodorum annuli Saturni inclinationem locumque quoad eclipticam accuratius determinarem, quam adhuc factum fuerat. Quum vero hac in re occupatus essem, plurimam eidem operam tribuebant clarissimorum Astronomorum nonnulli, praesertim Bessel ac Struve, quorum studio et doctrina multum me profecisse gratus agnosco. Hanc scilicet partem, quam praecipue tractandam mihi proposueram, diligentius et copiosius elaborare conatus sum."

Struve, F. G. W., Additamentum in mensuras micrometricas stellarum duplicium editas anno 1837, exhibens mensuras Dorpati annis 1837 et 1838 institutas. Adjecta est disquisitio de parallaxi annua stellae α Lyrae. 4 maj. Petropoli. 1840. 13 ggr.

R. F. V. Hoffmann: Vollständiger Himmelsatlas für Freunde und Liebhaber der Sternkunde, nach den vorzüglichsten Hülfsquellen und eigenen Beobachtungen gezeichnet. 2te durchgesehene Auflage. qu. ½ Roy. Fol. Stuttgart. 1842. 3 Thlr. 20 ggr.

Kleiner astronomischer Almanach auf das Jahr 1843. Vorzüglich zum Gebrauch der Seeleute herausgegeben vom Professor Dr. H. Karsten. 4. Jahrg. Lex. 8. Rostock und Leipzig. 12 ggr.

Kalender für alle Stände 1843. Herausgegeben von C. L. von Littrow, Adjunkten der k. k. Sternwarte zu Wien. Wien. 8. 12 ggr.

In diesem Jahrgange findet sich ausser der gewöhnlichen bis auf Minuten berechneten kleinen astronomischen Ephemeride, der geographischen Lage der vorzüglichsten Städte nebst ihrer Entfernung von Paris und vielen andern insbesondere für den österreichischen Kaiserstaat nützlichen Notizen auch ein aus dem Englischen übersetzter Aufsatz: Ueber die Einrichtung und Behandlung von Chronometern, Pendel- und Feder-Uhren. Von Edward J. Dent, Uhrmacher Ihrer Majestät der Königin Victoria und Sr. Königl. Hoheit des Prinzen Albert von Sachsen-Coburg, Mitglied der Royal Astronomical Society, u. s. w., welcher für Liebhaber und Besitzer genauer Uhren manche nützliche Bemerkungen enthält, und durch vierzehn recht gut ausgeführte Holzschnitte erläutert ist.

Naturwissenschaftlich-astronomisches Jahrbuch für physische und naturhistorische Himmelsforscher und

Digitized by Google

Geologen mit den für die Jahre 1843 und 1844 vorausbestimmten Erscheinungen am Himmel. Herausgegeben von Fr. v. P. Gruithuisen. Fünftes Jahr. Stuttgart. 1842. 8. 2 Thlr. 16 ggr.

Der Herr Herausgeber bezweckt bekanntlich durch dieses Jahrbuch vorzüglich, der beschauenden Himmelskunde immer mehr Eingang zu verschaffen, derselben Freunde zu gewinnen, und die sowohl durch ihn, als auch durch Andere gewonnenen Resultate zu sammeln und bekannt zu machen. Auch dieser Jahrgang enthält neben der gewöhnlichen Ephemeride wieder eine grosse Menge von Notizen, theils astronomischen, theils geologischen Inhalts, und die folgenden grössern Aufsätze: I. Die nicht leuchtenden Weltwolken. II. Allgemeine Methode, die Höhen der Gebirge und die Tiefen der Ringflächen auf dem Monde zu messen und zu berechnen. III. Von der Natur der Lichtnebel am Fixsternhimmel. IV. Fragmente zur Physik des Mondes (in alphabetischer Ordnung; vierte Fortsetzung). Ausserdem wird Nachricht von den neuern astronomischen Entdeckungen und den wichtigern theoretischen Arbeiten gegeben. Vieles kommt natürlich über die grosse Sonnenfinsterniss vor, und manche allgemein interessante Notizen, wie z. B. folgende (S. 119): „In dem Berichte Arago's über eine wissenschaftlicher Zwecke halber unternommene Erdumseglung kommt die höchst merkwürdige Angabe vor: dass auf dieser Reise der Austral-Ocean an zwei weit von einander gelegenen Stellen mit einem Senkblei sondirt wurde, welches eine Länge von 24000 Fuss, also ungefähr einer deutschen Meile, oder gleich der Höhe des Chimborazo, und des noch auf denselben gethürmten österreichischen Schneebergs hatte, und doch nicht den Grund erreichte! An der Wiederaufwindung dieses Riesensenkbleis, des längsten, welches noch jemals zur Ergründung irgend einer Meertiefe angewendet worden, mussten des ungeheuern Gegendruckes der Wasserschichten jener nie zuvor erreichten Tiefe halber 60 der stämmigsten Matrosen 2 Stunden lang angestrengt arbeiten, und als es endlich heraufgezogen war, fand es sich, dass der massive metallene Cylinder, worin ein Meertiefen-Wärmemesser von Bunten eingeschlossen sich befand, durch den entsetzlichen Wasserdruck ganz abgeplattet worden war.

Physik.

Somerville on the connexion of the physical sciences. 6th edition. 1842. 8. 10 s. 6 d.

Leitfaden zum Unterricht in der Physik für Gymnasien und höhere Bürgerschulen von H. L. Boltze, Doctor der Phil. und Lehrer der Math. an der Luisenstädtischen höheren Stadtschule zu Berlin. Mit 4 Figurentafeln. Brandenburg. 1842. 8 ggr.

Digitized by Google

Ein ganz kurzer, nur das für die Schule Nothwendige enthaltende, bloss diejenigen mathematischen Kenntnisse, welche der Schüler aus Tertia mitbringt, voraussetzende Leitfaden der Physik, mit blosser Andeutung der Beweise in dem mathematischen Theile.

Die Physik in ausführlicher populärer Darstellung. Nach dem gegenwärtigen Zustande dieser Wissenschaft, u. s. w. von Dr. J. H. M. v. Poppe. Zweiter Band. Zürich. 1842. 8.

M. s. Literarischer Bericht. IX. S. 148. Das Buch ist mit diesem zweiten Bande beendigt. Der Preis des Ganzen ist 3 Thlr. 12 ggr.

Descrizione di un apparecchio locomotore applicabile alla direzione de' globi aerostatici. Di R. Argentali. In 8. Sinigaglia. 1840.

Théorie élémentaire de la capillarité suivie de ses principales applications à la physique, à la chimie et aux corps organisés par Artur. In 8. Paris. 1842. 6 Fr.

Versuch einer neuen Erklärungsweise der electrischen Erscheinungen von Dr. H. Reinsch. Nürnberg. 1841. 8. 12 ggr.

Neue Erfahrungen und Entdeckungen im Gebiete des Electromagnetismus. (Von Stieglitz.) Als Fortsetzung der Schrift: Die Dampfkraft ersetzt u. s. w. Lex. 8. Leipzig. 1842. 8 ggr.

Luftelectricität, Erdmagnetismus und Krankheitsconstitution von Dr. L. Buzorini, Oberamtsarzt in Echingen. Belle-Vue bei Constanz. 1841. Lex. 8. 3 Thlr.

Sturgeon's lectures on Electricity. London. 1842. 12. 5 sh.

Biot, Mémoire sur la vraie constitution de l'atmosphère terrestre. In 8. Paris 1842. 5 Fr.

Meteorologia universale, ecc. Di De Luca. In 8. Napoli. 1841.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen zu Prag, in Verbindung mit mehreren Mitarbeitern ausgeführt und auf öffentliche Kosten herausgegeben von K. Kreil, Adjuncten an der k. k. Sternwarte. 2. Jahrgang. Vom 1. August 1840 bis 31. Juli 1841. Prag. 1842. 3 Thlr. 20 ggr.
(M. s. Literarischer Bericht. Nr. V. S. 83).

Graphische Darstellung der Witterung, beobachtet und gezeichnet vom Prof. Dr. Maedler. qu. ½ Folio. Dorpat und Moskau. 1842.

Meteorologische Beobachtungen zu Bodenbach bei Tetschen in Böhmen, 31° 52′ 4″ östlicher Länge, 50° 46′ 39″ nördlicher Breite und 403,2 pariser Fuss über der Nordsee im Jahre 1841, von Seidl, Forstmeister. Neue Folge 1. Jahrgang. Prag. 1842. gr. 8. 12 ggr.

Digitized by Google

S. A. d'Hombres-Firmas, recueil de mémoires et d'observations de physique, de météorologie, d'agriculture et d'histoire naturelle. 2 Vol. 8. Nîmes. 1842.

Vermischte Schriften.

Aufgaben aus der Geometrie, Stereometrie, Trigonometrie, Geodäsie, Astronomie und Physik. Zu Uebungen im numerischen Rechnen, besonders mit Logarithmen. Nebst einem Anhange, enthaltend einige schwerere, allgemeine und besondere geometrische Aufgaben von Dr. G. A. Jahn, Lehrer der Mathematik. gr. 8. Leipzig. 1842. 1 Thlr.

Angekündigt sind: Meteorologische und naturhistorische Annalen. Herausgegeben von Alexander Theodor Nahl, welche zu Cassel in der J. Luckhardt'schen Buchhandlung erscheinen und, wie es scheint, eine Art meteorologischer und naturhistorischer Zeitung bilden sollen. Allerdings halten wir es für zweckmässig, dass die in den Zeitungen so häufig vorkommenden Nachrichten über meteorologische und andere Natur-Erscheinungen, da dieselben so häufig übersehen werden, an einem Orte gesammelt werden. Nur muss der Herausgeber ausser den deutschen dann auch vörzüglich alle ausländischen Zeitungen vollständig ausbeuten, da namentlich letztere insbesondere in kleinern Städten fast nie zu haben sind und gelesen werden. Der Preis für den Jahrgang in der Stärke von 27 bis 30 Bogen gross 8. ist auf $2\frac{1}{3}$ Thlr. festgesetzt.

Mathematische Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1840. Berlin. 1842. 4. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Inhalt: 1) Crelle: Ueber den Werth und die Eigenschaften der Brüche, deren Zähler und Nenner die verschiedenen zusammengehörigen Wurzeln einer Gleichung vom ersten Grade zwischen zwei ganzen Zahlen sind. 2) Encke: Ueber die Störungen der Vesta durch Jupiter, Saturn und Mars, berechnet von den Herren Dr. Wolfers und Galle.

In den gelehrten Anzeigen der Königlich bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. 130. s. m.: v. Steinheil: Ueber sein Photometer zur Messung der Lichtmenge der Gestirne. Ueber die Anwendung der Telescopspiegel zu astronomischen Messinstrumenten.

Memorie della reale Accademia delle scienze di Torino. Serie seconda. Tomo II. Torino. 1840. 4.
enthält folgende mathematisch-physikalische Abhandlungen:

Digitized by Google

Notice sur les tremblemens de terre que l'on a éprouvé dans a province de Maurienne depuis le 19. Decembre 1838 jusqu'au 18. Mars 1840; par Monseigneur Alexis Billiet. pag. LV.

Calcul de la densité de la terre par L. F. Menabrea. pag. 305.

Mouvement d'un Pendule composé lorsqu'on tient compte du rayon du cylindre qui lui sert d'axe, de celui du coussinet sur lequel il repose, ainsi que le frottement qui s'y développe; par L. F. Menabrea. pag. 369.

Sur la détermination de la densité moyenne de la terre déduite de l'observation du pendule faite à l'Hospice du Mont-Cenis par Mr. Carlini en septembre 1821. Note de Charles Ignace Giulio. pag. 379.

Serie seconda. Tomo III. Torino. 1841 enthält:

Expériences sur la résistence des fers forgés dont on fait le plus d'usage en Piémont; par Charles Ignace Giulio. pag. 175.

Expériences sur la force et sur l'élasticité des fils de fer; par Charles Ignace Giulio. pag. 275.

Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskales naturvidenskabelige og mathematiske Afhandlinger 8. Deel. Med 33 Tavler. Kjoebenhavn. 1842. Imp. 4. 2 Thlr. 13 ggr.

Verhandlungen der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft bei ihrer Versammlung zu Zürich den 2., 3. und 4. August 1841. 26ste Versammlung. Zürich. 8.

Diese Verhandlungen enthalten ausser mehreren kürzeren Bemerkungen folgende hierher gehörende Aufsätze:

Anzeige einer Specialgeschichte der Naturlehre und ihrer Hülfswissenschaften von Rudolf Wolf, Lehrer der Mathematik zu Bern. S. 203.

Ueber Spiralfeder-Wagen von Herrn Oeri, Mechaniker in Zürich. S. 212.

Mémoire sur l'électricité atmosphérique par Monsieur E. Plantamour, professeur d'astronomie à l'académie de Genève. S. 176.

Annuaire pour l'an 1842, présenté au Roi par le bureau des longitudes, avec Additions d'Arago. Paris. 1842. 18. $\frac{3}{4}$ Thlr.

Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Académie Impériale des sciences de Saint-Petersbourg. Tome I. 24 Nombres. gr. 4. St. Petersbourg et Leipzig. 1842. 2 Thlr.

M. Pillet, associé correspondant de l'Académie des Sciences de Turin, a mis à la disposition de cette Académie une somme de 10000 Fr. pour quatre prix qui seront décernés par elle a des ouvrages scientifiques propres à servir d'introduction à l'étude de la physique, de la chimie, de la mécanique et de l'astronomie. Voici l'exposé du programme publié à ce sujet par la classe des sciences physiques et mathématiques de ce corps savant:

Digitized by Google

„L'Académie croit devoir indiquer en peu de mots l'esprit dans lequel, conformément aux vues du fondateur, devront être conçus les ouvrages sur lesquels elle aura à prononcer.

Faire connaitre la science pour la faire aimer; exposer son véritable objet et ses principales conquêtes pour mettre en évidence toute sa grandeur; montrer la route qu'elle a su se frayer pour engager les lecteurs à y entrer et à la parcourir toute entière; tracer l'histoire de ses progrès et de ses égarements pour en dévoiler les causes et les conséquences; indiquer les obstacles qui arrêtent ou qui ralentissent sa marche, pour exciter à les franchir; n'en dissimuler ni les difficultés, ni les lacunes; rendre sensibles, par des exemples convenablement choisis et développés, l'esprit et la puissance de ses methodes; ne rien mettre qui puisse interrompre la chaine de ses déductions; ne point attirer l'attention sur des objets secondaires en la détournant des points les plus saillants; supprimer ce qui ne pourrait être exposé que d'une manière inexacte ou trop incomplète: employer toujours le langage rigoureux de la science; être concis sans obscurité, noble sans enflure, simple sans vulgarité; telle est la tâche aussi difficile qu' honorable que devront s'imposer les auteurs qui aspireront à obtenir le suffrage de l'Académie. Ils trouveront dans les préfaces des mémoires et des autres ouvrages de Lagrange des modèles parfaits d'exposition et de style.

Un prix de 2500 Fr. est promis au concours pour chacun des ouvrages suivants, savoir: 1°. une introduction à l'étude de la physique; 2°. une introduction à l'étude de la chimie; 3°. une introduction à l'étude de l'astronomie *). — Chacun ouvrage devra constituer une exposition rapide des principales applications de la science qui en formera l'objet, mise autant que possible à la portée des lecteurs qui ne possèdent que les connaissances élémentaires que comprend ordinairement l'enseignement des collèges. Pour la physique, la chimie l'Académie n'exigera pas que toutes les parties qui forment aujourd'hui le domaine de ces deux sciences soient exposées avec la même étendue. Les concurrents pourront donner plus de développement à celles qui leur paraitront plus importantes ou plus susceptibles d'être présentées d'une manière conforme au but du concours. L'Académie verrait avec plaisir que, dans l'introduction à l'étude de la mécanique, on insistât avec quelque étendue sur la partie expérimentale de la science pour en déduire les principes dont on développera ensuite les conséquences au moyen de l'analyse et de la géométrie. Enfin, dans l'introduction à l'étude de l'astronomie, les concurrents devront s'attacher surtout à l'exposition des phénomènes célestes et des méthodes d'observation, en n'empruntant à la mécanique céleste que les considerations et les résultats les plus simples et les plus susceptibles d'être présentés sous une forme élémentaire.

---

*) So heissen die Worte in dem Journal (l'Institut. No. 452. 25. Août 1842. p. 304), aus welchem dies Programm entlehnt ist. Jedenfalls ist aber hier ein Fehler, da aus dem ganzen Programm hervorgeht, dass es heissen muss: 3°. une introduction à l'étude de la mécanique; 4°. une introduction à l'étude de l'astronomie.

G.

Digitized by Google

Les savants de tout pays sont admis à concourir. Les manuscrits devront être remis au secrétaire de l'Académie des Sciences de Turin avant le 1. juillet 1846. Après avoir prononcé son jugement, l'Académie prendra, d'accord avec les auteurs, les dispositions convenables pour l'impression des ouvrages couronnés, M. Pillet-Wil ayant bien voulu mettre aussi à la disposition de l'Académie des fonds nécessaires à cet objet."

Berichtigung.

In dem Titel der Abhandlung XIX. S. 119 s. m. „Aargau" statt „zu Aargau."

Digitized by Google

XI.
Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Wir holen hier die Anzeige zweier zwar schon früher erschienen, uns aber erst jetzt durch die Güte ihres Herrn Verfassers bekannt gewordenen Schriften nach, da dieselben wegen ihres in vielfacher Beziehung interessanten Inhalts der Aufmerksamkeit der Leser des Archivs recht sehr empfohlen zu werden verdienen:

Notice sur Gérard Moll, né à Amsterdam le 18 janvier 1785, mort dans la même ville le 17 janvier 1838; par A. Quetelet, Secrétaire perpétuel de l'Academie royale de Bruxelles, directeur de l'Observatoire de la même ville etc. Bruxelles. 1839.

Notice sur Jean Guill. Garnier, membre de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles; par A. Quetelet, Secrétaire perpetuel de l'Académie, directeur de l'Observatoire de Bruxelles, etc. Bruxelles. 1841.

Beide Männer, deren Leben Herr Quetelet in diesen beiden Schriften auf eine höchst anziehende Weise beschreibt, werden den Physikern und Mathematikern hinreichend bekannt sein, Garnier weniger durch Entdeckungen und Erfindungen, mit denen er die Wissenschaft bereicherte, als durch eine grosse Anzahl von ihm verfasster mathematischer Lehrbücher, durch seinen traité de météorologie, und vorzüglich als Mitherausgeber der beiden ersten Bände der trefflichen einen reichen Schatz insbesondere auch für Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten höchst nützlicher Bemerkungen und Aufgaben enthaltenden Correspondance mathématique et physique, publiée par MM. Garnier, Prof. de Mathématiques et d'Astronomie à l'Université de Gand, et Quetelet, Prof. de Mathématiques, de Physique et d'Astronomie à l'Athénée de Bruxelles. A Gand. 1825. 26., deren Herausgabe aber Herr Quetelet vom dritten Bande an allein übernahm. Garnier's Leben bietet besonders durch seine grosse Bewegtheit, und durch die vielen merkwürdigen Personen, mit denen er in Berührung kam, grosses Interesse dar. So findet

Digitized by Google

sich z. B. p. 11 und 12 folgende Stelle *): „Un jeune débutant qui devait signaler sa carrière par un grand nombre de travaux du premier ordre, me fut présenté par mon ami, M. Le Brun, directeur des études de l'école polytechnique **), avec invitation de l'accueillir gratuitement dans mon pensionnat où il devait reconnaître ce bienfait par des répétitions et d'autres services. J'acceptai la proposition: le jeune élève reçut chez moi tous les élémens de l'existence et les livres nécessaires tant à son instruction qu'à ses travaux: c'était M. Poisson dont la réputation est devenue européenne. Il fixa bientôt l'attention et l'intérêt du célèbre Lagrange dont il suivait le cours de perfectionnement dans la salle de la bibliothèque de l'école. Mais plus tard M. de Laplace, qui faisait imprimer sa Mécanique céleste, lui confia sur mon refus, la révision des épreuves de cet ouvrage; telle fut l'origine de ma disgrâce et de la fortune de M. Poisson. M. Fourier ayant été appelé à la préfecture de Grenoble, département de l'Isère, M. de Laplace devenu pour un moment ministre de l'intérieur, lors de l'érection du consulat, appela M. Poisson à la survivance de Fourier, qui ne put me garantir de cette injustice dont je fus instruit par M. Poisson lui-même qui était encore mon hôte et mon obligé, et qui trouvait très-simple qu'on le récompensât à mes dépens. J'étais d'ailleurs en relation avec le célebre Lagrange, qui ne dissimulait pas ses préventions contre son collègue M. de Laplace." — Napoleon nannte Lagrange la haute pyramide des sciences mathématiques. An solchen interessanten Zügen und Bemerkungen sind beide Schriften reich, die wir daher nochmals der Beachtung der Leser empfehlen.

Auf S. 13 der Notice sur Garnier wird einer Schrift über Lagrange Erwähnung gethan, die wir hier anführen wollen, da dieselbe, so wie uns, gewiss auch manchen Lesern des Archiv's bis jetzt unbekannt geblieben ist: Précis historique sur la vie et la mort de Joseph Louis Lagrange, par M. M. J. J. Virey et Potel, docteurs en médecine.

Considerazioni storico-critiche sulla teorica e sul calcolo delle probabilità di Alb. Gabba (In den Commentarii dell' Ateneo di Brescia per l'anno academico 1840.) Brescia. 1842. 8.

Einleitung in die Geschichte der Naturwissenschaft, von Dr. Joh. Brotz. Heidelberg. 1842. gr. 8. 8 ggr.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Vorschule der Mathematik; von Dr. A. Tellkampf, Director und Professor. 3te Auflage. Berlin. 1842. gr. 8. 1 Thlr. 16 ggr.

*) Garnier's eigne Worte.

**) L'un des sous-instituteurs de l'ancien duc d'Orleans, aujourd'hui Philippe I., roi des Français.

Digitized by Google

Lehrbuch der reinen Mathematik für den Unterricht der Zöglinge der k. k. Ingenieurs-Akademie, von G. A. Greisinger, Ingenieurs-Major und Professor. 3. Thl. 1. Abth. Anfangsgründe der analytischen Geometrie in der Ebene. Auf höchsten Befehl verfasst. Wien. 1841. 2 Thlr. 16 ggr.

Vollständiger Lehrkurs der reinen Mathematik von L. B. Francoeur. Aus dem Französischen von E. Külp. Band II. Buch 3. Abtheilung 1. Die Differential- und Integralrechnung. Bern. 1843. 8. 1 Thlr. 8 ggr.

Arithmetik.

Der arithmetische Unterricht in Gymnasien und höhern Bürgerschulen, von K. Gruber. Eine Fortsetzung des Rechenunterrichts in der Elementarschule von demselben Verfasser. Carlsruhe. 1842. gr. 8. 22 ggr.

L. Gerlach: Praktisches Rechenbuch, enthaltend 800 Uebungsaufgaben aus den Rechnungsarten des bürgerlichen Lebens und der niedern Algebra, mit ihren gemeinverständlichen Lösungen nach einer Grundregel für das Kopf- und Tafelrechnen. Mit einem Vorworte von J. Götz. Dessau. 1843. 18 ggr.

Lehrbuch der niedern Arithmetik von G. von Seehausen. Leipzig. 1843. 8. 18 ggr.
Auflösungen dazu, Ebendas. 20 ggr.

Francesco Toffoli, Manuale di Aritmetica mentale e scritta. Venezia. 1842. 8. 3 L. 48 sc.

Cours d'Algèbre par A. Mutel. 2. édition. Paris. 1842. 8. 6 fr.

A treatise on Algebra. Vol. I. Arithmetic and Algebra. By G. Peacock, D. D. Cambridge. 1842. 15 sh.

S. S. Moeyon (Onderwijzer in de Wiskunde te Assen) Beginselen der Algebra of Stellkunst, ten dienste der scholen. gr. 8. Te Groningen. 1842. f. 2.

Pieter van Campen, Grondbeginselen der Algebra of Stelkunst, geheel omgewerkt en met een groot aantal voorstellen en vraagstukken vermeerderd. gr. 8. Te Leyden. 1842. f. 2. 40.

Sammlung algebraischer Uebungsaufgaben von J. H. D. T. Brandt. Hamburg. 1843. 12. 1 Thlr.

R. Lobatto, (Math. Mag. et Philos. Natur. Dr.) Verklaring eener nieuwe en vereenvoudigde handelwijze voor het trekken van

Digitized by Google

den cubuswortel, zoo uit volkomen als uit onvolkomen cubickgetallen, opgesteld ten dienste der Scholen en Gymnasia. gr. 8. Te's Gravenhage. 1842. 30 c.

Leichtfasslicher practischer Unterricht zum vortheilhaften Gebrauche der Logarithmen, um mittelst derselben die schwierigsten und zusammengesetztesten mathematischen, als auch kaufmännischen Rechnungen auf die einfachste und kürzeste Weise auszuführen, von J. B. Montag, Lehrer der Arithmetik zu Erfurt. Leipzig. 1841. 8. 4 ggr.

Bauer, J. E., die Logarithmen und die Gränzen ihrer Zuverlässigkeit, die Gaussischen Logarithmen für Summen und Differenzen und zur logarithmischen Auflösung der quadratischen Gleichungen. Für eine auf strenge Theorie gegründete Anwendung. gr. 8. Münster. 1843. 12ggr.

Raabe, J. L., die Differenzial und Integralrechnung mit Functionen mehrerer Variabeln. (Der Differenzial- und Integralrechnung 2ten Theiles 1ste Abth.) gr. 8. Zürich. 1843. 3 Thlr. 8 ggr.

Geometrie.

Lehrgang der Elementar-Geometrie für mittlere und niedere Volksschulen von L. Sobolewski. Erfurt. 1843. 16 ggr.

Leitfaden für den Unterricht in der Geometrie, von Dr. F. Bredow, Gymnasiallehrer. 1stes Heft, Planimetrie. Oels. 1842. gr. 8. 8 ggr.

Praktische Anleitung zur Auflösung geometrischer Aufgaben und zur Erfindung des Beweises geometrischer Lehrsätze, gestützt auf eine ausführliche Erläuterung des Wesens des geometrischen Satzes, von Dr. E. S. Unger. Mit vielen durch die Steinpresse eingedruckten Figuren. Erfurt. 1843. gr. 8. 1 Thlr. 8 ggr.

Géométrie stéréométrique, ou collection de figures en carton, pour faciliter l'étude de la géométrie, par L. Dupin. In 4. Paris. ($\frac{1}{4}$ Bogen mit 48 Figuren in Carton). 1842.

Analyse appliquée à la geométrie des trois dimensions, par C. F. A. Leroy. 3. édition. Paris. 1843. 8. 5 fr.

Résumé de leçons de géométrie analytique et de calcul infinitésimal par Belanger. 8. Paris. 1842. 2 Thlr. 6 ggr.

A Treatise in which the Elementary Properties of the Ellipse

Digitized by Google

are deduced from the Properties of the Circle, and geometrically demonstrated. By the Duke of Somerset. Lond. 1842. 9 sh. 6 d.

Praktische Geometrie.

Neue einfache trigonometrische Methode die Höhen der Berge zu messen, ohne sie zu besteigen, bewirkt durch die Auffindung der wahren terrestrischen Refraction von Dr. F. P. v. Gruithuisen, Professor und Ritter. München. 1842. gr. 8. 8 ggr.

Leitfaden bei dem Unterrichte in den Anfangsgründen der practischen Feldmesskunst, mit Vorausschickung der erforderlichen arithmetischen und geometrischen Hülfsätze. Zum Gebrauch in Gewerbs-, Bürger- und Landschulen bearbeitet von A. Woelfer, Vermessungs-Commissär und Lehrer. Gotha. 1840. 41. 8. 12 ggr.

Th. Raetz, pract. Zeichenlehrer, Geometrie für Künstler und Handwerker. Ein Lehrbuch zum Selbstunterricht. 2te verb. und vermehrte Aufl. gr. 8. Berlin. 1842. 1 Thlr. 8 ggr.

Anleitung zum Aufnehmen von Landgütern, zum Feldmessen und Nivelliren. Von A. Bolotow. (In russischer Sprache). 8. St. Petersburg. 1842.

Practischer Unterricht im Nivelliren oder Messen der Höhen u. s. w. Mit 3 Kupfern. 2te Ausgabe. Bautzen. 1842. gr. 8. 8 ggr.

The Principles and Practice of Landengineering, Trigonometrical, Subterraneous, and Marine Surveying, with an Appendix, by Ch. Bourns. 8. London. 1842. 15 sh.

Die geometrische Zeichenkunst, oder die Lehre von den geometrischen Projectionen und ihrer Beleuchtung in 3 Theilen; von Broecker I., Artillerie-Lieutenant und Lehrer an der Königl. Preuss. Oberfeuerwerker-Schule. Mit 12 Kupfertafeln. Berlin, Posen und Bromberg. 1842. gr. 8. 4 Thlr. 8 ggr.

Trigonometrie.

A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry. By the Rev. T. G. Hall, M. A. Prof. of Mathematics in King's College, London. 3. edit. London. 1842. 7 sh. 6 d.

Digitized by Google

Mechanik.

Poinsot. Eléments de statique, suivis de quatre mémoires sur la composition des moments et des aires. 8me édit. Paris. 1842. 8. 6 Fr. 50 c.

Praktische Mechanik.

Der practische Maschinenbauer, von A. V. Demme, practischem Maschinenbauer. 9., 10. und 12. Lieferung. Mit 94 lithographirten Abbildungen. Quedlinburg. 1842. 8. 6 Thlr. 20 ggr.

Astronomie.

Theodicee. Eine Reihe von Dialogen von Dr. E. A. von Schaden. 1. Band. Auch unt. d. Titel: Orion, oder über den Bau des Himmels. Carlsruhe und Freiburg. 1842. gr. 8. 1 Thlr. 15 ggr.

Elémens d'Astronomie, par C. Loupot. Paris. 1842. 8. 5 fr. 50 cent.

Astronomische Untersuchungen von F. W. Bessel, Geheimen Regierungsrath und Professor zu Königsberg. 2. Band. Königsberg. 1842. gr. 4. 5 Thlr. 8 ggr.
Wir werden nächstens auf dieses wichtige Werk zurückkommen.

Astronomische Beobachtungen auf der Königlichen Universitäts-Sternwarte zu Königsberg, von F. W. Bessel, Geheimen Regierungsrath und Professor. 17. bis 20. Abth., vom 1. Januar bis 31. December 1831—1834. Königsberg. 1835. 1836. 1838. 1840. Folio. 2 Thlr. 16 ggr.

Berliner Astronomisches Jahrbuch, für 1845. (Der Sammlung Berliner astronomischer Jahrbücher 70. Band). Auf Veranlassung der Ministerien des Unterrichts und des Handels herausgegeben von J. T. Encke, Director der Berliner Sternwarte. Berlin. 1842. gr. 8. 3 Thlr. 4 ggr.
S. Literarischer Bericht. IX. S. 146.

Principales tables de M. de Mendoza (pour la très-prompte ré-

Digitized by Google

duction des distances de la lune) revues etc. avec de titres et des explications en français et en anglais; par L. Richard. In 4. Paris. 1842. 7 fr. 50 c.

Memoirs of the Royal Astronomical Society. Volume 12th. With 16 plates. London. 1842. 4. 25 sh.

Physik.

Grundriss der Naturlehre, oder: Darstellung der Undulation, als wesentliche Grundlage der gesammten Naturkunde, und als Schlüssel zu vielen Geheimnissen der Natur. Mit sorgfältiger Umgehung aller Hypothesen, auf rein mathematische Principien gegründet von M. Rubrom. Wien. 1841. gr. 8. 2 Thlr.

Rede über den Einfluss der Naturwissenschaften, bei Uebernahme des Prorectorats an der Universität zu Jena am 6. August 1842 gehalten von Dr. E. Huschke. Leipzig. 1842. Lex. 8. 3 ggr.

J. H. Hellmuth's Volks-Naturlehre. 10. Aufl. Nach dem Tode des Verf. zum dritten Male bearbeitet von J. G. Fischer. Braunschweig. 1843. 1 Thlr.

Die Experimental-Physik. Zum Selbst-Unterrichte für Gebildete und zum Gebrauche in Real- und polytechnischen Schulen. Nach der dritten Aufl. des Französischen des J. Marcet, Prof. zu Genf, übersetzt von G. Kissling. Erste Lieferung. Ludwigsburg. 1843. 8. Das Ganze wird in sechs Lieferungen erscheinen und 1 Thlr. 12 ggr. kosten.

Traité de Physique considérée dans ses rapports avec la Chimie et les Sciences Naturelles, par Becquerel. T. 1. In 8. Paris. 1842. 7 fr. 50 c.

Elementi di Fisica, di Domenico Scinà (Professor der Universität in Palermo) 2. edizione milanese con aggiunte. 2 Tomi. Mailand. 1843. 12. 6½ L.

Joh. Sam. Tr. Gehler's physikalisches Wörterbuch, neu bearbeitet von Gmelin, Littrow, Muncke, Pfaff. 10. Band 2 Abth. (Waf.-Win) Mit 20 Kupfertafeln. Leipzig. 1842. gr. 8. 4 Thlr. 16 ggr.

Mémoire sur l'Aréométrie, et en particulier sur l'Aréométrie centigrade, suivi d'une instruction à l'usage des fabricants d'Aréomètres par Francoeur. In 4. Paris. 1842. 3 fr.

Schenkl, Dr. K. Ph., das Barometer und seine Benutzung vor-

Digitized by Google

züglich als Instrument zum Höhenmessen. Roy. 4. Brünn. 1842. 8 ggr.

Proceedings of the London Electrical Society. Part 7. Session 1842—43. Edited by the Secretary. London. 1843. 8. 21½ sh.

Vollständiger Unterricht in der Blitzableitersetzung nach 66 Modellen, nebst einem vorbereitenden Auszuge der Elektrizitätslehre und geschichtlichen Notizen über die Erfindung und Einführung der Blitzableiter, für Architekten, Ingenieure, Bau- und Werkmeister, von Dr. K. W. Dempp. Mit 3 Figurentafeln. München. 1842. 8. 16 ggr.

Der Magnetismus im Verhältniss zur Natur und Religion von Ritter Dr. J. Ennemoser. Stuttgart und Tübingen. 1842. gr. 8. 2 Thlr. 12 ggr.

Der Galvanismus in seiner technischen Anwendung seit dem Jahre 1840, oder Galvanoplastik u. s. w. Für Natur- und Kunstfreunde, wie auch zum technischen Gebrauch dargestellt von Dr. M. Knobloch. Erlangen. 1842. gr. 8. 16 ggr.

Die Galvanoplastik, oder praktische Anleitung, Metalle aus ihren Auflösungen nach den neuesten und verbesserten Verfahrungsarten vermittelst der galvanischen Electricität zu reduciren, nach den Vorschriften des C. Walker, T. Spencer, A. Smee, Sturgeon, de la Rive u. A. bearbeitet, und mit auf eigene Erfahrung gegründeten Zusätzen versehen von W. Fardely. Mannheim. 1842. gr. 8. 10 ggr.

Preisaufgabe

der Königlichen Societät der Wissenschaften zu Göttingen.

Es soll ein Instrument zur Messung der Stärke des Tons zweckmässig eingerichtet und Versuche gemacht werden, um die damit zu erreichende Schärfe der Messung kennen zu lernen.

Einsendungstermin vor Ablauf des Septembers 1843. Preis 50 Ducaten.

Die mathematischen Wissenschaften haben in neuester Zeit zwei grosse Verluste erlitten.

Am 21. September 1842 starb der berühmte englische Mathematiker James Ivory, geboren im Jahre 1765.

Am 12. Januar 1843 starb zu Paris L. Puissant, geboren am 12. September 1769 in La Gastallerie im Seine- und Marne-Departement, vorzüglich bekannt durch seinen Traité de Géodésie und seinen Traité de Topographie.

Digitized by Google

XII.
Literarischer Bericht.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Phil. Kelland, Lectures on the Principles of Demonstrative Mathematics. 8. Edinburgh. 1843. 4 sh. 6 d.

Cours de mathématiques, rédigé pour l'usage des écoles militaires; par Allaise, Billy, Boudrot et L. Puissant. 3. édition. In 8. Paris. 1843. 7 fr. 50 c.

Cours de mathématiques, à l'usage de l'ingénieur civil, par J. Adhémar. Algèbre. 8. Paris. 1843. 5 fr.

Arithmetik.

Anleitung zur gründlichen Erlernung der Rechenkunst mit Anwendung der zweckmässigsten Abkürzungen. Zum Selbstunterrichte und als Hülfsbuch beim öffentlichen und Privat-Unterrichte, von J. Strehl, Lehrer an der k. k. Normalhauptschule zu St. Anna in Wien. 2 Thl. 8. Wien. 1843. 1 Thlr. 12 ggr.

Arithmétique usuelle: Cours complet de calcul théorique et pratique, par G. F. Olivier. 9 édition. 12. Paris. 1843. $2\frac{1}{2}$ fr.

The Seeman's Arithmetic, or the Application of the several Rules of that science to the purposes of the Maritime Profession; in which also are inserted several Examples of Statements and Adjustments of general and particular Averages. By J. Martin. 18. Edinburgh. 1843. 2 sh. 6 d.

Digitized by Google

J. J. Gremilliet, Recueil de problèmes amusans et instructifs, avec les démonstrations raisonnées et l'application des règles de l'arithmétique à leurs solutions. 6. édition. Partie 1. 2. Paris. 1843. 11 fr.

Anfangsgründe der Buchstabenrechnung und Algebra. Von J. C. Lückenhof, Professor am Gymnasium zu Münster. 2. verb. und vermehrte Aufl. gr. 8. Münster. 1843. 10 ggr.

Hartmann, M. Edler von Franzenshuld. Grundlehren der allgemeinen Arithmetik. 8. Wien. 1843. 1 Thlr. 9 ggr.

Arithmetik (und Algebra) für Realschulen, für höhere Bürger- und Gewerbeschulen, so wie für den Selbstunterricht, von J. A. Pflanz. 1. Theil. Niedere Arithmetik. 8. Stuttgart. 1843. 15 ggr.

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, herausgegeben von Joh. Salomon, Professor der Mathematik in Wien. 3. durchaus verbesserte Auflage. gr. 8. Wien. 1843. 2 Thlr. 16 ggr.

A Treatise on Algebra; embracing, besides the elementary principles, all the higher parts usually taught in Colleges; containing, moreover, the new method of cubic and higher Equations, as well as the development and application of the more recently discovered Theorem of Sturm. By G. R. Perkins, Principal and Professor of Mathematics in the Utica Academy. 8. Utica. (United States) 1842. 10 sh. 6 d.

Exposition de la théorie des chances et des probabilités, par A. A. Cournot. In 8. Paris. 1843. 7 fr. 50 c.

Beitrag zur Auflösung der höheren Gleichungen. Von Dr. Anton Vállas, ordentlichem Mitgliede der ungrischen Gelehrten-Gesellschaft zu Pesth. Wien. 1843. 8.

Diese Schrift scheint uns ein dankenswerther Beitrag zur genauern Würdigung und Vergleichung der Fourier'schen und Horner'schen (M. s. Literarischer Bericht. Nr. VI. S. 90) Auflösungsmethoden der numerischen Gleichungen zu sein. Zur Empfehlung dient derselben auch die Deutlichkeit, mit welcher sie verfasst ist, wobei sie an eignen Bemerkungen und Entwickelungen nicht arm ist, u. A. auch insbesondere ein von Fourier nur obenhin angedeutetes Verfahren genauer zu erwägen und nicht nur mit der Budan'schen Wurzelverminderung in Einklang zu bringen, sondern auch hinsichtlich der Gränzen seiner Genauigkeit festzustellen sucht. Vollständig ausgerechnete Beispiele, die ganz zweckmässig zum Theil aus der in Nr. VI. S. 90 des literarischen Berichts angezeigten Schrift des Herrn Prof. Schulz von Straszнicki und aus Enckes bekannter Abhandlung in dem astronomischen Jahrbuche für 1841 entlehnt sind, sind überall beigebracht, und werden gewiss sehr zur Unterstützung minder geübter Leser dienen.

Bemerkt mag noch werden, dass der Verf. auch im vorigen Jahre den ersten Theil eines in ungrischer Sprache verfassten grösseren Lehrbuchs der Theorie der Gleichungen unter dem Titel:

Digitized by Google

Felsöbb egyenletek. I. Füzet. Budán, 1842. herausgegeben hat.

Die Logarithmen und die Gränzen ihrer Zuverlässigkeit, die Gaussischen Logarithmen für Summen und Differenzen und zur logarithmischen Auflösung der quadratischen Gleichungen. Für eine auf strenge Theorie gegründete Anwendung. Von Dr. J. E. Boner. Oberlehrer am Gymnasium zu Münster. Münster. 1842. 8. 12 ggr.

Bei einer Schrift wie die vorliegende, welche nicht für erste Anfänger bestimmt zu sein scheint, welche einer besondern Bemerkung auf dem Titel zufolge eine auf strenge Theorie gegründete Anwendung zu fördern den Zweck hat, und deren theoretische Hauptgrundlage die Entwickelung der Logarithmen und Exponentialgrössen in Reihen bildet, wäre man wohl zu erwarten berechtigt gewesen, dass der Herr Verf. diese Entwickelung nach einer strengern Methode, als auf die ganz gewöhnliche Weise mittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten ausgeführt hätte. Insofern nun diese Methode den Leser in völliger Ungewissheit über die Gränzen der Anwendbarkeit der durch dieselbe erhaltenen Reihen lässt, und überhaupt — wie nun schon oft genug aus einander gesetzt worden ist — zur Gewinnung von Resultaten, die auf strenge Gültigkeit Anspruch machen dürfen, gar nicht geeignet ist, da ferner der Verf., nach seinen aus §. 6. ersichtlichen sehr vagen und ganz veralteten Begriffen über Convergenz und Divergenz der Reihen zu urtheilen, mit den neuern Fortschritten der Analysis in der Theorie der Reihen auch nicht im Entferntesten bekannt ist, so entbehrt seine Schrift überhaupt einer strengen theoretischen Grundlage ganz, und der Zweck derselben kann also hiernach nur als verfehlt erscheinen. Jedoch wird sich dieselbe wahrscheinlich das Verdienst erwerben, den Gebrauch der Gaussischen Logarithmen, insbesondere auch bei der Auflösung der quadratischen Gleichungen, weiter zu verbreiten, in welcher Beziehung sie den Lehrern an höhern Unterrichtsanstalten empfohlen sein mag.

Tafel der Proportionaltheile zum Gebrauche bei logarithmischen Rechnungen, mit besonderer Berücksichtigung der Logarithmentafeln von Callet und Vega, entworfen von C. Bremiker. 8. Berlin. 1843. 18 ggr.

Die Differenzial- und Integralrechnung mit Functionen mehrerer Variablen. Von J. L. Rabe. Der Differenzial- und Integralrechnung zweiten Theiles erste Abtheilung. Zürich. 1843. 8. 3 Thlr. 8 ggr.

Der Inhalt dieser Abtheilung des Rabe'schen Werkes über Differenzial- und Integralrechnung ist durch ihren Titel hinreichend bezeichnet. Wenn auch bei der Entwickelung der Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe und bei der Lagrange'schen Reihe Ergänzungsglieder, wie der Verf. dieselben nennt, angegeben worden sind, so haben wir doch in einem Werke wie das vorliegende eine auf die Ergänzungsglieder gestützte näher eingehende Untersuchung über die Convergenz und Divergenz der genannten Reihen

ungern vermisst, weil gerade in diesem Punkte noch eine sehr unangenehme Lücke in der Analysis insbesondere in Bezug auf die Lagrange'sche Reihe auszufüllen zu sein scheint. Jedenfalls hätten aber die verschiedenen Arbeiten Cauchy's über die Convergenz und Divergenz der Lagrange'schen Reihe, die freilich in verschiedenen Memoiren dieses grossen Mathematikers zerstreut sind, eine ganz besondere Berücksichtigung verdient, und der Verf. würde sich durch deren weitere Entwickelung und möglichst elementare Darstellung gewiss ein ganz besonderes Verdienst um jeden Leser, so wie auch um die Wissenschaft überhaupt erworben haben, da die in Rede stehenden Punkte nothwendig vollständig aufgeklärt werden müssen, bevor sich überhaupt von der Lagrange'schen Reihe eine sichere Anwendung machen lässt. Ohne solche näher eingehende Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz helfen die Ergänzungsglieder in ihrer allgemeinen Form für die wirkliche Anwendung gar nichts, und die ganze Gleichung bleibt eigentlich nur ein symbolischer Ausdruck. Auf nähere Erörterungen können wir hier der Beschränktheit des Raumes wegen nicht eingehen. Nur wollen wir noch in der Kürze bemerken, dass bei der vorher in Anregung gebrachten Untersuchung nach unserer Ueberzeugung, so weit dies irgend möglich ist, der Gebrauch der Integralrechnung vermieden werden muss, und dieselben ganz in das Gebiet der Differenzialrechnung zu ziehen sind.

An Elementary Treatise on the Differential Calculus, in which the Method of Limits is exclusively made use of. By the Rev. M. O'Brien, M. A., late Fellow of Caius College. 8. Cambridge. 1843. 10 sh. 6 d.

I principii del calcolo sublime esposti coll' algebra pura, saggio di teoria elementare di Giorgio nob. Foscolo, sotto-tenente nel corpo degl' ingegneri navali, prof. di matematica nell' i. r. collegio della marina in Venezia. In 4. Venezia. 1842.

Geometrie.

Fundamente der Geometrie. Vom Prof. Dr. Magnus Georg Paucker. Fünfter bis siebenter Cursus. Metrik. Trigonometrie. Stereometrie. Mit 255 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Mitau. 1842. 8. 1 Thlr. 6 ggr.

S. literarischer Bericht. Nr. X. S. 154. Wir sind fortwährend der Meinung, dass Lehrer insbesondere im Einzelnen in dieser Schrift Vieles finden werden, was ihnen bei ihrem Unterrichte recht nützlich sein kann, auch in Bezug auf aus derselben zu entnehmende Uebungsaufgaben, und empfehlen dieselbe daher in dieser Rücksicht nochmals.

Lehrbuch der ebenen Geometrie zum Gebrauche bei dem Unter-

Digitized by Google

richte in Real- und Gymnasial-Anstalten von Dr. C. H. Nagel, Professor der Mathematik an dem Ober-Gymnasium und der höhern Bürgerschule in Ulm. 3. vermehrte Aufl. gr. 8. Ulm. 1843. Mit 17 lithogr. Tafeln. 20 ggr.

Materialien zur Selbstbeschäftigung der Schüler bei dem Unterrichte in der ebenen Geometrie von Dr. C. H. Nagel, Prof. der Mathematik u. s. w. in Ulm. gr. 8. Ulm. 1843. 6 ggr.
(Besonderer Abdruck des Anhangs zum Lehrbuch der ebenen Geometrie von demselben Verfasser.)

Geometrie und Trigonometrie. Ein Leitfaden beim Unterricht in Real- und Gewerbschulen, von F. Kieser, Prof., Vorstand der Königl. Realschule und der Elementaranstalt in Stuttgart. 1. Thl. Ebene Geometrie. Mit 11 Steintafeln. 3. vermehrte Aufl. gr. 8. Stuttgart. 1843. 16 ggr.

Del postulato quinto degli elementi di Euclide. Di Giovanni Fusco. In 8. Napoli. 1841.

Praktische Anleitung zur Auflösung geometrischer Aufgaben und zur Erfindung des Beweises geometrischer Lehrsätze, gestützt auf eine ausführliche Erläuterung des Wesens des geometrischen Satzes, von Dr. E. S. Unger. Erfurt. 1843. 8.

Der Verf. sagt in der Vorrede: „So lange noch dem mit der Geometrie Beschäftigten die ermittelten Wahrheiten als durch einen Zufall entdeckt erscheinen, und er die Frage nicht zu beantworten vermag: Wie ist man hierauf gekommen? so lange hat er eine wahre geometrische Ausbildung sich noch nicht angeeignet“ und bemerkt dann ferner, „dass diese Schrift den Zweck habe, dem Anfänger, welcher bereits eine Zeit lang mit den Elementen der Geometrie beschäftigt ist, diese Ausbildung zu verschaffen, und ihn zu diesem Behufe dahin zu bringen, dass er des Stoffes vollkommen mächtig werde, das Wesen und die Bedeutung der einzelnen Sätze und ihren Zusammenhang zu einem vollständigen Ganzen richtig erkenne, und zu einer zweckmässigen Benutzung derselben hinlänglich befähigt werde. Um diesen Zweck zu erreichen ist das Ganze so bearbeitet, dass für das Selbststudium dem Anfänger eine deutliche und ausführliche Anleitung gegeben wird, wie er seine geometrischen Beschäftigungen vorzunehmen, und worauf er sowohl bei den einzelnen Sätzen an und für sich als auch bei der Ermittelung ihrer Abhängigkeit von einander seine Aufmersamkeit vorzugsweise zu richten hat, und es ist ihm zugleich durch eine zahlreiche Sammlung von zweckmässigen und zweckmässig zusammen gestellten Uebungen, durch die er eben so zu eigenen Forschungen veranlasst wird, sich Rechenschaft zu geben über die Art und Weise, wie die ermittelten Resultate sich nothwendig haben herausstellen müssen, hinlängliche Gelegenheit geboten, seine geometrische Ausbildung zu vollenden u. s. w.“ Um es kurz zu sagen, ist also diese Schrift, ihrem Hauptzwecke nach, eine Anleitung zur Auflösung geometrischer Aufgaben nach analytischer Methode und enthält zugleich eine ziemlich grosse Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen, wobei dieselbe indess zugleich auch den Anfänger mit der Bedeutung

der einzelnen Sätze in dem geometrischen Systeme und der Nothwendigkeit ihres inneren Zusammenhangs unter einander näher bekannt zu machen sucht, und hierbei insbesondere das System des Euclides in's Auge fasst. Indem uns die Beengtheit des Raumes verhindert, namentlich über den letzteren Punkt, wie wir sonst wohl gern möchten, ein völlig motivirtes Urtheil abzugeben, wollen wir nur bemerken, dass wir allerdings das Bestreben des Verfs. in dieser Beziehung für löblich halten, dass wir aber gewünscht hätten, dass er neben dem Systeme des Euclides auch andere geometrische Systeme, insbesondere das von Legendre, berücksichtigt und auch in Bezug auf das euclidische System verschiedene bei dessen Charakterisirung ganz vorzüglich zur Sprache kommende Hauptpunkte schärfer und bestimmter hervorgehoben hätte, wobei wir u. A. das fünfte Buch im Auge haben. Sollen wir schliesslich unser Urtheil über diese Schrift im Allgemeinen und in der Kürze aussprechen, so glauben wir, dass dieselbe bei einer ziemlich grossen Breite der Darstellung Anfängern in der Geometrie, die den Unterricht eines geschickten Lehrers entbehren müssen, nützlich werden kann, sind aber auf der andern Seite der Meinung, dass dieselbe geschickten und geübten Lehrern auch in methodischer Rücksicht nicht gerade viel Neues bietet. Anfängern wie die obigen mag dieselbe jedoch hierdurch nochmals empfohlen sein.

Traité de géométrie descriptive, par Lefebure de Fourcy. 4. édition 2 Vols. 8. Paris. 1843. 10 fr.

Traité élémentaire de géometrie analytique à 2 et à 3 dimensions, contenant toutes les théories générales de géométrie accessibles à l'analyse ordinaire, par Auguste Comte. 8. Paris. 1843. 7 fr. 50 c.

On the Application of a New Analytic Method to the Theory of Curves and Curved Surfaces. By the Rev. J Booth, Professor of Mathematics. 8. Liverpool. 1843. 1 sh.

Praktische Geometrie.

Die niedere Messkunde als Instruction für Civilingenieure, enthaltend: Aufgaben der niederen Messkunde, Ausmessungen mit Stäben und der Kette, Gebrauch des Tisches, u. s. w. von W. E. A. von Schlieben, Königl. Sächs. Kammerrath. 2 Bändchen. 12. Quedlinburg. 1843. 12 ggr.

L. W. Klemm, die Landes-Vermessung und die in ihrem Gefolge befindlichen Arbeiten, erläutert durch die im Königreich Würtemberg zur Ausführung gekommene Vermessung. 2. Heft 1. Hälfte.

Digitized by Google

(Trigonometr. Theil 2. Abthlg.) Mit 1 Steintafel. gr. 8. Stuttgart. 1843. 8 ggr.

(S. Literarischer Bericht. Nr. X. S. 157).

A Comprehensive Treatise on Land Surveying; comprising the Theory and Practice in all its branches: in which the Use of the various Instruments employed in Surveying, Levelling, etc. is clearly elucidated by practical Examples. Illustrated by 40 plates. By J. Ainslie. With a Treatise appended, on Trigonometrical Surveying, Levelling and Railway Engineering, by W. Galleraith, M. A. 4. London. 1843. cloth. 15. sh.

F. W. Simms, A. Treatise on the Principles and Practice of Levelling; showing its application to purposes of Civil Engineering, particularly in the Construction of Roads, with Mr. Telford's Rules for the same. 2. edition, with plates and woodcuts. 8. London. 1843. 5 sh.

Die Ausgleichungs-Rechnungen der practischen Geometrie, oder die Methode der kleinsten Quadrate mit ihren Anwendungen für geodätische Aufgaben, von Christian Ludwig Gerling. Hamburg und Gotha. 1843. 8. 2 Thlr. 16 ggr.

Dieses Werk hilft nach unserer Ueberzeugung einem wahren Bedürfnisse aller praktischen Geometer ab, und verdient denselben nachdrücklichst und angelegentlichst empfohlen zu werden. Alle Aufgaben sind durch ausführlich ausgerechnete, aus der langjährigen eigenen Praxis des Verfs. entnommene Beispiele erläutert, und wir glauben daher, dass ein praktischer Geometer bei seinen Arbeiten nicht leicht in einen Fall kommen wird, in welchem er in dem vorliegenden Werke nicht hinreichende Auskunft über das am zweckmässigsten einzuschlagende Verfahren finden sollte. Dass der Verf. die Sätze, welche der Methode der kleinsten Quadrate zur theoretischen Grundlage dienen, nicht analytisch aus den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickelt, sondern sich mit einer mehr populären Erläuterung derselben und einer Hinweisung auf die Quellen, aus welchen ein vollständiges Studium dieses hochwichtigen Gegenstandes zu schöpfen ist, begnügt hat, halten wir bei einem Werke wie das vorliegende, welches vorzugsweise den Gebrauch der Methode der kleinsten Quadrate bei der Ausführung geodätischer Messungen in die Praxis einzuführen beabsichtigt, in jeder Beziehung für zweckmässig. Möge daher dieses Werk den von dem Verf. beabsichtigten Nutzen in der grössten Ausdehnung stiften und reichlichen Saamen nach allen Richtungen hin ausstreuen! Die aus demselben aufgehende Saat wird gewiss trefflich gerathen.

Der Jahresbericht für die Mitglieder der Hamburgischen Gesellschaft zur Verbreitung mathematischer Kenntnisse. Fastnacht. 1843. enthält einen Aufsatz des Herrn Conferenzraths Schumacher zu Altona, in welchem derselbe aus seinen Vermessungen die Bestimmung mehrerer merkwürdigen Punkte in Hamburg, die unter den jetzigen Verhältnissen, wo mehrere dieser Punkte durch den unglücklichen Brand zerstört sind,

gewiss Interesse genug haben, um ihre Bekanntmachung zu rechtfertigen, da die mitgetheilten Coordinaten zugleich als sichere Grundlage für einen Plan von Hamburg gebraucht werden können. Ausserdem hat diese Abhandlung aber auch wegen der im Eingange mitgetheilten ausführlichen Tafeln zur Vergleichung des Hamburger Maasses mit dem Dänischen, Preussischen, Französischen und Englischen Maasse noch ein besonderes Interesse, wobei wir gelegentlich bemerken, dass der Dänische und Preussische Fuss gegenwärtig ganz gleich sind.

Mechanik.

W. Whewel. Mechanical Euclid. 12. Cambridge. 1843. 4 sh. 6 d.

Prodromus zu einer neuen Darstellungsweise der höheren analytischen Dynamik, mit Anwendung einer neuen, aufs Evidenteste erwiesenen, allgemeinen, analytisch-dynamischen Fundamentalformel, nach welcher allein, durch blosse Substitution in dieselbe, alle gedenkbaren Aufgaben der Statik und Mechanik (diese beiden von nun an nur eine Lehre bildend) sich unmittelbar auflösen lassen. Vom Grafen Georg von Buquoy. Prag. 1842. 4. 8 ggr.

Das in Rede stehende allgemeine dynamische Princip drückt der Verf. S. 23. Nr. 17. in Worten auf folgende Art aus: „Bestehe irgend ein System von materiellen Punkten, welche unter einander in irgend einer bestimmten Bewegungsrelation stehen, d. h. wobei die durch Raum und Richtung gegebene Bewegung irgend eines jener Punkte, für jeden der übrigen aus jenen Punkten, zu gleicher Zeit eine durch Raum und Richtung bestimmte Bewegung postulirt. Seien ferner jene Punkte in, ihrer Wechselbeziehung zwar angemessenen, übrigens jedoch beliebigen Bewegungen oder auch in Ruhe (die Ruhe ist bloss ein einzelner der Geschwindigkeit Null entsprechender Fall der Bewegung) begriffen, und seien beliebig aus jenen Punkten diese oder jene (beliebig einer oder beliebig einige oder alle), zu gleicher Zeit, von der Grösse (durch Druck gemessen) und Richtung nach beliebigen Kräften sollizitirt; so ist am Ende irgend einer Zeit t, binnen einerlei Zeit-Differenzial dt, allemal Folgendes richtig: Die Summe der Producte aus den, binnen dt, jene Punkte sollizitirenden Kräften (als Druckgrössen) in die von denselben Punkten, binnen dt, nach den Richtungen jener Kräfte, durchlaufenen Räume (diese Räume sind Catheten der die unmittelbaren Durchlaufensräume darstellenden Hypotenusen) ist gleich der, durch die doppelte Beschleunigung der Schwere und durch das Zeitdifferenzial getheilten Summe der Producte aus den, binnen dt, in allen materiellen Punkten des Systems, bloss durch binnen dt bestehendes Einwirken obenerwähnter Kräfte, hervorgebrachten Incrementen an Bewegungsquantitäten

Digitized by Google

(als Producte aus Massen in Geschwindigkeitsincremente und aus Geschwindigkeiten in Masseincremente ausgedrückt) in die von den letzterwähnten Punkten, binnen *dt*, nach den jenen Bewegungsquantitäts-Incrementen entsprechenden Richtungen, d. h. nach den jenen Punkten binnen *dt* entsprechenden unmittelbaren Richtungen wirklich vollzogener Bewegungen, durchlaufenen Räume.

Die analytische Entwickelung dieses Princips, die Ableitung des Princips der virtuellen Geschwindigkeit aus demselben, welches als ein blosses Corollarium dieses neuen Princips erscheint, u. s. w. muss man in der Schrift selbst nachlesen. Bei einer Wissenschaft, welche wie die Dynamik einer im eigentlichen Sinne philosophischen Darstellung und Begründung so fähig und bedürftig ist, bleibt es immer zweifelhaft, ob in einem der bisher bekannten allgemeinen Principien derselben ihr höchstes Princip schon gefunden ist, und schon insofern darf also eine Schrift, in welcher ein höheres Princip als die bekannten, aus welchem die letztern sich ableiten lassen, zu entwickeln versucht wird, nie unbeachtet gelassen und verdient jedenfalls einer genauern Prüfung unterworfen zu werden.

Praktische Mechanik.

Der praktische Maschinenbauer, von A. V. Demme. 11. Lieferung. Mit 41 Tafeln Abbildungen. 8. Quedlinburg. 1843. 2 Thlr. 20 ggr.

Morin, Aide-mémoire de Mécanique pratique. 3. édition. 8. Paris. 1843. 8 fr. 50 c.

Manuale pratico di idrodinamica. Con un' appendice, contenente il testo di alcune leggi relative alle acque. Ad uso degli ingegneri ed agenti di campagna di F. Colombani. 8. Milano. 1842. 6 Lire.

Prolegomeni di filosofia idraulica; Assunto dalla trisezione generale degli angoli; Saggio di geometria logica. Dell' ingegnere L. Corsi. Monte pulciano. 1841.

Optik.

A Treatise on Optics. By William N. Griffin, M. A. 2. edition. 8. Cambridge. 1843. 8 sh.

Digitized by Google

Recherche théorique des lois d'après lesquelles la lumière est réfléchie et réfractée à la limite commune de deux milieux complètement transparens, par M. F. E. Neumann. gr. 4. Paris. 1843.

Astronomie.

Populäre Sternkunde oder leichtfassliche und unterhaltende Darstellung der Wunder des gestirnten Himmels. Nebst einem Anhange über das Wesentlichste des Kalenders und der Witterungslehre von Dr. G. A. Jahn, Lehrer der Mathematik. Mit 9 Tafeln Abbildungen. 8. Leipzig. 1843. 2 Thlr. 8 ggr.

Der Komet am Abend des 18. März 1843, eine naturhistorische Beschreibung der Meteore und Phänomene; von H. E. von Egidy. Nebst richtiger und fasslicher Abbildung des Schauplatzes am südlichen und westlichen Himmel. 8. Zittau. 1843. 4 ggr.

Views of the Architecture of the Heavens. By J. P. Nichol, L. L. D. Prof. of Pract. Astronomy in the University of Glasgow. 4. edition. 8. Edinburgh. 1843. With 20 Engravings. cloth. 10 sh. 6 d.

Marcel de Serres, de la création de la terre et des corps célestes. 8. Paris. 1843. 2 Thlr. 18 ggr.

Leitfaden der mathematischen und allgemeinen physischen Geographie, von Dr. J. H. Maedler, Kaiserl. Russ. Hofrath, Professor der Astronomie und Director der Sternwarte zu Dorpart. 8. Stuttgart. 1843. 1 Thlr. 16 ggr.

Principles of Mathematical Geography; comprehending a Theoretical and Practical Explanation of the Construction of Maps; with Rules for the Formation of the various kinds of Map Projections. By William Hughes. With 4 plates. 8. London. 1843. cloth. 6 sh.

A Celestial Atlas, containing Maps of all the Constellations visible in Great Britain, with corresponding Blank Maps of the Stars, systematically arranged for communicating a Practical Knowledge of the Heavens. By J. Middleton, Teacher of the Use of the Globes and Astronomy. With 10 Maps. Folio. Norwich. 1843. 21 sh. Coloured. 28 sh.

A Companion to it; containing a Series of Lessons on the Constellations, a Dissertation on the Fixed Stars and Conversations on the Heavens. With 6 plates. 12. Norwich. bound 5 sh.

Astronomische Untersuchungen von Friedrich Wil-

Digitized by Google

helm Bessel. Zweiter Band. Königsberg. 1842. 4. 5 Thlr. 8 ggr.

Da der Inhalt dieses zweiten Bandes des oben genannten wichtigen Werkes früher noch nicht angegeben worden ist, so holen wir ihn jetzt nach. IX. Bestimmung der Masse des Jupiter. X. Analyse der Finsternisse (diese im höchsten Grade ausgezeichnete Abhandlung sollte Niemand ungelesen lassen. Auch in Beziehung auf reine Mathematik, insbesondere in Beziehung auf analytische Geometrie ist dieselbe von dem grössten Interesse). XI. Ein Hülfsmittel zur Erleichterung der Beobachtungen der Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen. XII. Beobachtungen des Durchganges des Mercur durch die Sonne am 4—5 Mai 1832. XIII. Beobachtung der Sonnenfinsterniss am 15. Mai 1836. XIV. Neue Berechnungsart für die Methode der Entfernungen des Mondes von anderen Himmelskörpern.

Memoirs of the Royal Astronomical Society. Vol. XIV. containing the results of Experiments with the Torsion Rod for determining the Mean Density of the Earth. 4. London. 1843. 20 sh.

Astronomical Observations made at the Radcliffe Observatory, Oxford, in the year 1840. By M. J. Johnson. M. A. Vol. I. With 1 plate. Roy. 8. Oxford. 1843. cloth. 16 sh.

Tables donnant les mesures micrométriques de plus de 500 étoiles doubles et multiples, observées à Dorpat, par F. G. W. Struve, et classées par constellations par Ch. Dien. In 4. Paris. 1843. 24 fr.

Effemeridi astronomiche di Milano per l'anno 1842, calcolate da Rob. Stambucchi. Con appendice di memorie ed osservazioni astronomiche. 8. Mailand. 1843. 5 L. 22 so.

Giornale astronomico ad uso comune per l'anno 1842. Con appendice di notizie astronomiche e meteorologiche di A. Colla, direttore dell' osservatorio della r. università di Parma. Anno IX. Parma. 1 L. 30 so.

Physik.

Handwörterbuch der Physik und Chemie. Von E. F. August, F. W. Barentin, W. H. Dove, L. F. Kaemtz, R. F. Kloeden, R. F. Marchand, F. Minding, F. W. G. Radicke, J. A. W. Roeber, L. F. W. A. Seebeck. 1. Band. A—E. gr. 8. Berlin. 1842. 3 Thlr. 18 ggr.

Lezioni di fisica, di C. Matteucci, date nell' i. e r. università

Digitized by Google

di Pisa nell' anno 1840—1842. Vol. III., distrib. 6. In 8. Pisa. 1840—42.

Beweisführung, dass die Lehre der neueren Physiker vom Drucke des Wassers und der Luft falsch ist, nebst einem Versuche, die Erscheinungen an flüssigen Körpern ohne atmosphärischen Luftdruck zu erklären; von Fr. von Drieberg. 2. Aufl. 8. Berlin. 1843. 8 ggr.

Die Erscheinungen der Electricität und des Magnetismus in ihrer Verbindung mit einander. Nach den neuesten Entdeckungen im Gebiete des Electro-Magnetismus und der Inductions-Electricität, von Dr. J. Eydam. Mit 60 Abbildungen. 8. Weimar. 1843. 1 Thlr. 22 ggr.

A. Bravais, Mémoire sur les courans ascendans de l'atmosphère. 8. Lyon. 1843.

Un triennio di osservazioni meteorologiche fatte in Pesaro, negli anni 1838—1839—1840; memoria del conte Giuseppe Mamiani, socio e censore dell' academia agraria pesarese. In 8. Pesaro. 1841.

Die Revolutionen des Meeres. Von J. Adhemar. Aus dem Französischen übersetzt. Leipzig. 1843. 8. 12 ggr.

Alex. Bertrand, Lettres sur les révolutions du globe; 7. édition, revue, corrigée et considérablement augmentée, enrichie de planches nouvelles et de notes, par Arago, E. de Beaumont etc. In 8. Bruxelles. 1843. 1 Thlr. 6 ggr.

Annalen für Meteorologie, Erdmagnetismus und verwandte Gegenstände, redigirt von Grunert, Koller, Kreil, Lamont, Plieninger, Quetelet, Stieffel, herausgegeben von Dr. J. Lamont. Jahrgang 1843. II. Heft. München. 1842. 8.

Inhalt. Magnetische Terminbeobachtungen in Prag, Mailand, Kremsmünster und München.

Bemerkungen zu den Terminbeobachtungen. Gewitter im Jahre 1841 nach den Beobachtungen von Landsberg, Hohenpeissenberg, Regensburg, Burglengenfeld, Gunzenhausen, Ansbach, Neustadt a. d. Aisch, Würzburg, Uffenheim, Stuttgart, Hof, Leipzig.

Observations de la quantité d'eau pluviale tombée depuis le 1 Mars 1841 d'après l'udomètre placé sur la tour carrée du fort Lamothe à Lyon. Par M. le Garde du Génie, Job.

Meteorologische Beobachtungen im Jahre 1841 an der k. k. Universität zu Grätz angestellt von Hrn. Dr. W. Gintl.

Magnetischer Theodolit, vom Herausgeber.

Vermischte Nachrichten vom Herausgeber. — Auszug aus einem Briefe des Hrn. Hofrath Mädler. Auszug aus zwei Briefen des Hrn. Colla. Auszug aus einem Briefe des Hrn. Prof. Koller.

Jahrgang 1842. III. Heft.

Inhalt. Stündlicher Gang der Temperatur und des Luftdrucks beobachtet im Jahre 1842 an der königl. Sternwarte bei München.

Digitized by Google

Monatliche Mittel der Temperatur und des Luftdruckes in Leipzig in den Jahren 1835—1840, mitgetheilt von Hrn. Prof. Möbius.

Monatliche Mittel des Luftdruckes und der Temperatur, beobachtet an der k. k. Sternwarte in Wien von 1822—1840, mitgetheilt von Hrn. C. L. v. Littrow.

Auszüge aus den Beobachtungen der kgl. Gerichtsärzte in Bayern, vom Herausgeber.

Magnetische Beobachtungen vom Januar 1841 bis Juli 1842; aufgezeichnet im magnetischen Observatorium der k. Sternwarte bei München.

Bemerkungen zu den vorhergehenden Beobachtungen.

Vermischte Nachrichten vom Herausgeber. Mittheilungen des Hrn. Quetelet, Arbeiten der Brüsseler Sternwarte. — Beobachtung periodischer Erscheinungen von Hrn. Quetelet. Auszug aus einem Briefe des Hrn. Colla.

Astronomisch-meteorologisches Jahrbuch für Prag von Karl Kreil, Adjunkten an der k. k. Sternwarte, u. s. w. Zweiter Jahrgang: 1843. Prag. 1 Thlr. 8 ggr.

Dieser Jahrgang enthält die astronomische Ephemeride für 1843, eine Ephemeride des gestirnten Himmels, eine ziemlich ausgedehnte Abhandlung unter dem Titel: Versuch einer Witterungs-Ephemeride von dem Herausgeber, und einen Aufsatz über Vegetations-Beobachtungen von Herrn Karl Fritsch. Zuletzt giebt der Herr Herausgeber die Beschreibung eines von ihm construirten selbstverzeichnenden Barometers und Thermometers, welches nach den mitgetheilten mit diesem Instrumente angestellten und mit den an andern Instrumenten gemachten Beobachtungen verglichenen Beobachtungen zu urtheilen, jedenfalls verdient, weiter verbreitet zu werden. Der Preis des ganzen mit einer Uhr versehenen Apparats ist 100 österreichische Conventions-Gulden, und der Herr Herausgeber ist erbötig, an ihn gelangende Bestellungen zu besorgen und unter seiner Aufsicht ausführen zu lassen, auch dafür einzustehen, dass kein Apparat, ohne von ihm untersucht und tauglich befunden worden zu sein, abgeschickt werde.

Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1841. Herausgegeben von C. F. Gauss und W. Weber. Mit 10 Steindrucktafeln. Leipzig. 1843. 2 Thlr.

I. Ueber die Anwendung des Magnetometers zur Bestimmung der absoluten Declination. Von Gauss. II. Beobachtungen der magnetischen Inclination in Göttingen. Von Gauss. III. Ueber eine neue Methode zur Bestimmung der absoluten Declination. Von Simonoff. IV. Magnetische Beobachtungen. Von Hansteen. V. Ueber die Einrichtung und die Instrumente des magnetischen Observatoriums in Dublin. VI. Bemerkungen über die Wahl der Magnetnadeln zu Magnetometern. Von Weber. VII. Magnetisirung des Eisens durch die Erde. Von Weber. VIII. Beschreibung des auf der zehnten Tafel abgebildeten Regulators eines Triebwerks. Von Hansen. IX. Auszug aus den täglichen Beobachtungen der magnetischen Declination zu Göttingen im Jahre 1841. Von Goldschmidt. X. Vergleichung magnetischer Beobachtungen mit den

Digitized by Google

Elementen der Theorie. Von Goldschmidt. XI. Erläuterungen zu den Terminzeichnungen und Beobachtungszahlen. Beobachtungszahlen von den Variationen der Declination und Intensität in den Terminen vom 26—27. Februar, 28—29. Mai, 27—28. August und 26—27. November 1841.

Folgende Schriften von Herrn Quetelet wollen wir hier zusammenstellen, wenn auch die eine oder die andere schon in einer frühern Nummer des literarischen Berichts angezeigt worden sein sollte:

Catalogue des principales apparitions d'étoiles filantes. Bruxelles, 1839. 4. (Enthält Anzeigen aus den Jahren 533 bis 1838. In einem Anhange findet man: Catalogue des principales aurores boréales observées depuis le commencement de ce siècle).

Nouveau catalogue des principales apparitions d'étoiles filantes. Mémoire lu à la séance de l'Académie royale de Bruxelles du 6 Novembre 1841. Enthält Anzeigen aus den Jahren 1768 v. Ch. G. bis 1841 n. Ch. G.

Deuxième Mémoire sur les variations annuelles de la température de la terre à différentes profondeurs. Bruxelles. 1840. 4.

Second Mémoire sur le magnétisme terrestre en Italie. Bruxelles. 1840. 4.

Résumé des observations sur la météorologie, sur le magnétisme, sur les températures de la terre, sur la floraison des plantes etc. faites à l'observatoire royal de Bruxelles en 1840. Bruxelles. 1841. 4.

Dabei befindet sich: Comparaisons barométriques faites à Bruxelles et dans le nord de l'Europe par A. Bravais et Ch. Martins. (Vergleichungen verschiedener Barometer unter einander zu Upsala, Stockholm, Kopenhagen, Altona, Berlin, Dresden, Halle, Göttingen, Brüssel, Paris, Genf, in dem Hospiz des grossen St. Bernhard.)

Sur la différence des longitudes des observatoires royaux de Greenwich et de Bruxelles; déterminée au moyen de chronomètres par MM. Sheepshanks et Quetelet. Bruxelles. 1841. 4.

Vermischte Schriften.

Cambridge Problems, proposed by the Moderators to the Candidates for Mathematical Honours at the General Examination, 1843. 8. Cambridge. 1843. 1 sh. 6 d.

A Synopsis of Practical Philosophy, alphabetically arranged, containing a great variety of Theorems, Formulae and Tables, from the most accurate and recent authorities, in various Branches of Mathematics and Natural Philosophy; to which are subjoined, small

Digitized by Google

Tables of Logarithms. Designed as a Manual for Architects, Surveyors, Engineers etc. By the Rev. J. Carr, M. A. 2. edition. 18. London. 1843. half-bound 5 sh.

Proposizioni teoriche e pratiche di matematica, del Prof. Ant. Bordoni. Pavia. 1842. 8. 3 L. 48 c.

Opuscoli matematici, nei quali si tratta 1. di alcuni perfezionamenti del telescopio neutoniano; 2. delle formule che determinano rigorosamente l'andamento dei raggi luminosi a traverso di un sistema qualunque di lenti; 3. d'una macchina per guidare le figure piane. Di T. Gonnella, prof. di matematiche nell' i. r. accademia delle belle arti di Firenze. In 4. Con tavole. Firenze. 1842.

The Cambridge mathematical Journal, No. XVI. November 1842. I. On a difficulty in the theory of Algebra. By D. F. Gregory. II. On the limits of Maclaurin's theorem. By A. Q. G. Craufurd. III. On certain expansions, in series of multiple sines and cosines. By Arthur Cayley. IV. On some definite integrals. From a Correspondent. V. On the linear motion of Heat. Part I. From a Correspondent. VI. On the integration of certain differential equations. By B. Bronwin. VII. On elimination. By R. Moon. VIII. Evaluation of certain definite integrals. By R. L. Ellis. IX. Propositions in the theory of attraction. X. New property of the ellipse and hyperbola. From a Correspondent. XI. Mathematical Notes. 1. Note on Mr. Bronwin's Paper on Elliptic Integrals. 2. Solution of a Geometrical Problem. — The sum of the squares of the perpendiculars let fall from n given points on a plane is constant; the plane envelopes a central surface of the second order, having its centre at the centre of gravity of the n points, and its axes coincident with the principal of the system of n points. 3. Note on the Measure of Intensity in the Theory of Light.

No. XVII. February 1843. 1. Propositions in the theory of attraction. Part. II.—II. On the linear motion of heat. Part. II.—III. On the intersections of curves. By Arthur Cayley. IV. Researches in rotatory motion. By Andrew Bell. V. On the transformation of definite integrals. By George Boole. VI. On the motion of rotation of a solid body. By Arthur Cayley. VII. Solution of a problem in analytical geometry. (Ist ein Auszug aus der Abhandlung Thl. I. Nr. XXI. des Archivs der Math. und Physik, mit einiger Abänderung der Darstellung). VIII. On the knight's move at chess. By R. Moon. IX. On certain cases of geometrical maxima and minima. X. On the solution of certain functional equations. By D. F. Gregory. XI. Mathematical Notes. 1. Note on the theory of numbres. 2. To shew that if

$$l^2+m^2+n^2=1 \quad \text{Then shall} \quad l^2+l'^2+l''^2=1$$
$$l'^2+m'^2+n'^2=1 \qquad m^2+m'^2+m''^2=1$$
$$l''^2+m''^2+n''^2=1 \qquad n^2+n'^2+n''^2=1$$
$$l'l''+m'm''+n'n''=0 \qquad mn+m'n'+m''n''=0$$
$$l''l+m''m+n''n=0 \qquad nl+n'l'+n''l''=0$$
$$ll'+mm'+nn'=0 \qquad lm+l'm'+l''m''=0.$$

Digitized by Google

Jahrbuch für 1843. Herausgegeben von H. C. Schumacher, mit Beiträgen von Bessel, Hansteen, Lehmann, Mädler und Olbers. Stuttgart und Tübingen. 1843. 8. 2 Thlr.

Ausser den gewöhnlichen Tafeln enthält dieser Jahrgang folgende Abhandlungen:

Ueber den Magnetismus der Erde von F. W. Bessel.

Ueber den Erfinder der Fernröhre von Olbers.

Ueber Berichtigung der Thermometer von Hansteen.

Ueber den Gang der Temperatur im Laufe des Jahres von Mädler.

Ueber Störungen von Mädler.

Ueber den Menschen und die Gesetze seiner Entwickelung von Dr. Jac. Wilh. Heinr. Lehmann.

Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss am 8. Juli 1842 in Wien, von H. C. Schumacher:

In dem Eingange seines Aufsatzes über die Berichtigung der Thermometer sagt Hansteen: „Man pflegt, wenn man ein Thermometer nach Bessels Methode prüfen will, die dazu erforderlichen Quecksilberdrähte von verschiedener Länge über einer Flamme abzureissen; es giebt aber eine andere noch bequemere Art um dem Quecksilberdraht die verlangte Länge bis zu einer Genauigkeit von $\frac{1}{10}$ Grad zu geben" — Der Darstellung dieser Methode ist der Aufsatz, welcher der Beachtung der Physiker empfohlen zu werden verdient, gewidmet.

Nouveaux Mémoires de l'Açadémie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles, Tome XV, in 4. Bruxelles. 1842. 4 Thlr. Contenant:

Timmermans: mémoires sur les solutions singulières des équations différentielles.

Quetelet: nouveau catalogue des principales apparitions d'étoiles filantes.

A. Observations des phénomènes périodiques.

1. Résumé des observations sur la météorologie, sur le magnétisme, la température de la terre, la floraison des plantes, etc. faites pendant l'année 1841 à l'observatoire royal de Bruxelles, par A. Quetelet. — Observations sur la floraison faites à Bruxelles par M. Robyns, idem par M. le Dr. Gastone.

2. Résumé des observations météorologiques, faites à Louvain pendant l'année 1841, par M. Crahay, professeur. — Observations sur la floraison, faites à Louvain par M. Martens.

3. Résumé des observations météorologiques, faites à Gand pendant l'anné 1841, par M. le professeur Duprez. — Observations sur la floraison, faites à Gand, par M. Donkelaer.

4. Observations sur la floraison, faites à Lièges par M. M. Ch. Mooren A. V. De Ville.

5. Observations zoologiques, faites à Liége par M. Ch. Mooren, et M. le Baron de Selys Longchamps, et à Gand par M. le professeur Cautraine.

B. Observations à des époques déterminées.

1. Observations météorologiques, faites aux époques des équinoxes et des solstices dans 37 des principales stations de l'Europe.

2. Observations magnétiques de l'observatoire royal, faites aux époques déterminées par la société royale de Londres et l'association magnétique de Goettingue.

Digitized by Google

Fig. 1.

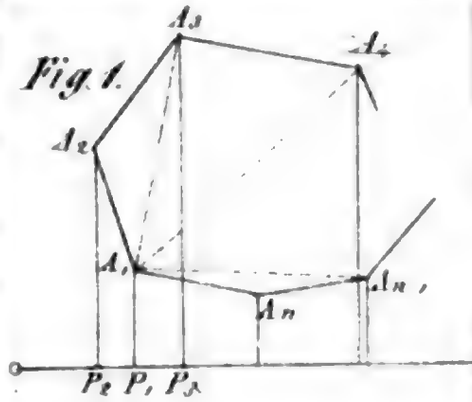


Fig. 4.

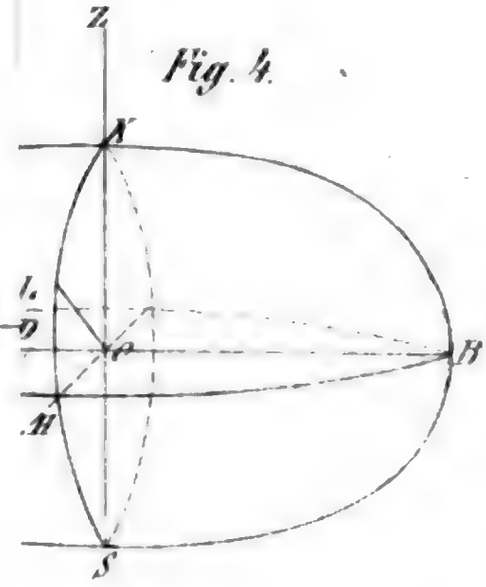


Fig. 5.

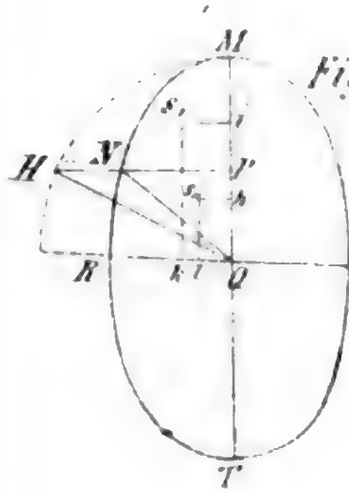


Fig. 10.

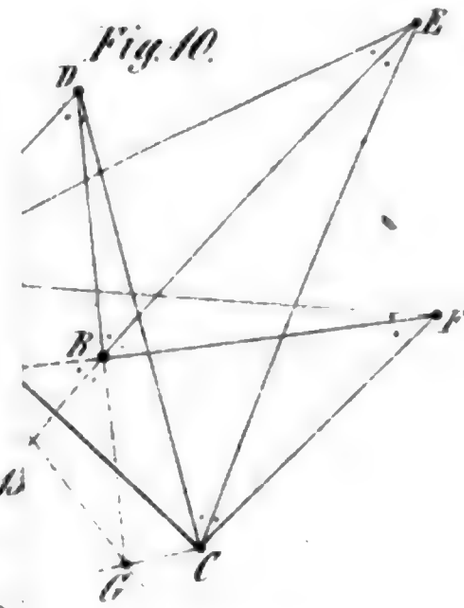


Fig. 13.

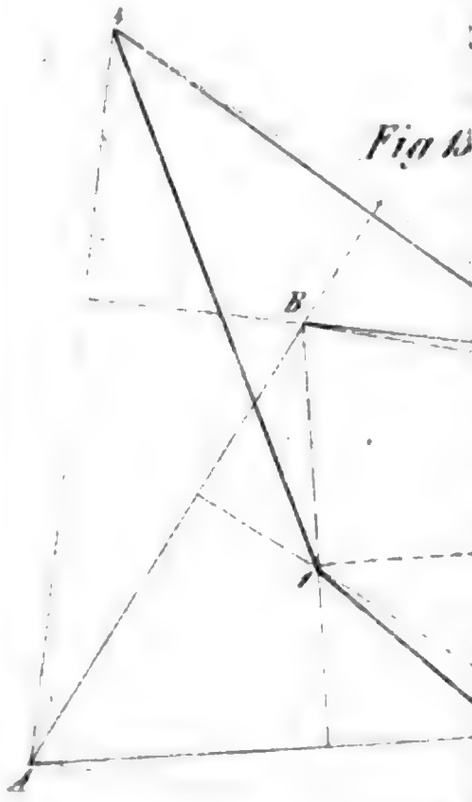
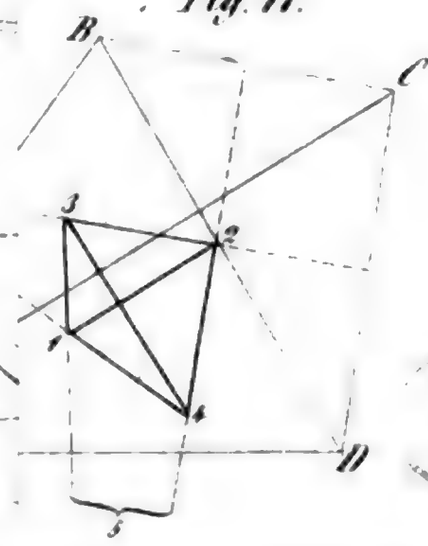


Fig. 11.



Digitized by Google

Fig. 3.

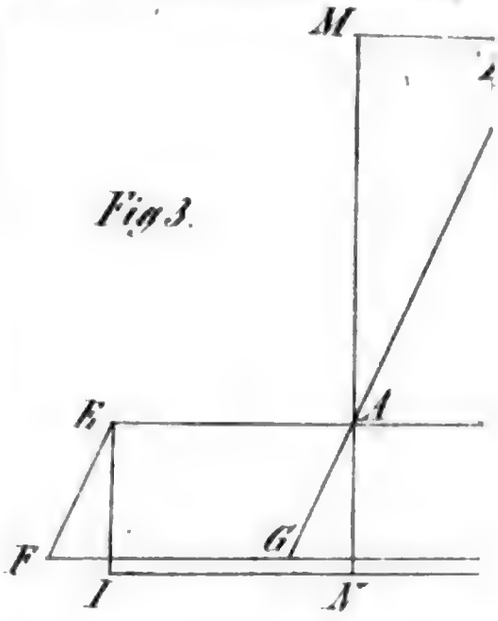


Fig. 2.

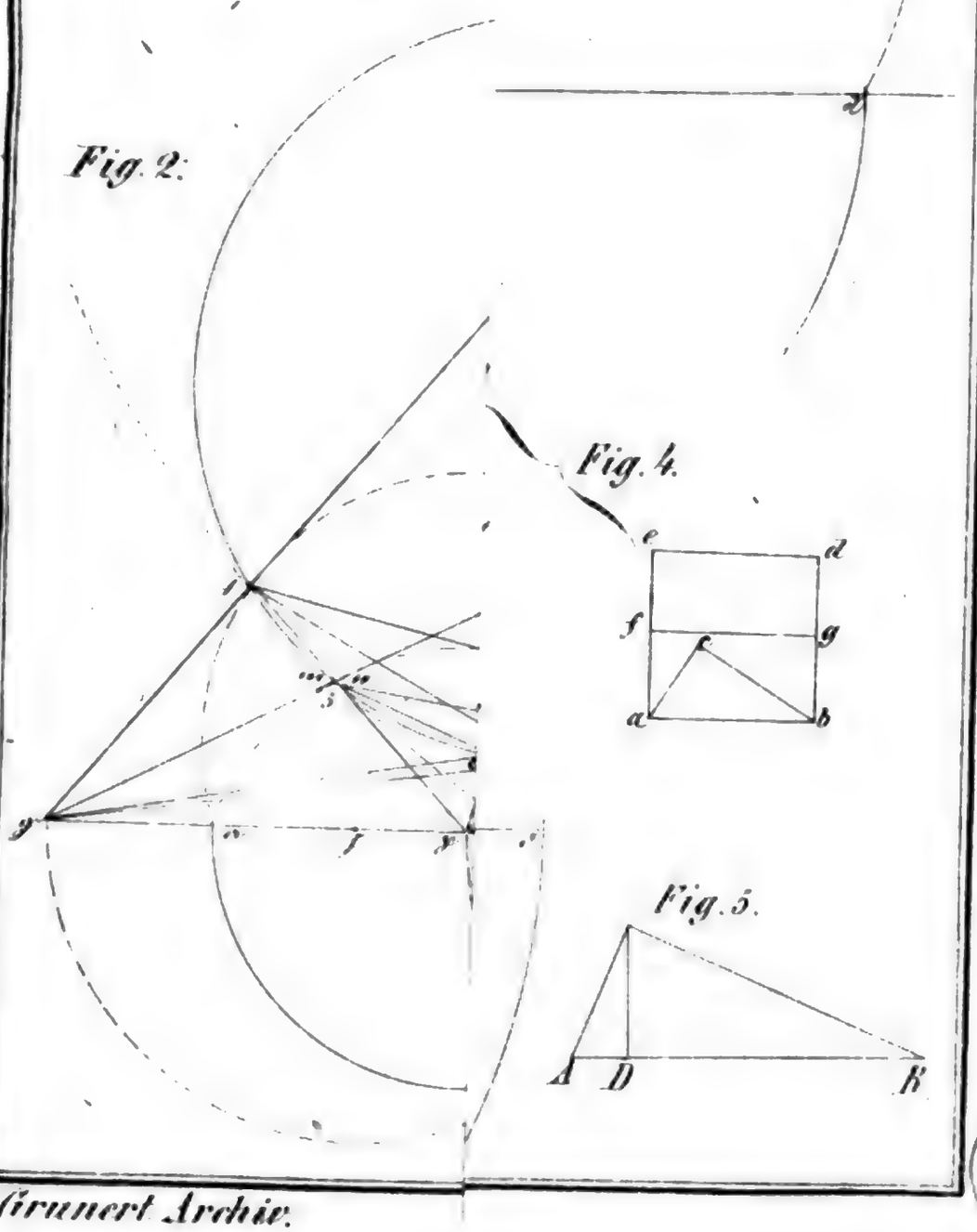


Fig. 4.

Fig. 5.

Grunert Archiv.

UNIV. OF MICH.

Digitized by Google

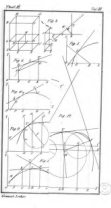


Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 10.
Fig. 9.
Fig. 1
Fig. 12.
H
G
E
F
M
L
D
I
N
C
A
K
B
W
T
V
R
Y
S
O
F
G
D
X
P
Q
Y'
V
v
s
x
w
m
n
r
K
H
L
E

Grunert Archiv.

UNIV OF

Fig. 2.

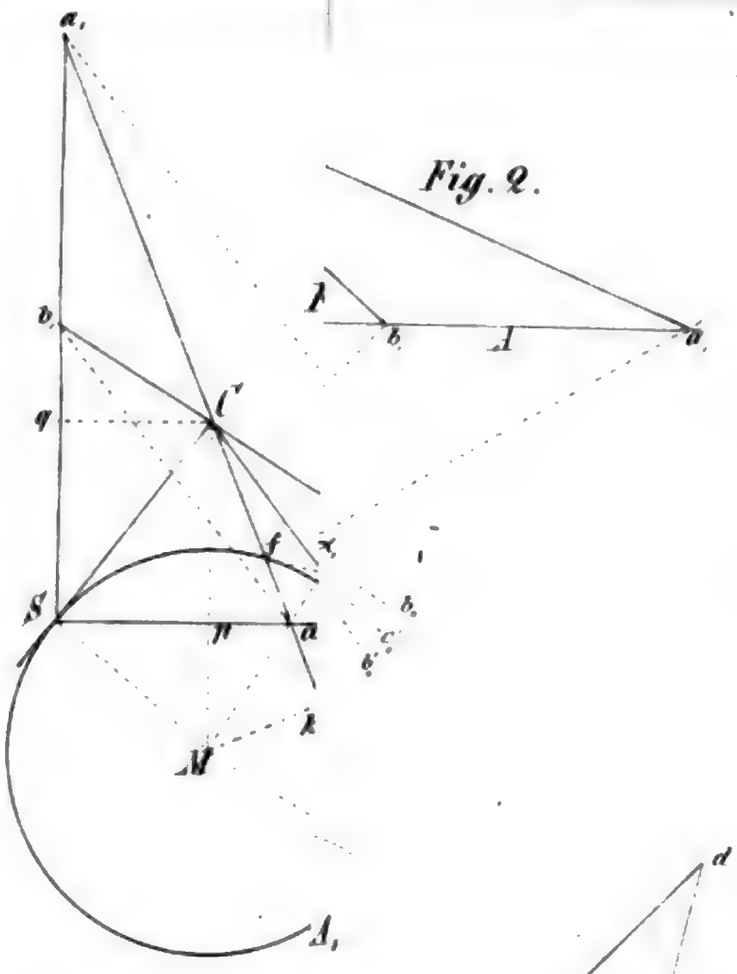


Fig. 3.

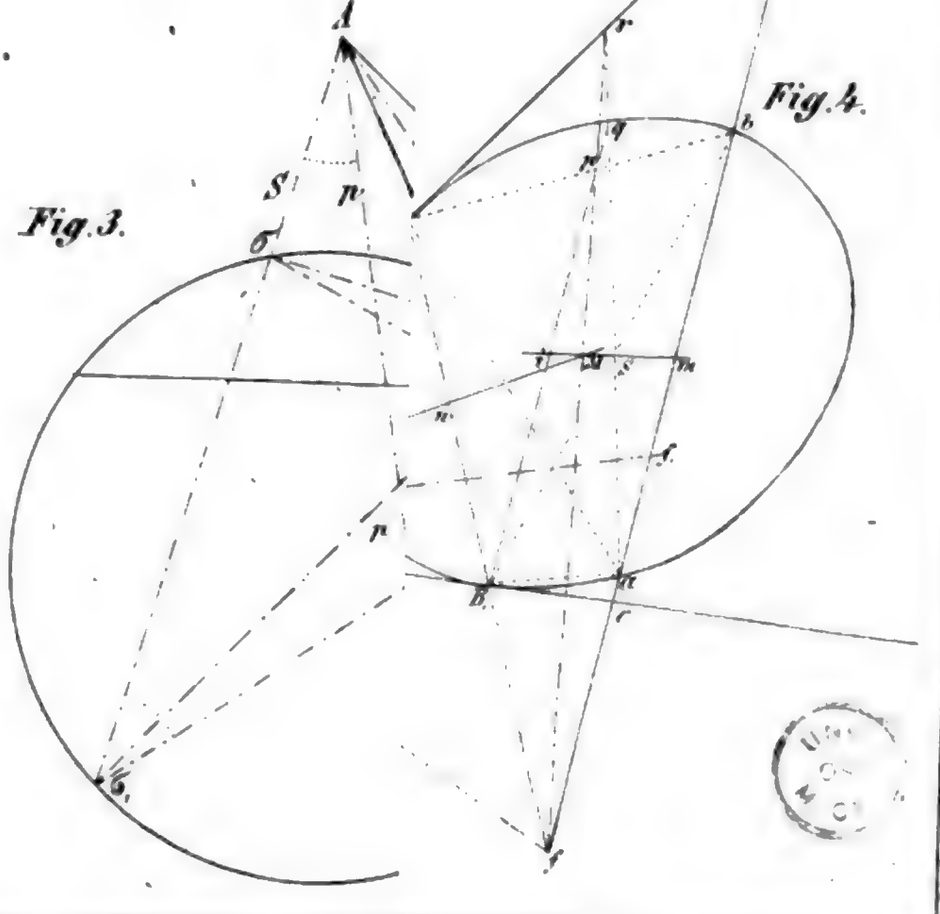


Fig. 4.

Digitized by Google

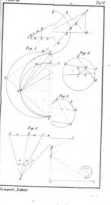


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.
Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 101.
Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 118.
Fig. 119.
Fig. 120.
Fig. 121.
Fig. 122.
Fig. 123.
Fig. 124.
Fig. 125.
Fig. 126.
Fig. 127.
Fig. 128.
Fig. 129.
Fig. 130.
Fig. 131.
Fig. 132.
Fig. 133.
Fig. 134.
Fig. 135.
Fig. 136.
Fig. 137.
Fig. 138.
Fig. 139.
Fig. 140.
Fig. 141.
Fig. 142.
Fig. 143.
Fig. 144.
Fig. 145.
Fig. 146.
Fig. 147.
Fig. 148.
Fig. 149.
Fig. 150.
Fig. 151.
Fig. 152.
Fig. 153.
Fig. 154.
Fig. 155.
Fig. 156.
Fig. 157.
Fig. 158.
Fig. 159.
Fig. 160.
Fig. 161.
Fig. 162.
Fig. 163.
Fig. 164.
Fig. 165.
Fig. 166.
Fig. 167.
Fig. 168.
Fig. 169.
Fig. 170.
Fig. 171.
Fig. 172.
Fig. 173.
Fig. 174.
Fig. 175.
Fig. 176.
Fig. 177.
Fig. 178.
Fig. 179.
Fig. 180.
Fig. 181.
Fig. 182.
Fig. 183.
Fig. 184.
Fig. 185.
Fig. 186.
Fig. 187.
Fig. 188.
Fig. 189.
Fig. 190.
Fig. 191.
Fig. 192.
Fig. 193.
Fig. 194.
Fig. 195.
Fig. 196.
Fig. 197.
Fig. 198.
Fig. 199.
Fig. 200.
Fig. 201.
Fig. 202.
Fig. 203.
Fig. 204.
Fig. 205.
Fig. 206.
Fig. 207.
Fig. 208.
Fig. 209.
Fig. 210.
Fig. 211.
Fig. 212.
Fig. 213.
Fig. 214.
Fig. 215.
Fig. 216.
Fig. 217.
Fig. 218.
Fig. 219.
Fig. 220.
Fig. 221.
Fig. 222.
Fig. 223.
Fig. 224.
Fig. 225.
Fig. 226.
Fig. 227.
Fig. 228.
Fig. 229.
Fig. 230.
Fig. 231.
Fig. 232.
Fig. 233.
Fig. 234.
Fig. 235.
Fig. 236.
Fig. 237.
Fig. 238.
Fig. 239.
Fig. 240.
Fig. 241.
Fig. 242.
Fig. 243.
Fig. 244.
Fig. 245.
Fig. 246.
Fig. 247.
Fig. 248.
Fig. 249.
Fig. 250.
Fig. 251.
Fig. 252.
Fig. 253.
Fig. 254.
Fig. 255.
Fig. 256.
Fig. 257.
Fig. 258.
Fig. 259.
Fig. 260.
Fig. 261.
Fig. 262.
Fig. 263.
Fig. 264.
Fig. 265.
Fig. 266.
Fig. 267.
Fig. 268.
Fig. 269.
Fig. 270.
Fig. 271.
Fig. 272.
Fig. 273.
Fig. 274.
Fig. 275.
Fig. 276.
Fig. 277.
Fig. 278.
Fig. 279.
Fig. 280.
Fig. 281.
Fig. 282.
Fig. 283.
Fig. 284.
Fig. 285.
Fig. 286.
Fig. 287.
Fig. 288.
Fig. 289.
Fig. 290.
Fig. 291.
Fig. 292.
Fig. 293.
Fig. 294.
Fig. 295.
Fig. 296.
Fig. 297.
Fig. 298.
Fig. 299.
Fig. 300.
Fig. 301.
Fig. 302.
Fig. 303.
Fig. 304.
Fig. 305.
Fig. 306.
Fig. 307.
Fig. 308.
Fig. 309.
Fig. 310.
Fig. 311.
Fig. 312.
Fig. 313.
Fig. 314.
Fig. 315.
Fig. 316.
Fig. 317.
Fig. 318.
Fig. 319.
Fig. 320.
Fig. 321.
Fig. 322.
Fig. 323.
Fig. 324.
Fig. 325.
Fig. 326.
Fig. 327.
Fig. 328.
Fig. 329.
Fig. 330.
Fig. 331.
Fig. 332.
Fig. 333.
Fig. 334.
Fig. 335.
Fig. 336.
Fig. 337.
Fig. 338.
Fig. 339.
Fig. 340.
Fig. 341.
Fig. 342.
Fig. 343.
Fig. 344.
Fig. 345.
Fig. 346.
Fig. 347.
Fig. 348.
Fig. 349.
Fig. 350.
Fig. 351.
Fig. 352.
Fig. 353.
Fig. 354.
Fig. 355.
Fig. 356.
Fig. 357.
Fig. 358.
Fig. 359.
Fig. 360.
Fig. 361.
Fig. 362.
Fig. 363.
Fig. 364.
Fig. 365.
Fig. 366.
Fig. 367.
Fig. 368.
Fig. 369.
Fig. 370.
Fig. 371.
Fig. 372.
Fig. 373.
Fig. 374.
Fig. 375.
Fig. 376.
Fig. 377.
Fig. 378.
Fig. 379.
Fig. 380.
Fig. 381.
Fig. 382.
Fig. 383.
Fig. 384.
Fig. 385.
Fig. 386.
Fig. 387.
Fig. 388.
Fig. 389.
Fig. 390.
Fig. 391.
Fig. 392.
Fig. 393.
Fig. 394.
Fig. 395.
Fig. 396.
Fig. 397.
Fig. 398.
Fig. 399.
Fig. 400.
Fig. 401.
Fig. 402.
Fig. 403.
Fig. 404.
Fig. 405.
Fig. 406.
Fig. 407.
Fig. 408.
Fig. 409.
Fig. 410.
Fig. 411.
Fig. 412.
Fig. 413.
Fig. 414.
Fig. 415.
Fig. 416.
Fig. 417.
Fig. 418.
Fig. 419.
Fig. 420.
Fig. 421.
Fig. 422.
Fig. 423.
Fig. 424.
Fig. 425.
Fig. 426.
Fig. 427.
Fig. 428.
Fig. 429.
Fig. 430.
Fig. 431.
Fig. 432.
Fig. 433.
Fig. 434.
Fig. 435.
Fig. 436.
Fig. 437.
Fig. 438.
Fig. 439.
Fig. 440.
Fig. 441.
Fig. 442.
Fig. 443.
Fig. 444.
Fig. 445.
Fig. 446.
Fig. 447.
Fig. 448.
Fig. 449.
Fig. 450.
Fig. 451.
Fig. 452.
Fig. 453.
Fig. 454.
Fig. 455.
Fig. 456.
Fig. 457.
Fig. 458.
Fig. 459.
Fig. 460.
Fig. 461.
Fig. 462.
Fig. 463.
Fig. 464.
Fig. 465.
Fig. 466.
Fig. 467.
Fig. 468.
Fig. 469.
Fig. 470.
Fig. 471.
Fig. 472.
Fig. 473.
Fig. 474.
Fig. 475.
Fig. 476.
Fig. 477.
Fig. 478.
Fig. 479.
Fig. 480.
Fig. 481.
Fig. 482.
Fig. 483.
Fig. 484.
Fig. 485.
Fig. 486.
Fig. 487.
Fig. 488.
Fig. 489.
Fig. 490.
Fig. 491.
Fig. 492.
Fig. 493.
Fig. 494.
Fig. 495.
Fig. 496.
Fig. 497.
Fig. 498.
Fig. 499.
Fig. 500.
Fig. 501.
Fig. 502.
Fig. 503.
Fig. 504.
Fig. 505.
Fig. 506.
Fig. 507.
Fig. 508.
Fig. 509.
Fig. 510.
Fig. 511.
Fig. 512.
Fig. 513.
Fig. 514.
Fig. 515.
Fig. 516.
Fig. 517.
Fig. 518.
Fig. 519.
Fig. 520.
Fig. 521.
Fig. 522.
Fig. 523.
Fig. 524.
Fig. 525.
Fig. 526.
Fig. 527.
Fig. 528.
Fig. 529.
Fig. 530.
Fig. 531.
Fig. 532.
Fig. 533.
Fig. 534.
Fig. 535.
Fig. 536.
Fig. 537.
Fig. 538.
Fig. 539.
Fig. 540.
Fig. 541.
Fig. 542.
Fig. 543.
Fig. 544.
Fig. 545.
Fig. 546.
Fig. 547.
Fig. 548.
Fig. 549.
Fig. 550.
Fig. 551.
Fig. 552.
Fig. 553.
Fig. 554.
Fig. 555.
Fig. 556.
Fig. 557.
Fig. 558.
Fig. 559.
Fig. 560.
Fig. 561.
Fig. 562.
Fig. 563.
Fig. 564.
Fig. 565.
Fig. 566.
Fig. 567.
Fig. 568.
Fig. 569.
Fig. 570.
Fig. 571.
Fig. 572.
Fig. 573.
Fig. 574.
Fig. 575.
Fig. 576.
Fig. 577.
Fig. 578.
Fig. 579.
Fig. 580.
Fig. 581.
Fig. 582.
Fig. 583.
Fig. 584.
Fig. 585.
Fig. 586.
Fig. 587.
Fig. 588.
Fig. 589.
Fig. 590.
Fig. 591.
Fig. 592.
Fig. 593.
Fig. 594.
Fig. 595.
Fig. 596.
Fig. 597.
Fig. 598.
Fig. 599.
Fig. 600.
Fig. 601.
Fig. 602.
Fig. 603.
Fig. 604.
Fig. 605.
Fig. 606.
Fig. 607.
Fig. 608.
Fig. 609.
Fig. 610.
Fig. 611.
Fig. 612.
Fig. 613.
Fig. 614.
Fig. 615.
Fig. 616.
Fig. 617.
Fig. 618.
Fig. 619.
Fig. 620.
Fig. 621.
Fig. 622.
Fig. 623.
Fig. 624.
Fig. 625.
Fig. 626.
Fig. 627.
Fig. 628.
Fig. 629.
Fig. 630.
Fig. 631.
Fig. 632.
Fig. 633.
Fig. 634.
Fig. 635.
Fig. 636.
Fig. 637.
Fig. 638.
Fig. 639.
Fig. 640.
Fig. 641.
Fig. 642.
Fig. 643.
Fig. 644.
Fig. 645.
Fig. 646.
Fig. 647.
Fig. 648.
Fig. 649.
Fig. 650.
Fig. 651.
Fig. 652.
Fig. 653.
Fig. 654.
Fig. 655.
Fig. 656.
Fig. 657.
Fig. 658.
Fig. 659.
Fig. 660.
Fig. 661.
Fig. 662.
Fig. 663.
Fig. 664.
Fig. 665.
Fig. 666.
Fig. 667.
Fig. 668.
Fig. 669.
Fig. 670.
Fig. 671.
Fig. 672.
Fig. 673.
Fig. 674.
Fig. 675.
Fig. 676.
Fig. 677.
Fig. 678.
Fig. 679.
Fig. 680.
Fig. 681.
Fig. 682.
Fig. 683.
Fig. 684.
Fig. 685.
Fig. 686.
Fig. 687.
Fig. 688.
Fig. 689.
Fig. 690.
Fig. 691.
Fig. 692.
Fig. 693.
Fig. 694.
Fig. 695.
Fig. 696.
Fig. 697.
Fig. 698.
Fig. 699.
Fig. 700.
Fig. 701.
Fig. 702.
Fig. 703.
Fig. 704.
Fig. 705.
Fig. 706.
Fig. 707.
Fig. 708.
Fig. 709.
Fig. 710.
Fig. 711.
Fig. 712.
Fig. 713.
Fig. 714.
Fig. 715.
Fig. 716.
Fig. 717.
Fig. 718.
Fig. 719.
Fig. 720.
Fig. 721.
Fig. 722.
Fig. 723.
Fig. 724.
Fig. 725.
Fig. 726.
Fig. 727.
Fig. 728.
Fig. 729.
Fig. 730.
Fig. 731.
Fig. 732.
Fig. 733.
Fig. 734.
Fig. 735.
Fig. 736.
Fig. 737.
Fig. 738.
Fig. 739.
Fig. 740.
Fig. 741.
Fig. 742.
Fig. 743.
Fig. 744.
Fig. 745.
Fig. 746.
Fig. 747.
Fig. 748.
Fig. 749.
Fig. 750.
Fig. 751.
Fig. 752.
Fig. 753.
Fig. 754.
Fig. 755.
Fig. 756.
Fig. 757.
Fig. 758.
Fig. 759.
Fig. 760.
Fig. 761.
Fig. 762.
Fig. 763.
Fig. 764.
Fig. 765.
Fig. 766.
Fig. 767.
Fig. 768.
Fig. 769.
Fig. 770.
Fig. 771.
Fig. 772.
Fig. 773.
Fig. 774.
Fig. 775.
Fig. 776.
Fig. 777.
Fig. 778.
Fig. 779.
Fig. 780.
Fig. 781.
Fig. 782.
Fig. 783.
Fig. 784.
Fig. 785.
Fig. 786.
Fig. 787.
Fig. 788.
Fig. 789.
Fig. 790.
Fig. 791.
Fig. 792.
Fig. 793.
Fig. 794.
Fig. 795.
Fig. 796.
Fig. 797.
Fig. 798.
Fig. 799.
Fig. 800.
Fig. 801.
Fig. 802.
Fig. 803.
Fig. 804.
Fig. 805.
Fig. 806.
Fig. 807.
Fig. 808.
Fig. 809.
Fig. 810.
Fig. 811.
Fig. 812.
Fig. 813.
Fig. 814.
Fig. 815.
Fig. 816.
Fig. 817.
Fig. 818.
Fig. 819.
Fig. 820.
Fig. 821.
Fig. 822.
Fig. 823.
Fig. 824.
Fig. 825.
Fig. 826.
Fig. 827.
Fig. 828.
Fig. 829.
Fig. 830.
Fig. 831.
Fig. 832.
Fig. 833.
Fig. 834.
Fig. 835.
Fig. 836.
Fig. 837.
Fig. 838.
Fig. 839.
Fig. 840.
Fig. 841.
Fig. 842.
Fig. 843.
Fig. 844.
Fig. 845.
Fig. 846.
Fig. 847.
Fig. 848.
Fig. 849.
Fig. 850.
Fig. 851.
Fig. 852.
Fig. 853.
Fig. 854.
Fig. 855.
Fig. 856.
Fig. 857.
Fig. 858.
Fig. 859.
Fig. 860.
Fig. 861.
Fig. 862.
Fig. 863.
Fig. 864.
Fig. 865.
Fig. 866.
Fig. 867.
Fig. 868.
Fig. 869.
Fig. 870.
Fig. 871.
Fig. 872.
Fig. 873.
Fig. 874.
Fig. 875.
Fig. 876.
Fig. 877.
Fig. 878.
Fig. 879.
Fig. 880.
Fig. 881.
Fig. 882.
Fig. 883.
Fig. 884.
Fig. 885.
Fig. 886.
Fig. 887.
Fig. 888.
Fig. 889.
Fig. 890.
Fig. 891.
Fig. 892.
Fig. 893.
Fig. 894.
Fig. 895.
Fig. 896.
Fig. 897.
Fig. 898.
Fig. 899.
Fig. 900.
Fig. 901.
Fig. 902.
Fig. 903.
Fig. 904.
Fig. 905.
Fig. 906.
Fig. 907.
Fig. 908.
Fig. 909.
Fig. 910.
Fig. 911.
Fig. 912.
Fig. 913.
Fig. 914.
Fig. 915.
Fig. 916.
Fig. 917.
Fig. 918.
Fig. 919.
Fig. 920.
Fig. 921.
Fig. 922.
Fig. 923.
Fig. 924.
Fig. 925.
Fig. 926.
Fig. 927.
Fig. 928.
Fig. 929.
Fig. 930.
Fig. 931.
Fig. 932.
Fig. 933.
Fig. 934.
Fig. 935.
Fig. 936.
Fig. 937.
Fig. 938.
Fig. 939.
Fig. 940.
Fig. 941.
Fig. 942.
Fig. 943.
Fig. 944.
Fig. 945.
Fig. 946.
Fig. 947.
Fig. 948.
Fig. 949.
Fig. 950.
Fig. 951.
Fig. 952.
Fig. 953.
Fig. 954.
Fig. 955.
Fig. 956.
Fig. 957.
Fig. 958.
Fig. 959.
Fig. 960.
Fig. 961.
Fig. 962.
Fig. 963.
Fig. 964.
Fig. 965.
Fig. 966.
Fig. 967.
Fig. 968.
Fig. 969.
Fig. 970.
Fig. 971.
Fig. 972.
Fig. 973.
Fig. 974.
Fig. 975.
Fig. 976.
Fig. 977.
Fig. 978.
Fig. 979.
Fig. 980.
Fig. 981.
Fig. 982.
Fig. 983.
Fig. 984.
Fig. 985.
Fig. 986.
Fig. 987.
Fig. 988.
Fig. 989.
Fig. 990.
Fig. 991.
Fig. 992.
Fig. 993.
Fig. 994.
Fig. 995.
Fig. 996.
Fig. 997.
Fig. 998.
Fig. 999.
Fig. 1000.

Digitized by Google

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Vierter Theil.

Mit sieben lithographirten Tafeln.

Greifswald.
Verlag von C. A. Koch.

1844.

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniss des vierten Theils.

Arithmetik.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
III.	Ueber einige durch bestimmte Integrale summirbare Reihen. Von Herrn Dr. O. Schlömilch zu Weimar	I.	23
IV.	Ein Beitrag zur Theorie der Ausmittelung des Kennzeichens, ob eine Variation zweiter Ordnung positiv oder negativ ist, oder weder als positiv noch als negativ gelten kann. Gelegentlich ist dabei ein Beitrag zur Beurtheilung der beiden von Euler und Lagrange gegebenen Methoden der relativen Grössten und Kleinsten. Von Herrn Doctor G. Strauch, Lehrer der Mathematik an der Erziehungsanstalt zu Lenzburg im Kanton Aargau.	I.	39
VI.	Ueber einige bestimmte Integrale, deren Werthe durch doppelte Integration gefunden werden. Von Herrn Doctor O. Schlömilch zu Weimar	I.	71
IX.	Ueber das independente Fortschreitungsgesetz der numerischen Coefficienten in der Entwickelung der höheren Differentiale der Function $y=\sqrt{a^2-b^2x^2}$. Von dem Herrn Doctor Luchterhandt zu Königsberg i. d. N.	I.	87
X.	Beweis der Gleichung $\frac{d^{i-1}.(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dz^{i-1}}=(-1)^{i-1}.1.3.5....(2i-1)\frac{\sin ix}{i}$ für $z=\cos x$. Nach einem Aufsatze des Herrn Liouville frei bearbeitet von dem Herausgeber.	I.	104
XIII.	Ueber die neuesten Erfindungen in der Theorie der bestimmten Integrale. Von dem Herausgeber. Zweite Abhandlung	II.	113
XV.	Beweis der Lehrsätze in Band III. S. 442. Von Herrn A. Göpel zu Berlin	II.	128

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XVII.	Aufgabe. Von Herrn Doctor Anton Vállas zu Wien.	II.	159
XIX.	Einiges über die Eulerischen Integrale der zweiten Art. Von Herrn Doctor O. Schlömilch zu Weimar	II.	167
XXII.	Bestimmung eines Polynomiums durch Integrale seiner partiellen Differentialien, nebst einer Anwendung derselben. Von Herrn L. Mossbrugger, Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau	II.	210
XXIV.	Ueber das Integral $\int \frac{dx}{x}$. Von dem Herrn Professor G. J. Verdam zu Leiden.	II.	221
XXV.	Bemerkungen zu den Aufsätzen XXXI. und XXXII. des Herrn Dr. Schlömilch in Thl. III. S. 269 und S. 278 dieses Archivs. Von Herrn Doctor Barfuss zu Weimar.	III.	225
XXIX.	Auflösung einer algebraischen Aufgabe, und Hinstellung einer anderen. Von Herrn A. Göpel zu Berlin	III.	244
XXXIII.	Ueber die Zerlegung der bestimmten Integrale in andere von kleineren Integrationsintervallen. Von Herrn Doctor O. Schlömilch zu Weimar . . .	III.	316
XXXIX.	I. Bemerkungen zu dem Aufsatze auf Seite 57 im ersten Theile des Archivs von Herrn Professor Dr. Wilhem Matzka zu Tarnow in Galizien .	IV.	355
XXXIX.	II. Feststellung und Würdigung des in dem Archive, Theil I. S. 204, über eine Stelle in Cauchy's Begründung der Differentialrechnung ausgesprochenen Tadels. Von Demselben	IV.	357
XL.	Ueber die höheren Differentialquotienten einiger Functionen. Von Herrn Doctor O. Schlömilch zu Weimar.	IV.	364
XLIV.	Ueber die Auflösung der cubischen Gleichungen. Von dem Herrn Professor C. A. Bretschneider zu Gotha	IV.	410
XLVI.	Entwickelung einer sehr brauchbaren Reihe. Von Hrn. Doctor O. Schlömilch zu Weimar	IV.	431
XLVII.	Entwickelung der höheren Integrale von $\log x.dx$ nebst einer Anwendung auf die Summirung einer Reihe. Von dem Herrn Schulamts-Candidaten F. Arndt zu Greifswald	IV.	436

Geometrie.

II.	Eine einfachere, auf einer neuen Analyse beruhende Auflösung der sectio aurea, nebst einer kritischen Beleuchtung der gewöhnlichen Auflösung dieses		

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Problems und der Betrachtung ihres pädagogischen Werthes. Von dem Herrn Professor J. Helmes zu Hildesheim	I.	15
VIII.	Geometrische Aufgabe. Von dem Herausgeber.	I.	82
IX.	Ueber zwei Eigenschaften der Kegelfläche zweiten Grades. Von Herrn Doctor Luchterhandt zu Königsberg i. d. N.	I.	99
XII.	Einfacher geometrischer Beweis des Satzes, dass die drei Hülfslinien, welche bei dem Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes gezogen werden, sich in einem Punkte schneiden. Von dem Herausgeber	I.	112
XVI.	Einige Untersuchungen über die Krümmung der Curven, insbesondere über die Evoluten gegebener Curven; und einige Bemerkungen über die besondern Punkte der Curven. Von Herrn Doctor J. Ph. Wolfers, astronomischen Rechner an der Königlichen Sternwarte zu Berlin	II.	135
XXI.	Drei Eigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung und ihrer conjugirten Halbmesser. Von Herrn A. Göpel zu Berlin	II.	202
XXIV.	Ueber die Aufgabe von der Trisection des Winkels. Von Herrn Divisionsprediger Otto zu Stargard.	II.	223
XXVII.	Ueber Theilung und Verwandlung einiger ebenen Figuren. Von Herrn A. Göpel zu Berlin.	III.	237
XXX.	Theorie der involutorischen Gebilde nebst Anwendungen auf die Kegelschnitte. Von Herrn Fr. Seydewitz, Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt	III.	246
XXXI.	Ueber die Transformation der Figuren in andere derselben Gattung. Von Herrn Professor C. T. Anger zu Danzig	III.	281
XXXII.	In integrationem aequationis Derivatarum partialium superficiei, cujus in puncto unoquoque principales ambo radii curvedinis aequales sunt signoque contrario. Auct. Dr. E. G. Björling, ad Acad. Upsaliens. Docens matheseos.	III.	290
XXXIV.	Geometrischer Lehrsatz. Von Herrn L. Mossbrugger, Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau	III.	330
XXXVII.	Mittheilungen über die Construction von Tangenten, Krümmungshalbmessern und Normalen an Curven, deren Natur völlig unbekannt ist. Rectification und Quadratur der Kreisevolvente und der entwickelbaren Schraubenfläche. Von Herrn Wilhelm Pressel, Ingenieur-Eleven auf der polytechnischen Schule zu Stuttgart.	IV.	337

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung		Heft.	Seite.
XXXIX.	IV. Neuer Beweis der Gleichheit der Parallelepipeden. Von Herrn Professor Doctor Wilhelm Matzka zu Tarnow in Galizien	IV.	362
XLI.	Aufgaben über Maxima und Minima. Von Herrn L. Mossbrugger, Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.....	IV.	373
XLV.	Ueber eine wesentliche Verallgemeinerung des Problems von den, den Kegelschnitten ein- oder umschriebenen Polygonen. Von Herrn Fr. Seydewitz, Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt	IV.	421
XLIX.	Eine algebraisch-geometrische Aufgabe. Von Hrn. Albrecht von Gräfe zu Berlin	IV.	443
XLIX.	Ueber das sphärische Viereck. Von Herrn Professor Dr. Sohncke zu Halle	IV.	447

Goniometrie und Trigonometrie.

XXVI.	Goniometrischer Zirkel. Von dem Herrn Oberlehrer Dr. Brehmer am Pädagogium zu Putbus auf der Insel Rügen	III.	236
XLVIII.	Entwickelung der Functionen $\frac{\cos nx}{\cos x^n}$ und $\frac{\sin nx}{\cos x^n}$ in Reihen, die nach den Potenzen von tang x aufsteigen, mit Hülfe des Maclaurinschen Theorems. Von dem Herrn Schulamts-Candidaten Fr. Arndt zu Greifswald	IV.	441

Geodäsie.

V.	Ueber die Messkette und deren Berichtigung. Von dem Herrn Regierungs-Conducteur G. Berlin zu Greifswald.....	I.	68
XIV.	Ueber ein Spiegelinstrument zum Einrichten gerader Linien auf dem Felde. Von Demselben ..	II.	126
XXXVIII.	Einige Bemerkungen über fehlerzeigende Dreiecke. Von dem Herausgeber	IV.	348
XLII.	Ueber eine neue geodätische Aufgabe. Von dem Herausgeber.....	IV.	385
XLIII.	Geodätische Aufgabe. Von Herrn L. Mossbrugger, Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau	IV.	408

Statik und Mechanik.

VII.	Elementare Bestimmung des Schwerpunkts des		

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	sphärischen Dreiecks. Nach zwei Aufsätzen der Herren Giulio und Besge in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées publié par Liouville frei bearbeitet von dem Herausgeber.	I.	75
XXXVI.	Auszug aus einem Briefe des Herrn Professor Steichen an der Ecole militaire Belgique zu Brüssel an den Herausgeber	III.	333
XXXIX.	III. Bemerkungen zur Bestimmung des Schwerpunktes im sphärischen Dreiecke auf S. 6 bis 9 im dritten Theile des Archivs. Von Herrn Professor Dr. Wilhelm Matzka zu Tarnow in Galizien	IV.	359
	(M. s. auch Physik.)		

Optik.

XX.	Ueber das Fundamentalproblem der Katoptrik und Dioptrik. Von dem Herausgeber	II.	173
	(M. s. auch Physik.)		

Physik.

I.	Ueber gradlinige circulare und elliptische Polarisation des Lichtes. Von Herrn Flesch, Lehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Trier.	I.	1
XVIII.	Sammlung physikalischer Aufgaben nebst ihrer Auflösung. Zum Gebrauch in Schulen und beim Selbstunterricht. Von Dr. Friedrich Kries, Herzogl. Sachsen-Coburg-Gothaischen Hofrath und Professor, mehrerer gelehrten Gesellschaften Mitgliede. Mit zwei Kupfertafeln. Jena, Friedrich Frommann. 1843. 8. 15 Sgr. Von Herrn Professor L. Kunze zu Weimar.....	II.	160
XXVIII.	Ueber die Berechnung des Elasticitäts-Modulus aus directen Dehnungsversuchen. Von dem Herrn Fabriken-Commissionsrath A. F. W. Brix zu Berlin.	III.	239

Uebungsaufgaben für Schüler.

XI.	Von dem Herausgeber.	I.	109
XI.	Von dem Herausgeber.....	I.	111
XXIII.	Von dem Herrn Doctor A. Wiegand, Lehrer der Mathematik an der Realschule zu Halle	II.	220
XXXV.	Von dem Herrn Professor Pross an der polytechnischen Schule zu Stuttgart.....	III.	332
XXXV.	Lehrsatz von den Binomialcoefficienten von dem Herrn Doctor O. Schlömilch zu Weimar ...	III.	333

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Literarische Berichte *).		
XIII.		I.	193
XIV.		II.	209
XV.		III.	225
XVI.		IV.	241

*) Ich bemerke hierbei, dass die literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

Digitized by Google

I.

Ueber gradlinige, circulare und elliptische Polarisation des Lichtes.

Von

Herrn Flesch

Lehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Trier.

I.

Der Lichtäther wird im Zustande des Gleichgewichtes gehalten hauptsächlich durch abstossende Kräfte, welche die einzelnen Theilchen auf einander ausüben, theils aber auch durch eine besondere Einwirkung, welche er von Seiten der Moleküle der ponderabilen Materie erleidet. Im leeren Raume muss derselbe also gleichförmig verbreitet sein, überall gleiche Dichtigkeit und nach allen Richtungen dieselbe Elasticität haben. In einem mit wägbarer Materie erfüllten Raume dagegen kann seine Dichtigkeit von jener verschieden sein und seine Elasticität sich mit der Richtung ändern. Letzteres findet jedoch nur bei denjenigen crystallisirten Substanzen Statt, deren primitive Form kein reguläres Polyeder ist. Diesen Fall schliessen wir von unserer gegenwärtigen Betrachtung aus.

II.

Ein Aethertheilchen sei um eine im Verhältniss zur Entfernung der einzelnen Theilchen von einander sehr kleine Grösse ζ aus der Lage seines Gleichgewichtes gebracht: so wird die Gesammtwirkung der benachbarten Theilchen auf dasselbe eine abstossende Kraft sein, deren Richtung durch die Gleichgewichtslage jenes Theilchens geht und deren Intensität, da ζ sehr klein ist, der Grösse ζ selbst proportional gesetzt werden darf. Ist also x der Abstand des Theilchens von der ursprünglichen Lage nach der Zeit t, so ist

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -ex \quad (1)$$

Digitized by Google

die Differentialgleichung der Bewegung, wo e die Grösse der abstossenden Kraft in der Einheit der Entfernung ausdrückt und offenbar proportional der Elasticität des Fluidums ist. Aus dieser Gleichung ergibt sich folgendes Integral (s. Traité élément. de calcul différ. et intégral par Lacroix, 4. édition 316):

$$x = a \cos (t\sqrt{e} + c), \quad (2)$$

welches die Gesetze der Bewegung des Theilchens enthält. Setzt man zur Bestimmung der willkührlichen Constanten in dieser Gleichung

$$x = a \text{ für } t = 0,$$

so kommt

$$c = 0$$

folglich

$$x = a \cos t\sqrt{e} \quad (3)$$

wo a die Oscillations-Amplitude des Theilchens bedeutet. Die Schwingungsdauer τ ist offenbar bestimmt durch die Relation

$$\tau\sqrt{e} = 2\pi \quad (4)$$

folglich ist

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos 2\pi \cdot \frac{t}{\tau} \\ \frac{dx}{dt} = v &= a \sin 2\pi \cdot \frac{t}{\tau} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

wenn man der Kürze halber durch $\pm\frac{2\pi}{\tau}a = a$, ohne Unterschied des Zeichens, die grösste Oscillationsgeschwindigkeit — Vibrations-Intensität — des Theilchens bezeichnet. Nimmt man die Intensität der abstossenden Kraft in der Einheit der Entfernung als Einheit an, so ist

$$e = 1$$

und folglich (4)

$$\sqrt{e} = \frac{2\pi}{\tau} = 1$$

mithin

$$a = a$$

und obige Gleichungen (5) gehen unter dieser Voraussetzung über in folgende:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos 2\pi \cdot \frac{t}{\tau} \\ v &= a \sin 2\pi \cdot \frac{t}{\tau} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Digitized by Google

Da τ die Dauer einer Oscillation bedeutet, so ist also $\frac{t}{\tau}$ die Anzahl der Schwingungen, welche das Aethertheilchen während der Zeit seiner Bewegung gemacht hat, und man sieht also, wie durch diese Anzahl und die Schwingungsweite des Theilchens seine Geschwindigkeit und Entfernung von der ursprünglichen Gleichgewichtslage bedingt sind. Es sei nun auf demselben Strahle homogenen Lichtes E die Entfernung eines zweiten Aethertheilchens von jenem und l die entsprechende Länge einer Aetherwelle, so ist

$$\frac{E}{l} = n$$

die Anzahl der Wellen zwischen beiden Theilchen. Da nun nach der Zeit

$$t = \tau,\ t = 2\tau,\ t = 3\tau \ldots . t = n\tau$$

die Bewegung erst in der Entfernung vom ersten Theilchen

$$E = l,\ E = 2l,\ E = 3l \ldots \ldots E = nl$$

anlangt: so hat das erste Theilchen also schon n Schwingungen vollbracht, wenn jenes andere seine Bewegung erst beginnt; folglich ist die Anzahl der Oscillationen dieses letzteren nach der Zeit t offenbar

$$\frac{t}{\tau} - n = \frac{t}{\tau} - \frac{E}{l},$$

und bezeichnet α die Ausschlagsweite desselben Theilchens, so sind also

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{E}{l}\right) \\ v &= \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{E}{l}\right) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

die Gleichungen seiner Bewegung. Ist

$$E = nl + \varphi$$

wo n eine ganze Zahl und φ irgend einen Theil der Aetherwelle bezeichnet und mithin

$$\varphi > 0 < l$$

ist, so können obige Gleichungen (7) auch unter die Form

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi}{l}\right) \\ v &= \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi}{l}\right) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

gebracht werden, da eine Verminderung des ganzen Bogens um $2n\pi$ weder dessen Cosinus noch Sinus ändert. Jener Theil φ der Aetherwelle heisst die Phase des vibrirenden Theilchens.

Digitized by Google

Aus den Gleichungen (6) und (8) folgt

$$x^2 + v^2 = a^2 \quad (9).$$

Durchläuft also während der Schwingungsdauer eines Aethertheilchens ein Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit die Peripherie eines Kreises, dessen Radius gleich ist der Schwingungsweite jenes Theilchens: so bezeichnen die rechtwinkligen Coordinaten dieses Punktes die gleichzeitige Geschwindigkeit und Entfernung des Aethertheilchens von der ursprünglichen Lage seines Gleichgewichtes.

Die Vibrationen des Lichtes sind transversale, d. h. sie erfolgen senkrecht zur Fortpflanzungs-Richtung, oder, was dasselbe heisst, senkrecht zum Lichtstrahl, liegen also in einer auf letzterem normalen Ebene. Ein Strahl, dessen Aethertheilchen alle nach derselben constanten Richtung oscilliren, heisst geradlinig polarisirt. Die Gleichungen (8) enthalten die Gesetze der Bewegung seiner Theilchen. Zwei zusammenfallende Strahlen sind senkrecht zu einander polarisirt, wenn ihre Schwingungsrichtungen rechtwinklig gegen einander sind. In Betreff der linearen Polarisation erlauben wir uns auf Aufsatz L. im 1. Theile des Archiv's zu verweisen.

III.

Unterliegt dasselbe Aethertheilchen der Einwirkung eines zweiten Vibrationssystemes von gleicher Schwingungsdauer τ, gleicher Wellenlänge l, aber verschiedener Phase φ_1 und verschiedener Schwingungsweite a_1, oder, was unserer Voraussetzung nach dasselbe heisst, verschiedener Intensität a_1^2, und bezeichnen v_1 und y die Geschwindigkeit des Theilchens und dessen Entfernung von der ursprünglichen Lage seines Gleichgewichtes nach der Zeit t: so enthalten die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y &= a_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi_1}{l}\right) \\ v_1 &= a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi_1}{l}\right) \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

die entsprechenden Gesetze der Bewegung. In Folge der Einwirkung eines jeden dieser Vibrationssysteme allein würde die Bewegung des Theilchens geradlinig und durch obige Gleichungen (8) oder (10) bestimmt sein. Wirken aber beide Systeme gleichzeitig auf das Theilchen und sind z. B. ihre Vibrationsrichtungen zu einander senkrecht, so ist die Bahn des Theilchens eine ebene Curve, worin

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi}{l}\right) \\ y &= a_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi_1}{l}\right) \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

die gleichzeitigen rechtwinkligen Coordinaten des Aethertheilchens ausdrücken. Eliminirt man die Zeit t aus diesen Gleichungen, so

Digitized by Google

findet man die Gleichung der Bahn selbst. Man erhält nämlich zunächst

$$\frac{x}{a} = \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi}{l}\right)$$

$$\frac{y}{a_1} = \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi_1}{l}\right)$$

folglich

$$2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi}{l}\right) = \text{arc } (\cos = \frac{x}{a})$$

$$2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi_1}{l}\right) = \text{arc } (\cos = \frac{y}{a_1})$$

und durch Subtraction

$$2\pi \cdot \frac{\varphi_1 - \varphi}{l} = \text{arc } (\cos = \frac{x}{a}) - \text{arc } (\cos = \frac{y}{a_1})$$

oder wenn man auf jeder Seite die Cosinus nimmt

$$\cos 2\pi \cdot \frac{\varphi_1 - \varphi}{l} = \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{a_1} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{a_1^2}}$$

und hieraus nach einigen Reductionen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a_1^2} - 2\,\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{a_1} \cos 2\pi \cdot \frac{\varphi_1 - \varphi}{l} = \sin^2 2\pi \,\frac{\varphi_1 - \varphi}{l} \quad (12).$$

Das Aethertheilchen beschreibt also im Allgemeinen eine Ellipse, welche unter gewissen Bedingungen in einen Kreis übergehen kann. Pflanzen sich also zwei Strahlen homogenen Lichtes, welche von einer Lichtquelle ausgehen und senkrecht zu einander polarisirt sind, nach derselben Richtung fort: so ist jedes Aethertheilchen dieser beiden zusammenfallenden Strahlen der gleichzeitigen Einwirkung zweier zu einander orthogonalen Vibrationssysteme unterworfen, deren Gleichungen (8) und (10) sein mögen, und folglich hört die Bahn des Theilchens auf eine grade Linie zu sein und geht im Allgemeinen in eine Ellipse über, welche während der Schwingungsdauer τ von dem Theilchen durchlaufen wird. Der Lichtstrahl geht durch die ursprüngliche Gleichgewichtslage, den Mittelpunkt der Ellipse und steht normal auf der Ebene derselben. Ein solcher Strahl, dessen Aethertheilchen sich in einer Ellipse oder einem Kreise bewegen, heisst elliptisch oder kreisförmig polarisirt und ist im Allgemeinen also identisch mit einem Systeme zweier gradlinig und rechtwinklig zu einander polarisirten Strahlen von gemeinschaftlicher Fortpflanzungsrichtung, aber verschiedenen Intensitäten und Phasen.

IV.

Die Axen der von dem Aethertheilchen beschriebenen elliptischen Bahn (12) fallen mit der Richtung jener auf das Theilchen gleichzeitig einwirkenden orthogonalen Vibrationssysteme (8) und

Digitized by Google

(10) im Allgemeinen nicht zusammen. Bezeichnet man nämlich durch γ den Winkel, den die grosse Axe der Ellipse mit der Abscissenaxe der Bahn bildet, und durch x, y_1 die Coordinaten derselben Curve bezogen auf ihre Axen: so hat man zur Umformung der Gleichung (12) bekanntlich (s. Biot Géométrie analytique 8. édit. 93) die Beziehungen

$$x = x_1 \cos\gamma - y_1 \sin\gamma$$
$$y = x_1 \sin\gamma + y_1 \cos\gamma$$

Substituirt man diese Werthe in obige Gleichung (12) und lässt darauf die Accente weg, so nimmt dieselbe folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} &x^2(\alpha_1^2 \cos^2\gamma + \alpha^2 \sin^2\gamma - 2\alpha\alpha_1 \sin\gamma \cos\gamma \cos A) \\ &+ y^2(\alpha_1^2 \sin^2\gamma + \alpha^2 \cos^2\gamma + 2\alpha\alpha_1 \sin\gamma \cos\gamma \cos A) \\ &+ xy\{2\sin\gamma \cos\gamma (\alpha^2 - \alpha_1^2) - 2\alpha\alpha_1 \cos A(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma)\} \\ &= \alpha^2\alpha_1^2 \sin^2 A \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

wo der Kürze halber

$$2\pi \cdot \frac{\varphi_1 - \varphi}{l} = A$$

gesetzt ist. Soll nun diese Gleichung die Ellipse (12) bezogen auf ihre Axen darstellen, so muss

$$2\sin\gamma \cos\gamma (\alpha^2 - \alpha_1^2) - 2\alpha\alpha_1 \cos A(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma) = 0$$

oder

$$\sin 2\gamma(\alpha^2 - \alpha_1^2) - 2\alpha\alpha_1 \cos A \cdot \cos 2\gamma = 0$$

sein, woraus

$$\operatorname{tang} 2\gamma = \frac{2\alpha\alpha_1}{\alpha^2 - \alpha_1^2} \cdot \cos 2\pi \cdot \frac{\varphi_1 - \varphi}{l}$$

oder, wenn man

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \operatorname{tang}\beta$$

setzt,

$$\operatorname{tang} 2\gamma = \operatorname{tang} 2\beta \cdot \cos A. \quad (14)$$

Vernachlässigt man die kleinen Aenderungen der Ausschlagsweite bei verschiedenen Aethertheilchen desselben Strahles, so nehmen also, wenn man von einem Theilchen zu einem benachbarten übergeht, nur φ und φ_1 um denselben Theil der Wellenlänge zu oder ab; folglich bleibt ihr Unterschied, also auch der Winkel γ derselbe. Hieraus schliessen wir folgenden Satz:

Die Aethertheilchen eines elliptisch polarisirten Stahles beschreiben congruente Ellipsen mit parallelen Axen.

Bei gleichem Phasen-Unterschiede nähert sich im Allgemeinen der Winkel γ um so mehr $\frac{\pi}{4}$, je weniger die Amplituden der

Digitized by Google

Schwingungen in den beiden Systemen von einander verschieden sind.

Es sei

$$\mu y^2 + 2\nu xy + \varrho x^2 = 1$$

auf rechtwinklige Coordinaten bezogen die Gleichung einer Ellipse, so erhält man zur Bestimmung der reciproken Werthe P der halben Axen der Curve die Gleichung (s. Analytisch-geometrische Entwicklungen von Plücker. 1828. Vol. I. No. 251)

$$P^4 - (\mu + \varrho)\ P^2 + (\mu\varrho - \nu^2) = 0$$

Wendet man diese Bedingungsgleichung an zur Bestimmung der Axen der Ellipse (12), so ist

$$\mu = \frac{1}{\alpha_1^2 \sin^2 A},\ \varrho = \frac{1}{\alpha^2 \sin^2 A},\ \nu = -\frac{\cos A}{\alpha\alpha_1 \sin^2 A}$$

zu setzen, und man hat mithin

$$P^4 - \left(\frac{\alpha^2 + \alpha_1^2}{\alpha^2\alpha_1^2 \sin^2 A}\right) P^2 + \frac{1}{\alpha^2\alpha_1^2 \sin^2 A} = 0$$

folglich

$$P^2 = \frac{\alpha^2 + \alpha_1^2}{2\alpha^2\alpha_1^2 \sin^2 A} \pm \frac{\sqrt{(\alpha^2 + \alpha_1^2)^2 - 4\alpha^2\alpha_1^2 \sin^2 A}}{2\alpha^2\alpha_1^2 \sin^2 A} \quad (15)$$

also

$$P^2 + P_1^2 = \frac{\alpha^2 + \alpha_1^2}{\alpha^2\alpha_1^2 \sin^2 A}$$

$$P^2 - P_1^2 = \frac{\sqrt{(\alpha^2 + \alpha_1^2)^2 - 4\alpha^2\alpha_1^2 \sin^2 A}}{\alpha^2\alpha_1^2 \sin^2 A}.$$

Die Gleichung (15) bestimmt die reciproken Werthe der halben Axen der Ellipse; die halben Axen selbst Q und Q_1 sind also gegeben durch die Gleichung

$$Q^2 = \frac{2\alpha^2\alpha_1^2 \sin^2 A}{\alpha^2 + \alpha_1^2 \mp \sqrt{(\alpha^2 + \alpha_1^2)^2 - 4\alpha^2\alpha_1^2 \sin^2 A}} \quad (16)$$

folglich ist das Produkt der halben Axen der Ellipse

$$QQ_1 = \alpha\alpha_1 \sin A = \alpha\alpha_1 \sin 2\pi \cdot \frac{\varphi_1 - \varphi}{l} \quad (17).$$

V.

Setzt man der Kürze halber in den Gleichungen (8) und (10) der beiden orthogonalen Vibrationssysteme

$$\left.\begin{aligned} 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi}{l}\right) &= B,\ 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi_1}{l}\right) = B_1 \\ \text{also} \\ B - B_1 &= 2\pi \cdot \frac{\varphi_1 - \varphi}{l} = A \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Digitized by Google

so vereinfachen sich dieselben folgendergestalt:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos B, \quad y = a_1 \cos B_1 \\ v &= a \sin B, \quad v_1 = a_1 \sin B_1 \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Mithin ist

$$\left.\begin{aligned} x^2 + v^2 &= a^2 \\ y^2 + v_1^2 &= a_1^2 \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Ist ferner ds das Differential des Bogens der von dem Aethertheilchen beschriebenen Curve und V die Tangentialgeschwindigkeit des Theilchens im Punkte xy seiner Bahn, so ist (s. Poisson Mécanique, édition 2. 145)

$$\frac{ds}{dt} = V$$

und

$$dx^2 + dy^2 = ds^2$$

also

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2}$$

oder

$$v^2 + v_1^2 = V^2. \quad (21)$$

Aus (19) ergibt sich durch Differentiation

$$dx = -a \sin B \,.\, dB = -v \,.\, dB$$
$$dy = -a_1 \sin B_1 \,.\, dB_1 = -v_1 \,.\, dB_1$$

und da während derselben Zeit die Aenderung der Phase des Aethertheilchens bei beiden Strahlen dieselbe ist, folglich

$$d\varphi = d\varphi_1$$

so ist also auch

$$dB = dB_1$$

und mithin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 \sin B_1}{a \sin B} = \frac{v_1}{v} = \text{tang } \delta \quad (22)$$

wo δ den Winkel bezeichnet, den die Tangente im Punkte xy an die Curve (12) mit der Abscissenaxe bildet. Sind ferner ε und η die Winkel, welche mit derselben Axe respective die Normale in demselben Punkte xy und der Radius Vector vom Centrum der Ellipse nach diesem Punkte machen: so ist (s. Biot Géométrie analytique, édit. 8. 50)

$$\left.\begin{aligned} \text{tang } \varepsilon &= -\frac{a \sin B}{a_1 \sin B_1} = -\frac{v}{v_1} \\ \text{tang } \eta &= \frac{y}{x} = \frac{a_1 \cos B_1}{a \cos B} \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Digitized by Google

folglich ist der Winkel ϑ, den die beiden letzteren Linien mit einander bilden, gegeben durch den Ausdruck (Biot Géom. anal. 50)

$$\text{tang } \vartheta = \frac{\text{tang } \varepsilon - \text{tang } \eta}{1 + \text{tang } \varepsilon \,.\, \text{tang } \eta} = -\frac{vx + v_1 y}{v_1 x - vy} = \frac{vx + v_1 y}{vy - v_1 x} \quad (24).$$

Aus den Gleichungen (20) und (22) erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_1}{v} = \frac{\sqrt{a_1^2 - y^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

und hieraus durch Differentiation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{xv_1 - yv}{v^2} \quad (25).$$

Der Krümmungshalbmesser ϱ in irgend einem Punkte einer Curve ist gegeben durch den Ausdruck (Lacroix calcul diff. et intégral 4. édit. 76)

$$\varrho = \frac{\{1 + (\frac{dy}{dx})^2\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Substituirt man hierin für die beiden Differential-Coeffizienten ihre Werthe aus (22) und (25), so kommt

$$\varrho = \frac{(v^2 + v_1^2)^{\frac{3}{2}}}{xv_1 - yv} = \frac{V^3}{xv_1 - yv} \quad (26).$$

Die Centrifugalkraft F des Theilchens in demselben Punkte seiner Bahn ist bestimmt durch die Gleichung (s. Poisson Mécanique 169)

$$F = \frac{V^2}{\varrho} = \frac{xv_1 - yv}{V} \quad (27)$$

wenn man für ϱ seinen Werth aus der vorhergehenden Gleichung subsituirt. Aus (24) folgt

$$\text{tang } \vartheta = \frac{vx + v_1 y}{vy - v_1 x} = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \vartheta}}{\cos \vartheta}$$

mihin

$$(vx + v_1 y)^2 \cos^2 \vartheta = (vy - v_1 x)^2 \,(1 - \cos^2 \vartheta)$$
$$= (vy - v_1 x)^2 - (vy - v_1 x)^2 \cos^2 \vartheta,$$
$$\{(vx + v_1 y)^2 + (vy - v_1 x)^2\} \cos^2 \vartheta = (vy - v_1 x)^2$$

oder wenn man entwickelt

$$(v^2 + v_1^2)\,(x^2 + y^2) \cos^2 \vartheta = (vy - v_1 x)^2$$
$$V^2 \,.\, r^2 \,.\, \cos^2 \vartheta = (vy - v_1 x)^2$$
$$Vr \cos \vartheta = vy - v_1 x$$
$$r \cos \vartheta = \frac{vy - v_1 x}{V} \quad (28).$$

Digitized by Google

Im Punkte xy, dessen Entfernung von der Lage des Gleichgewichtes $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist, ist die beschleunigende Kraft, welche das Aethertheilchen von der Einwirkung der benachbarten Theilchen erleidet, nach dem Centrum der Ellipse gerichtet und dem Radius Vector proportional. Nehmen wir also, wie oben (II) geschehen, die abstossende Kraft in der Einheit der Entfernung als Kraft-Einheit an, so ist dieselbe in der Entfernung r ausgedrückt durch r und nach der Normalen an die Bahn im Punkte xy zerlegt durch

$$J = r \cos \vartheta \quad (29).$$

Aus (27), (28), (29) folgt

$$J = \frac{vy - v_1 x}{V} = -F \quad (30).$$

Die Centrifugalkraft des Aethertheilchens in irgend einem Punkte seiner Bahn ist also gleich, aber entgegengesetzt der nach der Richtung der Normalen in diesem Punkte zerlegten beschleunigenden Kraft. Obgleich also — soviel wir wenigstens zu wissen glauben — dem allgemeinen Gravitationsgesetze nicht unterworfen, folgt dennoch der Lichtäther in seiner Bewegung denselben Gesetzen der rationellen Mechanik, denen auch die ponderabilen Körper unterliegen.

Aus (28), (19), (18), (17) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} Vr \cos \vartheta = vy - v_1 x &= aa_1 (\sin B \cos B_1 - \cos B \sin B_1) \\ &= aa_1 \sin (B - B_1) = aa_1 \sin A = QQ_1 \end{aligned}\right\} (31).$$

Also ist

$$VJ = QQ_1$$

mithin

$$J = \frac{QQ_1}{V} = -F \quad (32).$$

Die Centrifugalkraft des Aethertheilchens in irgend einem Punkte seiner elliptischen Bahn ist also umgekehrt proportional seiner Geschwindigkeit in diesem Punkte.

Aus (31) schliessen wir

$$r = \frac{QQ_1}{V} \cdot \frac{1}{\cos \vartheta}$$

folglich

$$J_1 = r \sin \vartheta = \frac{QQ_1}{V} \cdot \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} = \frac{QQ_1}{V} \cdot \operatorname{tang} \vartheta = J \cdot \operatorname{tang} \vartheta \quad (33).$$

Diese nach der Richtung der Tangente an die Bahn auf das Aethertheilchen einwirkende Componente J_1 der gesammten abstossenden Kraft bewirkt die Veränderungen in der Geschwindigkeit des Theilchens und ist also proportional der Centrilfugalkraft und der Tangente desjenigen Winkels, den der Radius Vector mit der Normalen auf die Bahn bildet. In den Endpunkten der Axen ist also $J_1 = 0$.

Digitized by Google

Aus den Gleichungen (20) und (21) ergibt sich

$$x^2 + y^2 + v^2 + v_1^2 = a^2 + a_1^2$$

oder

$$r^2 + V^2 = a^2 + a_1^2$$

folglich

$$V = \sqrt{a^2 + a_1^2 - r^2}.$$

Setzt man

$$a^2 + a_1^2 = R^2 \quad (34)$$

so kommt

$$V = \sqrt{R^2 - r^2} \quad (35).$$

Diese Gleichung ist analog der Gleichung (9)

$$v = \sqrt{a^2 - x^2};$$

x und r bezeichnen die Entfernung des Aethertheilchens von der Gleichgewichtslage.

Aus (35) folgt

V = Maximum in den Endpunkt. der kleinen Axe der Ellipse.
V = Minimum - - - - grossen - - -
Also $J = -F$ = Minimum - - - - kleinen - - -
= Maximum - - - - grossen - - -

Die Gleichung (27) liefert die Relation

$$F \cdot \varrho = V^2 \quad (36)$$

Die Tangentialgeschwindigkeit des Aethertheilchens in irgend einem Punkte seiner Bahn ist also die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Centrifugalkraft des Theilchens und dem Krümmungshalbmesser der Curve in diesem Punkte.

VI.

Zwei rechtwinklig zu einander polarisirte Strahlen (homogenen Lichtes) R und R_1 von gleicher Schwingungsdauer τ, gleicher Wellenlänge l, aber verschiedenen Intensitäten a^2 und a_1^2 und verschiedenen Phasen φ und φ_1 bringen durch ihre Vereinigung nach derselben Fortpflanzungsrichtung einen elliptisch polarisirten Strahl hervor, bei welchem die Geschwindigkeiten der Componenten gegeben sind durch die Formeln

$$U = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi}{l}\right), \quad U_1 = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi_1}{l}\right) \quad (37)$$

und die gleichzeitigen Coordinaten des Aethertheilchens durch die Gleichungen

$$x = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi}{l}\right),\quad y = a_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\varphi_1}{l}\right) \quad (38).$$

Setzt man den Phasen-Unterschied

$$\frac{\varphi_1 - \varphi}{l} = \frac{2\psi}{l},$$

so kann man, da die Zeit von jedem beliebigen Momente angerechnet werden darf, entweder

$$\varphi = -\frac{\psi}{l} \text{ und } \varphi_1 = +\frac{\psi}{l}$$

oder

$$\varphi = +\frac{\psi}{l} \text{ und } \varphi_1 = -\frac{\psi}{l}$$

nehmen, je nachdem der Strahl R dem Strahle R_1, oder umgekehrt dieser jenem vorgeeilt ist. Im ersteren Falle gehen obige Gleichungen (37), (38) über in folgende:

$$\left.\begin{aligned} U &= a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{\psi}{l}\right),\quad U_1 = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\psi}{l}\right) \\ x &= a \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{\psi}{l}\right),\quad y = a_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\psi}{l}\right) \end{aligned}\right\} (39)$$

Im andern Falle sind dieselben

$$\left.\begin{aligned} u &= a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\psi}{l}\right),\quad u_1 = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{\psi}{l}\right) \\ x &= a \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\psi}{l}\right),\quad y = a_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{\psi}{l}\right) \end{aligned}\right\} (40).$$

In Folge eines jeden dieser beiden Systeme (39) oder (40) würde das Aethertheilchen während der Schwingungsdauer dieselbe Ellipse durchlaufen, nur mit entgegengesetzter Bewegungsrichtung. Existiren aber beide Systeme zu gleicher Zeit und pflanzen sich die aus ihnen hervorgehenden Strahlen von entgegengesetzt elliptischer Polarisation nach derselben Richtung fort: so bewegt sich das Aethertheilchen, welches ihrer gleichzeitigen Einwirkung unterliegt, wieder gradlinig. Um dieses zu beweisen setzen wir die Vibrationen U und u, sowie U_1 und u_1, welche parallel erfolgen, respective den Axen OX und OY, je zwei in eine zusammen; alsdann erhalten wir

$$V = U + u = a\left\{\sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{\psi}{l}\right) + \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\psi}{l}\right)\right\}$$

$$= 2a \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \cdot \cos 2\pi \frac{\psi}{l}$$

$$V_1 = U_1 + u_1 = a_1\left\{\sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\psi}{l}\right) + \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{\psi}{l}\right)\right\}$$

$$= 2a_1 \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \cdot \cos 2\pi \frac{\psi}{l}$$

Digitized by Google

oder

$$\left.\begin{aligned} V &= 2a \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \cdot \cos 2\pi \frac{\psi}{l} \\ V_1 &= 2a_1 \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \cdot \cos 2\pi \frac{\psi}{l} \end{aligned}\right\} (41).$$

Also ist das System der beiden Strahlen von entgegengesetzt elliptischer Polarisaton identisch mit einem Systeme zweier gradlinig und rechtwinklig zu einander polarisirten Strahlen von gleicher Phase, aber verschiedenen Intensitäten, welches letztere wiederum einen einzigen gradlinig polarisirten Strahl bildet. Der Winkel ω, den die Vibrationsrichtung dieses Strahles mit der Axe der x macht, ist gegeben durch die Gleichung

$$\text{tang } \omega = \frac{V_1}{V} = \frac{a_1}{a} \quad (42)$$

Folglich macht die Polarisationsebene desselben Strahles mit derselben Axe einen Winkel ω_1, der bestimmt ist durch die Gleichung

$$\text{tang } \omega_1 = -\frac{a}{a_1} \quad (43).$$

Aus (39) und (40) folgt

$$\text{tang } \eta = \frac{y}{x} = \frac{a_1}{a} \cdot \frac{\cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\psi}{l}\right)}{\cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{\psi}{l}\right)}$$

$$\text{tang } \eta_1 = \frac{y}{x} = \frac{a_1}{a} \cdot \frac{\cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{\psi}{l}\right)}{\cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\psi}{l}\right)}$$

mithin

$$\text{tang } \eta \cdot \text{tang } \eta_1 = \frac{a_1^2}{a^2} \quad (44).$$

Hieraus schliessen wir, dass die trigonometrischen Tangenten beider Winkel stets gleiches Vorzeichen haben; ist also

$$\left.\begin{aligned} \eta &> 0 < \frac{\pi}{2} \\ \text{so ist} \quad \eta_1 &> \pi < \frac{3\pi}{2} \\ \text{und ist} \quad \eta &> \frac{\pi}{2} < \pi \\ \text{so ist} \quad \eta_1 &> \frac{3\pi}{2} < 2\pi \end{aligned}\right\} (45).$$

Digitized by Google

Ferner ergibt sich aus derselben Gleichung (44), dass das Produkt der trigonometrischen Tangenten der bezeichneten Winkel constant ist; — beide Folgerungen vereint rechtfertigen obige Behauptung, dass das Aethertheilchen in Folge der Einwirkung der Vibrationssysteme (39), (40) dieselbe Ellipse nach entgegengesetzter Richtung durchlaufen würde.

Die Richtung desjenigen Durchmessers dieser Ellipse, auf welchen die beiden elliptischen Bewegungen das Aethertheilchen nach jedem halben Umlaufe in demselben Augenblicke zurückführen, ist bedingt durch

$$\eta_1 = \eta$$

folglich (44) bestimmt durch die Gleichung

$$\operatorname{tang}^2 \eta = \frac{\alpha_1^2}{\alpha^2}$$

oder

$$\operatorname{tang} \eta = \frac{\alpha_1}{\alpha} = \omega \quad (46)$$

mithin steht derselbe senkrecht auf der Polarisationsebene jenes einen gradlinig polarisirten Strahles, welcher mit dem Systeme der beiden Strahlen von entgegengesetzt elliptischer Polarisation identisch ist.

Ist

$$\alpha = \alpha_1 \text{ und } \frac{\varphi_1 - \varphi}{l} = \frac{2\psi}{l} = \frac{1}{4},$$

so ist die von dem Aethertheilchen beschriebene Bahn (12) ein Kreis

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 \quad (47)$$

und in dieser Voraussetzung gehen obige Gleichungen (39), (40), (41), (42), (43), (44), (46) über in folgende:

$$\left.\begin{aligned} U &= \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{8}\right), \quad U_1 = \alpha_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{8}\right) \\ x &= \alpha \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{8}\right), \quad y = \alpha_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{8}\right) \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

$$\left.\begin{aligned} U &= \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{8}\right), \quad U_1 = \alpha_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{8}\right) \\ x &= \alpha \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{8}\right), \quad y = \alpha_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{8}\right) \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

$$V = 2\alpha \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \alpha\sqrt{2} \cdot \sin 2\pi \frac{t}{\tau} = V_1 \quad (50)$$

$$\operatorname{tang} \omega = +1, \quad \operatorname{tang} \omega_1 = -1 \quad (51)$$

$$\operatorname{tang} \eta \cdot \operatorname{tang} \eta_1 = +1 \quad (52)$$

$$\operatorname{tang} \eta = +1 = \operatorname{tang} \omega. \quad (53).$$

Digitized by Google

II.

Eine einfachere, auf einer neuen Analyse beruhende Auflösung der sectio aurea, nebst einer kritischen Beleuchtung der gewöhnlichen Auflösung dieses Problems und der Betrachtung ihres pädagogischen Werthes.

Von

Herrn J. Helmes

Professor am Gymn. Josephinum zu Hildesheim.

Wenn ich eine neue Auflösung des angeführten Problems der öffentlichen Mittheilung für nicht ganz unwerth erachte, so ist es ganz vorzüglich ihre pädagogische Beziehung, die mich dazu bestimmt. In durchaus keinem andern Unterrichtszweige ist das Lernen selbst, das Erwerben und Suchen, im Gegensatze des Erworbenen, Gewonnenen, so sehr Hauptaufgabe und Zweck, als in der Mathematik. Sie mag wohl ihre edelste Bestimmung erfüllt haben an dem ehemaligen Schüler, der nun später von ihren Resultaten nicht mehr behalten hat, als der erstarkte Mann noch nachmachen kann von den kunstvollen Uebungsstücken, die seinen Körper in der Jugend bildeten. Alles geistige Zuthun von Seiten des Schülers, alle Lust und Liebe zur Sache ist durch solche Auffassung ihrer Aufgaben bedingt. Kurz ist ja die Freude des spielenden Kindes über das fertige Kartenhäuschen, und überhaupt nur möglich, wenn es sich selber das Werkchen bildete; aller geistige Gewinn und edlere Gewöhnung liegt in dem sinnigen Aufbau; Wieder-Abbruch und Zerstörung sind das nicht bedauerte Ende des Spieles; keiner soll ja in dem Hause wohnen. — Und, wie die Verhältnisse bislang an unsern gelehrten Schulen stehen, wird der Schüler der Mathematik auf ein eigentliches Feld der Anwendung des Gelernten nur in so spärlicher und dürftiger Beschränkung geführt, dass dies die Mühe der sauern Vorbildung nicht entgelten könnte. Denn wohl lohnt ihm die Lectüre der Classiker die schweren Anstrengungen seiner grammatischen Studien, und gibt so auch der gelernten Sprache einen neuen, hohen Werth; die erworbene Kenntniss der Geschichte benutzt jede Stelle, jeder Augenblick des Lebens; aber die Werke, die in jener andern Sprache, der Mathematik, geschrieben sind, die Gesetzbücher der Natur und des Himmels, werden nicht vor ihm auf-

Digitized by Google

geschlagen, höchstens Bruchstücke einer Vorrede mit ihm durchbuchstabirt.

Wünschten wir nun gleichwohl von ganzem Herzen, dass auch in dieser Beziehung das Gymnasium seine treuen Schüler der Mathematik besser belohnen, und ihnen in den inhaltsreichen Sätzen der Physik und Elementar-Astronomie eben so schön und unvergesslich die bedeutungsvollen Resultate jener Wissenschaft ans Herz fesseln möge, als in den schönen Sentenzen eines Tacitus und Virgil's die trivialen Lehren der Grammatik: so liegt doch, so lange dieses nur frommer Wunsch noch bleiben muss, viel Trost in der besondern Natur und ausgezeichneten Beschaffenheit der mathematischen Lehren, vermöge welcher sie vor allen andern Erkenntnissen für die studirende Jugend Zweck an sich zu sein geeignet sind. Sie sind ja die natürlichen, nothwendigen, überall sich gleich ergebenden Bewegungen des gleichsam wie körperlich aus Lebensorganen zusammengesetzt zu denkenden Geistes auf einem grossen, fast von allen Dingen durchwachsenen Felde der Grössen und Grössen-Verhältnisse; die eigenthümliche, durch die Natur des vernünftigen Wesens selbst vorgeschriebene und bedingte Entwickelung jener geistigen Kräfte, deren gleichen und zu gleicher Frucht treibenden Keim der Schöpfer in das Wesen des Menschen gelegt hat, und der in verschiedenen Menschen nur den verschiedenen Boden gefunden haben kann. Aber darum muss alles äussere Zuthun dieser Entwickelung auch jene organischen Kräfte benutzen, nur sie anregen und nicht gleichsam durch Linie und Maschine Hand und Fuss des eingeschnürten und festgebundenen Kindes fleissig hin und her bewegen wollen, wenn letzteres gehen und den Gebrauch der Hände lernen soll. Anregung der Selbstthätigkeit und Leitung derselben auf die Wege, wo sie in leichtester, natürlichster Folge den nur noch versteckt liegenden Schatz des eigenen Geistes-Magazins auffinde, ist die alleinige Aufgabe des Lehrers der Mathematik, dem alsdann sein Schüler verpflichtet sein muss. und wenn er von jenem Schatze selbst auch niemals ferner den mindesten Gebrauch machen kann, sondern sich nur desselben bewusst geworden, sich in diesen Theilen seines geistigen Reiches nur orientirt hat. Kurz, diese formelle Bildungskraft ist ein auszeichnender Vorzug des mathematischen Unterrichts; kein anderer Unterrichtszweig, selbst der der zum Eigenthume gewordenen Muttersprache nicht, kann sich darin mit ihm messen. Und, wenn ihm darum zu einiger Belohnung dafür eine sich so mächtig aufdringende Erweiterung materieller Anwendung angelegentlichst zu wünschen wäre: so muss doch vorzugsweise jene Seite seiner Behandlung dem Gymnasium zugekehrt sein und bleiben; aller Werth mehr auf die Art des Lernens, als auf das Gelernte selbst gelegt werden.

Diese und ähnliche Betrachtungen, die hier weiter auszuführen nicht wohl der Ort ist, mögen der folgenden Entwickelung, die aus ihnen hervorgegangen ist, ihren Werth bestimmen, und den Hauptzweck derselben in Voraus andeuten. Sie betrifft die analytische Betrachtung der ältern und die einfachere Begründung einer neuen Auflösung eines geometrischen Problems, wodurch diese Auflösung für den Schüler aus dem Geheimnisse fremder Erfindung und Ausbildung in den Kreis eigener, klar bewusster Selbstthätigkeit herübergezogen, und gleichsam ein fremdes Patent zum Eigenthums-

Digitized by Google

rechte abgelöst werden möge. Denn nur die Analyse ist es, die uns das geheime Schaffen des fremden Geistes erschliesst, und dem eigenen die freien Bahnen eröffnet.

Betrachtung der ältern Auflösung.

Unter den mannichfachen Theilungen der geraden Linie, die schon bei den Alten zu den vorzüglichen Lieblingsspielen des Geistes gehörten, wurde doch eine gar bald eine nothwendige Sprosse schon in der untersten Leiter, die nur vom allertiefsten Grunde der Wissenschaft aus in die nächsten Höhen des systematischen Gebäudes der Geometrie aufführt. — Wenn andere solche Theilungen, als da sind die sectio spatii, sectio rationis etc. durch gelegentliche Aufgaben veranlasst wurden, so trat die sectio aurea als gebieterische Forderung auf, sobald man nur den früh und tief unten im Systeme der Elementar-Geometrie liegenden Satz: „Um jedes regelmässige Vieleck lässt sich ein Kreis beschreiben" zu dem Probleme umkehrte: „In den gegebenen Kreis jedes regelmässige Vieleck einzuschreiben." Denn derselbe Geist der Analyse, der uns bei Betrachtung dieser Aufgabe für das Sechseck den Radius als Seite bestimmt, fordert für das Zehneck das grössere Stück des nach der sectio aurea getheilten Radius *). Und leitet

*) Denken wir uns die Seite AB (Taf. I. Fig. 1.) gefunden, und vom Centro O des Kreises nach ihren Endpunkten die Radien gezogen, so ist in diesem (charakteristischen) gleichschenklichen Dreieck OAB der Winkel am Scheitel $O = \frac{4R}{10} = \frac{2R}{5}$, mithin die beiden Winkel an der Basis zusammengenommen $= 2R - \frac{2R}{5} = \frac{8R}{5}$, also jeder gleich $\frac{4R}{5}$, d. h. doppelt so gross als $\sphericalangle$ am Scheitel.

Obgleich nun die Elementar-Geometrie ausser dem pythagoräischen Lehrsatze, der sich nur auf das rechtwinkliche Dreieck anwendet, im Allgemeinen kein Mittel besitzt, die Verhältnisse der Seiten eines Dreiecks aus den Verhältnissen seiner Winkel zu bestimmen, so lässt uns doch die ganz ausgezeichnete Natur der Winkelverhältnisse im vorliegenden Falle den Versuch machen, etwa durch die Bedingungen der Aehnlichkeit unter den Dreiecken, die sich von dem gegeben leicht und natürlich ableiten, solchen Verhältnissen nachzuforschen.

Halbiren wir nur einmal den $\sphericalangle A$, so erkennen wir augenblicklich das gleichschenkliche Dreieck ADB, worin ja $\sphericalangle \delta = o + \gamma = \alpha + \gamma = \beta \infty$ dem ganzen OAB (wegen Gleichheit der Winkel) woraus sich:

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BA}{BO}$$

oder in Betracht, dass, weil sowohl Dreieck ADB als auch DAO nach der Construction gleichschenklich sind, und darum

$$AB = AD = OD$$

ist,

$$\frac{BD}{OD} = \frac{OD}{OB},$$

d. h., da $OD = AB$ war, die Seite des Zehnecks ist das grössere Stück des im mittleren und äusseren Verhältnisse getheilten Radius.

Digitized by Google

gleichwohl den Euklides (IV. 11.) ein scheinbar etwas anderer Gang zunächst auf das Fünfeck, so führt dieser dennoch durch den vorbereitenden, begründenden Satz IV. 10. wieder grade auf dasselbe Problem zurück. Wie findet sich nun diese Aufgabe, zuerst und bei Euklides selbst gelöset?

Die beiden, scheinbar ganz unabhängigen und in den Mitteln sehr verschiedenen Auflösungen, die sich in den Elem. II. 11. und VI. 30. finden, beruhen gleichwohl auf einer und derselben Analyse, wodurch die ursprüngliche Aufgabe auf ein und dieselbe näherliegende zurückgeführt wird; nur dass zur Auflösung dieser letztern denn in dem Zusammenhangs-Netze der mathematischen Wahrheiten von dem übrigens schon nahe am Ziele liegenden Trennungs- und Abgangspunkte aus zwei verschiedene Wege gewählt werden.

Es dient, gleich hier zu bemerken, wie diese Analyse nicht auf die Aufgabe, wie wir sie hier fassen, unmittelbar gestellt ist, sondern auf die Construction von Flächen, namentlich Rechtecken, über den fraglichen Theilen der Linie und über ihr selbst, aus denen alsdann nur mittelbar die gesuchten Verhältnisse der Linie und ihrer Theile selbst nach später (VI. 14.) erörterten Zusammenhange dieser Grössen unter sich abgeleitet werden. Es ergibt sich aus diesen spätern Betrachtungen namentlich, dass eine Linie mittlere Proportionale zwischen zwei andern ist, wenn das Quadrat über ihr gleich ist dem Rechtecke zwischen diesen beiden Linien (VI. 17.). Um die erste Form dieses Ausspruchs ganz unbekümmert, sucht Euklides also eine Linie AB (Taf. I. Fig. 2.) so zu schneiden, dass das Quadrat über AQ gleich dem Rechtecke über AB und QB.

Analyse: Sei nun AQ ein solcher Theil der Linie AB, dass wirklich $AQ^2 = AB \,.\, QB$ (wo ich der Kürze wegen diese algebraische Bezeichnung im geometrischen Sinne gebrauche), so ist, wofern über AQ und AB die Quadrate AH und $A\Delta$ beschrieben, und die Linie HQ bis K verlängert wird, Quadrat $AH =$ Rechteck KB, und auf beiden Seiten das gleiche Rechteck AK addirt, Rechteck ZK gleich Quadrat $A\Delta$, so dass demnach endlich als letzte Aufgabe vorliegt:

„Eine Linie VA um ein solches Stück AZ zu verlängern, dass das Rechteck aus der so verlängerten Linie VZ und der Verlängerung $ZH = ZA$, gleich ist einer gegebenen Grösse, nämlich dem Quadrate $A\Delta$ jener zu verlängernden Linie."

Zur Auflösung dieser Aufgabe bieten dem Euklides die Sätze, einmal II. 6., und ein anderes Mal VI. 28., 29., die vollkommensten Mittel dar. Demnach liegen Auflösung und Beweis, wie sie zunächst II. 30. gegeben sind, ganz nahe, und sind eine unmittelbare Eingebung der Analyse und des Satzes II. 6.; dieselbe Analyse, aber mit andern Mitteln ihrer endlichen Erfüllung, liegt uns VI. 30. klar vor Augen, nur dass letztere uns fremder vorkommen, und ferner zu liegen scheinen; da es wirklich auffallend erscheint, wie Euklides nur zum Behufe dieser, doch schon nach anderer Weise gelösten Aufgabe, die neue Reihe von Sätzen: VI. 28. 29. 30. von der sechsten Erklärung desselben Buches aus eröffnet.

Eben dieselbe Analyse endlich ist es nun auch, die der jetzt gewöhnlichen Auflösung, welche ebenso nur die Verlängerung der gegebenen Linie fordert (das ausserhalb des Kreises liegende Stück

Digitized by Google

der Secante), dass das Rechteck aus der so verlängerten Linie in die Verlängerung = dem Quadrate der gegebenen Linie, zum Grunde gelegt werden sollte, damit sie mit freier Selbstentscheidung aus dem Schatze eigener Erfindung heraus vom Schüler gegeben, und ihr Beweis mit wirklicher Verstandesthätigkeit und klarer Durchschauung der Beweismittel geführt werden könnte. Denn einen andern Werth hätte ja das Ganze nicht; die Aufgabe ist schon vor Jahrhunderten ohne den Schüler gelöst, das spätere Leben wird ihm meistens nie eine Anwendung davon absondern.

Doch da zeigt sich allermeistens eine unverantwortliche Lücke und ein unvermittelter Sprung in der gewöhnlichen Behandlung dieser Aufgabe. Man gibt scheinbar den Ursprung einer durch Betrachtung wirklicher Flächen und ihrer Verhältnisse vermittelten Auflösung auf, hat es mit blossen Zahlenwerthen von Linien zu thun, und ahmt dennoch in den sie betreffenden Sätzen und Gleichungen alle Operationen von Flächen-Subtraction u. s. w. nach, die nun durch Nichts mehr vermittelt werden, als durch ein vages Probieren, durch welche der vielen möglichen Proportions-Verwandlungen, dividendo, addendo etc. am leichtesten das sonst schon bekannte Ziel erreicht werden könne.

Ich will mich näher erklären. Entweder sollte man bei Betrachtung der vorliegenden Aufgabe ausser allem Zusammenhange mit Flächen, aus denen sie Euklides erst folgert, rein an Verhältnisse von Zahlen denken, durch welche die Theile einer Linie dargestellt sind: und dann würde auf die Auflösung unserer Aufgabe der bekannte Satz von der Tangente freilich in einer ganz anders vermittelten Analyse angewandt werden; Auflösung und Beweis würden ganz anders werden, ich glaube eben die, welche ich gleich unten als die möglichst einfachen in diesem Sinne zur Darstellung bringen werde. Oder man halte die der gewöhnlichen Auflösung zum Grunde liegende Vorstellung wirklicher Flächen auch durch die Behandlung der ganzen Aufgabe fest, damit der Beweis ein Ausfluss der Analyse sein, und daraus verständlich werden könne.

Denn eine ganz einzeln dastehende Construction des freilich leicht sich ergebenden algebraischen Ausdrucks für den grössten Theil x der so zu theilenden Linie, des Ausdrucks

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{a^2 + (\tfrac{1}{2}a)^2},$$

die also nicht die ganze Secante, sondern nur den bis an's Centrum reichenden Theil derselben benutzt, wie sie sich in einzelnen Lehrbüchern findet, halte ich für durchaus verfehlt, da der vermeintlich geometrische Beweis alsdann nichts als eine reine Auflösung einer Gleichung durch viele Mittelstufen hindurch ist, ohne dass der Schüler sich des leitenden Gedankens bewusst werden könne.

Es wird uns nun bei letzterer Art bei weitem leichter und ist dem Standpunkte unserer heutigen Geometrie weit angemessener zu beweisen, dass die Tangente die mittlere Proportionale zwischen u. s. w. sei, als dass das wirklich über der Tangente construirte Quadrat gleich sei dem Rechtecke zwischen u. s. w. Darum möge man immerhin diesen und ähnliche Sätze in ersterer leichterer Weise ableiten, muss dann aber, um ihn zu einem angemessenen

Digitized by Google

Beweissatze unserer fraglichen Auflösung anwenden zu können, so lange sie nach der obigen Analyse geschehen ist, ihm auch den andern vollen Gehalt zu geben suchen, durch welchen allein er geeignet ist, der so gegebenen Auflösung das Fundament eines durchsichtigen Beweises zu geben. So wie darum Euklides durch VI. 14. 16. 17. u. s. f. seinen frühern nur von Flächen bewiesenen Sätzen auch diese andere Bedeutung und Geltung von Linien und ihren Zahlenwerthen gibt, und somit seine lange vorher gegebene Auflösung Elem. II. 30. erst durch solche ausdrückliche Erweiterung für unsere so gefasste Aufgabe: „Eine Linie stetig zu theilen" gelten lassen kann (siehe andere Auflösung VI. 30.): so wird umgekehrt für uns, die wir solche und ähnliche Sätze eher und lieber über Linien und ihre Zahlenwerthe, als über die an ihnen construirten Flächen beweisen, die umgekehrte Erweiterung nöthig, wenn wir unsere Sätze für Fälle gebrauchen wollen, denen solche von wirklicher Flächen-Construction entnommene Analysen zum Grunde liegen, d. h., auf unsern Fall angewandt, so lange wir bei der obigen Auflösung bleiben. Alles das leistet z. B. die Art der Beweisführung, wie sie sich bei Grunert Geom. §. 392. durch die angezogenen §§. 372. und 386. vervollständigt findet, während bei Ohm, Legendre und Andern der Beweis durch eine gar nicht vermittelte Anwendung der Proportions-Verwandlung aus der reinen Arithmetik in seiner Leichtigkeit und Natürlichkeit getrübt, seinem Ursprunge entfremdet wird. Dort nimmt wirklich der Satz: „Die Tangente ist mittlere Proportionale u. s. w." nach §§. 372. und 386. auch die zweite Geltung an: „Das Quadrat über der Tangente = u. s. w." und ist in dieser Form erst geeignet, den Beweis der so nach der Euklides'schen Analyse gegebenen Auflösung zu führen. Denn dass wir statt des Euklid. II. 6. benutzten Satzes der Auflösung den obengenannten mit Euklid. III. 36. übereinstimmenden, doch ganz in II. 6. beruhenden und daraus abgeleiteten, also eigentlich spätern, anwenden, kann keinen Unterschied im Beweise begründen, der ja lediglich von der Analyse, die in beiden Fällen dieselbe ist, abhängt; und ist nur daher gekommen, dass wir diesen Satz von der Tangente, der uns in seiner arithmetischen Form so leicht und wie von selbst hervortritt, durch eine ein und für alle Mal abgethane Betrachtung über die Identität der arithmetischen und geometrischen Geltung solcher Sätze, viel bequemer in den Inhalt des II. 6. als einzelnen Fall hineinbringen, als dass wir diesen Satz II. 6. in seiner ganzen, uns übrigens mehr gleichgültigen Allgemeinheit fest halten.

Nach dem Vorhergehenden würde demnach, wofern man sich an die Euklides'sche Analyse hielte, die vollständige Auflösung dieser Aufgabe folgende sein:

Analyse wie oben.

Alle algebraischen Hülfsmittel (Meier Hirsch. Geom. Aufgab. S. 120) dieser Auflösung verschmähend, würde ich zu der darauf gegründeten Synthese also fortgehen: Es ist uns eine Linie bekannt, die Secante, so beschaffen, dass das Rechteck über ihr und dem ausserhalb des Kreises liegenden Theile von ihr, welcher also die fragliche Verlängerung werden muss, = dem Quadrate einer von ihrem Endpunkte ausgehenden Tangente. (Denn so dürfen wir nach den obengestellten Forderungen des Unterrichts den bekannten Satz der Tangente aussprechen.) Diese Tangente ist in un-

Digitized by Google

serm Falle gleich der zu verlängernden Linie, d. h. also, dem innerhalb des Kreises liegenden Stücke der Secante, die, um das Stück so für alle Lagen constant zu haben, nur durch's Centrum zu gehen braucht, und zwar eines Kreises, dessen Durchmesser eben jener Tangente gleich wäre. Woraus sich augenblicklich ganz und in allen ihren Theilen die bekannte, gewöhnliche Auflösung dieser Aufgabe ergibt. Der Beweis, der hier natürlich also immer an Flächen und Rechtecke zu denken hat, wie sie die Analyse schuf, würde ganz nach §. 392. bei Grunert zu führen sein, und so erst Einheit in die Analyse, Synthese und den Beweis gebracht sein. Dennoch scheint mir die Aufgabe nach dem jetzigen Standpunkte unserer Geometrie, eine angemessenere und leichter vermittelte Auflösung, die namentlich von allen vorgängigen Flächenbetrachtungen unabhängig wäre, zu verdienen, zu der ich durch folgende Betrachtungen gelange.

Neue Auflösung der Aufgabe.

Analyse. Es bietet sich ganz ungesucht und leicht irgend eine in mittlere und äussere Verhältnisse getheilte Linie dar. Diese benutze man alsdann nur, um nach dem ganz elementarbekannten Verfahren (Eukl. VI. 10.): „Eine Linie so oder in den Verhältnissen zu theilen, wie eine andere getheilt ist," das Problem augenblicklich gelöst zu haben. Jene so zuerst in mittlere und äussere Verhältnisse getheilte Linie geht aber augenblicklich in der Secante (BD) eines leicht bestimmten Kreises hervor. Da nämlich die Tangente die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Secante u. s. w. ist, so brauchte die Construction nur so angelegt zu sein, dass die Tangente immer gleich wäre dem innerhalb des Kreises liegenden Stücke der Secante, damit letztere verlangter Maassen getheilt wäre.

Wählen wir darum, um auf die einfachste, sicherste Weise eine so unveränderliche Grösse des innerhalb des Kreises liegenden Stückes der Secante für jeden Fall zu gewinnen, die durch's Centrum gehende, deren innerhalb des Kreises liegender Theil alsdann immer unveränderlich gleich dem Durchmesser des Kreises ist: so brauchte man also nur zu einer beliebig als Tangente angenommenen Linie (AB) einen Kreis, dessen Durchmesser gleich dieser Tangente zu construiren, von dem andern nicht am Kreise liegenden Endpunkte (B) dieser Tangente eine Secante durch's Centrum zu ziehen, so würde diese in dem Punkte (C), wo sie den Kreis zunächst schneidet, im mittleren und äussern Verhältnisse getheilt sein. An diese, in geforderter Weise getheilte Linie lege man nun die zu solcher Theilung aufgegebene Linie, und verfahre nach der bekannten, ganz elementar-geläufigen Weise, diese Linie nach Art der andern zu theilen. Um jedoch nicht ein abermaliges, neues Anlegen unserer zu theilenden Linie nöthig zu haben, wird es zweckmässig sein, eben sie selbst gleich als jene sonst willkührliche Tangente (AB), die uns nur überhaupt zu der so getheilten Secante verhelfen sollte, zu benutzen, und es wird sich demnach daraus folgende, als die zweckmässigste, durch die einfache Analyse begründete Auflösung herausstellen.

Synthese: Auf dem Endpunkte A (Taf. I. Fig. 3.) der zu theilenden Linie AB errichte man eine $\perp AO = \frac{1}{2}AB$; beschreibe

aus O mit dem Radius OA einen Kreis; ziehe von B durch's Centrum O die Secante BD, (die demnach in mittlere und äussere Verhältnisse getheilt ist, da ja $BA^2 = CD^2$ (Constr.) $= BC \cdot BD$); verbinde alsdann D mit A, und ziehe endlich aus C die Linie $CE \parallel DA$, so wird ja natürlich BA wie BD, d. h. ebenfalls in mittlere und äussere Verhältnisse getheilt sein müssen; so dass

$$\frac{BE}{AE} = \frac{AE}{AB} \text{ oder } AE^2 = AB \cdot EB \text{ ist.}$$

Wollte man selbst die sicherlich früher vorgekommene Auflösung: „Eine Linie AB in dieselben Verhältnisse zu theilen, wie eine andere DB getheilt ist," nicht als bekannt voraussetzen, so würde sich demnach der ganze Beweis in zwei Linien also zusammenfassen lassen:

a) BD ist in mittlere und äussere Verhältnisse getheilt (schon in der Auflösung selbst anticipirt).

b) $\frac{BE}{AE} = \frac{BC}{DC}$ $(CE \parallel DA) = \frac{DC}{DB}$ (BD ist ja nach der sect. aur. getheilt) $= \frac{AE}{AB}$ $(CE \parallel DA)$.

Doch dieses Beweises muss es an dieser Stelle der Geometrie durchaus nicht mehr bedürfen und somit die ganze Auflösung weiter nichts sein, als eine spezielle Anwendung einer längst bekannten Theilung einer Linie nach einer andern, die in unserm Falle die Eigenschaft besitzt, welche wir den Theilen der andern geben wollen. Da nun auch bei der andern, allgemein üblichen, Auflösung dieses Problems der Umstand, dass die Secante BD verlangter Maassen getheilt ist, das Hauptmoment des Beweises hergibt, so glaubte ich dasselbe durch obige Auflösung, die eine blosse Verbindung dieser neuerkannten Eigenschaft der Linie BD mit einer allerfrühest schon gelernten Construction, die Theilung einer Linie nach Maassgabe einer andern betreffend, ist, der Unmittelbarkeit der Erkenntniss, und klarer, selbstbewusster Durchschauung, die doch immer ein Hauptaugenmerk des Unterrichts sein sollten, in etwas näher und gleichsam auf das eigene Gebiet des Schülers zurückgeführt zu haben, wo er mit mehr Muth und Selbstvertrauen den Feind des schwierigen Verhältnisses angreift und besiegt.

Digitized by Google

III.

Ueber einige durch bestimmte Integrale summirbare Reihen.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

---

§. 1.

Die Untersuchung über die Summen gewisser Reihen gründet sich auf den Werth des Integrales

$$\int_0^1 (1-z)^p z^{n-1} dz$$

in welchem p eine beliebige Grösse, n eine ganze positive Zahl bedeutet. Man kann denselben entweder aus der Theorie der Gammafunktionen ableiten, oder mittelst einer Reduktionsformel entwickeln, wobei sich die Rechnung sehr einfach folgendermassen gestaltet. Es ist nach einer bekannten Formel

$$\int (1-z^m)^p z^{n-1} dz$$

$$= -\frac{(1-z^m)^{p+1}}{n+mp} z^{n-m} + \frac{n-m}{n+mp} \int (1-z^m)^p z^{n-m-1} dz$$

folglich für $m=1$ und $z=1$, $z=0$:

$$\int_0^1 (1-z)^p z^{n-1} dz = \frac{n-1}{n+p} \int_0^1 (1-z)^p z^{n-2} dz.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel erhält man

$$\int_0^1 (1-z)^p z^{n-1} dz = \frac{(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,2\,.\,1}{(n+p)\,(n+p-1)\ldots(3+p)\,(2+p)} \int_0^1 (1-z)^p dz.$$

Für $z=1-x$ wird aber

$$\int_0^1 (1-z)^p dz = -\int_1^0 x^p dx = \frac{1}{p+1}$$

und folglich

$$\int_0^1 (1-z)^p z^{n-1} dz = \frac{1 \cdot 2 \ldots \ldots (n-1)}{(p+1)\ (p+2) \ldots (p+n)}.$$

Für $z = 1 - x$ geht dasselbe in das folgende über:

$$\int_0^1 x^p (1-x)^{n-1} dx = \frac{1 \cdot 2 \ldots \ldots (n-1)}{(p+1)\ (p+2) \ldots (p+n)}$$

und wenn man noch $n+1$ für n, $p-1$ für p setzt, so ist

$$\int_0^1 (1-x)^n x^{p-1} dx = \frac{1 \cdot 2 \ldots \ldots n}{p(p+1) \ldots (p+n)}.$$

Wir wollen nun der Kürze wegen $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ mit n' bezeichnen und haben jetzt:

$$\frac{1}{n'} \int_0^1 (1-x)^n x^{p-1} dx = \frac{1}{p(p+1) \ldots (p+n)}. \quad (1)$$

§. 2.

In der so eben entwickelten Gleichung setzen wir der Reihe nach $p+m$, $p+2m$, $p+3m$ u. s. w. für p, wobei m eine ganz beliebige Grösse bedeutet, und addiren alle so entstehenden Glieder, das erste (1) mit gerechnet; auf der rechten Seite erscheint dann die Reihe

Digitized by Google

$$\frac{1}{\gamma(p+1)\ldots(p+n)}+\frac{1}{(p+m)(p+m+1)\ldots(p+m+n)}+\frac{1}{(p+2m)(p+2m+1)\ldots(p+2m+n)}+\ldots \quad (2)$$

und auf der linken, als Summe derselben, eine Reihe von Integralen, welche wegen der gleichen Integrationsgränzen in ein einziges zusammengefasst werden können und zwar in das folgende:

$$\frac{1}{n'}\int_0^1 (1-x)^n [x^{p-1} + x^{p+m-1} + x^{p+2m-1} + \ldots\ldots] dx$$

$$= \frac{1}{n'}\int_0^1 (1-x)^n [1 + x^m + x^{2m} + \ldots\ldots] x^{p-1} dx$$

$$= \frac{1}{n'}\int_0^1 (1-x) \cdot \frac{x^{p-1}}{1-x^m}\, dx. \qquad (3)$$

Der Werth dieses Integrales ist leicht zu finden. Entwickelt man nämlich das Binom $(1-x)^n$ und bezieht die Integration auf jedes einzelne Glied, so wird jenes Integral in die $n+1$ folgenden zerlegt, deren Coeffizienten n_0, n_1, $n_2 \ldots n_n$ die Binomialcoeffizienten bedeuten:

$$\frac{1}{n'}\left[n_0 \int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{1-x^m} - n_1 \int_0^1 \frac{x^p dx}{1-x^m} + n_2 \int_0^1 \frac{x^{p+1}dx}{1-x^m} - \ldots\ldots\right].$$

Was nun auch p und m sein mögen, so lässt sich doch jedes einzelne Integral durch die gehörige Substitution einer neuen Veränderlichen auf die Form

$$\int_0^1 \frac{z^{\mu-1}dz}{1-z^\nu}$$

bringen, worin μ und ν ganze positive Zahlen sind. Man kennt aber den unbestimmten Werth eines solchen Integrales, folglich auch den zwischen den Gränzen 0 und 1. Die Aufgabe von der Summirung jener Reihe ist daher vollständig gelöst in der Gleichung:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{p(p+1)\ldots(p+n)}+\frac{1}{(p+n)\,(p+n+1)\ldots(p+n+n)}+\frac{1}{(p+2n)\,(p+2n+1)\ldots(p+2n+n)}+\ldots\ldots\\&=\frac{1}{n!}\Big[n_0\int_0^1\frac{x^{p-1}dx}{1-x^n}-n_1\int_0^1\frac{x^p dx}{1-x^n}+n_2\int_0^1\frac{x^{p+1}dx}{1-x^n}-\ldots\ldots\ldots\Big]\end{aligned}\right\}(4)$$

deren linke Seite unendlich viele, deren rechte aber bloss $n+1$ Glieder enthält.

Digitized by Google

Im Allgemeinen führen die angedeuteten Integrationen auf Kreisbogen und Logarithmen, für $m = 1$ aber auf eine algebraische Grösse. In diesem Falle gestaltet sich das Integral (3) einfacher so:

$$\frac{1}{n'}\int_0^1 (1-x)^{n-1}x^{p-1}dx$$

dessen Werth man aus Formel (1) erhält, wenn man $n-1$ für n setzt; derselbe ist

$$= \frac{1}{n'} \cdot \frac{(n-1)'}{p(p+1)\ldots(p+n-1)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{p(p+1)\ldots(p+n-1)'}$$

Also haben wir, in (4) $m = 1$ setzend,

Digitized by Google

$$\frac{1}{p(p+1)\ldots(p+n)}+\frac{1}{(p+1)(p+2)\ldots(p+n+1)}+\frac{1}{(p+2)(p+3)\ldots(p+n+2)}+\ldots\ldots = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{p(p+1)\ldots\ldots(p+n-1)} \qquad (5)$$

eine Summe, welche schon bekannt ist und auch auf elementarem Wege ermittelt werden kann.

Für $m > 1$ werden oft die einzelnen Integrale in (4) jedes für sich unendlich, was natürlich nicht hindert, dass ihre Differenzen endliche Grössen sein können. Diesem Uebelstande hilft man bei praktischer Berechnung specieller Fälle sehr leicht dadurch ab, dass man erst alle Integrationen unbestimmt ausführt, die gefundenen logarithmischen und Kreisfunktionen so weit als möglich mit

einander verbindet und erst dann zur Substitution der Gränzwerthe 0 und 1 schreitet.

Z. B. für $p=1$, $m=2$, $n=2$ ist

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\ldots.$$
$$=\frac{1}{1.2}\left[\int_0^1\frac{dx}{1-x^2}-2\int_0^1\frac{xdx}{1-x^2}+\int_0^1\frac{x^2dx}{1-x^2}\right].$$

Integrirt man auf der rechten Seite unbestimmt, so ergiebt sich

$$\frac{1}{1.2}\left[\tfrac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x}+l(1-x^2)+\tfrac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x}-x\right]$$

ein Ausdruck, der sich in den folgenden zusammenziehen lässt:

$$\tfrac{1}{2}[2l(1+x)-x]$$

und daraus folgt für $x=1$, $x=0$:

$$l2-\frac{1}{2}=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\ldots. \quad (6).$$

Anderweit bemerkenswerthe Resultate erhält man für $p=2$, $m=2$, $n=2$ und $p=\frac{1}{2}$, $m=2$, $n=2$, nämlich die folgenden beiden Reihen:

$$\frac{3}{4}-l2=\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{6.7.8}+\ldots \quad (7)$$
$$\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}=\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{5.7.9}+\frac{1}{9.11.13}+\ldots \quad (8)$$

§. 3.

Eben so leicht findet man die Summe einer Reihe, deren einzelne Glieder die nämlichen wie der in (4) sind, aber mit wechselnden Zeichen fortgehen. Es folgt nämlich aus (1), wenn man daselbst $p+m$, $p+2m$ u. s. w. für p setzt und alle so entstehenden Glieder, die Formel (1) eingerechnet, mit wechselnden Zeichen zusammennimmt, dass die Summe der fraglichen Reihe gleich sei

$$\frac{1}{n}\int_0^1(1-x)^n[x^{p-1}-x^{p+m-1}+x^{p+2m-1}-\ldots.]dx$$
$$=\frac{1}{n}\int_0^1(1-x)^n\cdot\frac{x^{p-1}}{1+x^m}dx$$

Entwickelt man wieder das Binom $(1-x)^n$ und integrirt jedes einzelne Glied, so gelangt man zu der Gleichung:

Digitized by Google

$$\frac{1}{p(p+1)\ldots(p+n)} - \frac{1}{(p+m)(p+m+1)\ldots(p+m+n)} + \frac{1}{(p+2m)(p+2m+1)\ldots(p+2m+n)} - \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{n}\left[n_0 \int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{1+x^m} - n_1 \int_0^1 \frac{x^p dx}{1+x^m} + n_2 \int_0^1 \frac{x^{p+1}dx}{1+x^m} - \ldots\ldots\ldots\ldots\right] \quad (9)$$

Bemerkenswerthe spezielle Fälle sind z. B. für $m = 2$, $n = 2$ und dann der Reihe nach für $p = 1$, $p = 2$, $p = \frac{1}{2}$:

Digitized by Google

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\ell 2 = \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} - \ldots\ldots \quad (10)$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} - \ldots\ldots \quad (11)$$

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{16\sqrt{2}}\left[\pi - \ell\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right] = \frac{1}{1.3.5} - \frac{1}{5.7.9} + \frac{1}{9.11.13} - \ldots \quad (12)$$

Entwickelt man in jedem der Integrale der Gleichung (9) den Bruch $\frac{1}{1+x^m}$ in die Reihe $1 - x^m + x^{2m}$ u. s. w. und integrirt jedes einzelne Glied, so findet man, dass jene Reihe auch unter folgender Form dargestellt werden kann:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{n_0}{n'}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+m} + \frac{1}{p+2m} - \frac{1}{p+3m} + \ldots\ldots\right) \\ &-\frac{n_1}{n'}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+1+m} + \frac{1}{p+1+2m} - \frac{1}{p+1+3m} + \ldots.\right) \\ &+\frac{n_2}{n'}\left(\frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+2+m} + \frac{1}{p+2+2m} - \frac{1}{p+2+3m} + \ldots\right) \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

welches eine algebraische Zerlegung jener Reihe ist.

§. 4.

Man kann das bisher befolgte Verfahren noch verallgemeinern und auf solche Reihen ausdehnen, welche nach den steigenden Potenzen einer beliebigen Hauptgrösse u fortgehen.

Man setze nämlich in Formel (1) der Reihe nach $p = p$, $p + m$, $p + 2m$ u. s. w., multiplizire die entstehenden Glieder mit 1, u, u^2 u. s. w. und addire sie, so steht auf der einen Seite die Reihe

Digitized by Google

$$\frac{1}{p(p+1)\ldots(p+n)} + \frac{u}{(p+m)(p+m+1)\ldots(p+m+n)} + \frac{u^2}{(p+2m)(p+2m+1)\ldots(p+2m+n)} + \ldots \quad (14)$$

und auf der anderen als Summe derselben das Integral

$$\frac{1}{n'}\int_0^1 (1-x)^n[x^{p-1} + ux^{p+m-1} + u^2x^{p+2m-1} + \ldots]dx$$

$$= \frac{1}{n'} \int_0^1 (1-x)^n \cdot \frac{x^{p-1}}{1-ux^m}\, dx$$

welches sich wieder in folgende Reihe zerlegen lässt:

$$\frac{1}{n'} \left[n_0 \int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{1-ux^m} - n_1 \int_0^1 \frac{x^p dx}{1-ux^m} + n_2 \int_0^1 \frac{x^{p+1}dx}{1-ux^m} - \ldots \right] \quad (15)$$

Ein allgemeines Glied aus dieser Reihe ist

$$\int_0^1 \frac{x^{r-1}dx}{1-ux^m}$$

und geht durch Einführung einer neuen Veränderlichen $z = u^{\frac{1}{m}} x$ in das folgende über:

$$\frac{1}{u^{\frac{r}{m}}} \int_0^{u^{\frac{1}{m}}} \frac{z^{r-1}dz}{1-z^m}$$

welches nach den gewöhnlichen Regeln gefunden werden kann. So hat man z. B. für $m = 1$, $n = 2$, $p = 1$ aus (14) und (15)

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{u}{2.3.4} + \frac{u^2}{3.4.5} + \ldots\ldots$$

$$= \tfrac{1}{2} \left[\int_0^1 \frac{dx}{1-ux} - 2\int_0^1 \frac{x\,dx}{1-ux} + \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1-ux} \right]$$

und für $z = ux$ werden die Integrale

$$= \tfrac{1}{2} \left[\frac{1}{u} \int_0^u \frac{dz}{1-z} - \frac{2}{u^2} \int_0^u \frac{z\,dz}{1-z} + \frac{1}{u^2} \int_0^u \frac{z^2 dz}{1-z} \right]$$

Durch Ausführung derselben erhält man leicht, sobald der absolute Werth von u die Einheit nicht übersteigt,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{1.2.3} + \frac{u}{2.3.4} + \frac{u^2}{3.4.5} + \ldots\ldots \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{u} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^2} - \frac{(u-1)^2}{2u^3} l(1-u) \end{aligned}\right\} (+1 = u = -1). \quad (16).$$

Ist der absolute Werth von $u > 1$, so divergirt jene Reihe und die Integrale werden unendlich gross.

Für $u = 1$, $u = -1$ entstehen die Reihen

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots\ldots \quad (17)$$

$$2l2 - \frac{5}{4} = \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} - \ldots\ldots \quad (18)$$

wie sich aus den Gleichungen (5) und (9) ebenfalls findet, wenn man $m = 1$, $n = 2$, $p = 1$ nimmt.

§. 5.

Auch solche Reihen, die nach den Cosinus oder Sinus der Vielfachen eines Bogens fortgehen und deren einzelne Glieder Coefficienten der bisher betrachteten Form haben, können durch die vorige Methode summirt werden.

Digitized by Google

Man setze wieder in (1) $p = p,\ p+m,\ p+2m$ u. s. w. und multiplizire die entstehenden Gleichungen mit 1, cos v, cos $2v$ u. s. w. so giebt die Addition aller auf der einen Seite die Reihe

$$\frac{1}{p(p+1)\ldots(p+n)} + \frac{\cos v}{(p+m)(p+m+1)\ldots(p+m+n)} + \frac{\cos 2v}{(p+2m)(p+2m+1)\ldots(p+2m+n)} + \ldots \quad (19)$$

Digitized by Google

und auf der anderen die Summe derselben

$$\frac{1}{n'}\int_0^1(1-x)^n[x^{p-1}+x^{p+m-1}\cos v+x^{p+2m-1}\cos 2v+\ldots.]dx$$

$$=\frac{1}{n'}\int_0^1(1-x)^n[1+x^m\cos v+x^{2m}\cos 2v+\ldots..]x^{p-1}dx$$

Die eingeklammerte Reihe kann mittelst der bekannten Formel

$$\frac{1-r\cos v}{1-2r\cos v+r^2}=1+r\cos v+r^2\cos 2v+\ldots..,\ +1>r>-1,$$

summirt werden, und dann geht jenes Integral für $r=x^m$ in das folgende über:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{n'}\int_0^1(1-x)^n\cdot\frac{1-x^m\cos v}{1-2x^m\cos v+x^{2m}}x^{p-1}dx\\&=\frac{1}{n'}\left[n_0\int_0^1\frac{1-x^m\cos v}{1-2x^m\cos v+x^{2m}}x^{p-1}dx\right.\\&\qquad\left.-n_1\int_0^1\frac{1-x^m\cos v}{1-2x^m\cos v+x^{2m}}x^pdx+\ldots\right]\end{aligned}\right\}\ (20)$$

wodurch die Summe jener Reihe (19) dargestellt wird, indem man Mittel besitzt einen Ausdruck von der Form

$$\int\frac{x^{\nu-1}dx}{1-ax^\mu+x^{2\mu}}$$

zu integriren.

Eben so leicht erhält man aus Formel (1)

Digitized by Google

$$\frac{\sin v}{p(p+1)\ldots(p+n)} + \frac{\sin 2v}{(p+m)(p+m+1)\ldots(p+m+n)} + \frac{\sin 3v}{(p+2m)(p+2m+1)\ldots(p+2m+n)} + \ldots \quad (21)$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n [x^{p-1}\sin v + x^{p+m-1}\sin 2v + x^{p+2m-1}\sin 3v + \ldots\ldots] dx$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n [\sin v + x^m \sin 2v + x^{2m}\sin 3v + \ldots\ldots] x^{p-1} dx$$

wobei die eingeklammerte Reihe nach der Formel

$$\frac{\sin v}{1-2r\cos v + r^2} = \sin v + r\sin 2v + r^2 \sin 3v + \ldots\ldots$$

Digitized by Google

summirt werden kann. Man erhält

$$\frac{1}{n'}\int_0^1 (1-x)^n \frac{\sin v}{1-2x^m\cos v+x^{2m}}\, x^{p-1}dx$$

$$=\frac{\sin v}{n'}\left[n_0\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{1-2x^m\cos v+x^{2m}} - n_1\int_0^1 \frac{x^p dx}{1-2x^m\cos v+x^{2m}} + \ldots\right] \quad (22)$$

womit die Summe der Reihe (21) gefunden ist.

Für $p=m=n=1$ ist z. B.

$$\frac{\sin v}{1\,.\,2}+\frac{\sin 2v}{2\,.\,3}+\frac{\sin 3v}{3\,.\,4}+\ldots\ldots$$

$$=\sin v\int_0^1 \frac{dx}{1-2x\cos v+x^2} - \sin v\int_0^1 \frac{x\,dx}{1-2x\cos v+x^2}$$

$$=\sin v\int_0^1 \frac{(1-x)dx}{1-2x\cos v+x^2}$$

Durch Anwendung der bekannten Integralformel

$$\int\frac{(A+Bx)dx}{a+bx+cx^2}=\frac{2Ac-Bb}{c\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{Arctan}\frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}}+\frac{B}{2c}l(a+bx+cx^2)$$

erhält man hieraus

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\sin v}{1\,.\,2}+\frac{\sin 2v}{2\,.\,3}+\frac{\sin 3v}{3\,.\,4}+\ldots\ldots\\ &=\frac{\sin v}{2}\left[(\pi-v)\tan\frac{v}{2}-l\left(2\sin\frac{v}{2}\right)\right].\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Zwei spezielle Fälle der obigen allgemeinen Formeln, wenn nämlich $m=n$ und $m=n+1$ ist, hat Herr Dr. Stern in Crelle's Journal Bd. 10. S. 209 entwickelt. Er geht von Zerlegungen wie die in (13) aus, die er durch Induction findet und mittelst der Bernoullischen Schlussreihe verifizirt. Dies ist gerade der umgekehrte Weg, welcher indessen nicht so kurz und allgemein zum Ziele führen dürfte als der obige direkte.

IV.

Ein Beitrag zur Theorie der Ausmittelung des Kennzeichens, ob eine Variation zweiter Ordnung positiv oder negativ ist, oder weder als positiv noch als negativ gelten kann. Gelegenheitlich ist dabei ein Beitrag zur Beurtheilung der beiden von Euler und Lagrange gegebenen Methoden der relativen Grössten und Kleinsten.

Von

Herrn Doctor G. Strauch

Lehr. d. Mathm. an der Erziehungsanstalt zu Lenzburg im Kanton Aargau.

Diese über die Variationen zweiter Ordnung anzustellende Untersuchung kommt bekanntlich am häufigsten vor bei der Anwendung des Variationskalkuls auf das Grösste und Kleinste. Ist der gegebene Ausdruck, der ein Grösstes oder Kleinstes werden soll, eine reine Urfunktion, oder enthält er auch (totale oder partielle) Differentiale; so hat diese Untersuchung keine weitere Schwierigkeit, sie lässt sich jedesmal mittelst der Theorie der unbestimmten Koefficienten oder mittelst der Theorie der Gleichungen ausführen. Ist aber der vorgelegte Ausdruck, der ein Grösstes oder Kleinstes werden soll, ein Integral; so kann die in Rede stehende Untersuchung manchem, der in der höheren Analysis nicht viele Fertigkeit hat, bedeutende Schwierigkeiten verursachen. Die hier folgende Abhandlung soll sich daher nur auf solche Probleme erstrecken, wo der vorgelegte Ausdruck ein Integral ist; und dabei mögen zwei Abtheilungen gemacht werden, je nachdem derselbe entweder ein einfaches, oder ein zweifaches, dreifaches, u. s. w. Integral ist.

Erste Abtheilung.

Der vorgelegte Ausdruck sei ein einfaches Integral. Diese Aufgabe ist folgende: Es sei V ein aus den Elementen

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\ \ldots\ldots\ \frac{d^my}{dx^m},\ z,\ \frac{dz}{dx},\ \ldots\ldots\ \frac{d^nz}{dx^n},\ v,\ \frac{dv}{dx},\ \ldots\ldots$$

Digitized by Google

gebildeter Ausdruck, und man sucht für y, z, v ..... solche Funktionen von x, dass dabei das von $x=a$ bis $x=a$ erstreckte Integral

$$U=\int_a^a V\,.\,dx$$

ein Grösstes oder Kleinstes wird.

Erstens. Wenn V ein nur aus den Elementen x, y, $\frac{dy}{dx}$ ... ... $\frac{d^m y}{dx^m}$ gebildeter Ausdruck ist, man also nur y als eine solche Funktion von x sucht, dass dabei $U=\int_a^a V\,.\,dx$ ein Grösstes oder Kleinstes wird, so hat man den einfachsten Fall. Die Untersuchung, wann die zweite Variation $\delta^2 U$ positiv oder negativ sei, oder weder als positiv noch als negativ gelten kann, ist bereits von französischen Mathematikern ausgeführt. Z. B.

1) von Laplace. Nova acta eruditorum. 1772. S. 193
2) von Legendre. Mémoires de l'Acad. des Sciences de Paris. 1786, p. 7; et 1787, p. 348
3) von Lagrange. Théorie des Fonctions analytiques, 2. édit. p. 276. In Crelle's Uebersetzung der Lagrange'schen Werke lese man. Bd. I. S. 500. ff.

Zweitens. Wenn aber bei dem zusammengesetzteren Falle, wo nemlich y, z, v, u. s. w. als solche Funktionen von x gesucht werden, dass $U=\int_a^a V\,.\,dx$ ein Grösstes oder Kleinstes wird, die zweite Variation $\delta^2 U$ positiv oder negativ ist, oder weder als positiv noch als negativ gelten kann: diese Untersuchung hat ein deutscher Mathematiker ausgeführt, und jeder schon so weit gediehene Analytiker wird sie mit Vergnügen lesen. Man sehe: Lehre des Grössten und Kleinsten von M. Ohm. Berlin. 1825. S. 279—283, S. 292, 293.

So gewiss es aber ist, dass diese Untersuchungen für den zur Reife gediehenen Analytiker nichts mehr zu wünschen übrig lassen; eben so gewiss ist es auch, dass sehr Viele, und sogar solche, die über Variationskalkul zu schreiben unternommen haben, nicht in den Geist derselben eindringen konnten. Besagten Leuten wäre es besser ergangen, wenn sie nur ein einziges Problem vollständig durchgeführt, und die sich dabei ergebende zweite Variation mit Umsicht untersucht hätten. Ich halte es daher für nicht überflüssig, einige einfache Probleme hier aufzustellen, und dann erst zur zweiten Abtheilung, wo vielfache Integrale vorkommen, überzugehen.

Erstes Problem. Man sucht diejenige *ebene* Kurve, welche von zwei zu den Abscissen a und a gehörigen rechtwinkligen Ordinaten begränzt wird, und zwischen ihren Gränzpunkten die kürzeste ist, während für diese Gränzordinaten selbst vorgeschrieben ist, dass ihr Pro-

dukt unter allen Umständen einen bestimmt gegebenen negativen Werth $(-k^2)$ haben soll.

Die Aufgabe ist also: Es soll y als solche Funktion von x gesucht werden, dass das bestimmte Integral

$$\text{I.}\quad U=\int_a^a dx\,.\,\sqrt{1+p^2}$$

ein Grösstes oder Kleinstes wird, während eben diese für y gesuchte Funktion nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt werden darf, bei denen die Gleichung

$$\text{II.}\quad y_a\,.\,y_\alpha=-k^2$$

statt findet.

Hier ist nach Euler's Bezeichnung $p=\frac{dy}{dx}$; und y_a bedeutet, dass man in der für y gesuchten Funktion a an die Stelle des x gesetzt habe. Ebenso verhält es sich mit y_α.

Variirt man Gleichung I., so bekommt man bekanntlich

$$\text{III.}\quad \delta U=\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha\,.\,\delta y_\alpha-\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a\,.\,\delta y_a$$
$$+\int_a^\alpha\left(-\frac{d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)}{dx}\right)\,.\,\delta y\,.\,dx$$

und

$$\text{IV.}\quad \delta^2 U=\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha\,.\,\delta^2 y_\alpha-\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a\,.\,\delta^2 y_a$$
$$+\int_a^\alpha\left[-\frac{d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)}{dx}\,.\,\delta^2 y+\frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\,.\,\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right]\,.\,dx.$$

Auch hier bedeuten die unten angehängten a und α, dass man a und α an die Stelle des x zu setzen habe. Wenn man Gleichung II. variirt, und dabei die Ausdrücke δy_α, $\delta^2 y_\alpha$, u. s. w. als solche behandelt, deren Werth von δy_a, $\delta^2 y_a$, u. s. w. abhängig ist; so bekommt man

$$\text{V.}\quad \delta y_\alpha=\frac{k^2}{y_a{}^2}\,\delta y_a,$$

$$\text{VI.}\quad \delta^2 y_\alpha=\frac{k^2}{y_a{}^2}\,.\,\delta^2 y_a-2\,.\,\frac{k^2}{y_a{}^3}\,.\,\delta y_a{}^2.$$

Eliminirt man δy_α aus III., so bekommt man

$$\text{VII.}\quad \delta U=\left[\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha\,.\,\frac{k^2}{y_a{}^2}-\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a\right]\,.\,\delta y_a$$
$$+\int_a^\alpha\left(-\frac{d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)}{dx}\right)\delta y\,.\,dx.$$

Daraus ergibt sich nun die Hauptgleichung

$$\text{VIII.} \quad \frac{d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)}{dx} = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{IX.} \quad \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \frac{k^2}{y_a^2} - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a = 0.$$

Integrirt man die Hauptgleichung, so ergibt sich

$$\text{X.} \quad y = A \,.\, x + B$$

d. h. die gesuchte ebene Kurve ist die grade Linie; und wenn man A statt p, und $A\alpha + B$ statt y_a in IX. einsetzt, so bekommt man

$$\frac{A \,.\, k^2 - (A \,.\, \alpha + B)^2 \,.\, A}{(A\alpha + B)^2 \,.\, \sqrt{1+A^2}} = 0$$

oder

$$\text{XI.} \quad A \,.\, [k^2 - (A\alpha + B)^2] = 0.$$

Setzt man eben so $A\alpha + B$ und $A\mu + B$ bezüglich statt y_a und y_α in II. ein; so bekommt man

$$\text{XII.} \quad (A \,.\, \alpha + B) \,.\, (A \,.\, \alpha + B) = -k^2.$$

Die Gleichungen XI. und XII. dienen zur Bestimmung der Konstanten A und B.

Gleichung XI. wird erfüllt, wenn $A = 0$; dabei reducirt sich XII. auf $B^2 = -k^2$. Diese Gleichung enthält einen Widerspruch in sich selbst; es kann also nicht $A = 0$ sein.

Gleichung XI. wird auch erfüllt, wenn $k^2 - (A\alpha + B)^2 = 0$ ist. Daraus folgt $A\alpha + B = \pm\sqrt{k^2}$; und XII. geht über in $(A\alpha + B) \,.\, (\pm\sqrt{k^2}) = -k^2$, d. h. es ist $A\alpha + B = \mp\sqrt{k^2}$. Gleichung X. geht also über

$$\text{XIII.} \quad y = \pm\frac{2 \,.\, \sqrt{k^2}}{\alpha - a} \,.\, x \mp \frac{(a+\alpha) \,.\, \sqrt{k^2}}{\alpha - a}.$$

Die gefundene Grade schneidet also die Abscissenaxe da, wo $x = \frac{a+\alpha}{2}$, d. h. mitten zwischen den Gränzordinaten. Sie geht von oben nach unten, wenn man

$$y = -\frac{2 \,.\, \sqrt{k^2}}{\alpha - a} \,.\, x + \frac{(a+\alpha) \,.\, \sqrt{k^2}}{\alpha - a}$$

setzt; dagegen geht sie von unten nach oben, wenn man

$$y = \frac{2 \,.\, \sqrt{k^2}}{\alpha - a} \,.\, x - \frac{(a+\alpha) \,.\, \sqrt{k^2}}{\alpha - a}$$

setzt.

Eliminirt man nun $\delta^2 y_\alpha$ aus IV., und berücksichtigt man noch die Hauptgleichung VIII.; so reducirt sich IV. auf

$$\text{XIV.}\quad \delta^2 U = -\frac{2A \cdot k^2}{y^2{}_a \cdot \sqrt{1+A^2}} \cdot \delta y^2{}_a + \frac{1}{\sqrt{(1+A^2)^3}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

und es fragt sich: kann dieser für $\delta^2 U$ hergestellte Ausdruck als positiv oder als negativ gelten? Um diese Frage zu beantworten, nehme man das von a bis x erstreckte Integral $\int_a^x \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$. und setze

$$\text{XV.}\quad \int_a^x \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx = (\varphi x) \cdot \delta y^2{}_x - (\varphi a) \cdot \delta y^2{}_a + \int_a^x \left[\frac{d\delta y}{dx} + (\psi x) \cdot \delta y\right]^2 \cdot dx$$

wo φx und ψx zwei noch zu bestimmende Funktionen sind. Differentiirt man nun auf beiden Seiten, und dividirt man dann Alles mit dx; so bekommt man

$$\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 = \frac{d\varphi x}{dx} \cdot \delta y^2{}_x + 2 \cdot (\varphi x) \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \left[\frac{d\delta y}{dx} + (\psi x)\delta y\right]^2$$

oder

$$\text{XVI.}\quad \left[\frac{d\varphi x}{dx} + (\psi x)^2\right] \cdot \delta y^2{}_x + 2 \cdot \left[(\varphi x) + (\psi x)\right] \cdot \delta y_x \cdot \frac{d\delta y}{dx} = 0.$$

Diese Gleichung gilt für jede beliebige Funktion δy von x und bei jedem beliebigen Werthe des x; sie muss also in folgende zwei identische Gleichungen zerfallen:

$$\frac{d\varphi x}{dx} + (\psi x)^2 = 0 \text{ und } (\varphi x) + (\psi x) = 0.$$

Daraus folgt $\varphi x = \frac{1}{x+c}$ und $\psi x = -\frac{1}{x+c}$, wo c eine durch die Integration eingegangene willkührliche Konstante ist. Gleichung XV. geht also über in

$$\int_a^x \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx = \frac{1}{x+c} \cdot \delta y^2{}_x - \frac{1}{a+c} \cdot \delta y^2{}_a + \int_a^x \left(\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{x+c} \cdot \delta y\right)^2 \cdot dx.$$

Diese Gleichung gilt bei jedem beliebigen Werthe des x, also auch bei $x = \alpha$; und man hat folglich

$$\text{XVII.}\quad \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx = \frac{1}{\alpha+c} \cdot \delta y^2{}_\alpha - \frac{1}{a+c} \cdot \delta y^2{}_a + \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{x+c} \cdot \delta y\right)^2 \cdot dx.$$

Man beachte nun folgende drei Punkte:

1) Es existirt durchaus keine Bedingung, von welcher der Werth der Konstanten c abhängt;

2) Man mag der Konstanten c was immer für einen Werth beilegen, dieser Werth hat niemals Einfluss auf δy und $\frac{d\delta y}{dx}$; und

3) So wie der Werth des linken Theils der Gleichung XVII. von c unabhängig ist, eben so ist der Werth des rechten Theils dieser Gleichung von c unabhängig. Dieses kann man aber noch auf folgende Art näher nachweisen: Weil

$$(\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{x+c} \cdot \delta y)^2 = (\frac{d\delta y}{dx})^2 - \frac{d(\frac{1}{x+c} \cdot \delta y^2)}{dx},$$

so kann man statt Gleichung XVII. auch schreiben

$$\text{XVIII.} \quad \int_a^\alpha (\frac{d\delta y}{dx})^2 \cdot dx = \frac{1}{\alpha+c} \cdot \delta y^2{}_\alpha - \frac{1}{a+c} \cdot \delta y^2{}_a + \int_a^\alpha \left[(\frac{d\delta y}{dx})^2 - \frac{d(\frac{1}{x+c}\delta y^2)}{dx} \right] \cdot dx$$

und wenn man das vollständige Differential integrirt, so bleibt bloss

$$\int_a^\alpha (\frac{d\delta y}{dx})^2 \cdot dx = \int_a^\alpha (\frac{d\delta y}{dx})^2 \cdot dx.$$

Hierdurch ist also strenge nachgewiesen, dass der Werth des rechten Theiles der Gleichung XVII. von c unabhängig ist. Wenn man nun aus XVII. den mit $\int_a^\alpha (\frac{d\delta y}{dx})^2 \cdot dx$ gleichbedeutenden Ausdruck in XIV. einsetzt, und dann noch $\delta y^2{}_\alpha$ eliminirt; so bekommt man

$$\text{XIX.} \quad \delta^2 U = \frac{1}{\sqrt{1+A^2}} \left[-\frac{2A \cdot k^2}{y^3{}_a} + \frac{k^4}{(1+A^2) \cdot (\alpha+c) \cdot y^4{}_a} - \frac{1}{(1+A^2) \cdot (a+c)} \right] \cdot \delta y^2{}_a + \frac{1}{(1+A^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \int_a^\alpha [\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{x+c} \cdot \delta y]^2 \cdot dx.$$

Da nun der Werth des $\delta^2 U$ von der Konstanten c unabhängig ist; so lege man dem c einen solchen Werth bei, dass die Gleichung stattfindet:

$$\text{XX.} \quad -\frac{2A \cdot k^2}{y^3{}_a} + \frac{k^4}{(1+A^2) \cdot (\alpha+c) \cdot y^4{}_a} - \frac{1}{(1+A^2) \cdot (a+c)} = 0.$$

Dabei reducirt sich XIX. auf

$$\text{XXI.} \quad \delta^2 U = \frac{1}{(1+A^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \int_a^\alpha (\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{x+c} \cdot \delta y)^2 \cdot dx.$$

Aus Gleichung XX. ergeben sich zwei verschiedene Werthe für c, von denen man nach Belieben den einen oder den andern in XXI. einzusetzen hat. An XXI. aber erkennt man, dass $\delta^2 U$ positiv ist; denn das Radikal $(1+A^2)^{\frac{1}{2}}$ hat nur seine positive Bedeutung,

weil es in Gleichung I. nur als positiv vorausgesetzt worden ist, wie auf folgende Weise erörtert werden mag:

Die Differenz $\alpha - a$ ist positiv, also muss (wie aus der Theorie der Rectifikation bekannt ist) die erste Ableitung des Bogens bei jedem zwischen a und α liegenden Werthe des x positiv sein, d. h. das Radikal $\sqrt{1+p^2}$ darf in Gleichung I. nur nach seiner positiven Bedeutung genommen werden, welche Einschränkung durch die ganze Aufgabe festgehalten werden muss.

Zweites Problem. Man sucht y als solche Funktion von x, dass das bestimmte Integral

$$\text{I.} \quad U = \int_a^\alpha [4y^2 + 2my \cdot \frac{dy}{dx} - (\frac{dy}{dx})^2] \cdot dx$$

ein Grösstes oder Kleinstes wird.

Man variire, und setze dann zur Abkürzung p statt $\frac{dy}{dx}$; so bekommt man

$$\text{II.} \quad \delta U = 2 \cdot (my-p)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - 2 \cdot (my-p)_a \cdot \delta y_a + 2 \cdot \int_a^\alpha (4y + mp - \frac{d(my-p)}{dx}) \delta y \cdot dx$$

$$\text{III.} \quad \delta^2 U = 2 \cdot (my-p)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - 2 \cdot (my-p)_a \cdot \delta^2 y_a + 2 \cdot \int_a^\alpha [(4y + mp - \frac{d(my-p)}{dx}) \cdot \delta^2 y + 4 \cdot \delta y^2 + 2m \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2] \cdot dx.$$

Hier hat man als Hauptgleichung

$$\text{IV.} \quad 4y + mp - \frac{d(my-p)}{dx} = 0$$

und als Gränzengleichung hat man

$$\text{V.} \quad (my-p)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - (my-p)_a \cdot \delta y_a = 0.$$

Wenn man die Hauptgleichung integrirt, so bekommt man

$$\text{VI.} \quad y = \frac{h}{2} \cdot \sin(2x+g)$$

als die für y gesuchte Funktion, wo h und g zwei noch zu bestimmende willkührliche Konstanten sind. Die Gränzengleichung geht jetzt über in

$$\text{VII.} \quad [\frac{mh}{2} \cdot \sin(2\alpha+g) - h \cdot \cos(2\alpha+g)] \cdot \delta y_\alpha - [\frac{mh}{2} \cdot \sin(2a+g) - h \cdot \cos(2a+g)] \cdot \delta y_a = 0.$$

Diese Gleichung, welche bei Bestimmung der Konstanten noch be-

Digitized by Google

nützt werden muss, wird sich auf verschiedene Weise zerlegen, je nachdem δy_a und δy_α willkürlich oder abhängig sind. Unter Berücksichtigung der Hauptgleichung reducirt sich nun III. auf

VIII. $$\delta^2 U = 2 \,.\, (my - p)_\alpha \,.\, \delta^2 y_\alpha - 2 \,.\, (my - p)_a \,.\, \delta^2 y_a + \int_a^\alpha [4 \,.\, \delta y^2 + 2m \,.\, \delta y \,.\, \frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2] \,.\, dx.$$

Man nehme nun das von a bis x erstreckte Integral

$$\int_a^x [4 \,.\, \delta y^2 + 2m \,.\, \delta y \,.\, \frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2] \,.\, dx,$$

und setze

IX. $$\int_a^x [4 \,.\, \delta y^2 + 2m \,.\, \delta y \,.\, \frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2] \,.\, dx = (\varphi x) \,.\, \delta y_x^2 - (\varphi a) \,.\, \delta y_a^2 - \int_a^x [\frac{d\delta y}{dx} + (\psi x) \,.\, \delta y]^2 \,.\, dx$$

wo φx und ψx zwei noch zu bestimmende Funktionen sind. Man differentiire auf beiden Seiten, dividire Alles mit dx, und bringe alles auf eine Seite des Gleichheitszeichens; so bekommt man

X. $$[4 - \frac{d\varphi x}{dx} + (\psi x)^2] \,.\, \delta y_x^2 + 2 \,.\, [m - (\varphi x) + (\psi x)] \,.\, \delta y \,.\, \frac{d\delta y}{dx} = 0.$$

Diese Gleichung gilt für jede beliebige Funktion δy von x, und bei jedem beliebigen Werthe des x; sie zerfällt also in folgende zwei identische Gleichungen:

$$4 - \frac{d\varphi x}{dx} + (\psi x)^2 = 0 \text{ und } m - (\varphi x) + (\psi x) = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$\varphi x = m + 2 \,.\, \mathrm{tg}\ (2x + c)$$

und

$$\psi x = 2 \,.\, \mathrm{tg}\ (2x + c).$$

Gleichung IX. geht also jetzt über in

$$\int_a^x [4 \,.\, \delta y^2 + 2m \,.\, \delta y \,.\, \frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2] \,.\, dx = [m + 2 \,.\, \mathrm{tg}\ (2x + c)] \,.\, \delta y_x^2 - [m + 2 \,.\, \mathrm{tg}\ (2a + c)] \,.\, \delta y_a^2 - \int_a^x [\frac{d\delta y}{dx} + 2 \,.\, \delta y \,.\, \mathrm{tg}\ (2x + c)]^2 \,.\, dx.$$

Diese Gleichung gilt bei jedem beliebigen Werthe des x, also auch bei $x = a$; und man hat

Digitized by Google

$$\text{XI.}\quad \int_a^\alpha [4\,.\,\delta y^2 + 2m\,.\,\delta y\,.\,\frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2]\,.\,dx$$
$$= [m + 2\,.\,\mathrm{tg}\,(2\alpha + c)]\,.\,\delta y_\alpha{}^2 - [m + 2\,.\,\mathrm{tg}\,(2a + c)]\,.\,\delta y_a{}^2$$
$$- \int_a^\alpha [\frac{d\delta y}{dx} + 2\,.\,\delta y\,.\,\mathrm{tg}\,(2x + c)]^2\,.\,dx.$$

Sowie der Werth des linken Theiles dieser Gleichung von c unabhängig ist, ebenso ist auch der Werth des rechten Theiles dieser Gleichung von c unabhängig. Dieses kann man aber auf folgende Art näher nachweisen: Weil

$$-[\frac{d\delta y}{dx} + 2\,.\,\delta y\,.\,\mathrm{tg}\,(2x + c)]^2 = 4\,.\,\delta y^2 + 2m\,.\,\delta y\,.\,\frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2$$
$$- \frac{d[(m + 2\,.\,\mathrm{tg}\,(2x + c))\,.\,\delta y^2]}{dx}$$

ist, so kann man statt Gleichung XI. auch setzen

$$\text{XII.}\quad \int_a^\alpha [4\,.\,\delta y^2 + 2m\,.\,\delta y\,.\,\frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2]\,.\,dx$$
$$= [m + 2\,.\,\mathrm{tg}\,(2\alpha + c)]\,.\,\delta y_\alpha{}^2 - [m + 2\,.\,\mathrm{tg}\,(2a + c)]\,.\,\delta y_a{}^2$$
$$+ \int_a^\alpha \{4\delta y^2 + 2m\,.\,\delta y\,.\,\frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2 - \frac{d[(m + 2\,.\,\mathrm{tg}\,(2x + c))\,.\,\delta y^2]}{dx}\}\,.\,dx$$

und wenn man das vollständige Differential integrirt, so bleibt bloss

$$\int_a^\alpha [4\,.\,\delta y^2 + 2m\,.\,\delta y\,.\,\frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2]\,.\,dx$$
$$= \int_a^\alpha [4\,.\,\delta y^2 + 2m\,.\,\delta y\,.\,\frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2]\,.\,dx.$$

Hierdurch ist also strenge erwiesen, dass der Werth des rechten Theiles der Gleichung XI. von c ganz unabhängig ist. Wenn man nun aus XI. den mit

$$\int_a^\alpha [4\,.\,\delta y^2 + 2m\,.\,\delta y\,.\,\frac{d\delta y}{dx} - (\frac{d\delta y}{dx})^2]\,.\,dx$$

gleichbedeutenden Ausdruck in VIII. einsetzt, so bekommt man

$$\text{XIII.}\quad \delta^2 U = 2\,.\,[\frac{mh}{2}\,.\,\sin\,(2\alpha + g) - \cos\,(2\alpha + g)]\,.\,\delta^2 y_\alpha$$
$$+ 2\,.\,[m + 2\,.\,\mathrm{tg}\,(2\alpha + c)]\,.\,\delta y_\alpha{}^2$$
$$- 2\,.\,[\frac{mh}{2}\,.\,\sin\,(2a + g) - \cos\,(2a + g)]\,.\,\delta^2 y_a$$
$$- 2\,.\,[m + 2\,.\,\mathrm{tg}\,(2a + c)]\,.\,\delta y_a{}^2$$
$$- 2\,.\int_a^\alpha [\frac{d\delta y}{dx} + 2\,.\,\delta y\,.\,\mathrm{tg}\,(2\alpha + c)]^2\,.\,dx.$$

Wenn nun nicht $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, u. s. w.

ist, so kann man doch jedesmal der Konstanten c einen solchen Werth beilegen, dass das ausserhalb des Integralzeichens befindliche Aggregat wegfällt; und dabei reducirt sich Gleichung XIII. auf

$$\delta^2 U = -2 \cdot \int_a^a [\frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot \delta y \cdot \mathrm{tg}\ (2\alpha + c)]^2 \cdot dx,$$

woraus man erkennt, dass $\delta^2 U$ negativ ist, und ein Grösstes stattfindet.

Drittes Problem. Man sucht unter allen *ebenen* Kurven, welche zwischen den zu den Abscissen a und α gehörigen rechtwinkligen Gränzordinaten einerlei Flächeninhalt einschliessen, diejenige, bei welcher der Schwerpunkt am höchsten oder tiefsten (der horizontal genommenen Abscissenaxe so nahe oder ferne als möglich) liegt.

Die hiesige Aufgabe verlangt also für y eine solche Funktion von x, dass der Quotient

$$\text{I.} \quad U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \cdot dx}{2 \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx}$$

ein Grösstes oder Kleinstes wird, während eben diese für y gesuchte Funktion nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt werden darf, bei denen allen das bestimmte Integral

$$\text{II.} \quad \int_a^\alpha y \cdot dx$$

den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt.

Dies Problem gehört in die Klasse derjenigen, welche von Euler relative Grösste oder Kleinste genannt werden. Er verfährt dabei auf folgende Weise: Er multiplicirt den Ausdruck II. mit einem (vorerst noch unbekannten aber im Laufe der Untersuchung sich bestimmenden) konstanten Faktor, und addirt dann dieses Produkt zu I. Er setzt also

$$\text{III.} \quad U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \cdot dx}{2 \int_a^\alpha y \cdot dx} + L \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx$$

und sucht diejenige Funktion y von x auf, welche den Ausdruck III. zu einem Grössten oder Kleinsten macht.

Dieses Verfahren wäre allerdings gerechtfertigt, wenn der Ausdruck II. selbst Null wäre, und wenn sowohl ein abhängig variables als auch ein unabhängig variables Element vorhanden wäre; dann wäre der Ausdruck III. dem Ausdrucke I. vollkommen gleich, und der Faktor L würde dazu dienen, die Variationen des abhängig variablen Elementes zu eliminiren. Allein da das bestimmte Integral II. nicht Null ist, so ist das in III. stehende U ein ganz anderes, als das in I. stehende U, und es fragt sich: Wie geht

es zu, dass diejenige Funktion y von x, welche den Ausdruck III. zu einem Grössten oder Kleinsten macht, auch den Ausdruck I. zu einem Grössten oder Kleinsten macht; und woher weiss man, dass die gesuchte Funktion y von x nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt ist, welche alle für das bestimmte Integral II. den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth liefern?

Ein Versuch, diese zwei Fragen theoretisch zu beantworten, wird jedesmal ein Versuch bleiben; und es ist nöthig, statt der Euler'schen Methode eine andere aufzustellen, um so mehr, als die Euler'sche Methode bei vielen Problemen dann, wenn man das Kennzeichen für die Existenz eines Grössten oder Kleinsten herstellen will, ganz falsche Ausdrücke liefert. Dieses ist namentlich in dem hier vorgelegten Probleme der Fall (man lese die Bemerkung hinter Gleichung IX.).

Thatsache ist es aber, dass die Euler'sche Methode jedesmal die richtige Funktion y von x liefert.

Nun mag das vorgelegte Problem nach der Euler'schen Methode durchgeführt werden. Man variire Gleichung III., bringe Alles auf einen Nenner, und setze dann im Nenner zur Abkürzung A statt $\int_a^a y \,.\, dx$; dann bekommt man

$$\text{IV.}\quad \delta U = \frac{1}{2\,.\,A^2}\,.\,\{2\,.\int_a^a y\,.\,\delta y\,.\,dx \times \int_a^a y\,.\,dx$$

$$-\int_a^a y^2\,.\,dx \times \int_a^a \delta y\,.\,dx + 2L\,.\,\left(\int_a^a y\,.\,dx\right)^2 \times \int_a^a \delta y\,.\,dx\}.$$

Nun setze man, was aber in der Theorie des Variationskalkul's noch erörtert werden muss,

$$\text{V.}\quad \int_a^a y^2\,.\,dx = C\,.\int_a^a y\,.\,dx$$

d. h. man setze $\int_a^a y^2\,.\,dx = A\,.\,C$, so geht Gleichung IV. über in

$$\text{VI.}\quad \delta U = \frac{1}{2A}\,.\int_a^a (2y - C + 2AL)\,.\,\delta y\,.\,dx.$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{VII.}\quad 2y - C + 2\,.\,A\,.\,L = 0$$

und eine Gränzgleichung gibt es nicht. Man hat also die mit der Abscissenaxe parallele Grade. Bei Bestimmung der Konstanten muss Gleichung V. mit benutzt werden; diese geht jetzt über in

$$\left(\frac{C - 2A\,.\,L}{2}\right)^2\,.\,(a - a) = C\,.\left(\frac{C - 2AL}{2}\right)\,.\,(a - a).$$

Diese Gleichung enthält keinen Widerspruch in sich selbst, sondern liefert $2AL = -C$; und wenn man AL aus VII. eliminirt, so ergibt sich

VIII. $y = C$

als Gleichung der gesuchten Graden, wo C eine noch zu bestimmende Konstante ist, die wenn z. B. vorgeschrieben ist, dass der in Rede stehende Flächeninhalt den bestimmten Werth g^2 habe, durch die Gleichung $\int_a^\alpha y \,.\, dx = g^2$ bestimmt wird; denn diese Gleichung, wenn man C statt y setzt und integrirt, geht über in $C \,.\, (\alpha - a) = g^2$, und daraus folgt $C = \frac{g^2}{\alpha - a}$.

Um zu entscheiden, ob ein Grösstes oder Kleinstes statfinde, hat man in Gleichung IV. nur den Zähler zu variiren; und man bekommt zunächst

$$\delta^2 U = \frac{1}{2 \,.\, A^2} \,.\, \Big\{ 2 \,.\, \int_a^\alpha y \,.\, \delta^2 y \,.\, dx \times \int_a^\alpha y \,.\, dx$$
$$- \int_a^\alpha y^2 \,.\, dx \times \int_a^\alpha \delta^2 y \,.\, dx + 2L \,.\, \Big(\int_a^\alpha y \,.\, dx \Big)^2 \times \int_a^\alpha \delta^2 y \,.\, dx$$
$$+ 2 \,.\, \int_a^\alpha \delta y^2 \,.\, dx \times \int_a^\alpha y \,.\, dx + 4L \,.\, \int_a^\alpha y \,.\, dx \times \Big(\int_a^\alpha \delta y \,.\, dx \Big)^2 \Big\}.$$

Setzt man A statt $\int_a^\alpha y \,.\, dx$, und AC statt $\int_a^\alpha y^2 \,.\, dx$; so geht dieser Ausdruck über in

$$\delta^2 U = \frac{1}{2A} \,.\, \Big\{ \int_a^\alpha (2y - C + 2AL) \,.\, \delta^2 y \,.\, dx$$
$$+ 2 \,.\, \int_a^\alpha \delta y^2 \,.\, dx + 4L \,.\, \Big(\int_a^\alpha \delta y \,.\, dx \Big)^2 \Big\}.$$

Dieser Ausdruck reducirt sich wegen Gleichung VII. auf

$$\delta^2 U = \frac{1}{A} \,.\, \Big\{ \int_a^\alpha \delta y^2 \,.\, dx + 2L \,.\, \Big(\int_a^\alpha \delta y \,.\, dx \Big)^2 \Big\}.$$

Nun ist $A = \int_a^\alpha y \,.\, dx = C \,.\, (\alpha - a)$, also $L = -\frac{C}{2A} = -\frac{1}{2(\alpha - a)}$; und somit hat man

IX. $$\delta^2 U = \frac{1}{C \,.\, (\alpha - a)} \,.\, \Big\{ \int_a^\alpha \delta y^2 \,.\, dx - \frac{1}{\alpha - a} \,.\, \Big(\int_a^\alpha \delta y \,.\, dx \Big)^2 \Big\}.$$

Man erkennt aber gradezu, dass das innerhalb der Haken stehende Aggregat weder als positiv noch als negativ gelten kann, so dass es das Ansehen hat, als fände weder ein Grösstes noch Kleinstes statt. Allein es ist in der That der Fall, dass unter allen Figuren, die denselben Inhalt und dieselbe Grundlinie haben, und von auf der Grundlinie stehenden Perpendikeln begränzt sind, das Rechteck seinen Schwerpunkt am tiefsten liegen hat. Dieses wird auch noch durch den nach der Lagrange'schen Methode für $\delta^2 U$ hergestellten Ausdruck XXI. bestätigt; und somit bleibt nichts anderes übrig, als den nach der Euler'schen Me-

thode für $\delta^2 U$ hergestellten Ausdruck für einen unrichtigen zu erklären.

Es entsteht also die dritte Frage: Wie geht es zu, dass man, wenn man das Produkt $L \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx$ zu $U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \cdot dx}{\int_a^\alpha y \cdot dx}$ addirt, und dann diese Summe variirt, die richtige Funktion y von x bekommt, während noch der für $\delta^2 U$ sich ergebende Ausdruck unrichtig sein kann?

Diese dritte Frage lässt sich ebenso wenig theoretisch beantworten, als die beiden früheren; und man ist bei der Euler'schen Methode in der Lage, in welcher man bei jedem bloss empirischen Verfahren ist; und dieser Umstand hätte längst veranlassen sollen, eine streng einleuchtende Methode für diese Probleme aufzustellen.

Lagrange, dem alle diese Mängel der Euler'schen Methode nicht entgangen sein können, schlägt ein anderes Verfahren vor; er setzt nemlich statt des Ausdruckes II. die identische Gleichung

$$\text{X.} \quad \int_a^x y \cdot dx = z_x - z_a.$$

Daraus folgt durch Differentiation

$$\text{XI.} \quad y = \frac{dz}{dx}.$$

Da nun der Flächeninhalt entweder vorgeschrieben oder nach Willkür gewählt werden kann; so ist z das unabhängig variable und y das abhängig variable Element. Man eliminire also y aus I., so ergibt sich

$$\text{XII.} \quad U = \frac{\int_a^\alpha (\frac{dz}{dx})^2 \cdot dx}{2 \cdot \int_a^\alpha (\frac{dz}{dx}) \cdot dx}.$$

Man variire, bringe Alles auf einen Nenner, und setze dann im Nenner zur Abkürzung A statt $\int_a^\alpha (\frac{dz}{dx}) \cdot dx$; so bekommt man zunächst

$$\delta U = \frac{1}{2A^2} \cdot \{2 \cdot \int_a^\alpha (\frac{dz}{dx}) \cdot (\frac{d\delta z}{dx}) \cdot dx \times \int_a^\alpha (\frac{dz}{dx}) \cdot dx$$

$$- \int_a^\alpha (\frac{dz}{dx})^2 \cdot dx \times \int_a^\alpha (\frac{d\delta z}{dx}) \cdot dx\}.$$

Nun setze man, was aber in der Theorie des Variationskalkuls noch näher erörtert werden muss,

$$\text{XIV.} \quad \int_a^\alpha (\frac{dz}{dx})^2 \cdot dx = E \cdot \int_a^\alpha (\frac{dz}{dx}) \cdot dx$$

d. h. man setze $\int_a^\alpha (\frac{dz}{dx})^2 \,.\, dx = A \,.\, E$, so geht Gleichung XIII. über in

$$\delta U = \frac{1}{2A} \,.\, \{2 \,.\, \int_a^\alpha (\frac{dz}{dx}) \,.\, (\frac{d\delta z}{dx}) \,.\, dx - E \,.\, \int_a^\alpha (\frac{d\delta z}{dx}) \,.\, dx\}.$$

Aber weil E konstant ist, so kann man auch setzen

$$\delta U = \frac{1}{2A} \,.\, \int_a^\alpha (2 \,.\, \frac{dz}{dx} - E) \,.\, (\frac{d\delta z}{dx}) \,.\, dx$$

und wenn man die gehörige Umformung ausführt, so bekommt man

$$\text{XV.} \quad \delta U = \frac{1}{2A} \,.\, [2 \,.\, (\frac{dz}{dx})_\alpha - E] \,.\, \delta z_\alpha - \frac{1}{2A} \,.\, [2 \,.\, (\frac{dz}{dx})_a - E] \,.\, \delta z_a - \frac{1}{A} \,.\, \int_a^\alpha (\frac{dz^2}{dx^2}) \,.\, \delta z \,.\, dx.$$

Dieser Ausdruck zerlegt sich in die Hauptgleichung

$$\text{XVI.} \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = 0$$

und in die Gränzengleichung

$$\text{XVII.} \quad [2 \,.\, (\frac{dz}{dx})_\alpha - E] \,.\, \delta z_\alpha - [2 \,.\, (\frac{dz}{dx})_a - E] \,.\, \delta z_a = 0.$$

Integrirt man die Hauptgleichung, so bekommt man

$$\text{XVIII.} \quad z = C \,.\, x + F.$$

Es ist also $(\frac{dz}{dx})_\alpha = (\frac{dz}{dx})_a = C$, und die Gränzengleichung geht über in

$$\text{XIX.} \quad (C - E) \,.\, (\delta z_\alpha - \delta z_a) = 0.$$

Allein eben weil die gesuchte Kurve nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt werden darf, bei denen allen das bestimmte Integral $\int_a^\alpha y \,.\, dx = z_\alpha - z_a$ denselben (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält; so ist jetzt $\delta z_\alpha - \delta z_a = 0$, $\delta^2 z_\alpha - \delta^2 z_a = 0$, u. s. w., und die Gränzengleichung fällt von selbst weg, so dass daraus für die Bestimmung der Konstanten C und F nichts gewonnen werden kann. Weil aber $y = \frac{dz}{dx}$, so ist die jetzt gesuchte Kurve gegeben durch

$$\text{XX.} \quad y = C.$$

Man hat also wieder die mit der Abscissenaxe parallele Grade wie bei der Euler'schen Methode. Die Konstante C wird, wenn das Integral $\int_a^\alpha y \,.\, dx$ den gegebenen Werth g^2 haben soll,

Digitized by Google

durch die Gleichung $C.(a-a)=g^2$ bestimmt, wie schon bei der ersten Auflösung gezeigt ist.

Um zu entscheiden ob ein Grösstes oder Kleinstes stattfinde, hat man in Gleichung XIII. nur den Zähler zu variiren; und man bekommt zunächst

$$\delta^2 U = \frac{1}{2A^2} \cdot \{2 \cdot \int_a^\alpha (\frac{dz}{dx}) \cdot (\frac{d\delta^2 z}{dx}) \cdot dx \times \int_a^\alpha (\frac{dz}{dx}) \cdot dx$$

$$- \int_a^\alpha (\frac{dz}{dx})^2 \cdot dx \times \int_a^\alpha (\frac{d\delta^2 z}{dx}) \cdot dx$$

$$+ 2 \cdot \int_a^\alpha (\frac{d\delta z}{dx})^2 \cdot dx \times \int_a^\alpha (\frac{dz}{dx}) \cdot dx \}.$$

Man forme um, setze A statt $\int_a^\alpha (\frac{dz}{dx}) \cdot dx$, und benutze noch Gleichung XIV.; so ergibt sich

$$\delta^2 U = \frac{1}{2A} \cdot (C-E) \cdot (\delta^2 z_\alpha - \delta^2 z_a) - \frac{1}{2A} \cdot \int_a^\alpha (\frac{d^2 z}{dx^2}) \cdot \delta^2 z \cdot dx$$

$$+ \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha (\frac{d\delta z}{dx})^2 \cdot dx.$$

In Folge alles Vorhergehenden reducirt sich aber dieser Ausdruck auf

$$\text{XXI.} \quad \delta^2 U = \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha (\frac{d\delta z}{dx})^2 \cdot dx.$$

Man hat also hiermit den Beweis, dass ein Kleinstes stattfindet. (Man sehe Gleichung IX. und die dortige Bemerkung).

Lagrange selbst hat das abhängig variable Element niemals direkt eliminirt, sondern jedesmal mittelst eines Multiplikators. Zu diesem Ende verwandelt er die Gleichung XI. in folgende identische:

$$\text{XXII.} \quad y - \frac{dz}{dx} = 0.$$

Diese Gleichung multiplicirt er dann mit einer (vorerst noch unbekannten sich aber im Laufe der Untersuchung noch bestimmenden) nichtvariablen Funktion $\mathfrak{N}$ von x; dann ist auch noch das Produkt

$$\text{XXIII.} \quad \mathfrak{N} \cdot (y - \frac{dz}{dx}) = 0$$

eine identische Gleichung; und daraus folgt, dass auch noch identisch stattfinden

$$\text{XXIV.} \quad \mathfrak{N} \cdot (\delta y - \frac{d\delta z}{dx}) = 0$$

$$\text{XXV.} \quad \mathfrak{N} \cdot (\delta^2 y - \frac{d\delta^2 z}{dx}) = 0.$$

Es ist also auch

Digitized by Google

$$\text{XXVI.}\quad \int_a^\alpha \mathfrak{N} \,.\, (y - \frac{dz}{dx}) = 0$$

$$\text{XXVII.}\quad \int_a^\alpha \mathfrak{N} \,.\, (\delta y - \frac{d\delta z}{dx}) = 0$$

$$\text{XXVIII.}\quad \int_a^\alpha \mathfrak{N} \,.\, (\delta^2 y - \frac{d\delta^2 z}{dx}) = 0.$$

Man kann also das Integral XXVI. zu I. auf zweierlei Weise addiren, ohne dass dabei das U im geringsten geändert wird, d. h. man kann entweder

$$\text{XXIX.}\quad U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \,.\, dx}{2 \,.\, \int_a^\alpha y \,.\, dx} + \int_a^\alpha \mathfrak{N} \,.\, (y - \frac{dz}{dx}) \,.\, dx$$

oder man kann

$$\text{XXX.}\quad U = \frac{\int_a^\alpha [y^2 + \mathfrak{N} \,.\, (y - \frac{dz}{dx})] \,.\, dx}{2 \,.\, \int_a^\alpha y \,.\, dx}$$

setzen. Variirt man nun, und nimmt die gehörigen Umformungen vor; so gelangt man genau zu den bisherigen Resultaten.

Nun soll über die Lagrange'sche Methode eine nicht unwichtige, sondern sehr beachtenswerthe Untersuchung angestellt werden:

1) So lange nur eine Nebenbedingung gegeben ist, wie im hiesigen Probleme der Fall; so lange ist das Lagrange'sche Verfahren vollkommen einleuchtend.

2) Sind aber zwei oder noch mehr Nebenbedingungen gegeben, so ist das Lagrange'sche Verfahren durchaus unanwendbar. Das folgende Beispiel mag die Sache erläutern. Es soll

$$U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \,.\, dx}{2 \,.\, \int_a^\alpha y \,.\, dx}$$

ein Grösstes oder Kleinstes werden, während y nur aus der Zahl derjenigen Funktionen gewählt werden darf, bei denen allen das Integral

$$\int_a^\alpha y \,.\, dx$$

denselben (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält, und bei denen allen auch das Integral

$$\int_a^\alpha xy \,.\, dx$$

einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält.

Setzt man nun nach Lagrange

$$\int_a^x y \,.\, dx = z_x - z_a$$

und

$$\int_a^x x \,.\, y \,.\, dx = v_x - v_a$$

so ergeben sich daraus durch Differentiation folgende Gleichungen:

$$y = \frac{dz}{dx} \text{ und } xy = \frac{dv}{dx}.$$

Da nun der Werth eines jeden der Integrale $\int_a^a y \,.\, dx$ und $\int_a^a x \,.\, y \,.\, dx$ entweder vorgeschrieben oder nach Willkür gewählt werden kann; so muss sowohl z als auch v eine für sich willkürliche Funktion sein, d. h. sowohl z als auch v muss eine unabhängig variable Funktion sein. Dieses wird aus dem Folgenden ganz evident.

A) Wäre y unabhängig variabel, so wären z und v abhängig variabel, wie aus den Gleichungen $y = \frac{dz}{dx}$ und $xy = \frac{dv}{dx}$ hervorgeht; und z und v hätten keinen Einfluss auf U, so dass sich dasselbe Resultat ergeben würde, wie wenn keine einzige Nebenbedingung gemacht wäre. Es kann also y nicht unabhängig variabel sein.

B) Wäre z allein unabhängig variabel, so würde sich die Abhängigkeit des y durch die Gleichung $y = \frac{dz}{dx}$ ergeben; und zugleich würde $xy = \frac{dv}{dx}$ übergehen in $\frac{dv}{dx} = x \,.\, \frac{dz}{dx}$, d. h. v wäre von z abhängig. Der für U aufgestellte Ausdruck ginge über in $U = \frac{\int_a^a (\frac{dz}{dx})^2 \,.\, dx}{2 \,.\, \int_a^a (\frac{dz}{dx}) \,.\, dx}$, so dass U nur von z abhinge, und v keinen Einfluss auf U hätte, ebenso wenig, als (unter der hiesigen Voraussetzung) v Einfluss auf y hat, da im Gegentheil v von y, und wiederum y von z abhängt. Wenn also z allein unabhängig variabel ist, so ist es grade so, als wenn nur die einzige Nebenbedingung „das bestimmte Integral $\int_a^a y \,.\, dx$ soll immer denselben Werth behalten“ gemacht wäre.

C) Wäre v allein unabhängig variabel, so würde sich die Abhängigkeit des y durch die Gleichung $xy = \frac{dv}{dx}$ ergeben; und zugleich würde $y = \frac{dz}{dx}$ übergehen in $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \,.\, \frac{dv}{dx}$, d. h. z wäre von v abhängig. Der für U aufgestellte Ausdruck ginge über in $U = \frac{\int_a^a (\frac{1}{x} \,.\, \frac{dv}{dx})^2 \, dx}{2 \,.\, \int_a^a (\frac{1}{x} \,.\, \frac{dv}{dx}) \,.\, dx}$, so dass U von v allein abhinge, und z

keinen Einfluss auf U hätte, ebenso wenig als (unter der hiesigen Voraussetzung) z Einfluss auf y hat, da im Gegentheil z von y, und wiederum y von v abhängig ist. Wenn also v allein unabhängig variabel ist, so ist es grade so, als wenn nur die einzige Nebenbedingung „das bestimmte Integral $\int_a^\alpha xy \,.\, dx$ soll immer denselben Werth behalten" gemacht wäre.

Daraus ist evident erwiesen, dass sowohl z als auch v eine für sich unabhängig variable Funktion sein muss. Da nun durchaus kein Eliminationsprocess möglich ist oder auch nur in der Idee gedacht werden kann, durch welchen y von x und v zugleich abhängig wird, wobei dann auch U von x und v zugleich abhängig wird; so muss die Lagrange'sche Methode gradezu verworfen werden. Was aber hier nothwendig ist, wo nur zwei Nebenbedingungen gegeben sind, das ist noch um so mehr nothwendig, wenn drei und noch mehr Nebenbedingungen gegeben sind.

Lagrange hat freilich in seiner Theorie der relativen Grössten und Kleinsten von dem direkten Eliminationsprocesse nichts gesprochen, und doch ist nur durch diesen der Weg vorgezeigt, welcher sicher zu den richtigen Resultaten führt; sondern Lagrange hat auch hier die indirekte Elimination mittelst Multiplikatoren angewendet, indem er die beiden identischen Gleichungen $y - \frac{dz}{dx} = 0$ und $xy - \frac{dv}{dx} = 0$ bezüglich mit den nichtvariablen (vorerst aber noch unbekannten) Funktionen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M}$ multiplicirt, und dann

$$U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \,.\, dx}{2 \,.\, \int_a^\alpha y \,.\, dx} + \int_a^\alpha \mathfrak{N} \,.\, (y - \frac{dz}{dx}) \,.\, dx$$

$$+ \int_a^\alpha \mathfrak{M} \,.\, (xy - \frac{dv}{dx}) \,.\, dx$$

setzt. Allein hiermit ist nichts gewonnen; denn der indirekte Eliminationsprocess soll nur den direkten ersetzen, um bequemer zum Ziele zu gelangen; und ehe man den indirekten anwendet, hat man sich zu überzeugen, ob y von x und v zugleich abhängig sein kann, und also durch y auch U von x und v zugleich abhängig wird.

Die Lagrange'sche Methode hat also den Fehler, dass sie keiner Ausdehnung vom einfachen auf den zusammengesetzten Fall fähig ist; die Euler'sche Methode aber hat den Fehler, dass man bei ihr schon im einfachen Falle nicht recht weiss, was man so eigentlich thut, und somit kann bei ihr auch im zusammengesetzten Falle von keiner Ueberzeugung die Rede sein.

Ich habe die Theorie der relativen Grössten und Kleinsten auf die zusammengesetzten Variationen gegründet, und dadurch über diesen Gegenstand soviel Licht verbreitet, dass nichts mehr zu wünschen übrig bleibt. Ich werde meine Theorie nächstens mittheilen; hier geht es nicht wohl an, da sie dem eigentlichen Zwecke dieser Abhandlung fremd ist.

Zweite Abtheilung.

Wenn b und β keine Funktionen von x sind, und wenn die beiden Differenzen $\alpha - a$ und $\beta - b$ positiv sind; so ist das bestimmte Integral $\int_a^{\alpha}\int_b^{\beta} \varphi(x, y) \,.\, dy \,.\, dx$ jedesmal positiv oder negativ, je nachdem $\varphi(x, y)$ selbst beständig positiv oder beständig negativ bleibt, wenn man dem y alle von b bis β stetig nebeneinander liegenden Werthe beilegt, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des y auch zugleich dem x alle von a bis α stetig nebeneinander liegenden Werthe beilegt.

Beweis. Denkt man sich k im Momente des Verschwindens, so dass

$$b,\ (b+k),\ (b+2k),\ (b+3k),\ \ldots\ldots\ldots,\ (b+(n-1)k),\ \beta$$

alle stetig nebeneinander liegenden Werthe des y von b bis β vorstellen; so ist (nach einem bekannten Lehrsatze)

$$\int_a^{\alpha}\int_b^{\beta} \varphi(x, y) \,.\, dy \,.\, dx = \int_a^{\alpha} k \,.\, [\varphi(x, b) + \varphi(x, b+k) + \varphi(x, b+2k) + \ldots\ldots\ldots + \varphi(x,\ b + (n-1) \,.\, k) + \varphi(x,\ \beta)] \,.\, dx.$$

Denkt man sich auch h im Momente des Verschwindens, so dass auch

$$a,\ (a+h),\ (a+2h),\ (a+3h),\ \ldots\ldots\ldots,\ (a+(m-1)h),\ \alpha$$

alle stetig nebeneinander liegenden Werthe des x von a bis α vorstellen; so hat man jetzt

$$\int_a^{a+h}\int_b^{\beta}\varphi(x, y)\,.\,dy\,.\,dx =$$

$$h\,.\,k\,.\,\tfrac{1}{4}[\varphi(a, b)+\varphi(a, b+k)+\varphi(a, b+2k)+\ldots\ldots\ldots+\varphi(a, \beta)]$$
$$+\,[\varphi(a+h, b)+\varphi(a+h, b+k)+\varphi(a+h, b+2k)+\ldots\ldots\ldots+(a+h, \beta)]$$
$$+\,[\varphi(a+2h, b)+\varphi(a+2h, b+k)+\varphi(a+2h, b+2k)+\ldots\ldots\ldots+\varphi(a+2h, \beta)]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\,[\varphi(\alpha, b)+\varphi(\alpha, b+k)+\varphi(\alpha, b+2k)+\ldots\ldots\ldots+\varphi(\alpha, \beta)]]$$

und hiermit ist der vorgelegte Satz bewiesen. Es leuchtet von selbst ein, dass er seine Giltigkeit behält, wenn auch einer oder mehrere der Theilsätze $\varphi(a, b)$, $\varphi(a, b+k)$, $\varphi(a+h, b+k)$, u. s. w. zu Null werden; dagegen ist offenbar, dass er nicht mehr gelten kann, wenn einer oder mehrere dieser Theilsätze unendlich werden. Wenn aber nicht alle Theilsätze dasselbe Zeichen haben, so kann man im Allgemeinen über

Digitized by Google

den Zeichenstand des bestimmten Integrals $\int_a^\alpha \int_b^\beta \varphi(x, y) \cdot dy \cdot dx$ nichts behaupten, sondern muss jeden speciellen Fall nach seinen Eigenthümlichkeiten untersuchen.

Zugleich ist klar, was die Bedingung ist, unter welcher ein dreifaches, vierfaches, u. s. w. Integral positiv oder negativ wird; und desshalb ist es nicht nöthig, diese Untersuchung noch weiter auszudehnen.

Nun sei V ein reeller mit den Elementen x, y, z, $\frac{dxz}{dx}$, $\frac{dyz}{dy}$ gebildeter Ausdruck; und man sucht z als solche Funktion der beiden nichtvariablen Elemente x und y, dass dabei das bestimmte Integral, wo b und β keine Funktionen von x sind,

$$\text{I.} \quad U = \int_a^\alpha \int_b^\beta V \cdot dy \cdot dx$$

ein Grösstes oder Kleinstes wird.

Dass aber die beiden Elemente b und β von x ganz unabhängig sind, ist ein Punkt, der durch die ganze Untersuchung im Auge behalten werden muss.

Man setze zur Abkürzung p statt $\frac{dxz}{dx}$ und q statt $\frac{dyz}{dy}$, so bekommt man als Hauptgleichung

$$\text{II.} \quad \frac{dzV}{dz} - \frac{d(\frac{dpV}{dp})}{dx} - \frac{d(\frac{dqV}{dq})}{dy} = 0$$

und als Gränzengleichung bekommt man

$$\text{III.} \quad \int_b^\beta [(\tfrac{dpV}{dp})_{a,\,y} \cdot \delta z_{a,\,y} - (\tfrac{dpV}{dp})_{a,\,y} \cdot \delta z_{a,\,y}] \cdot dy$$
$$+ \int_a^\alpha [(\tfrac{dqV}{dq})_{\beta,\,x} \cdot \delta z_{\beta,\,x} - (\tfrac{dqV}{dq})_{b,\,x} \cdot \delta z_{b,\,x}] \cdot dx = 0.$$

Berücksichtigt man die Hauptgleichung, so bekommt man im Allgemeinen für die Variation der zweiten Ordnung

$$\text{IV.} \quad \delta^2 U = \int_b^\beta [(\tfrac{dpV}{dp} \cdot \delta^2 z)_{a,\,y} - (\tfrac{dpV}{dp} \cdot \delta^2 z)_{a,\,y}] \cdot dy$$
$$+ \int_a^\alpha [(\tfrac{dqV}{dq} \cdot \delta^2 z)_{\beta,\,x} - (\tfrac{dqV}{dq} \cdot \delta^2 z)_{b,\,x}] \cdot dx$$
$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta [\tfrac{d^2zV}{dz^2} \cdot \delta z^2 + 2 \cdot \tfrac{dzdpV}{dz \cdot dp} \cdot \delta z \cdot \tfrac{dx\delta z}{dx}$$
$$+ 2 \cdot \tfrac{dzdqV}{dz \cdot dp} \cdot \delta z \cdot \tfrac{dy\delta z}{dy} + \tfrac{d^2pV}{dp^2} \cdot (\tfrac{dx\delta z}{dx})^2 + 2 \cdot \tfrac{dpdqV}{dp \cdot dq} \cdot \tfrac{dx\delta z}{dx} \cdot \tfrac{dy\delta z}{dy}$$
$$+ \tfrac{d^2qV}{dq^2} \cdot (\tfrac{dy\delta z}{dy})^2] \cdot dy \cdot dx.$$

Das Zeichen $(\frac{dpV}{dp} \cdot \delta^2 z)_{a,\,y}$ bedeutet, dass man a an die Stelle des

Digitized by Google

x gesetzt habe, und dass y noch allgemein sei. Auf ähnliche Weise verhält es sich bei den andern Ausdrücken.

Man hat nun zu untersuchen, unter welchen Bedingungen das $\delta^2 U$ beständig negativ oder positiv bleibt, und wann es weder als positiv noch als negativ gelten kann. Man bezeichne zur Abkürzung das, was aus $\frac{d^2zV}{dz^2}$, $\frac{d_zd_pV}{dz.dp}$, $\frac{d_zd_qV}{dz.dq}$, $\frac{d^2pV}{dp^2}$, $\frac{d_pd_qV}{dp.dq}$, $\frac{d^2qV}{dq^2}$ hervorgeht, wenn man für z die gefundene Funktion setzt, bezüglich mit M, N, P, Q, R, S; und setze für das allgemeine bei $x=a$ und $y=b$ anfangende Doppelintegral

$$\text{V.}\quad \int_a^x\int_b^y [M\,.\,\delta z^2 + 2\,.\,N\,.\,\delta z\,.\,\frac{d_x\delta z}{dx} + 2P\,.\,\delta z\,.\,\frac{d_y\delta z}{dy}$$

$$+ Q\,.\,(\frac{d_x\delta z}{dx})^2 + 2R\,.\,\frac{d_x\delta z}{dx}\,.\,\frac{d_y\delta z}{dy} + S\,.\,(\frac{d_y\delta z}{dy})^2]\,.\,dy\,.\,dx$$

$$= \int_b^y [(\eta\,.\,\delta z^2)_{x,\,y} - (\eta\,.\,\delta z^2)_{a,\,y}]\,.\,dy$$

$$+ \int_a^x [(\omega\,.\,\delta z^2)_{x,\,y} - (\omega\,.\,\delta z^2)_{b,\,x}]\,.\,dx$$

$$+ \int_a^x\int_b^y [F\,.\,\delta z^2 + 2E\,.\,\delta z\,.\,\frac{d_x\delta z}{dx} + 2D\,.\,\delta z\,.\,\frac{d_y\delta z}{dy}$$

$$+ C\,.\,(\frac{d_x\delta z}{dx})^2 + 2B\,.\,\frac{d_x\delta z}{dx}\,.\,\frac{d_y\delta z}{dy} + A\,.\,(\frac{d_y\delta z}{dy})^2]\,.\,dy\,.\,dx.$$

Nun differentiire man zweimal auf beiden Seiten, und es ergibt sich

$$M\,.\,\delta z^2 + 2N\,.\,\delta z\,.\,\frac{d_x\delta z}{dx} + 2P\,.\,\delta z\,.\,\frac{d_y\delta z}{dy} + Q\,.\,(\frac{d_x\delta z}{dx})^2$$

$$+ 2R\,.\,\frac{d_x\delta z}{dx}\,.\,\frac{d_y\delta z}{dy} + S\,.\,(\frac{d_y\delta z}{dy})^2 = \frac{d_x\eta}{dx}\,.\,\delta z^2 + 2\eta\,.\,\delta z\,.\,\frac{d_x\delta z}{dx}$$

$$+ \frac{d_y\omega}{dy}\,.\,\delta z^2 + 2\,.\,\omega\,.\,\frac{d_y\delta z}{dy}\,.\,\delta z + F\,.\,\delta z^2 + 2E\,.\,\delta z\,.\,\frac{d_x\delta z}{dx}$$

$$+ 2D\,.\,\delta z\,.\,\frac{d_y\delta z}{dy} + C\,.\,(\frac{d_x\delta z}{dx})^2 + 2B\,.\,\frac{d_x\delta z}{dx}\,.\,\frac{d_y\delta z}{dy} + A\,.\,(\frac{d_y\delta z}{dy})^2$$

Bringt man Alles auf eine Seite des Gleichheitszeichens, so bekommt man

$$(M - \frac{d_x\eta}{dx} - \frac{d_y\omega}{dy} - F)\,.\,\delta z^2 + 2\,.\,(N - \eta - E)\,.\,\delta z\,.\,\frac{d_x\delta z}{dx}$$

$$+ 2\,.\,(P - \omega - D)\,.\,\delta z\,.\,\frac{d_y\delta z}{dy} + (Q - C)\,.\,(\frac{d_x\delta z}{dx})^2$$

$$+ 2(R - B)\,.\,\frac{d_x\delta z}{dx}\,.\,\frac{d_y\delta z}{dy} + (S - A)\,.\,(\frac{d_y\delta z}{dy})^2 = 0.$$

Diese Gleichung gilt bei jeder beliebigen Funktion δz von x und y, und bei jedem beliebigen Werthe des x und des y; sie zerfällt also in folgende einzelne Gleichungen:

Digitized by Google

$$M - \frac{d_x\eta}{dx} - \frac{d_y\omega}{dy} - F = 0$$
$$N - \eta - E = 0$$
$$P - \omega - D = 0$$
$$Q - C = 0$$
$$R - B = 0$$
$$S - A = 0$$

und daraus folgt

$$A = S = \frac{d^2qV}{dq^2}$$
$$B = R = \frac{d_p d_q V}{dp \,.\, dq}$$
$$C = Q = \frac{d^2pV}{dp^2}$$
$$D = P - \omega = \frac{d_z d_q V}{dz \,.\, dq} - \omega$$
$$E = N - \eta = \frac{d_z d_p V}{dz \,.\, dp} - \eta$$
$$F = M - \frac{d_x\eta}{dx} - \frac{d_y\omega}{dy} = \frac{d^2zV}{dz^2} - \frac{d_x\eta}{dx} - \frac{d_y\omega}{dy}.$$

Man erkennt also, dass A, B, C vollkommen bestimmt sind; dagegen D, E, F sind erst dann bestimmt, wenn man einmal weiss, was η und ω für Funktionen von x und y sind. Da aber durchaus keine Bedingung vorhanden ist, welcher die Funktionen ω und η genügen müssen, so sind ω und η ganz willkürliche Funktionen von x und y. Man kann also ω und η so annehmen, dass der Ausdruck

$$\text{VI.}\quad F \,.\, \delta z^2 + 2E \,.\, \delta z \,.\, \frac{d_x\delta z}{dx} + 2D \,.\, \delta z \,.\, \frac{d_y\delta z}{dy} + C \,.\, \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2 + 2B \,.\, \frac{d_x\delta z}{dx} \,.\, \frac{d_y\delta z}{dy} + A \,.\, \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2$$

auf die Form

$$\text{VII.}\quad A \,.\, \left(\frac{d_y\delta z}{dy} + \mathfrak{A} \,.\, \frac{d_x\delta z}{dx} + \mathfrak{B} \,.\, \delta x\right)^2 + A_1 \,.\, \left(\frac{d_x\delta z}{dx} + \mathfrak{C} \,.\, \delta x\right)^2$$

kommt. Diese Form entwickelt gibt

$$\text{VIII.}\quad A \,.\, \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2 + 2A\mathfrak{A} \,.\, \frac{d_y\delta z}{dy} \,.\, \frac{d_x\delta z}{dx} + 2A\mathfrak{B} \,.\, \frac{d_y\delta z}{dy} \,.\, \delta x + (A \,.\, \mathfrak{A}^2 + A_1) \,.\, \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2 + 2 \,.\, (A\mathfrak{A}\mathfrak{B} + A_1 \,.\, \mathfrak{C}) \,.\, \frac{d_x\delta z}{dx} \,.\, \delta x + (A \,.\, \mathfrak{B}^2 + A_1 \,.\, \mathfrak{C}^2) \,.\, \delta x^2.$$

Digitized by Google

Vergleicht man jetzt VIII. mit VI., so ergeben sich folgende einzelne Gleichungen:

$$A = A,\ \mathfrak{A} = \frac{B}{A},\ \mathfrak{B} = \frac{D}{A}$$

$$A_1 = \frac{AC - B^2}{A},\ \mathfrak{C} = \frac{AE - BD}{AC - B^2}$$

und

$$F = A \,.\, \mathfrak{B}^2 + A_1 \,.\, \mathfrak{C}^2,$$

welche letztere Gleichung aber kein Stück enthält, das nicht schon bestimmt wäre; und wenn man für $\mathfrak{B}$, A_1, $\mathfrak{C}$ die Ausdrücke einsetzt, so geht sie über in

$$\text{IX.}\quad F \,.\, (B^2 - AC) = 2BDE - C \,.\, D^2 - AE^2$$

welche Gleichung aber nothwendig existiren muss, wenn der Ausdruck VI. auf die Form VII. soll gebracht werden können. Gleichung IX. ist aber gleichbedeutend mit

$$\text{X.}\quad \left(\frac{d^2 z V}{dz^2} - \frac{d_x \eta}{dx} - \frac{d_y \omega}{dy}\right) \,.\, \left[\left(\frac{d_p d_q V}{dp \,.\, dq}\right)^2 - \frac{d^2 p V}{dp^2} \times \frac{d^2 q V}{dq^2}\right] =$$

$$2 \,.\, \frac{d_p d_q V}{dp \,.\, dq} \,.\, \left(\frac{d_z d_q V}{dz \,.\, dq} - \omega\right) \,.\, \left(\frac{d_z d_p V}{dz \,.\, dp} - \eta\right) - \frac{d^2 p V}{dp^2} \,.\, \left(\frac{d_z d_q V}{dz \,.\, dq} - \omega\right)^2$$

$$- \frac{d^2 q V}{dq^2} \,.\, \left(\frac{d_z d_p V}{dz \,.\, dp} - \eta\right)^2.$$

Dieses ist eine Partialdifferentialgleichung des ersten Grades der ersten Ordnung. Nun existirt zwischen ω und η durchaus keine Abhängigkeit; man kann also entweder für η oder für ω eine beliebige Funktion annehmen.

Die Gleichung $V_{,,}$ welche, indem sie von $x = a$ und $y = b$ bis zu jedem beliebigen Werthe des x und des y erstreckt wird, giltig ist, ist auch giltig, wenn sie von $x = a$ und $y = b$ bis zu $x = \alpha$ und $y = \beta$ erstreckt wird, d. h. es ist

$$\text{XI.}\quad \int_a^{\alpha} \int_b^{\beta} [M \,.\, \delta z^2 + 2N \,.\, \delta z \,.\, \frac{d_x \delta z}{dx} + \ldots\ldots + S \,.\, \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2] \,.\, dy \,.\, dx$$

$$= \int_b^{\beta} [(\eta \,.\, \delta z^2)_{\alpha,\, y} - (\eta \,.\, \delta z^2]_{a,\, y}] \,.\, dy$$

$$+ \int_a^{\alpha} [(\omega \,.\, \delta z^2)_{x,\, \beta} - (\omega \,.\, \delta z^2)_{x,\, b}] \,.\, dx$$

$$+ \int_a^{\alpha} \int_b^{\beta} [A \,.\, \left(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{A} \,.\, \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{B} \,.\, \delta z\right)^2$$

$$+ A_1 \,.\, \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C} \,.\, \delta z\right)^2] \,.\, dy \,.\, dx.$$

Nun ist

$$\mathfrak{B} = \frac{D}{A} = \frac{P - \omega}{A}$$

und

Digitized by Google

$$\mathfrak{C} = \frac{AE - BD}{AC - B^2} = \frac{A \,.\, (N - \eta) - B \,.\, (P - \omega)}{AC - B^2};$$

und weil der linke Theil der Gleichung XI. die Funktionen ω und η gar nicht enthält, so ist der Werth des rechten Theiles von ω und η ganz unabhängig. Aber grade dieser Umstand ist der Hauptpunkt, der von jetzt an noch benutzt werden muss.

Gleichung IV. geht nun über in

$$\text{XII.}\quad \delta^2 U = \int_b^\beta [(\frac{d_p V}{dp} \,.\, \delta^2 x + \eta \,.\, \delta x^2)_{\alpha,\, y} - (\frac{d_p V}{dp} \,.\, \delta^2 x + \eta \,.\, \delta x^2)_{a,\, y}] \,.\, dy$$
$$+ \int_a^\alpha [(\frac{d_q V}{dq} \,.\, \delta^2 x + \omega \,.\, \delta x^2)_{\beta,\, x} - (\frac{d_q V}{dq} \,.\, \delta^2 x + \omega \,.\, \delta x^2)_{b,\, x}] \,.\, dx$$
$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta [A \,.\, (\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{A} \,.\, \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{B} \,.\, \delta z)^2 + A_1 \,.\, (\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C} \,.\, \delta z)^2] \,.\, dy \,.\, dx.$$

Nun mögen folgende specielle Fälle besonders betrachtet werden.

Erster Fall. Sind die Specialitäten von der Art, dass die identischen Gleichungen $\delta x_{\alpha,\, y} = 0$, $\delta x_{a,\, y} = 0$, $\delta x_{\beta,\, x} = 0$, $\delta x_{b,\, x} = 0$, $\delta^2 x_{\alpha,\, y} = 0$, $\delta^2 x_{a,\, y} = 0$, $\delta^2 x_{\beta,\, x} = 0$, $\delta^2 x_{b,\, x} = 0$, u. s. w. stattfinden; so fällt die Gränzengleichung III. von selbst hinweg, und Gleichung XII. reducirt sich gradezu auf

$$\text{XIII.}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta [A \,.\, (\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{A} \,.\, \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{B} \,.\, \delta z)^2 + A_1 \,.\, (\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C} \,.\, \delta z)^2] \,.\, dy \,.\, dx.$$

Zweiter Fall. Sind die Specialitäten von der Art, dass von den Ausdrücken $\delta x_{\alpha,\, y}$, $\delta x_{a,\, y}$, $\delta x_{\beta,\, x}$, $\delta x_{b,\, x}$, $\delta^2 x_{\alpha,\, y}$, $\delta^2 x_{a,\, y}$, $\delta^2 x_{\beta,\, x}$, $\delta^2 x_{b,\, x}$, u. s. w. kein einziger zu Null wird; so wird der Gränzengleichung nur genügt, wenn die vier Gleichungen

$$(\frac{d_p V}{dp})_{\alpha,\, y} = 0, \quad (\frac{d_p V}{dp})_{a,\, y} = 0, \quad (\frac{d_q V}{dq})_{\beta,\, x} = 0, \quad (\frac{d_q V}{dq})_{b,\, x} = 0$$

stattfinden. Dabei reducirt sich Gleichung XII. auf

$$\text{XIV.}\quad \delta^2 U = \int_b^\beta [(\eta \,.\, \delta x^2)_{\alpha,\, y} - (\eta \,.\, \delta x^2)_{a,\, y}] \,.\, dy + \int_a^\alpha [(\omega \,.\, \delta x^2)_{\beta,\, x} - (\omega \,.\, \delta x^2)_{b,\, x}] \,.\, dx$$
$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta [A \,.\, (\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{A} \,.\, \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{B} \,.\, \delta z)^2 + A_1 \,.\, (\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C} \,.\, \delta z)^2] \,.\, dy \,.\, dx.$$

Digitized by Google

Da nun, wie schon bemerkt, sich immer der irgend einem δz entsprechende wahre Werth des $\delta^2 U$ ergibt, es mögen die Funktionen ω und η sein was sie wollen, wenn sie nur in solcher Beziehung zusammen stehen, dass Gleichung X. erfüllt wird; so kann man auf folgende Weise den Zeichenstand des $\delta^2 U$ kennen lernen: Hat man sich einmal unter dem willkührlichen δz irgend eine Funktion von x und y gedacht, so kann man für ω noch eine solche Funktion des einzigen x nehmen, dass die identische Gleichung

$$\text{XV.} \quad (\omega \,.\, \delta z^2)_{\beta,\, x} - (\omega \,.\, \delta z^2)_{b,\, x} = 0$$

stattfindet, was am einfachsten dadurch erreicht wird, dass man gradezu $\omega = 0$ setzt. Dabei ist dann auch $\frac{d_y \omega}{dy} = 0$, und Gleichung X. reducirt sich auf

$$\text{XVI.} \quad \left(\frac{d^2 zV}{dz^2} - \frac{d_x \eta}{dx}\right) \cdot \left[\left(\frac{d_p d_q V}{dp \,.\, dq}\right)^2 - \frac{d^2 pV}{dp^2} \times \frac{d^2 qV}{dq^2}\right]$$
$$= 2 \cdot \frac{d_p d_q V}{dp \,.\, dq} \cdot \frac{d_z d_q V}{dz \,.\, dq} \cdot \left(\frac{d_z d_p V}{dz \,.\, dp} - \eta\right) - \frac{d^2 pV}{dp^2} \cdot \left(\frac{d_z d_q V}{dz \,.\, dq}\right)^2$$
$$- \frac{d^2 qV}{dq^2} \cdot \left(\frac{d_z d_p V}{dz \,.\, dp} - \eta\right)^2.$$

Diese Gleichung, aus welcher ω ganz weggefallen ist, enthält nur den einzigen partiellen Differentialquotienten $\frac{d_x \eta}{dx}$; man bekommt also, wenn man integrirt, für η einen aus x, y, πy gebildeten Ausdruck, wo πy eine durchaus willkührliche Funktion von y ist. Aber eben diese in η enthaltene willkührliche Funktion πy kann man nach der bald so, bald so beliebig genommenen Funktion δz von x und y auch jedesmal bald so, bald so einrichten, dass die identische Gleichung

$$\text{XVII.} \quad (\eta \,.\, \delta z^2)_{\alpha,\, y} - (\eta \,.\, \delta z^2)_{a,\, y} = 0$$

stattfindet. Wegen Gleichung XV. und XVII. reducirt sich aber XIV. auf XIII.

Dritter Fall. Wenn zwischen $\delta z_{a,\, y}$ und $\delta z_{\alpha,\, y}$ wenn ebenso zwischen $\delta z_{\beta,\, x}$ und $\delta z_{b,\, x}$ eine Abhängigkeit stattfindet: so findet auch zwischen $\delta^2 z_{a,\, y}$ und $\delta^2 z_{\alpha,\, y}$ und auch zwischen $\delta^2 z_{\beta,\, x}$ und $\delta^2 z_{b,\, x}$ eine Abhängigkeit statt. Man eliminire $\delta z_{a,\, y}$, $\delta^2 z_{a,\, y}$, $\delta z_{b,\, x}$ und $\delta^2 z_{b,\, x}$, so werden dabei die zu $\delta^2 z_{\alpha,\, y}$ und $\delta^2 z_{\beta,\, x}$ gehörigen Koefficienten zu Null; und Gleichung XII. geht über in folgende Form:

$$\text{XVIII.} \quad \delta^2 U = \int_b^\beta [\mathfrak{F} + \mathfrak{G} \,.\, (\eta)_{a,\, y} + (\eta)_{\alpha,\, y}] \,.\, \delta z^2{}_{\alpha,\, y} \,.\, dy$$
$$+ \int_a^\alpha [\mathfrak{H} + \mathfrak{K} \,.\, (\omega)_{b,\, x} + (\omega)_{\beta,\, x}] \,.\, \delta z^2{}_{\beta,\, x} \,.\, dx$$
$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta [A \,.\, \left(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{A} \,.\, \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{B} \,.\, \delta z\right)^2$$
$$+ A_1 \,.\, \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C} \,.\, \delta z\right)^2] \,.\, dy \,.\, dx.$$

Man denke sich nun unter ω eine solche Funktion der einzigen Veränderlichen x, dass die identische Gleichung

$$\text{XIX.}\quad \mathfrak{H} + \mathfrak{K} \,.\, \omega_x + \omega_x = 0$$

stattfindet. Dabei reducirt sich Gleichung X. auf

$$\left(\frac{d^2{}_z V}{dz^2} - \frac{d_x \eta}{dx}\right) \,.\, \left[\left(\frac{d_p d_q V}{dp\,.\,dq}\right)^2 - \frac{d^2{}_p V}{dp^2} \times \frac{d^2{}_q V}{dq^2}\right]$$

$$= 2 \,.\, \frac{d_p d_q V}{dp\,.\,dq} \,.\, \left(\frac{d_z d_q V}{dz\,.\,dq} - \omega\right) \,.\, \left(\frac{d_z d_p V}{dz\,.\,dp} - \eta\right)$$

$$- \frac{d^2{}_p V}{dp^2} \,.\, \left(\frac{d_z d_q V}{dz\,.\,dq} - \omega\right)^2 - \frac{d^2{}_q V}{dq^2} \,.\, \left(\frac{d_z d_p V}{dz\,.\,dp} - \eta\right)^2.$$

Diese Gleichung, in welche die für ω genommene Funktion als bereits eingeführt gedacht wird, enthält nur den einzigen partiellen Differentialquotienten $\frac{d_x \eta}{dx}$; man bekommt also, wenn man integrirt, für η einen aus x, y, πy gebildeten Ausdruck, wo πy eine durchaus willkürliche Funktion von y ist. Aber eben diese in η enthaltene willkürliche Funktion πy kann man noch so benutzen, dass die identische Gleichung

$$\text{XX.}\quad \mathfrak{F} + \mathfrak{G} \,.\, (\eta)_{\alpha,\,y} + (\eta)_{\alpha,\,y} = 0$$

stattfindet. Wegen Gleichung XIX. und XX. reducirt sich XVIII. auf die Form XIII. Und so fort

Aus allem Vorhergehenden folgt, dass der Zeichenstand des $\delta^2 U$ von A und A_1 abhängig ist, d. h. wenn man dem y alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von b bis β beilegt, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des y auch dem x alle stetig neben einander liegenden Werthe von a bis α beilegt, und dabei

1) jeder der Quotienten $\frac{d^2{}_p V}{dp^2}$ und $\frac{d^2{}_q V}{dq^2}$ sowie auch der Ausdruck $\left[\frac{d^2{}_p V}{dp^2} \times \frac{d^2{}_q V}{dq^2} - \left(\frac{d_p d_q V}{dp\,.\,dq}\right)^2\right]$ beständig positiv bleiben, so ist auch $\delta^2 U$ positiv; wenn aber dabei

2) jeder der Quotienten $\frac{d^2{}_p V}{dp^2}$ und $\frac{d^2{}_q V}{dq^2}$ negativ, dagegen der Ausdruck $\left[\frac{d^2{}_p V}{dp^2} \times \frac{d^2{}_q V}{dq^2} - \left(\frac{d_p d_q V}{dp\,.\,dq}\right)^2\right]$ positiv bleibt, so ist $\delta^2 U$ negativ.

Dabei beachte man noch: wenn der Ausdruck

$$\left[\frac{d^2{}_p V}{dp^2} \times \frac{d^2{}_q V}{dq^2} - \left(\frac{d_p d_q V}{dp\,.\,dq}\right)^2\right]$$

bei einigen oder bei allen von a bis α und von b bis β liegenden Werthen des x und des y zu Null wird, so behält vorstehende Regel immer noch ihre Giltigkeit; sie verliert aber ihre Giltigkeit, sobald einer der Quotienten

$$\frac{d^2{}_z V}{dz^2},\quad \frac{d_z d_p V}{dz\,.\,dp},\quad \frac{d_z d_q V}{dz\,.\,dq},\quad \frac{d^2{}_p V}{dp^2},\quad \frac{d_p d_q V}{dp\,.\,dq},\quad \frac{d^2{}_q V}{dq^2}$$

bei irgend einem Werthe des x und des y die im Kalkul unzulässige Form $\frac{1}{0}$ annimmt.

In dem speciellen Falle, wo V ein nur mit x, y, z, $\frac{d_y z}{dy}$ gebildeter Ausdruck ist, und man für z eine solche Funktion von x und y sucht, dass dabei das bestimmte Integral, wo b und β keine Funktionen von x sind,

$$\text{XXI.} \quad U = \int_a^{\alpha} \int_b^{\beta} V \,.\, dy \,.\, dx$$

ein Grösstes oder Kleinstes wird, reducirt sich die Hauptgleichung II. auf

$$\text{XXII.} \quad \frac{d_z V}{dz} - \frac{d(\frac{d_q V}{dq})}{dy} = 0$$

und die Gränzengleichung III. reducirt sich auf

$$\text{XXIII.} \quad \int_a^{x} [(\frac{d_q V}{dq})_{\beta,\, x} \,.\, \delta z_{\beta,\, x} - (\frac{d_q V}{dq})_{b,\, x} \,.\, \delta z_{b,\, x}] \,.\, dx = 0.$$

Gleichung IV. reducirt sich auf

$$\text{XXIV.} \quad \delta^2 U = \int_a^{\alpha} [(\frac{d_q V}{dq})_{\beta,\, x} \,.\, \delta^2 z_{\beta,\, x} - (\frac{d_q V}{dq})_{b,\, x} \,.\, \delta^2 z_{b,\, x}] \,.\, dx$$

$$+ \int_a^{\alpha} \int_b^{\beta} [\frac{d^2_z V}{dz^2} \,.\, \delta z^2 + 2 \,.\, \frac{d_z d_q V}{dz \,.\, dq} \,.\, \delta z \,.\, \frac{d_y \delta z}{dy} + \frac{d^2_q V}{dq^2} \,.\, (\frac{d_y \delta z}{dy})^2] \,.\, dy \,.\, dx.$$

Diesem Ausdrucke kann man die Form geben

$$\text{XXV.} \quad \delta^2 U = \int_a^{\alpha} [(\frac{d_q V}{dq} \,.\, \delta^2 z + \omega \,.\, \delta z^2)_{\beta,\, x}$$

$$- (\frac{d_q V}{dq} \,.\, \delta^2 z + \omega \,.\, \delta z^2)_{b,\, x}] \,.\, dx$$

$$+ \int_a^{\alpha} \int_b^{\beta} A \,.\, (\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{E} \,.\, \delta z)^2 \,.\, dy \,.\, dx$$

und zur Bestimmung von ω hat man folgende Partialdifferentialgleichung der ersten Ordnung

$$\text{XXVI.} \quad (\frac{d^2_z V}{dz^2} - \frac{d_y \omega}{dy}) \,.\, \frac{d^2_q V}{dq^2} = (\frac{d_z d_q V}{dz \,.\, dq} - \omega)^2.$$

Durch Integration dieser Gleichung bekommt man für ω einen aus x, y, πx gebildeten Ausdruck, wo πx eine ganz willkürliche Funktion von x ist, die noch dazu benutzt werden kann, dass sich Gleichung XXV. zurückzieht auf

$$\delta^2 U = \int_a^{\alpha} \int_b^{\beta} A \,.\, (\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{E} \,.\, \delta z)^2 \,.\, dy \,.\, dx$$

und man erkennt, dass es jetzt nur auf A, d. h. nur auf den Quotienten $\frac{d^2_q V}{dq^2}$ ankommt, ob $\delta^2 U$ positiv oder negativ ist.

Ist aber der Gang dieses Verfahrens einmal recht aufgefasst, so kann es gradezu auch auf zusammengesetztere Fälle ausgedehnt werden; was hier nicht mehr ausgeführt zu werden braucht, sondern es mag genügen, einige Resultate herzusetzen.

Ist nemlich V ein aus den Elementen x, y, z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{dzdz}{dx.dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ gebildeter Ausdruck, und sucht man für z eine solche Funktion von x und y, dass dabei das bestimmte Integral

$$U=\int_a^\alpha\int_b^\beta V.dy.dx$$

ein Grösstes oder Kleinstes wird; so setze man zur Abkürzung p statt $\frac{dz}{dx}$, q statt $\frac{dz}{dy}$, r statt $\frac{d^2z}{dx^2}$, s statt $\frac{dzdz}{dx.dy}$, und t statt $\frac{d^2z}{dy^2}$. Dann hat man nur die Bedingungen aufzusuchen, unter denen der Ausdruck

$$\frac{d^2rV}{dr^2}.\left(\frac{d^2x\delta z}{dx^2}\right)^2+2.\frac{drdsV}{dr.ds}.\frac{d^2x\delta z}{dx^2}.\frac{dxdy\delta z}{dx.dy}+2.\frac{drdtV}{dr.dt}.\frac{d^2x\delta z}{dx^2}.\frac{d^2y\delta z}{dy^2}$$
$$+\frac{d^2sV}{ds^2}.\left(\frac{dxdy\delta z}{dx.dy}\right)^2+2.\frac{dsdtV}{ds.dt}.\frac{dxdy\delta z}{dx.dy}.\frac{d^2y\delta z}{dy^2}+\frac{d^2tV}{dt^2}.\left(\frac{d^2y\delta z}{dy^2}\right)^2$$

beständig positiv oder negativ bleibt, während man dem y alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von b bis β beilegt, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des y auch dem x alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von a bis α beilegt.

Wenn aber bei allen diesen Werthen des x und des y der Quotient $\frac{d^2tV}{dt^2}$ zu Null wird; so kann nur dann ein Grösstes oder Kleinstes stattfinden, wenn auch die beiden Quotienten $\frac{dsdtV}{ds.dt}$ und $\frac{drdtV}{dr.dt}$ bei allen diesen Werthen des x und des y zu Null werden, und man hat jetzt den Ausdruck

$$\frac{d^2rV}{dr^2}.\left(\frac{d^2x\delta z}{dx^2}\right)^2+2.\frac{drdsV}{dr.ds}.\frac{d^2x\delta z}{dx^2}.\frac{dxdy\delta z}{dx.dy}+\frac{d^2sV}{ds^2}.\left(\frac{dxdy\delta z}{dx.dy}\right)^2$$

zu untersuchen.

Ist V ein aus den Elementen x, y, w, z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{dw}$ zusammengesetzter Ausdruck, und sucht man für z eine solche Funktion von x, y, w, dass dabei das bestimmte Integral

$$U=\int_a^\alpha\int_b^\beta\int_c^\gamma V.dx.dy.dw$$

ein Grösstes oder Kleinstes wird; so setze man zur Abkürzung p statt $\frac{dz}{dx}$, q statt $\frac{dz}{dy}$, und r statt $\frac{dz}{dw}$. Dann hat man nur die Bedingungen aufzusuchen, unter denen der Ausdruck

$$\frac{d^2pV}{dp^2}\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2+2\cdot\frac{d_pd_qV}{dp.dq}\cdot\frac{d_x\delta z}{dx}\cdot\frac{d_y\delta z}{dy}+2\cdot\frac{d_pd_rV}{dp.dr}\cdot\frac{d_y\delta z}{dy}\cdot\frac{d_w\delta z}{dw}$$
$$+\frac{d^2qV}{dq^2}\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2+2\cdot\frac{d_qd_rV}{dq.dr}\cdot\frac{d_y\delta z}{dy}\cdot\frac{d_w\delta z}{dw}+\frac{d^2rV}{dr^2}\cdot\left(\frac{d_w\delta z}{dw}\right)^2$$

beständig positiv oder negativ bleibt, während man dem w alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von c bis γ beilegt, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des w auch dem y alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von b bis β beilegt, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des w und des y auch dem x alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von a bis α beilegt.

V.

Ueber die Messkette und deren Berichtigung.

Von dem

Herrn Regierungs-Conducteur G. Berlin

zu Greifswald.

Die meisten Fehler, welche bei der Messung einer geraden Linie mit der Messkette entstehen, rühren hauptsächlich von der Ausdehnung der Kette, veranlasst durch Dehnbarkeit des dazu verwendeten Eisendrathes und durch Ausschleifen der Ringe her. Man ist daher genöthigt, dieselbe öfter zu berichtigen, was bei der gewöhnlichen Einrichtung der Messketten nur dadurch geschehen kann, dass die einzelnen Glieder der Kette durch Nachbiegung der Haken wiederum verkürzt werden, wodurch aber nicht allein der Drath spröde und hart wird, so dass ein Zerreissen der Kette zu befürchten steht, sondern auch die Berichtigung nicht mit der Präcision ausgeführt werden kann, wie es wohl erforderlich ist. Oft ist es auch dem praktischen Geometer fast unmöglich, eine Berichtigung der Kette, wenn Feuerarbeiten dazu erforderlich sind, vorzunehmen, da diese bei seinen praktischen Arbeiten ihn nicht nur längere Zeit abhalten, sondern auch nicht aller Orten eine Schmiede ist und selbst auch vielen Geometern die manuelle Fertigkeit abgehen dürfte, die erforderlich ist, um selbst eine solche Berichtigung vornehmen zu können.

Bei Richtigkeit der Messkette kommt es vorzüglich darauf an, dass, wenn auch nicht die einzelnen Zehntheile der Ruthe genaues

Digitized by Google

Maass halten, dennoch die durch Wirbel abgetheilten $\frac{5}{10}$ genau die Länge einer halben Ruthe haben, indem der kleine dadurch bei den einzelnen Fussen entstehende Fehler höchstens $\frac{5}{100}$ der Ruthe betragen wird, welchen nach den üblichen Maassstäben verjüngt auszudrücken bei ökonomischen Aufnahmen nicht möglich ist. Ist eine grössere Genauigkeit, namentlich eine solche, die sich auf Hunderttheile der Ruthe bezieht, erforderlich, so wird diese durch Anlegung eines Maassstabes, den jeder Geometer bei sich zu führen hat, zu erlangen sein.

Bei meinen vielfachen praktischen Messungen habe ich fast immer erfahren, dass selbst bei der genauesten Berichtigung eine Veränderung der Kette nach einem nur täglichen Gebrauche sich gezeigt hat; und man würde daher genöthigt sein, auch eben so oft die Berichtigung vorzunehmen, wodurch dann die Kette an Solidität verlieren würde, wenn man es nicht vorzieht, die mit der falschen Kette gemessenen Längen auf die richtigen zu reduciren, was aber um so eher zu Irrthümern führen kann, da nicht allein der Fehler kein beständiger ist, sondern auch der Messungen namentlich bei der Boussolenaufnahme so viele sind, dass selbst beim besten Willen, wenn man auch den dadurch erforderten Zeitaufwand nicht berücksichtigt, Irrungen herbeigeführt werden.

Ich habe mich daher einer Kette bedient, deren Berichtigung unmittelbar durch Nachschraubung bewirkt wird, und glaube die getroffene Einrichtung als wesentliche Verbesserung empfehlen zu können.

Man nehme zur Messkette nur englischen Drath von 2‴ bis $2\frac{1}{2}$‴ Par. Maass Stärke; nur dieser giebt bei gehöriger Weichheit des Metalles die gehörige Stärke, die das Anspannen der Kette erfordert. Die durch die Stärke von 2‴ bis $2\frac{1}{4}$‴ Par. Maass herbeigeführte grössere Schwere der Kette kann in Bezug auf die grössere Richtigkeit nicht in Betracht gezogen werden.

Gewöhnlich sind die Ringe zur Verbindung einzelner Kettenglieder von gegossenem Messing, die der eigenthümlichen Sprödigkeit des Metalles wegen beim Schlagen der Kette leicht zerspringen, weshalb ich es vorgezogen habe, Ringe von geschweisstem Eisen anzuwenden.

Die Einrichtung der die Ruthen bezeichnenden Wirbel, wodurch die Correction der Kette möglich gemacht wird, ist folgende.

Der Wirbel ist durch 3 Balken (Taf. I. Fig. 4.) *a*, *b*, *c* in 4 gleiche Theile getheilt; der mittlere *b* ist nur zur grösseren Haltbarkeit und zur Bezeichnung der Ruthen da; die Balken *a* und *c* sowie die Endbalken *d* und *e* haben ovale Scheiben (*f*, *f'*), die im Mittelpunkte jede mit einem Loche versehen sind, und zwar bei *a* und *c* rund (*g*) und bei *d* und *e* quadratisch (*h*). Zu diesen Löchern passt genau eine Eisenstange *i*, die zur Hälfte eine Schraube, zur andern Hälfte viereckig ist, und sich fleissig in der quadratischen Oeffnung *h* hin- und herbewegen lässt. Zur Feststellung dieser Stange dient die Mutter *k*, zu deren Nichtverrückung wiederum die Gegenmutter *l* angebracht ist. Mit Hülfe dieser Stange lässt sich leicht durch respectives Anziehen und Lösen der Muttern *k* und *l* die Correction der Kette bewirken.

Die Wirbelbewegung wird durch den Wirbel *m* erreicht, der wie gewöhnlich durch einen Ring mit den Kettengliedern verbunden ist. Dem Mechaniker dürfte es schwer werden, des geringe-

ren Raumes wegen die Stange *i* mit dem Wirbel *m* zu vernieten; eine Schraubenmutter, die um das Aufdrehen zu verhüten, noch zu vernieten ist, wird zweckmässiger sein.

Die Einrichtung der die halben Ruthen bildenden Wirbel ist in Bezug auf die Corrections-Einrichtung dieselbe wie die der ganzen, nur wird es der Unterscheidung wegen zweckmässiger sein, die Dimensionen etwas kleiner zu machen und den Mittelbalken *b* fehlen zu lassen, wogegen zur Bezeichnung der Länge die Spitzen *a a'* (Taf. I. Fig. 5.) anzubringen sind.

Bei den Endringen der Kette kann diese Corrections-Einrichtung fehlen, da nicht nur die Ausdehnung der Kette in der Mitte sich am stärksten zeigt, sondern auch die grössere Wirbelbewegung bei den Enden eine einfachere Einrichtung erfordert.

Gewöhnlich sind die Kettenstäbe unten mit einem etwa zwei Zoll langen Stachel versehen, der höchstens eine Stärke von 4‴ Par. Maass hat. Bei dieser Einrichtung zeigt sich der Uebelstand, dass des geringeren Widerstandes wegen bei gehöriger Anspannung der Kette namentlich in weichem Boden dieselbe fortgeschleppt wird.

Eine konische Spitze (Taf. I. Fig. 6.) wird vorzuziehen sein, da diese nicht allein mehr Widerstand gewährt, sondern auch der Einwand, dass die Stachelspitze genauer den Endpunkt der Kettenlänge bezeichne, dadurch widerlegt wird, dass beide konische Spitzen gleiche Dimensionen haben und daher genau zu den gemachten Oeffnungen passen.

Bei der Praxis habe ich erfahren, dass die Länge der Kettenstäbe von 5 Fuss für den Kettenzieher höchst unpraktisch ist, ein kürzerer Stab von etwa $3\frac{1}{2}$ Fuss ist demselben handlicher, um so mehr er zum Eindrücken in den Boden mit der rechten Hand nach oben zu rücken hat, und bei der Länge von 5 Fuss das Ende des Stabes ohne Anstrengung, indem die linke Hand zum Festhalten der Kette unten bleiben muss, nicht erreichen kann, was eine ungleiche Kettenziehung herbeiführen würde. Die Länge von 5 Fuss dient ja nur dazu, um die Kettenstäbe besser einrichten zu können, aber ein geübtes Auge wird ebenso richtig einen kürzeren Stab wie einen längeren einrichten. Der Stab des Kettenführers muss aber des besseren Einrichtens wegen die übliche Länge haben.

Die bei den Messungen anzuwendenden Zeichenstäbe sind gewöhnlich von Holz und werden in einem ledernen Köcher aufbewahrt; wie leicht aber ist es nicht möglich, dass eins beim Niederbücken oder beim schnellen Messen verloren gehe, auch ist der Köcher der freien Bewegung der Hände etwas hinderlich. Mit mehr Nutzen habe ich daher eiserne Zeichenstäbe angewandt, die an ihren oberen Enden umgebogen sind und auf einen Federhaken (Taf. I. Fig. 7.) aufgehängt werden, der wiederum ebenfalls durch eine Feder gesichert auf einen Ring gehängt wird. Dieser Ring ist an einem Riemen befestigt, der um den Leib geschnallt wird. Hierdurch ist nicht nur bei gehöriger Kraft des Federhakens ein Verlieren unmöglich, sondern auch werden beide, der Kettenzieher sowie der Kettenführer, den Gebrauch ihrer Hände frei haben, was um so nothwendiger ist, da der Geometer als Kettenführer sein Manual zu führen hat.

Ob diese Verbesserungen der Kette schon angewandt sind, ist

mir unbekannt, wenigstens ist mir in keinem Lehrbuche der praktischen Geometrie darüber etwas vorgekommen und glaube ich sie deshalb durch Veröffentlichung gemeinnützig machen zu müssen.

VI.

Ueber einige bestimmte Integrale, deren Werthe durch doppelte Integration gefunden werden.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

In einem Doppelintegrale zwischen bestimmten Gränzen ist es bekanntlich gleichgültig, in welcher Ordnung die angedeuteten Integrationen ausgeführt werden; oder, wenn $f(u, x)$ eine beliebige Funktion zweier von einander unabhängigen Veränderlichen u, x bedeutet und a und b die Gränzwerthe für x, α und β die für u bezeichnen, so hat man

$$\int_\beta^\alpha du \int_b^a f(u, x)dx = \int_b^a dx \int_\beta^\alpha f(u, x)du.$$

Dieser Satz wird dadurch eine reiche Quelle bestimmter Integrale, dass es in vielen Fällen möglich ist, bei der einen Integrationsordnung ein Integral, bei der anderen beide Integrationen auszuführen, wodurch man unmittelbar zu dem Werthe eines bestimmten Integrales gelangt.

Wir wollen hier einige Entwickelungen dieser Art mittheilen. Es ist bekanntlich

$$\int \frac{dx}{k^2+x^2} = \frac{1}{k} \operatorname{Arctan} \frac{x}{k}, \text{ folglich } \int_0^\infty \frac{dx}{k^2+x^2} = \frac{\pi}{2k}.$$

Ferner hat man

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)(u^2+x^2)} = \frac{1}{u^2-1}\left[\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^\infty \frac{dx}{u^2+x^2}\right]$$

oder nach dem Vorigen

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{u^2-1}\left(1-\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{u-1}{u^2-1}$$

d. i.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)\,(u^2+x^2)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{u(u+1)}. \quad (1).$$

Auf dieses Integral lässt sich das oben ausgesprochene Prinzip in verschiedener Weise anwenden.

Man multiplizire erstlich die Gleichung mit $2udu$ und integrire nach u zwischen den Gränzen $u = \alpha$, $u = 0$, so ist

$$\int_0^\alpha 2u\,du \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)\,(u^2+x^2)} = \pi \int_0^\alpha \frac{du}{1+u}.$$

Die linke Seite geht durch Umkehrung der Integration in folgenden Ausdruck über:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \int_0^\alpha \frac{2u\,du}{x^2+u^2} = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\,[l(x^2+\alpha^2) - l(x^2)]$$

$$= \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\, l\left(1+\frac{\alpha^2}{x^2}\right).$$

Die rechte Seite jener Gleichung ist $= \pi l(1+\alpha)$, mithin

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\, l\left(1+\frac{\alpha^2}{x^2}\right) = \pi l(1+\alpha). \quad (2).$$

Man kann dieses Integral noch unter anderen Formen darstellen. Setzt man nämlich $x = \alpha z$, wo z eine neue Veränderliche ist, so wird dasselbe:

$$\int_0^\infty \frac{dz}{1+\alpha^2 z^2}\, l\left(1+\frac{1}{z^2}\right) = \frac{\pi l(1+\alpha)}{\alpha}. \quad (3).$$

Nimmt man dagegen $x = \frac{1}{z}$, so wird $dx = -\frac{dz}{z^2}$, und wenn $x = \infty$, $x = 0$ geworden ist, hat z die Werthe 0 und ∞ angenommen; daher ist das Integral

$$= -\int_\infty^0 \frac{dz}{z^2+1}\, l(1+\alpha^2 z^2) = +\int_0^\infty \frac{dz}{z^2+1}\, l(1+\alpha^2 z^2)$$

mithin auch

$$\int_0^\infty \frac{dz}{1+z^2}\, l(1+\alpha^2 z^2) = \pi l(1+\alpha). \quad (4).$$

Man multiplizire ferner die Gleichung (1) mit du und integrire nach u zwischen den Gränzen $u = \infty$, $u = \alpha$, so ist:

$$\int_\alpha^\infty du \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)\,(u^2+x^2)} = \frac{\pi}{2} \int_\alpha^\infty \frac{du}{u(u+1)}.$$

Die linke Seite wird durch Umkehrung der Integrationsordnung

$$=\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\int_a^\infty \frac{du}{x^2+u^2}=\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\cdot\frac{1}{x}\,[\text{Arctan}\,\infty-\text{Arctan}\,\frac{a}{x}].$$

Es ist aber bekanntlich für jedes v

$$\text{Arctan}\,v+\text{Arctan}\,\frac{1}{v}=\text{Arctan}\,\infty$$

oder

$$\text{Arctan}\,\frac{1}{v}=\text{Arctan}\,\infty-\text{Arctan}\,v$$

und daher gestaltet sich jenes Integral für $v=\frac{a}{x}$ folgendermassen:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\cdot\frac{1}{x}\,\text{Arctan}\,\frac{x}{a}.$$

Auf der rechten Seite ist

$$\int\frac{du}{u(u+1)}=-l(1+\frac{1}{u})$$

mithin

$$\int_a^\infty \frac{du}{u(u+1)}=l(1+\frac{1}{a}).$$

Wir haben daher

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\cdot\frac{1}{x}\,\text{Arctan}\,\frac{x}{a}=\frac{\pi}{2}\,l(1+\frac{1}{a})$$

oder wenn wir überhaupt α für $\frac{1}{a}$ schreiben:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\cdot\frac{\text{Arctan}\,\alpha x}{x}=\frac{\pi}{2}\,l(1+\alpha).\quad(5).$$

Für $x=\frac{z}{a}$ gestaltet sich die Gleichung folgendermassen:

$$\int_0^\infty \frac{dz}{a^2+z^2}\cdot\frac{\text{Arctan}\,z}{z}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{l(1+a)}{a^2}.\quad(6).$$

Auf die gefundenen Integrale lässt sich die bisherige Methode selbst wieder anwenden. Man multiplizire nämlich die Gleichung (3), in welcher $\alpha=u$ gesetzt wird, mit $2udu$ und integrire nach u zwischen den Gränzen $u=a$, $u=0$, so kommt:

$$\int_0^a 2u\,du\int_0^\infty \frac{dz}{1+u^2z^2}\,l(1+\frac{1}{z^2})\,dz=2\pi\int_0^a l(1+u)du.$$

Die linke Seite ist auch

$$=\int_0^\infty l(1+\frac{1}{z^2})dz\int_0^a \frac{2u\,du}{1+z^2u^2}=\int_0^\infty l(1+\frac{1}{z^2})dz\cdot\frac{1}{z^2}l(1+z^2a^2).$$

Die rechte Seite lässt sich nach der Formel

$$\int ly\, dy = y(ly - 1)$$

leicht näher bestimmen. Man findet

$$\int_0^a l(1+u)du = (1+a)\,[l(1+a)-1] - [l1-1]$$
$$= (1+a)l(1+a) - a.$$

Folglich haben wir:

$$\int_0^\infty l(1+a^2x^2)l(1+\tfrac{1}{x^2})\,\tfrac{dx}{x^2} = 2\pi(1+a)l(1+a) - 2a\pi.$$

Für $x = \frac{x}{\beta}$, $a = \frac{\beta}{\alpha}$ ergiebt sich hieraus

$$\int_0^\infty l(1+\tfrac{x^2}{\alpha^2})\; l(1+\tfrac{\beta^2}{x^2})\,\tfrac{dx}{x^2} = 2\pi(\tfrac{1}{\beta}+\tfrac{1}{\alpha})\; l(1+\tfrac{\beta}{\alpha}) - \tfrac{2\pi}{\alpha}. \quad (7).$$

Man setze auch in Formel (6) $a = u$, multiplizire mit du und integrire zwischen den Gränzen $u = \infty$, $u = \alpha$, so kommt

$$\int_a^\infty du \int_0^\infty \frac{dx}{u^2+x^2}\cdot\frac{\text{Arctan } x}{x} = \frac{\pi}{2}\int_a^\infty \frac{l(1+u)}{u^2}\,du.$$

Die linke Seite lässt sich auch so schreiben:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\,\text{Arctan } x \int_a^\infty \frac{du}{x^2+u^2}$$
$$= \int_0^\infty \frac{dx}{x}\,\text{Arctan } x\,.\,\frac{1}{x}\;[\text{Arctan}\,\infty - \text{Arctan}\,\tfrac{a}{x}]$$
$$= \int_0^\infty \text{Arctan } x\,.\,\text{Arctan}\,\frac{x}{a}\,.\,\frac{dx}{x^2}.$$

Für die rechte Seite haben wir nach einer bekannten Reductionsformel

$$\int \frac{l(1+u)}{u^2}\,du = l(1+u)\int\frac{du}{u^2} - \int dl(1+u)\int\frac{du}{u^2}$$
$$= -\frac{l(1+u)}{u} + \int\frac{du}{u(1+u)}$$
$$= -\frac{l(1+u)}{u} - l(1+\tfrac{1}{u}).$$

Nach den gewöhnlichen Regeln, wodurch man die Werthe unbestimmt scheinender Brüche bestimmt, findet man

$$\frac{l(1+u)}{u} = 0 \text{ für } u = \infty,$$

folglich

Digitized by Google

$$\int_a^\infty \frac{l(1+u)}{u^2}\,du = \frac{l(1+a)}{a} - l(1+\frac{1}{a}).$$

Wir haben daher:

$$\int_0^\infty \text{Arctan}\,\frac{z}{a}\,\text{Arctan}\,z\,.\,\frac{dz}{z^2} = \frac{\pi}{2}\,[\frac{l(1+a)}{a} + l(1+\frac{1}{a})].$$

Für $z = \frac{x}{\beta}$, $a = \frac{\alpha}{\beta}$ ergiebt sich hieraus

$$\int_0^\infty \text{Arctan}\,\frac{x}{\alpha}\,.\,\text{Arctan}\,\frac{x}{\beta}\,.\,\frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2}\,[\frac{1}{\alpha}\,l(1+\frac{\alpha}{\beta}) + \frac{1}{\beta}\,l(1+\frac{\beta}{\alpha})]. \quad (8).$$

Für $\alpha = \beta = 1$ hat man z. B.

$$\int_0^\infty (\frac{\text{Arctan}\,x}{x})^2\,dx = \pi l 2. \quad (9).$$

Es würde nicht leicht sein, dieses rein numerische Integral, dessen Werth sich hier sehr ungezwungen ergiebt, für sich allein zu behandeln. Man sieht daraus, dass es in der Theorie bestimmter Integrale wesentlich darauf ankommt, den in Rede stehenden Integralen möglichst viele, von einander unabhängige und beliebige Constanten zu verschaffen, deren Variation neue Formen hervorbringt, welche oft leichter zu behandeln sind.

VII.

Elementare Bestimmung des Schwerpunkts des sphärischen Dreiecks.

Nach zwei Aufsätzen der Herren Giulio und Besge in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par J. Liouville frei bearbeitet

von

dem Herausgeber.

1.

In dem genannten Journal T. VII. p. 59. hat Herr Ferriot, Recteur honoraire de l'Académie de Grenoble, eine ganz elemen-

tare Bestimmung des Schwerpunkts des sphärischen Dreiecks zu geben versucht, welche jedoch nach unserer Ueberzeugung als völlig verunglückt zu betrachten ist. Auf das Ungenügende dieser von Ferriot angewandten Methode hat in demselben Journal T. VII. p. 516. zuerst Herr Besge aufmerksam gemacht, und zugleich bemerkt, dass T. IV. p. 386. Herr Giulio, Professeur à l'Université de Turin, die Bestimmung des Schwerpunkts des sphärischen Dreiecks auf einem von ihm mit Hülfe der Integralrechnung bewiesenen Satz gegründet habe, dass sich aber dieser Satz auch sehr leicht und einfach bloss mittelst ganz elementarer Hülfsmittel beweisen lasse, und dass auf diese Weise mit Beibehaltung der übrigen von Herrn Giulio angewandten Betrachtungen eine völlig elementare Bestimmung des Schwerpunkts des sphärischen Dreiecks gewonnen werden könne. Diese nach unserer Ansicht die Beachtung der Lehrer der Mathematik recht sehr verdienenden Untersuchungen der Herren Giulio und Besge auf ganz elementare Weise darzustellen, ist der Zweck des vorliegenden Aufsatzes, wobei wir übrigens nicht unterlassen wollen zu bemerken, dass die erwähnte Abhandlung des Herrn Giulio noch mehrere andere sehr bemerkenswerthe und ziemlich allgemeine Sätze enthält.

II.

Man denke sich ein unendlich kleines Element E einer mit dem Halbmesser r beschriebenen Kugelfläche, und die Ebene eines grössten Kreises der entsprechenden Kugel, welche wir im Folgenden die Momentenebene nennen wollen.

Die Entfernung des Elements E von der Momentebene sei q, so ist Eq das Moment des Elements E in Bezug auf die angenommene Momentenebene. Bezeichnet aber i den Neigungswinkel der durch das Element E gelegten Berührungsebene der Kugel gegen die Momentenebene, so erhellet leicht, dass $q = r \cos i$, und folglich das Moment

$$Eq = Er \cos i$$

ist. Nun ist aber nach einem sehr bekannten Satze $E \cos i$ der Flächeninhalt E' der Projection des Elements E auf der Momentenebene; also ist das Moment

$$Eq = Er.$$

Ist jetzt F ein beliebiges ganz auf einer Seite der Momentenebene liegendes Stück der Kugelfläche, so denke man sich dasselbe in unendlich viele unendlich kleine Elemente

$$E,\ E_1,\ E_2,\ E_3,\ \ldots\ldots E_n$$

zerlegt, deren Projectionen auf der Momentenebene respective

$$E',\ E'_1,\ E'_2,\ E'_3,\ \ldots\ldots E'_n;$$

und deren Entfernungen von der Momentenebene respective

$$q,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ \ldots\ldots q_n$$

sein mögen; so sind nach dem Vorhergehenden

$$Er,\ E_1r,\ E_2r,\ E_3r,\ \ldots\ldots E_nr$$

die Momente dieser Elemente in Bezug auf die angenommene Momentenebene, und es ist also nach den bekannten Lehren der Statik, wenn Q die Entfernung des Schwerpunkts des sphärischen Flächenstücks F von der Momentenebene bezeichnet,

$$FQ = Er + E_1r + E_2r + E_3r + \ldots\ldots + E_nr;$$

also

$$FQ = (E + E_1 + E_2 + E_3 + \ldots\ldots + E_n)r.$$

Bezeichnet aber jetzt F' die Projection des sphärischen Flächenstücks F auf der Momentenebene, so ist offenbar

$$F' = E + E_1 + E_2 + E_3 + \ldots\ldots + E_n,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$FQ = F'r$$

oder

$$F : F' = r : Q,$$

woraus sich ein leicht in Worten auszusprechender Satz ergiebt.

Absichtlich haben wir bei dem Beweise dieses Satzes die obige ganz einfache Darstellung gewählt, bemerken aber, dass sich dieselbe auch leicht durch eine Gränzenbetrachtung zu grösserer Strenge erheben lassen würde.

Von diesem Satze kann nun die folgende Anwendung auf die Bestimmung des Schwerpunkts eines sphärischen Dreiecks gemacht werden, wobei wir wie gewöhnlich in der sphärischen Trigonometrie annehmen, dass keine Seite und kein Winkel dieses sphärischen Dreiecks grösser als 180° ist.

III.

Den Mittelpunkt der mit dem Halbmesser r beschriebenen Kugel wollen wir im Folgenden durch O bezeichnen. Ein auf deren Oberfläche liegendes sphärisches Dreieck sei ABC. Die Winkel dieses sphärischen Dreiecks werden wie gewöhnlich durch A, B, C, und deren Gegenseiten durch a, b, c bezeichnet. Sein Flächeninhalt sei Δ, und Δ_a, Δ_b, Δ_c seien die Flächenräume seiner Projectionen auf den Ebenen der Seiten a, b, c, d. i. auf den Ebenen der Winkel BOC, AOC, AOB. Sind nun X_a, X_b, X_c die Entfernungen des Schwerpunkts dieses sphärischen Dreiecks von den Ebenen der Seiten a, b, c, d. i. von den Ebenen der Winkel BOC, AOC, AOB; so haben wir nach dem in II. bewiesenen allgemeinen Satze die drei folgenden Gleichungen:

$$1)\quad X_a = r \cdot \frac{\Delta_a}{\Delta},\quad X_b = r \cdot \frac{\Delta_b}{\Delta},\quad X_c = r \cdot \frac{\Delta_c}{\Delta}.$$

Wenn die Seiten a, b, c sämmtlich in Graden ausgedrückt sind, so erhält man die Flächenräume der Sectoren BOC, AOC, AOB durch die folgenden Gleichungen:

$$2)\begin{cases} BOC = r^2 \cdot \frac{a\pi}{360}, \\ AOC = r^2 \cdot \frac{b\pi}{360}, \\ AOB = r^2 \cdot \frac{c\pi}{360}. \end{cases}$$

Ferner sind

$$BOC \cdot \cos B \text{ und } BOC \cdot \cos C$$

die, jenachdem die Winkel B, C kleiner oder grösser als 90° sind, positiv oder negativ genommenen Projectionen des Sectors BOC auf den Ebenen der Sectoren AOB und AOC. Eben so sind

$$AOC \cdot \cos A \text{ und } AOC \cdot \cos C$$

die, jenachdem die Winkel A, C kleiner oder grösser als 90° sind, positiv oder negativ genommenen Projectionen des Sectors AOC auf den Ebenen der Sectoren AOB und BOC. Endlich sind auf dieselbe Weise

$$AOB \cdot \cos A \text{ und } AOB \cdot \cos B$$

die, jenachdem die Winkel A, B kleiner oder grösser als 90° sind, positiv oder negativ genommenen Projectionen des Sectors AOB auf den Ebenen der Sectoren AOC und BOC.

Hieraus und aus 2) erhellet nun aber sehr leicht, dass in völliger Allgemeinheit

$$\begin{aligned} \Delta_a &= BOC - AOC \cdot \cos C - AOB \cdot \cos B, \\ \Delta_b &= AOC - AOB \cdot \cos A - BOC \cdot \cos C, \\ \Delta_c &= AOB - BOC \cdot \cos B - AOC \cdot \cos A; \end{aligned}$$

also

$$3)\begin{cases} \Delta_a = \frac{r^2\pi}{360}\,(a - b\cos C - c\cos B), \\ \Delta_b = \frac{r^2\pi}{360}\,(b - c\cos A - a\cos C), \\ \Delta_c = \frac{r^2\pi}{360}\,(c - a\cos B - b\cos A) \end{cases}$$

ist.

Weil nun, wenn auch die Winkel A, B, C sämmtlich in Graden ausgedrückt sind, nach einem bekannten Satze von dem sphärischen Dreiecke

$$4)\ \Delta = \frac{r^2\pi}{180}\,(A + B + C - 180)$$

ist; so ist nach 1), 3) und 4):

$$5)\begin{cases} X_a = \frac{1}{3}r \cdot \dfrac{a - b\cos C - c\cos B}{A+B+C-180}, \\ X_b = \frac{1}{3}r \cdot \dfrac{b - c\cos A - a\cos C}{A+B+C-180}, \\ X_c = \frac{1}{3}r \cdot \dfrac{c - a\cos B - b\cos A}{A+B+C-180}; \end{cases}$$

wodurch nun offenbar die Lage des Schwerpunkts des sphärischen Dreiecks vollkommen bestimmt ist.

IV.

Wir wollen jetzt den Mittelpunkt O der Kugel als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xyz, die Ebene des Sectors AOB als Ebene der xy, und den Halbmesser OA als den positiven Theil der Axe der x annehmen. Der positive Theil der Axe der y soll auf derselben Seite der Axe der x liegen, auf welcher der Punkt B liegt, und der positive Theil der Axe der z soll auf derselben Seite der Ebene der xy liegen, auf welcher der Punkt C liegt.

Dies vorausgesetzt ist nun zuvörderst offenbar, wenn x, y, z die Coordinaten des Schwerpunkts des sphärischen Dreiecks in Bezug auf das angenommene System bezeichnen,

$$z = X_c;$$

also nach 5)

$$z = \frac{1}{3}r \cdot \frac{c - a\cos B - b\cos A}{A+B+C-180}.$$

Denkt man sich aber von dem Schwerpunkte des sphärischen Dreiecks auf die Axe der x ein Perpendikel gefällt, bezeichnet dieses Perpendikel durch ϱ, und den von demselben mit der Ebene der xy eingeschlossenen, nach der Seite von B hin liegenden, 180° nicht übersteigenden Winkel durch φ; so erhellet mittelst einer ganz einfachen geometrischen Betrachtung, dass in völliger Allgemeinheit

$$X_b = \varrho \sin (A - \varphi), \quad X_c = \varrho \sin \varphi$$

und

$$X_c = y \operatorname{tang} \varphi$$

ist. Also ist

$$\frac{X_b}{X_c} = \frac{\sin (A - \varphi)}{\sin \varphi}$$

oder

$$\frac{X_b}{X_c} = \sin A \cot \varphi - \cos A,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden, wenn man nämlich in dieser Gleichung

$$\cot \varphi = \frac{y}{X_c}$$

setzt,

$$X_b = y \sin A - X_c \cos A,$$

also

$$y = \frac{X_b + X_c \cos A}{\sin A}.$$

Führt man nun für X_b und X_c ihre aus 5) bekannten Werthe ein, so erhält man

$$y = \frac{r}{2\sin A} \cdot \frac{b \sin A^2 - a(\cos C + \cos A \cos B)}{A + B + C - 180}.$$

Nun ist aber nach bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B},$$

und folglich

$$\frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A} = \cos c \sin B.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$y = \tfrac{1}{2}r \cdot \frac{b \sin A - a \cos c \sin B}{A + B + C - 180^\circ}.$$

Man nehme jetzt O als den Anfang eines neuen rechtwinkligen Coordinatensystems der $x'\ y'\ z'$ an. Die Ebene des Sectors AOB sei wieder die Ebene der $x'y'$, und der Halbmesser OB sei der positive Theil der Axe der x'. Der positive Theil der Axe der y' werde so angenommen, dass er mit dem Punkte A nicht auf einer Seite der Axe der x' liegt, und der positive Theil der Axe der z' liege auf derselben Seite der Ebene der $x'y'$, auf welcher der Punkt C liegt; so ist, wenn x', y', z' die Coordinaten des Schwerpunkts des sphärischen Dreiecks ABC in diesem Systeme sind, nach dem Vorhergehenden offenbar

$$-y' = \tfrac{1}{3}r \cdot \frac{a \sin B - b \cos c \sin A}{A + B + C - 180},$$

also

$$y' = \tfrac{1}{3}r \cdot \frac{b \cos c \sin A - a \sin B}{A + B + C - 180}.$$

Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten ist aber in völliger Allgemeinheit

$$x = x' \cos c - y' \sin c,$$
$$y = x' \sin c + y' \cos c;$$

folglich, wenn man x' eliminirt,

Digitized by Google

$$y \cos c - x \sin c = y',$$

also

$$x = \frac{y \cos c - y'}{\sin c}.$$

Führt man nun in diese Gleichung die aus dem Obigen bekannten Werthe von y und y' ein, so erhält man ohne Schwierigkeit

$$x = \tfrac{1}{2}r \cdot \frac{a \sin c \sin B}{A+B+C-180},$$

und hat also nun überhaupt die folgenden Ausdrücke für die Coordinaten x, y, z des Schwerpunkts des sphärischen Dreiecks ABC in dem ersten der beiden oben angenommenen Systeme:

$$6)\begin{cases} x = \tfrac{1}{2}r \cdot \dfrac{a \sin c \sin B}{A+B+C-180}, \\ y = \tfrac{1}{2}r \cdot \dfrac{b \sin A - a \cos c \sin B}{A+B+C-180}, \\ z = \tfrac{1}{2}r \cdot \dfrac{c - a \cos B - b \cos A}{A+B+C-180}. \end{cases}$$

Aus der ersten dieser drei Gleichungen ergiebt sich auch, dass, wenn wir die Entfernungen des Schwerpunkts des sphärischen Dreiecks ABC von den Ebenen der drei auf den Halbmesser OA, OB, OC senkrecht stehenden grössten Kreise durch X_A, X_B, X_C bezeichnen, und diese Entfernungen immer von O aus auf den Richtungen der Halbmesser OA, OB, OC selbst abschneiden, jederzeit

$$7)\begin{cases} X_A = \tfrac{1}{2}r \cdot \dfrac{a \sin b \sin C}{A+B+C-180} = \tfrac{1}{2}r \cdot \dfrac{a \sin c \sin B}{A+B+C-180}, \\ X_B = \tfrac{1}{2}r \cdot \dfrac{b \sin c \sin A}{A+B+C-180} = \tfrac{1}{2}r \cdot \dfrac{b \sin a \sin C}{A+B+C-180}, \\ X_C = \tfrac{1}{2}r \cdot \dfrac{c \sin a \sin B}{A+B+C-180} = \tfrac{1}{2}r \cdot \dfrac{c \sin b \sin A}{A+B+C-180} \end{cases}$$

ist.

Zu diesen drei letzten Formeln gelangt Herr Giulio a. a. O. durch eine unmittelbare geometrische Betrachtung mit Hülfe des in II. bewiesenen Satzes und der aus der sphärischen Trigonometrie bekannten Auflösung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke. Uns scheint jedoch die vorhergehende mehr analytische Ableitung aus verschiedenen Gründen den Vorzug zu verdienen, welches weiter zu erörtern hier zu weit führen würde.

V.

Wenn ABC ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck und A der rechte Winkel ist, so ist nach 6) und einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie

$$8)\begin{cases} x = \frac{1}{2}r \cdot \frac{a \sin c \sin B}{B + C - 90}, \\ y = \frac{1}{2}r \cdot \frac{b - a \cos C}{B + C - 90}, \\ z = \frac{1}{2}r \cdot \frac{c - a \cos B}{B + C - 90}. \end{cases}$$

Ist ABC ein gleichschenkliges sphärisches Dreieck und $a = b$, also auch $A = B$, so nehme man den Halbmesser der Kugel, welcher die Seite c halbirt, als den positiven Theil der Axe der x, die Ebene der Seite c als Ebene der xy, und den positiven Theil der Axe der z auf derselben Seite dieser Ebene an, auf welcher der Punkt C liegt. Dann ist nach den Formeln 8) und bekannten Elementarsätzen der Lehre vom Schwerpunkte

$$9)\begin{cases} x = r \cdot \frac{a \sin \frac{1}{2}c \sin A}{2A + C - 180} = r \cdot \frac{b \sin \frac{1}{2}c \sin B}{2B + C - 180}, \\ y = 0, \\ z = \frac{1}{2}r \cdot \frac{c - 2a \cos A}{2A + C - 180} = \frac{1}{2}r \cdot \frac{c - 2b \cos B}{2B + C - 180}. \end{cases}$$

Für $a = b = 90$ ist auch $A = B = 90$, und folglich nach 9)

$$10)\ x = r \cdot \frac{90 \sin \frac{1}{2}c}{C},\ y = 0,\ z = \frac{1}{2}r;$$

weil nämlich der Winkel C in diesem Falle von der Seite c gemessen wird, also, da alle Seiten und Winkel in Graden ausgedrückt sind, $C = c$ ist.

VIII.

Geometrische Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

Man soll, wenn ADB in Taf. I. Fig. 8. eine aus dem Mittelpunkte C über der grossen Axe AB mit der kleinen Halbaxe CD beschriebene halbe Ellipse ist, der

Punkt E in dieser Ellipse eine solche Lage hat, dass die beiden von E nach den Endpunkten A und D der grossen und kleinen Axe gezogenen Sehnen AE und DE gleiche Länge haben, und der Winkel ACE, unter welchem der nach dem Punkte E gezogene Radius Vector CE gegen die grosse Halbaxe CA geneigt ist, als gegeben betrachtet wird, das Verhältniss der beiden Axen der Ellipse bestimmen.

Die grosse und kleine Halbaxe der Ellipse bezeichne man wie gewöhnlich durch a und b, den gegebenen Winkel ACE durch ω. Von E fälle man auf die grosse Axe AB das Perpendikel EF, und setze $CF = x$, $EF = y$; so ist

$$AE^2 = (x-a)^2 + y^2, \quad DE^2 = x^2 + (y-b)^2,$$

und folglich, weil nach der Voraussetzung $AE = DE$ ist,

$$(x-a)^2 + y^2 = x^2 + (y-b)^2,$$

woraus sich

$$a^2 - 2ax = b^2 - 2by$$

oder

$$1) \quad a^2 - b^2 = 2(ax - by)$$

ergiebt. Nach der Theorie der Ellipse hat man ferner

$$2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

und in dem Dreiecke CEF ist

$$3) \quad y = x \text{ tang } \omega.$$

Führt man diesen Ausdruck von y in die Gleichungen 1) und 2) ein, so erhält man

$$a^2 - b^2 = 2(a - b \text{ tang } \omega)x,$$

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\text{tang } \omega^2}{b^2}\right)x^2 = 1;$$

also, wie man leicht findet,

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2(a - b \text{ tang } \omega)} = \frac{(a^2 - b^2)\cos \omega}{2(a \cos \omega - b \sin \omega)},$$

$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 \text{ tang } \omega^2} = \frac{a^2 b^2 \cos \omega^2}{a^2 \sin \omega^2 + b^2 \cos \omega^2};$$

woraus sich die Gleichung

$$4a^2 b^2 (a - b \text{ tang } \omega)^2 = (a^2 - b^2)^2 \, (b^2 + a^2 \text{ tang } \omega^2),$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten durch b^6 dividirt, die Gleichung

Digitized by Google

$$4\frac{a^2}{b^2}\ (\frac{a}{b} - \text{tang}\ \omega)^2$$

$$= (\frac{a^2}{b^2} - 1)^2\ (1 + \frac{a^2}{b^2}\ \text{tang}\ \omega^2),$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$4)\ \frac{a}{b} = u$$

setzt, die Gleichung

$$5)\ 4u^2(u - \text{tang}\ \omega)^2 = (u^2 - 1)^2\ (1 + u^2\ \text{tang}\ \omega^2)$$

ergiebt. Entwickelt man diese Gleichung gehörig, so bringt man sie leicht auf die folgende Form:

$$6)\ \left.\begin{array}{l}\text{tang}\ \omega^2 \,.\, u^6 - (3 + 2\ \text{tang}\ \omega^2)\ u^4 \\ + 8\text{tang}\ \omega \,.\, u^3 - (2 + 3\text{tang}\ \omega^2)\ u^2 + 1\end{array}\right\} = 0$$

oder auf die Form

$$7)\ \left.\begin{array}{l}u^6 - (2 + 3\text{cot}\ \omega^2)\ u^4 \\ + 8\text{cot}\ \omega \,.\, u^3 - (3 + 2\text{cot}\ \omega^2)\ u^2 + \text{cot}\ \omega^2\end{array}\right\} = 0,$$

welches eine Gleichung des sechsten Grades ist, in der das zweite Glied und auch das die erste Potenz der unbekannten Grösse u enthaltende vorletzte Glied fehlt.

Die vorher aufgelöste Aufgabe hat Analogie zu einer andern Aufgabe, mit deren Hülfe man in der physischen Geographie oder Meteorologie die scheinbare Gestalt des Himmels zu bestimmen pflegt, worüber man mit Mehrerem Lehrbuch der Meteorologie von L. F. Kämtz. Thl. III. Halle. 1836. S. 45 nachsehen kann. Diese Aufgabe ist folgende:

In Taf. I. Fig. 9. sei ADB ein Kreisabschnitt, der nicht grösser als der Halbkreis ist. Der Mittelpunkt des Kreises, welchem derselbe angehört, sei O, und der Halbmesser OD stehe auf der Sehne AB dieses Kreisabschnitts in C senkrecht. Wenn man nun den Winkel ACE kennt, für welchen die Linie CE eine solche Lage hat, dass die Bogen AE, DE, und also auch die Sehnen AE, DE einander gleich sind: so soll man das Verhältniss der Linien AC und CD zu einander bestimmen.

Den Winkel ACE bezeichne man durch ω, und fälle von E auf den Halbmesser OD das Perpendikel EF. Den Halbmesser des Kreises bezeichne man durch r, und setze

$$OF = x,\ EF = y;\ OC = x_1,\ AC = y_1;$$

so ist

$$8)\ x^2 + y^2 = r^2,\ x_1^2 + y_1^2 = r^2.$$

Ferner ist

$$AE^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2,\ DE^2 = (r - x)^2 + y^2;$$

und folglich, weil nach der Bedingung der Aufgabe $AE^2 = DE^2$ ist,

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (r - x)^2 + y^2,$$

woraus man nach gehöriger Entwickelung mit Hülfe von 8) die Gleichung

$$9)\quad rx = xx_1 + yy_1$$

erhält. Endlich hat man noch die Gleichung

$$10)\quad y = (x - x_1) \cot \omega.$$

Setzt man nun

$$\frac{CD}{AC} = u,$$

so ist

$$11)\quad \frac{r - x_1}{y_1} = u \text{ oder } r - x_1 = y_1 u.$$

Aus der Gleichung 9) folgt

$$(r - x_1)\, x = yy_1 \text{ oder } \frac{r - x_1}{y_1} = \frac{y}{x},$$

also wegen 11)

$$12)\quad y = xu,$$

und daher nach 10)

$$xu = (x - x_1) \cot \omega,$$

woraus sich

$$13)\quad x = \frac{x_1}{1 - u \text{ tang } \omega},$$

also nach 12)

$$14)\quad y = \frac{x_1 u}{1 - u \text{ tang } \omega}$$

ergiebt. Führt man diese Ausdrücke von x und y in die erste der Gleichungen 8) ein, so erhält man

$$r^2 = x_1^2 \cdot \frac{1 + u^2}{(1 - u \text{ tang } \omega)^2},$$

also

$$15)\quad \left(\frac{r}{y_1}\right)^2 = \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2 \cdot \frac{1 + u^2}{(1 - u \text{ tang } \omega)^2}.$$

Aus der Gleichung 11) folgt

$$r = x_1 + y_1 u,$$

und es ist also nach der zweiten der Gleichungen 8)

Digitized by Google

$$x_1^2 + y_1^2 = x_1^2 + 2x_1y_1u + y_1^2u^2,$$

woraus sich leicht

$$16)\ \frac{x_1}{y_1} = \frac{1-u^2}{2u}$$

ergiebt. Weil nun nach 11)

$$\frac{r}{y_1} - \frac{x_1}{y_1} = u, \text{ also } \frac{r}{y_1} = u + \frac{x_1}{y_1}$$

ist, so ist nach 16)

$$17)\ \frac{r}{y_1} = \frac{1+u^2}{2u}.$$

Führt man nun die Ausdrücke 16) und 17) in die Gleichung 15) ein, so erhält man

$$\frac{(1+u^2)^2}{4u^2} = \frac{(1-u^2)^2}{4u^2} \cdot \frac{1+u^2}{(1-u \text{ tang } \omega)^2},$$

also

$$18)\ (1+u^2)\ (1-u \text{ tang } \omega)^2 = (1-u^2)^2.$$

Nach gehöriger Entwickelung erhält man aus dieser Gleichung:

$$\begin{aligned} 19)\ 0 = &(1 - \text{tang } \omega^2)u^2 \\ &+ 2\text{tang } \omega \,.\, u^2 \\ &- (3 + \text{tang } \omega^2) \,.\, u \\ &+ 2 \text{ tang } \omega, \end{aligned}$$

oder, weil bekanntlich

$$\text{tang } 2\omega = \frac{2\text{tang } \omega}{1 - \text{tang } \omega^2}$$

ist:

$$20)\ u^2 + \text{tang } 2\omega \,.\, u^2 - \frac{3 + \text{tang } \omega^2}{1 - \text{tang } \omega^2}\, u + \text{tang } 2\omega = 0.$$

Auch ist

$$\frac{3 + \text{tang } \omega^2}{1 - \text{tang } \omega^2} = \frac{3\cos \omega^2 + \sin \omega^2}{\cos \omega^2 - \sin \omega^2} = \frac{1 + 2\cos \omega^2}{\cos 2\omega}.$$

Aber bekanntlich

$$2\cos \omega^2 = 1 + \cos 2\omega,$$

und folglich

$$\frac{3 + \text{tang } \omega^2}{1 - \text{tang } \omega^2} = \frac{2 + \cos 2\omega}{\cos 2\omega} = 1 + 2\sec 2\omega.$$

Digitized by Google

Daher lässt sich die obige Gleichung zur Bestimmung des gesuchten Verhältnisses u auch unter der Form

$$21)\quad u^3 + \text{tang}\ 2\omega \,.\, u^2 - (1 + 2\text{sec}\ 2\omega)u + \text{tang}\ 2\omega = 0$$

darstellen.

Die von Kämtz a. a. O. ganz nach Kästner (Smith's Lehrbegriff der Optik. S. 56) gegebene Auflösung ist von der vorhergehenden verschieden, indem bei derselben das Verhältniss u nicht unmittelbar gesucht wird.

Eine Wolke, die sich in einer Höhe von 23° über dem Horizonte befindet, scheint nach Smith das scheinbare Himmelsgewölbe zu halbiren. Für diesen Werth von ω ergiebt sich nach Kämtz a. a. O. nahe $u = 0{,}3$. Die scheinbare Entfernung des Zeniths vom Beobachter beträgt also nur ungefähr 0,3 der Entfernung des Horizonts vom Beobachter.

Es scheint mir, dass von den in diesem Aufsatze behandelten Aufgaben ein zweckmässiger Gebrauch beim Unterrichte gemacht werden kann. Die Schüler können auch zur eignen Beobachtung des scheinbaren Himmelsgewölbes angeleitet werden.

IX.

Ueber das independente Fortschreitungsgesetz der numerischen Coefficienten in der Entwickelung der höheren Differentiale der Function $y = \sqrt{a^2 - b^2x^2}$, und über zwei Eigenschaften der Kegelfläche zweiten Grades.

Von dem

Herrn Doctor A. R. Luchterhandt

zu Königsberg i. d. N.

I.

Das independente Fortschreitungsgesetz der numerischen Coefficienten in der Entwickelung der höheren Differentiale der Function $y = \sqrt{a^2 - b^2x^2}$.

Im dritten Theile des Archivs S. 243 und 247 hat Herr Pro-

Digitized by Google

fessor Grunert für die obengenannten Coefficienten die Recursionsformeln

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{2n}{A}_0 = \overset{2n-1}{A}_0,\\
&\overset{2n}{A}_1 = (4n-4)\overset{2n-1}{A}_0 + 3\,.\,\overset{2n-1}{A}_1,\\
&\overset{2n}{A}_2 = (4n-6)\overset{2n-1}{A}_1 + 5\,.\,\overset{2n-1}{A}_2,\\
&\overset{2n}{A}_3 = (4n-8)\overset{2n-1}{A}_2 + 7\,.\,\overset{2n-1}{A}_3,\\
&\quad\cdot\qquad\qquad\cdot\\
&\quad\cdot\qquad\qquad\cdot\\
&\overset{2n}{A}_{n-2} = (2n+2)\overset{2n-1}{A}_{n-3} + (2n-3)\overset{2n-1}{A}_{n-2},\\
&\overset{2n}{A}_{n-1} = 2n\overset{2n-1}{A}_{n-2},
\end{aligned}\right\}(1)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{2n+1}{A}_0 = (4n-1)\overset{2n}{A}_0 + 2\overset{2n}{A}_1,\\
&\overset{2n+1}{A}_1 = (4n-3)\overset{2n}{A}_1 + 4\overset{2n}{A}_2,\\
&\overset{2n+1}{A}_2 = (4n-5)\overset{2n}{A}_2 + 6\overset{2n}{A}_3,\\
&\overset{2n+1}{A}_3 = (4n-7)\overset{2n}{A}_3 + 8\overset{2n}{A}_4,\\
&\quad\cdot\qquad\qquad\cdot\\
&\quad\cdot\qquad\qquad\cdot\\
&\overset{2n+1}{A}_{n-2} = (2n+3)\overset{2n}{A}_{n-2} + (2n-2)\overset{2n}{A}_{n-1},\\
&\overset{2n+1}{A}_{n-1} = (2n+1)\overset{2n}{A}_{n-1}
\end{aligned}\right\}(2)$$

entwickelt, aus denen wir jetzt das independente Bildungsgesetz ableiten wollen. Fasst man zunächst die Coefficienten $\overset{n}{A}_0$ ins Auge, so sieht man bald, nach welchem Gesetz sie gebildet werden, denn da man

$$\overset{1}{A}_0 = \overset{2}{A}_0 = 1,\ \overset{3}{A}_0 = \overset{4}{A}_0 = 3\,.\,1,\ \overset{5}{A}_0 = \overset{6}{A}_0 = 45 = 5\,.\,3^2\,.\,1^2,$$
$$\overset{7}{A}_0 = \overset{8}{A}_0 = 1575 = 7\,.\,5^2\,.\,3^2\,.\,1^2$$

hat, so schliesst man, dass allgemein

$$\overset{2n}{A}_0 = (2n-1)\ (2n-3)^2\ (2n-5)^2\ \ldots\ldots\ 7^2\,.\,5^2\,.\,3^2\,.\,1^2,$$
$$\overset{2n+1}{A}_0 = (2n+1)\ (2n-1)^2\ (2n-3)^2\ \ldots\ldots\ 7^2\,.\,5^2\,.\,3^2\,.\,1^2$$

sein werde. Die Gültigkeit dieser Ausdrücke angenommen, erhält man nun leicht durch successive Anwendung der Recursionsformeln (1) und (2) für die folgenden Coefficienten die Werthe

$$\overset{2n}{A}_1 = (n-1)\ 2n(2n-1)\ (2n-3)^2\ (2n-5)^2 \ldots . 7^2 . 5^2 . 3^2,$$

$$\overset{2n}{A}_2 = (n-1)^2\ (n-2)\ 2n(2n-1)\ (2n-3)^2\ (2n-5)^2 \ldots 7^2 . 5^2 . 3,$$

$$\overset{2n}{A}_3 = 2(n-1)^2\ (n-2)^2\ (n-3)\ 2n(2n-1)\ (2n-3)^2\ (2n-5)^2 \ldots . 7^2 . 5,$$

89 $$\overset{2n}{A}_4 = (n-1)^2\ (n-2)^2\ (n-3)^2\ (n-4)\ 2n(2n-1)\ (2n-3)^2\ (2n-5)^2 \ldots 9^2 . 7 . 5,$$

$$\overset{2n}{A}_5 = 2 . (n-1)^2\ (n-2)^2 \ldots (n-4)^2\ (n-5)\ 2n(2n-1)\ (2n-3)^2\ (2n-5)^2 \ldots 11^2 . 9 . 7,$$

$$\overset{2n}{A}_6 = 2 . (n-1)^2\ (n-2)^2 \ldots (n-5)^2\ (n-6)\ 2n(2n-1)\ (2n-3)^2\ (2n-5)^2 \ldots . 13^2 . 11 . 7 . 3,$$

$$\overset{2n}{A}_7 = 4 . (n-1)^2\ (n-2)^2 \ldots (n-6)^2\ (n-7)\ 2n(2n-1)\ (2n-3)^2\ (3n-5)^2 \ldots . 15^2 . 13 . 11 . 3$$

und

$$A_1^{2n+1} = (n-1)\,2n(2n+1)\,(2n-1)^2\,(2n-3)^2 \ldots 7^2 \cdot 5^2 \cdot 3,$$

$$A_2^{2n+1} = (n-1)^2\,(n-2)\,2n(2n+1)\,(2n-1)^2\,(2n-3)^2 \ldots 7^2 \cdot 5 \cdot 3,$$

$$A_3^{2n+1} = 2(n-1)^2\,(n-2)^2\,(n-3)\,2n(2n+1)\,(2n-1)^2\,(2n-3)^2 \ldots 9^2 \cdot 7 \cdot 5,$$

$$A_4^{2n+1} = (n-1)^2\,(n-2)^2\,(n-3)^2\,(n-4)\,2n(2n+1)\,(2n-1)^2\,(2n-3)^2 \ldots 11^2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5.$$

$$A_5^{2n+1} = 2(n-1)^2\,(n-2)^2 \ldots (n-4)^2\,(n-5)\,2n(2n+1)\,(2n-1)^2\,(2n-3)^2 \ldots 13^2 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7,$$

$$A_6^{2n+1} = 2(n-1)^2\,(n-2)^2 \ldots (n-5)^2\,(n-6)\,2n(2n+1)\,(2n-1)^2\,(2n-3)^2 \ldots 15^2 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 3,$$

$$A_7^{2n+1} = 4 \cdot (n-1)^2\,(n-2)^2 \ldots (n-6)^2\,(n-7)\,2n(2n+1)\,(2n-1)^2\,(2n-3)^2 \ldots 17^2 \cdot 15 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 3.$$

Das Bildungsgesetz spricht sich zwar noch nicht mit vollkommner Bestimmtheit in diesen Ausdrücken aus, man wird aber durch dieselben auf neue Recursionsformeln geführt, die dann rückwärts das Gesetz der independenten Ableitung der Coefficienten liefern.

Aus der Entwickelung der Quotienten je zweier auf einander folgender Coefficienten ergiebt sich nämlich

$$A_1^{2n} = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 1} A_0^{2n},$$

$$A_2^{2n} = 2 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} A_1^{2n},$$

$$A_3^{2n} = 2 \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 5} A_2^{2n},$$

$$A_4^{2n} = 2 \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{4 \cdot 7} A_3^{2n},$$

$$A_5^{2n} = 2 \cdot \frac{(n-4)(n-5)}{5 \cdot 9} A_4^{2n},$$

$$A_6^{2n} = 2 \cdot \frac{(n-5)(n-6)}{6 \cdot 11} A_5^{2n},$$

$$A_7^{2n} = 2 \cdot \frac{(n-6)(n-7)}{7 \cdot 13} A_6^{2n},$$

wonach allgemein

$$A_\mu^{2n} = 2 \cdot \frac{(n-p+1)(n-p)}{p(2p-1)} A_{p-1}^{2n}$$

sein würde, und

$$A_1^{2n+1} = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 3} A_0^{2n+1},$$

$$A_2^{2n+1} = 2 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 5} A_1^{2n+1},$$

$$A_3^{2n+1} = 2 \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 7} A_2^{2n+1},$$

$$A_4^{2n+1} = 2 \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{4 \cdot 9} A_3^{2n+1},$$

$$A_5^{2n+1} = 2 \cdot \frac{(n-4)(n-5)}{5 \cdot 11} A_4^{2n+1},$$

$$A_6^{2n+1} = 2 \cdot \frac{(n-5)(n-6)}{6 \cdot 13} A_5^{2n+1},$$

$$A_7^{2n+1} = 2 \cdot \frac{(n-6)(n-7)}{7 \cdot 15} A_6^{2n+1},$$

wonach allgemein

$$A_p^{2n+1} = 2 \cdot \frac{(n-p+1)(n-p)}{p(2p+1)} A_{p-1}^{2n+1}$$

wäre.

Substituirt man nun nach und nach für A_3, A_4 u. s. w. ihre Werthe, so hat man

$$A_1^{2n} = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 1} A_0^{2n}.$$

$$A_2^{2n} = 2^2 \cdot \frac{n(n-1)^2 (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3} A_0^{2n},$$

$$A_3^{2n} = 2^3 \cdot \frac{n(n-1)^2 (n-2)^2 (n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5} A_0^{2n},$$

$$A_4^{2n} = 2^4 \cdot \frac{n(n-1)^2 (n-2)^3 (n-3)^2 (n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} A_0^{2n}, \text{ u. s. w}$$

und

$$A_1^{2n+1} = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 3} A_0^{2n+1},$$

$$A_2^{2n+1} = 2^2 \cdot \frac{n(n-1)^2 (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} A_0^{2n+1},$$

$$A_3^{2n+1} = 2^3 \cdot \frac{n(n-1)^2 (n-2)^2 (n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} A_0^{2n+1},$$

$$A_4^{2n+1} = 2^4 \cdot \frac{n(n-1)^2 (n-2)^2 (n-3)^2 (n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} A_0^{2n+1}, \text{ u. s. w.}$$

Nach dem Bildungsgesetz, das hier ganz unzweideutig hervortritt, würde man nun allgemein

Digitized by Google

$$A_p^{2n} = 2^p \cdot \frac{n(n-1)^2\ (n-2)^2\ (n-3)^2 \ldots\ldots (n-p+1)^2\ (n-p)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (p-1)\ p \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2p-3)\ (2p-1)} A_0^{2n}$$

$$= 2^p \cdot \frac{n(n-1)^2\ (n-2)^2 \ldots\ldots (n-p+1)^2\ (n-p)\ (2n-1)\ (2n-3)^2\ (2n-5)^2 \ldots (2p+1)^2\ (2p-1)\ (2p-3) \ldots\ldots 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (p-1)\ p} \ldots\ldots \quad (3)$$

und

$$A_p^{2n+1} = 2^p \cdot \frac{n(n-1)^2\ (n-2)^2 \ldots\ldots\ldots (n-p+1)^2\ (n-p)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1)\ p \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2p-1)\ (2p+1)} A_0^{2n+1}$$

$$= 2^p \cdot \frac{n(n-1)^2\ (n-2)^2 \ldots\ldots (n-p+1)^2\ (n-p)\ (2n+1)\ (2n-1)^2\ (2n-3)^2 \ldots (2p+3)^2\ (2p+1)\ (2p-1) \ldots\ldots 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots (p-1)\ p} \ldots\ldots \quad (4)$$

erhalten. Um nun zu zeigen, dass diesen Formeln allgemeine Gültigkeit zukomme, wollen wir nachweisen, dass dieselben, wenn sie von A_0 bis A_p richtig sind, auch noch für A_{p+1} stattfinden. Setzen wir zu dem Zwecke in die nach (1) stattfindende Formel

$$2(p+1)\overset{2n}{A}_{p+1} = \overset{2n+1}{A}_p - \{4n-(2p+1)\}\overset{2n}{A}_p$$

für $\overset{2n+1}{A}_p$ nnd $\overset{2n}{A}_p$ ihre voranstehenden Werthe und reduciren, so ergiebt sich

65 $$A^{2n}_{p+1} = 2^{p+1} \cdot \frac{n(n-1)^2\ (n-2)^2 \ldots (n-p)^2\ (n-p-1)\ (2n-1)\ (2n-3)^2\ (2n-5)^2 \ldots (2p+3)^2 \cdot (2p+1)\ (2p-1) \ldots 7.5.3.1}{1.2.3 \ldots\ldots p\ (p+1)} \ldots\ldots (5)$$

Wenn man ebenso in die nach (2) gültige Formel

$$(2p+3)\overset{2n-1}{A}_{p+1} = \overset{2n}{A}_{p+1} - \{4n - 2(p+2)\}\overset{2n-1}{A}_p$$

die Werthe von $\overset{2n}{A}_{p+1}$ und $\overset{2n-1}{A}_p$ einsetzt und in dem hervorgehenden Ausdrucke $n+1$ mit n vertauscht, so erhält man

$$\int^{2n+1} x^{p+1} = 2^{p+1} \cdot \frac{n(n-1)^2(n-2)^2 \ldots (n-p)^2 (n-p-1)(2n+1)(2n-1)^2(2n-3)^2 \ldots \ldots (2p+5)^2 \cdot (2p+3)(2p+1) \ldots 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots p\ (p+1)} \ldots \ldots (6)$$

Die Ausdrücke (5) und (6) sind aber in $p+1$ so gebildet, wie die entsprechenden (3) und (4) in p, und hiernach wäre das aufgestellte Bildungsgesetz richtig, wenn wir nur noch die einzige Voraussetzung, die wir uns bisher erlaubt haben, als zulässig nachweisen können. Dieselbe betraf aber das Bildungsgesetz der Coefficienten A_0, mit deren Hülfe wir die anderen ableiteten. Wir können uns aber von der Richtigkeit unserer Annahme über die Coefficienten A_0 auf folgende Weise vergewissern. Die Coefficienten $\overset{2n}{A}_{n-1}$ und $\overset{2n+1}{A}_{n-1}$ lassen sich nämlich, ohne auf die Coefficienten A_0 zurückzugehen, unmittelbar aus den Recursionsformeln herleiten, denn nach denselben hat man

$$\overset{2n+1}{A}_{n-1} = (2n+1)\overset{2n}{A}_{n-1} = (2n+1)2n\overset{2n-1}{A}_{n-2} = (2n+1)\,2n(2n-1)\overset{2n-2}{A}_{n-2} = \text{u. s. w.}$$

$$= (2n+1)\,2n(2n-1)\,(2n-2)\ldots 5\,.\,4\,.\,3$$

$$= (2n+1)\,(2n-1)\,(2n-3)\ldots 7\,.\,5\,.\,3\,.\,2n(2n-2)\,(2n-4)\ldots 8\,.\,6\,.\,4$$

$$= 2^{n-1}(2n+1)\,(2n-1)\,(2n-3)\ldots 7\,.\,5\,.\,3\,.\,n(n-1)\,(n-2)\ldots 4\,.\,3\,.\,2.$$

Setzt man aber in den obigen Werth von $\overset{2n+1}{A}_p$ die Zahl $p=n-1$,

Digitized by Google

so erhält man den eben entwickelten Ausdruck. Aus dieser Uebereinstimmung folgt daher auch die Richtigkeit des für $\overset{2n+1}{A}_0$ angenommenen Werthes.

Wir knüpfen hieran noch eine Bemerkung über die Summe der Coefficienten in der Entwickelung der verschiedenen Differentiale. Addirt man nämlich die Gleichungen (1) und ebenso die Gleichungen (2), so erhält man

$$\overset{2n}{A}_0+\overset{2n}{A}_1+\overset{2n}{A}_2+\ldots\ldots+\overset{2n}{A}_{n-1}=(4n-3)\left\{\overset{2n-1}{A}_0+\overset{2n-1}{A}_1+\ldots\ldots+\overset{2n-1}{A}_{n-2}\right\}$$

und

$$\overset{2n+1}{A}_0+\overset{2n+1}{A}_1+\overset{2n+1}{A}_2+\ldots\ldots+\overset{2n+1}{A}_{n-1}=(4n-1)\left\{\overset{2n}{A}_0+\overset{2n}{A}_1+\ldots\ldots+\overset{2n}{A}_{n-1}\right\},$$

oder kürzer

$$\Sigma\overset{2n}{A}=(4n-3)\Sigma\overset{2n-1}{A},\quad \Sigma\overset{2n+1}{A}=(4n-1)\Sigma\overset{2n}{A},$$

und hiernach

$$\Sigma\overset{m}{A}=(2m-3)\ (2m-5)\ (2m-7)\ldots\ldots 5\ .\ 3\ .\ 1.$$

II.

Zwei Eigenschaften der Kegelfläche zweiten Grades.

A.

Die allgemeine Gleichung der Kegelfläche zweiten Grades, deren Spitze im Anfangspunkte der Coördinaten liegt, ist bekanntlich folgende:

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy=0\ldots\ldots\ (1)$$

Wir legen ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde und wollen die Coefficienten der Gleichung (1) durch die Bedingung bestimmen, dass die Kegelfläche durch die drei Axen und die beiden Geraden geht, denen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}x&=az\\y&=bz\end{aligned}\right\}(2),\qquad \left.\begin{aligned}x&=a'z\\y&=b'z\end{aligned}\right\}(3)$$

zugehören. Setzt man nun in (1) $z=0$, um die Gleichung der Durchschnittscurve des Kegels mit der Coordinatenebene (xy) zu erhalten, so ergiebt sich die Gleichung

$$Ax^2+A'y^2+2B''xy=0,\ (4)$$

die sich, wegen der Natur der Kegelflächen, im Allgemeinen in zwei reelle Factoren vom ersten Grade zerlegen lassen muss. In unserem besonderen Falle sollen aber die Axen der x und y die Durchschnittslinien sein; diesen Axen entsprechen aber respective die Gleichungen $y=0$ und $x=0$, so wie ihrem Systeme die Gleichung

$$xy=0 \quad (5)$$

zugehört. Man sieht also, dass in der Gleichung (4) die Coefficienten A und $A'=0$ werden müssen, wenn dieselbe das System der Axen der x und y darstellen soll. Eben so zeigt man, dass auch A'' verschwinden muss, und folglich die Gleichung (1) die einfachere Form

$$Byz+B'xz+B''xy=0 \quad (6)$$

annimmt. Zur Bestimmung der drei Coefficienten B, B', B'' hat man die Gleichungen (2) und (3). Da die durch dieselben bestimmten Geraden ganz in der Kegelfläche (6) liegen sollen, so muss die Gleichung (6) identisch werden, wenn man darin die Werthe von $\frac{y}{z}$, $\frac{x}{z}$ aus (2) und (3) substituirt. Dies liefert die Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} bB+aB'+abB''&=0\\ b'B+a'B'+a'b'B''&=0\end{aligned}\right\}(7)$$

aus denen sich

$$\frac{B'}{B}=\frac{a-a'}{b'-b}\cdot\frac{bb'}{aa'},\quad \frac{B''}{B}=\frac{a'b-ab'}{aa'(b'-b)}$$

ergiebt, so dass also die gesuchte Gleichung unserer Kegelfläche folgende ist:

$$aa'(b'-b)yz+bb'(a-a')xz+(a'b-ab')xy=0. \quad (8)$$

Wir wollen nun ferner annehmen, dass die beiden Linien (2) und (3) und eine dritte, deren Gleichung

$$\left.\begin{aligned} x&=a''z\\ y&=b''z\end{aligned}\right\}(9)$$

ist, ein System rechtwinkliger Axen bilden, so dass also zwischen den Constanten ihrer Gleichungen die Relationen

$$\begin{aligned} aa'+bb'+1&=0,\\ aa''+bb''+1&=0,\\ a'a''+b'b''+1&=0\end{aligned}$$

stattfinden. Hieraus zieht man

$$\begin{aligned} b''(b'-b)&=a''(a-a'),\\ b''(a'b-ab')&=a-a',\end{aligned}$$

so dass also die Gleichung (8) in die folgende

$$aa'a''yz + bb'b''xz + xy = 0 \quad (11)$$

übergeht. Bezeichnet man nun den Werth, welchen die linke Seite dieser Gleichung durch Substitution der aus (9) gezogenen Werthe von x und y annimmt, mit S, so wird

$$S = z^2 a''b''(aa' + bb' + 1),$$

und mit Rücksicht auf die erste der Gleichungen (10)

$$S = 0,$$

d. h. auch die Gerade (9) liegt auf der Kegelfläche (11). Wir hätten dies Ergebniss auch daraus ableiten können, dass die Gleichung (11) in Beziehung auf die Constanten der Gleichungen (2), (3) und (9) symmetrisch ist. Wir haben also folgendes Theorem bewiesen:

Denkt man sich im Raume irgend zwei rechtwinklige Coordinatensysteme um einen und denselben Anfangspunkt, so liegen allemal die sechs Coordinatenaxen in irgend einer Kegelfläche zweiten Grades.

B.

Wir wollen nun wieder von der allgemeinen Gleichung der Flächen zweiter Ordnung, die einen Mittelpunkt haben, ausgehen, indem wir uns den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt gelegt denken, also von der Gleichung

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''yx = 0 \quad (12)$$

und zunächst zu ihrer Specialisirung die Bedingung machen, dass dieselbe eine Kegelfläche darstelle, welche die drei Coordinatenebenen berührt. Es muss sich also für die gemeinschaftlichen Punkte dieser Ebenen mit denen der Kegelfläche eine lineäre Gleichung ergeben. Verbinden wir nun die Gleichung der Coordinatenebene der (yz), nämlich die Gleichung $x = 0$, mit der Gleichung (12), so erhalten wir die Gleichung

$$A'y^2 + A''z^2 + 2Byz = 0.$$

Soll dieselbe, wie in unserem Falle verlangt wird, eine Gerade, oder vielmehr zwei zusammenfallende Gerade darstellen, so muss bekanntlich zwischen den Coefficienten die Relation

$$B = \pm\sqrt{A'A''}$$

stattfinden. Auf ähnliche Weise erhält man aus den Bedingungen, dass die Kegelfläche die beiden anderen Coordinatenebenen berühre, die Relationen

$$B' = \pm\sqrt{AA''}, \quad B'' = \pm\sqrt{AA'},$$

Digitized by Google

wonach also die Gleichung (12) die Form

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2\pm 2\sqrt{AA'}xy\pm 2\sqrt{AA''}xz\pm 2\sqrt{A'A''}yz=0 \quad (13)$$

annimmt. Aber welche Combination der Zeichen ist zu wählen? Zunächst erhellt, dass A, A', A'' alle von demselben Zeichen sein müssen; nehmen wir nun an, dieselben seien positiv, so muss man in den drei letzten Gliedern das negative Zeichen nehmen, weil bei jeder anderen Zusammenstellung die Gleichung (13) sich in ein Product zweier lineären Factoren zerlegen liesse, und dieselbe dann also keine Kegelfläche, sondern ein System zweier Ebenen darstellen würde. Hiernach wird nun unsere Gleichung, wenn wir noch statt der Constanten A, A', A'' ihre Quadrate einführen, folgende sein:

$$A^2x^2+A'^2y^2+A''^2z^2-2AA'xy-2AA''xz-2A'A''yz=0. \quad (14)$$

Zur vollständigen Bestimmung der Kegelfläche fügen wir die fernere Bedingung hinzu, dass die beiden Ebenen, deren Gleichungen

$$ax+by+cz=0, \quad (15)$$

$$a_1x+b_1y+c_1z=0 \quad (16)$$

sind, den Kegel berühren. Eliminiren wir aus den Gleichungen (14) und (15) die Variable x, so erhalten wir für die Projection des Durchschnitts auf die Ebene der (yz) die Gleichung

$$y^2(bA+aA')^2+2yz(bcA^2+acAA'+abAA''-a^2A'A'')+z^2(cA+aA'')^2=0.$$

Soll dieselbe nun eine einzige Gerade darstellen — also die Ebene (15) eine Tangentenebene sein — so muss

$$bcA^2+acAA'+abAA''-a^2A'A''=\pm(bA+aA')(cA+aA'')$$

sein; das obere Zeichen rechts ist nicht zu gebrauchen, denn man kommt dadurch auf die Bedingungsgleichung

$$2a^2A'A''=0,$$

welche $a^2=0$ geben würde, was im Allgemeinen nicht zulässig ist. Mit Benutzung des unteren Zeichens erhalten wir dagegen die Relation

$$bcA+acA'+abA''=0 \quad (17)$$

und auf ähnliche Weise die andere

$$b_1c_1A+a_1c_1A'+a_1b_1A''=0. \quad (18)$$

Eliminirt man jetzt aus den Gleichungen (14), (17) und (18) die Grössen A, A', A'', so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} &a^2a_1{}^2(bc_1-b_1c)^2x^2+b^2b_1{}^2(a_1c-ac_1)^2y^2+c^2c_1{}^2(ab_1-a_1b)^2z^2\\ &\quad -2aa_1bb_1(bc_1-b_1c)\,(a_1c-ac_1)xy\\ &\quad -2aa_1cc_1(ab_1-a_1b)\,(bc_1-b_1c)xz\\ &\quad -2bb_1cc_1(ab_1-a_1b)\,(a_1c-ac_1)yz=0 \end{aligned}\right\}(19)$$

Nehmen wir nun an, dass die beiden Ebenen (15) und (16) auf einander und auch auf der Ebene

$$a_2x+b_2y+c_2z=0 \quad (20)$$

senkrecht stehen, d. h. machen wir die Bedingung, dass

$$\left.\begin{aligned} aa_1+bb_1+cc_1&=0,\\ aa_2+bb_2+cc_2&=0,\\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2&=0 \end{aligned}\right\}(21)$$

sei, so lässt sich die Gleichung (19) unter einer eleganteren Form darstellen. Setzen wir noch, was erlaubt ist, $a=a_1=a_2=1$, so erhalten wir aus (21)

$$\frac{b-b_1}{c-c_1}=-\frac{c_2}{b_2},\quad \frac{bc_1-b_1c}{c_1-c}=-\frac{1}{b_2}$$

und hiernach für die Gleichung (19) die folgende

$$x^2+b^2b_1{}^2b_2{}^2y^2+c^2c_1{}^2c_2{}^2z^2-2bb_1b_2xy-2cc_1c_2xz\\ -2bb_1b_2cc_1c_2yz=0.$$

Da dieselbe in Beziehung auf b, b_1, b_2, c, c_1, c_2 symmetrisch ist, so steht die durch sie ausgedrückte Kegelfläche zu den drei Ebenen (15), (16) und (20) in derselben Beziehung, d. h. sie berührt sie alle drei. Wir sind also zu dem Satze gekommen:

Denkt man sich im Raume irgend zwei rechtwinklige Coordinatensysteme um einen und denselben Anfangspunkt, so berühren die sechs Coordinatenebenen allemal irgend eine Kegelfläche zweiten Grades.

Vergl. Steiner: Die Abhängigkeit geometrischer Gestalten. Tbl. I. S. 313.

Digitized by Google

X.

Beweis der Gleichung

$$\frac{d^{i-1}.(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dz^{i-1}}=(-1)^{i-1}.1.3.5\ldots(2i-1)\frac{\sin ix}{i}$$

für $z=\cos x$.

Nach einem Aufsatze des Herren Liouville frei bearbeitet

von

dem Herausgeber.

Die obige höchst merkwürdige Gleichung ist bekanntlich von Jacobi gefunden und in Crelle's Journal. Thl. XV. S. 3. zuerst mitgetheilt und bewiesen worden. In seinem Journal T. VI. p. 69. hat Liouville zwei neue Beweise für dieselbe gegeben, von denen mir besonders der zweite bemerkenswerth zu sein scheint, den ich daher, aber auf eine andere Art dargestellt, im Folgenden mittheilen werde.

Der Kürze wegen wollen wir

$$1)\quad \Theta_i=\frac{d^{i-1}.(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dz^{i-1}},$$

also

$$2)\quad \Theta_{i+1}=\frac{d^i.(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}{dz^i}$$

setzen. Weil nun

$$(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}=(1-z^2)\,(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}$$

ist, so erhält man nach der aus der Differentialrechnung bekannten Gleichung

$$\frac{d^n.pq}{dz^n}=p\frac{d^nq}{dz^n}+\frac{n}{1}\cdot\frac{dp}{dz}\cdot\frac{d^{n-1}q}{dz^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{d^2p}{dz^2}\cdot\frac{d^{n-2}q}{dz^{n-2}}+\ldots.$$

ohne alle Schwierigkeit die Gleichung

$$\frac{d^i \cdot (1-z^2)^{i+1}}{dz^i} = (1-z^2)\frac{d^i \cdot (1-z^2)^{i-1}}{dz^i} - 2iz\frac{d^{i-1} \cdot (1-z^2)^{i-1}}{dz^{i-1}} - i(i-1)\frac{d^{i-2} \cdot (1-z^2)^{i-1}}{dz^{i-2}}.$$

Weil nun aber offenbar

$$\frac{d^{i-2} \cdot (1-z^2)^{i-1}}{dz^{i-2}} = \int_1^z \frac{d^{i-1} \cdot (1-z^2)^{i-1}}{dz^{i-1}} dz$$

ist, so lässt sich mittelst der oben eingeführten Symbole die vorhergehende Gleichung unter der folgenden Form darstellen:

$$3)\ \Theta_{i+1} = (1-z^2)\frac{d\Theta_i}{dz} - 2iz\Theta_i - i(i-1)\int_1^z \Theta_i dz.$$

Für $i=1$ ist nach 1)

$$\Theta_1 = (1-z^2)^{\frac{1}{2}},$$

d. i., wenn wir $z = \cos x$ setzen,

$$4)\ \Theta_1 = 1 \cdot \frac{\sin x}{1}.$$

Ferner ist nach 3) für $i=1$

$$\Theta_2 = (1-z^2)\frac{d\Theta_1}{dz} - 2z\Theta_1.$$

Weil nun nach dem Vorhergehenden

$$\frac{d\Theta_1}{dx} = \cos x,\ \frac{dz}{dx} = -\sin x$$

ist, so ist

$$\Theta_2 = -\sin x \cos x - 2\sin x \cos x,$$

d. i.

$$\Theta_2 = -3\sin x \cos x,$$

oder, weil bekanntlich

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

ist,

$$5)\ \Theta_2 = -1 \cdot 3 \frac{\sin 2x}{2}.$$

Für $i=2$ ist nach 3)

$$\Theta_3 = (1-z^2)\frac{d\Theta_2}{dz} - 4z\Theta_2 - 1 \cdot 2\int_1^z \Theta_2 dz.$$

Nun ist aber

$$\frac{d\Theta_2}{dx} = -3\cos 2x, \quad \frac{dz}{dx} = -\sin x;$$

also

$$\frac{d\Theta_2}{dz} = 3\,\frac{\cos 2x}{\sin x}.$$

Ferner ist

$$\int_1^z \Theta_2\,dz = \tfrac{1}{3}\int_0^x \sin 2x \sin x\,dx,$$

und folglich, weil

$$\sin 2x \sin x = \tfrac{1}{2}\cos x - \tfrac{1}{2}\cos 3x$$

ist,

$$\int_1^z \Theta_2\,dz = \tfrac{3}{4}\sin x - \tfrac{1}{4}\sin 3x.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\begin{aligned}\Theta_3 &= 3\sin x\cos 2x + 6\cos x \sin 2x \\ &\quad - \tfrac{3}{2}\sin x + \tfrac{1}{2}\sin 3x \\ &= 3\sin 3x + 3\cos x \sin 2x - \tfrac{3}{2}\sin x + \tfrac{1}{2}\sin 3x \\ &= \tfrac{7}{2}\sin 3x + \tfrac{3}{2}\sin 3x + \tfrac{3}{2}\sin x - \tfrac{3}{2}\sin x \\ &= 5\sin 3x,\end{aligned}$$

und folglich

$$6)\quad \Theta_3 = 1\,.\,3\,.\,5\,\frac{\sin 3x}{3}.$$

Für $i = 3$ ist nach 3)

$$\Theta_4 = (1-z^2)\,\frac{d\Theta_3}{dz} - 6z\Theta_3 - 2\,.\,3\int_1^z \Theta_3\,dz.$$

Nun ist aber

$$\frac{d\Theta_3}{dx} = 15\cos 3x, \quad \frac{dz}{dx} = -\sin x;$$

also

$$\frac{d\Theta_3}{dz} = -\frac{15\cos 3x}{\sin x}.$$

Ferner ist

$$\int_1^z \Theta_3\,dz = -5\int_0^x \sin 3x \sin x\,dx,$$

und folglich, weil

$$\sin 3x \sin x = \tfrac{1}{2}\cos 2x - \tfrac{1}{2}\cos 4x$$

ist,

$$\int_1^z \Theta_3\,dz = -\tfrac{5}{4}\sin 2x + \tfrac{5}{8}\sin 4x.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\Theta_4 = -15 \sin x \cos 3x - 30 \cos x \sin 3x + \frac{15}{2} \sin 2x - \frac{15}{4} \sin 4x$$

$$= -15 \sin 4x - 15 \cos x \sin 3x + \frac{15}{2} \sin 2x - \frac{15}{4} \sin 4x$$

$$= -\frac{15 \cdot 5}{4} \sin 4x - \frac{15}{2} \sin 4x - \frac{15}{2} \sin 2x + \frac{15}{2} \sin 2x$$

$$= -\frac{15 \cdot 7}{4} \sin 4x,$$

und folglich

$$7) \quad \Theta_4 = -1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \frac{\sin 4x}{4}.$$

Wir wollen nun überhaupt

$$8) \quad \Theta_i = k_i \frac{\sin ix}{i}$$

setzen, so ist

$$\frac{d\Theta_i}{dx} = k_i \cos ix,$$

und folglich, weil

$$\frac{dz}{dx} = -\sin x$$

ist,

$$\frac{d\Theta_i}{dz} = -\frac{k_i \cos ix}{\sin x}.$$

Ferner ist

$$\int_1^z \Theta_i dz = -\frac{k_i}{i} \int_0^x \sin ix \sin x \, dx,$$

also, weil

$$\sin ix \sin x = \tfrac{1}{2} \cos (i-1)x - \tfrac{1}{2} \cos (i+1)x$$

ist,

$$\int_1^z \Theta_i dz = -\frac{k_i}{2i} \int_0^x \cos (i-1)x \, dx + \frac{k_i}{2i} \int_0^x \cos (i+1)x \, dx,$$

d. i.

$$\int_1^z \Theta_i dz = -\frac{k_i}{2i(i-1)} \sin (i-1)x + \frac{k_i}{2i(i+1)} \sin (i+1)x.$$

Weil nun nach 3)

$$\Theta_{i+1} = (1-z^2) \frac{d\Theta_i}{dz} - 2iz\Theta_i - i(i-1) \int_1^z \Theta_i dz$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\Theta_{i+1} = -k_i \sin x \cos ix - 2k_i \cos x \sin ix + \frac{k_i}{2} \sin (i-1)x - \frac{(i-1)k_i}{2(i+1)} \sin (i+1)x$$

Digitized by Google

$$= -k_i \sin (i+1)x - k_i \cos x \sin ix$$
$$+ \frac{k_i}{2} \sin (i-1)x - \frac{(i-1)k_i}{2(i+1)} \sin (i+1)x$$
$$= -k_i \,.\, \sin (i+1)x - \frac{k_i}{2} \sin (i+1)x - \frac{k_i}{2} \sin (i-1)x$$
$$+ \frac{k_i}{2} \sin (i-1)x - \frac{(i-1)k_i}{2(i+1)} \sin (i+1)x$$
$$= -\frac{\{2(i+1)+(i+1)+(i-1)\}k_i}{2(i+1)} \sin (i+1)x,$$

also

$$9)\quad \Theta_{i+1} = -(2i+1)k_i \frac{\sin (i+1)x}{i+1}.$$

Setzen wir nun analog mit 8)

$$10)\quad \Theta_{i+1} = k_{i+1} \frac{\sin (i+1)x}{i+1},$$

so ist, wie aus der Vergleichung der Gleichungen 8) und 9) auf der Stelle hervorgeht,

$$11)\quad k_{i+1} = (-1) \,.\, (2i+1)k_i.$$

Weil nun nach 4)

$$\Theta_1 = 1 \,.\, \frac{\sin x}{1},$$

und folglich

$$k_1 = 1$$

ist, so erhält man mittelst der Gleichung 11) nach und nach:

$$k_1 = (-1)^0 \,.\, 1,$$
$$k_2 = (-1)^1 \,.\, 1 \,.\, 3,$$
$$k_3 = (-1)^2 \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, 5,$$
$$k_4 = (-1)^3 \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7,$$
$$k_5 = (-1)^4 \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 9,$$

u. s. w.

also offenbar allgemein

$$12)\quad k_i = (-1)^{i-1} \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots (2i-1).$$

Folglich ist nach 8)

$$13)\quad \Theta_i = (-1)^{i-1} \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots (2i-1) \frac{\sin ix}{i},$$

d. i. nach 1)

$$14)\quad \frac{d^{i-1} \,.\, (1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dz^{i-1}} = (-1)^{i-1} \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots (2i-1) \frac{\sin ix}{i}$$

für $z = \cos x$, welches die zu beweisende Formel ist.

Aus dieser Formel hat Jacobi eine merkwürdige Transformation eines bestimmten Integrals abgeleitet, welche wir, obgleich dieselbe längst bekannt ist, dem Obigen noch in der Kürze beifü-

gen wollen. Wenn nämlich eine Function w von x so beschaffen ist, dass dieselbe nebst ihren sämmtlichen Differentialquotienten bis zum $(i-1)$sten für $x=a$ und für $x=b$ verschwindet, so kann man durch theilweise Integration leicht zeigen, dass immer

$$\int_a^b w \frac{d^i v}{dx^i}\, dx = (-1)^i \int_a^b v \frac{d^i w}{dx^i}\, dx$$

ist. Setzen wir nun

$$v = f(x),\ w = (1-x^2)^{i-\frac{1}{2}}$$

und $a=-1$, $b=+1$; so ist

$$\int_{-1}^{+1} f^{(i)}(x)\ (1-x^2)^{i-\frac{1}{2}} dx = (-1)^i \int_{-1}^{+1} f(x)\ \frac{d^i \cdot (1-x^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dx^i}\, dx.$$

Aus 14) folgt durch Differentiation nach x

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{d^{i-1} \cdot (1-x^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dx^{i-1}}\right\} = (-1)^{i-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2i-1) \cos ix,$$

also

$$\frac{d^i \cdot (1-x^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dx^i}\, dx = (-1)^{i-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2i-1) \cos ix\, dx.$$

Da nun

$$x = \cos x,\ dx = -\sin x\, dx$$

ist, so ist

$$15)\ \int_0^{\pi} f^{(i)}(\cos x) \sin x^{2i}\, dx$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2i-1) \int_0^{\pi} f(\cos x) \cos ix\, dx.$$

Dies ist die von Jacobi gefundene Transformation. Die Function $f(x)$ und ihre Differentialquotienten bis zum $i$ten müssen zwischen den Gränzen $x=-1$ und $x=+1$ stetig sein.

XI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Man soll die folgenden goniometrischen Relationen beweisen. Wenn

$$A = \sin\alpha(\cos\beta - \cos\gamma)$$
$$= -2\sin\alpha \sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) \sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)$$

$$B = \sin\beta\,(\cos\gamma - \cos\alpha)$$
$$= -2\sin\beta\,\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\,\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$
$$C = \sin\gamma\,(\cos\alpha - \cos\beta)$$
$$= -2\sin\gamma\,\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

ist, so ist jederzeit

$$A+B+C = -4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\,\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)$$
$$B+C-A = 4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\,\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$
$$A+C-B = 4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\,\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)$$
$$A+B-C = 4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\,\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha).$$

Wenn

$$A' = \cos\alpha\,(\sin\beta - \sin\gamma)$$
$$= 2\cos\alpha\,\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\,\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)$$
$$B' = \cos\beta\,(\sin\gamma - \sin\alpha)$$
$$= 2\cos\beta\,\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\,\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$
$$C' = \cos\gamma\,(\sin\alpha - \sin\beta)$$
$$= 2\cos\gamma\,\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

ist, so ist jederzeit

$$A'+B'+C' = 4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\,\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)$$
$$B'+C'-A' = -4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\,\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$
$$A'+C'-B' = -4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\,\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)$$
$$A'+B'-C' = -4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\,\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha).$$

Aus der Gleichung

$$a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma = 0$$

lässt sich immer die Gleichung

$$\left\{\begin{matrix}(a+b+c)\,\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\,\cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\\ -(a+b-c)\,\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\,\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\end{matrix}\right\}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$
$$= \left\{\begin{matrix}(a+c-b)\,\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\,\cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\\ -(b+c-a)\,\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\,\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\end{matrix}\right\}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

d. i. die Gleichung

$$N\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = M\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

wo die Bedeutung der Symbole M und N von selbst erhellet, also die Gleichung

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{M}{N}$$

ableiten.

Aus der Gleichung

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = 0$$

lässt sich immer die Gleichung

$$\left\{\begin{array}{l}(a+b+c)\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\\ -(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\end{array}\right\}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

$$=-\left\{\begin{array}{l}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\\ -(b+c-a)\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\end{array}\right\}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

d. i. die Gleichung

$$N\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=-M\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

folglich die Gleichung

$$\cot\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=-\frac{M}{N}$$

ableiten. G.

Man soll den folgenden Satz beweisen:

Wenn in Taf. I. Fig. 10. die Linie AE der $n$te Theil der Linie AB ist, über AB das Quadrat $ABCD$ beschrieben, dessen Diagonale AD und die Linie CE gezogen, und durch den Durchschnittspunkt G dieser beiden Linien mit den Seiten AC und BD des Quadrats $ABCD$ die Parallele FH gezogen wird, so ist immer AF der $(n+1)$ste Theil der Linie AB.

Aufgabe vom Herausgeber.

Wenn

$$y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ist, und $x=\text{tang}\,\varphi$ gesetzt wird, wobei man φ absolut nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$, aber positiv oder negativ nimmt, jenachdem x positiv oder negativ ist, so ist $y=\sin\varphi$, und durch successive Differentiation in Bezug auf x erhält man:

$$\frac{dy}{dx}=1\,.\cos\varphi^2,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-1\,.\,3\cos\varphi^4\sin\varphi,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=1\,.\,3\,.\,5\cos\varphi^5\left(\sin\varphi^2-\frac{1}{5}\right),$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=-1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\cos\varphi^6\sin\varphi\left(\sin\varphi^2-\frac{3}{7}\right),$$

$$\frac{d^5y}{dx^5}=1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\cos\varphi^7\left(\sin\varphi^4-\frac{2}{3}\sin\varphi^2+\frac{1}{21}\right),$$

$$\frac{d^6y}{dx^6}=-1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11\cos\varphi^8\sin\varphi\left(\sin\varphi^4-\frac{10}{11}\sin\varphi^2+\frac{5}{33}\right).$$

Man soll das allgemeine Gesetz dieser Ausdrücke entwickeln.

XII.

Miscellen.

Der bekannte Satz, dass die drei Hülfslinien, welche bei dem euclidischen Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes gezogen werden, sich jederzeit in einem und demselben Punkte schneiden, wird, so viel mir bekannt ist, gewöhnlich mit Hülfe der Lehre von den Proportionen bewiesen. Ich weiss nicht, ob der folgende Beweis dieses Satzes, welcher wir bereits vor längerer Zeit von einem meiner frühern Zuhörer mitgetheilt wurde, schon bekannt ist. Jedenfalls scheint derselbe aber nicht so allgemein bekannt zu sein, wie er verdient, und mag daher im Folgenden eine Stelle finden.

In Taf. I. Fig. 11. verlängere man die Linien DE und HK bis zu ihrem Durchschnittspunkte N, und ziehe die Linien BN und CN, so erhält man das Dreieck BCN, von welchem sich beweisen lässt, dass die drei bei dem Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes gezogenen Hülfslinien AL, BK, CE durch dessen Spitzen gehen und auf seinen diesen Spitzen gegenüberliegenden Seiten senkrecht stehen, sich also nach einem der bekannten Sätze von den vier merkwürdigen Punkten des Dreiecks in einem und demselben Punkten schneiden müssen.

Zieht man nämlich zuvörderst die Linie AN, so erhellet sehr leicht die Congruenz der beiden Dreiecke ABC und AHN. Nun sind aber die rechtwinkligen Dreiecke ABC und ABO bekanntlich gleichwinklig. Also sind auch die Dreiecke AHN und ABO gleichwinklig, folglich die Winkel HAN und BAO einander gleich, woraus sich ergiebt, dass NAL eine gerade Linie ist, also die Linie AL durch die Spitze N des Dreiecks BCN geht, und auf dessen Seite BC senkrecht steht.

Ferner erhellet leicht die Congruenz der rechtwinkligen Dreiecke BHK und CNK, woraus sich die Gleichheit der Winkel HBK und CNK ergiebt. Nun sind aber als Wechselwinkel die Winkel HBK und CKP einander gleich. Also sind auch die Winkel CNK und CKP einander gleich, und daher die Dreiecke CNK und CKP offenbar gleichwinklig, folglich die Winkel CKN und CPK einander gleich, also CPK so wie CKN ein rechter Winkel. Daher steht die durch B gehende Linie BK auf CN senkrecht.

Ganz eben so zeigt man, dass die durch C gehende Linie CE auf BN senkrecht steht, und der Satz ist also nach dem im Eingange Bemerkten nun offenbar vollständig bewiesen.

Mir war der Beweis, als er mir mitgetheilt wurde, neu. Ob er dies auch Andern sein wird, lasse ich dahin gestellt sein.

G.

Digitized by Google

XIII.

Ueber die neuesten Erfindungen in der Theorie der bestimmten Integrale.

Von

dem Herausgeber.

Zweite Abhandlung.

(Fortsetzung von Thl. II. Nr. XXV.)

1.

In dem Journal de Mathématiques publié par J. Liouville. T. VIII. p. 110. Mars 1843. hat Herr J. Bertrand das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{ld(1+x)}{1+x^2}\,dx$$

auf die folgende bemerkenswerthe Weise entwickelt.

Es sei, indem man bei der Integration die Grösse ω als constant betrachtet,

$$\int_a^x f(x,\,\omega)\,dx = f_1(x,\,\omega)\quad .$$

und

$$\int_a^x \frac{d_\omega f(x,\,\omega)}{d\omega}\,dx = f_2(x,\,\omega);$$

so ist

$$\frac{d_x f_1(x,\,\omega)}{dx} = f(x,\,\omega),$$

und nach bekannten Principien der Lehre von den bestimmten Integralen (Archiv. Thl. II. S. 277)

Digitized by Google

$$\frac{d_\omega f_1(x,\ \omega)}{d\omega}$$

$$= \frac{d\omega}{d\omega}\int_a^x f(x,\ \omega)\ dx = \int_a^x \frac{d_\omega f(x,\ \omega)}{d\omega}\ dx = f_2(x,\ \omega).$$

Betrachtet man nun aber ω als eine Function von x, so ist nach bekannten Principien der Differentialrechnung

$$\frac{df_1(x,\ \omega)}{dx} = \frac{d_x f_1(x,\ \omega)}{dx} + \frac{d_\omega f_1(x,\ \omega)}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dx},$$

also nach dem Obigen

$$\frac{df_1(x,\ \omega)}{dx} = f(x,\ \omega) + f_2(x,\ \omega)\ \frac{d\omega}{dx}$$

oder

$$df_1(x,\ \omega) = f(x,\ \omega)dx + f_2(x,\ \omega)\ \frac{d\omega}{dx}\ dx,$$

und folglich

$$\int_a^x df_1(x,\ \omega) = \int_a^x f(x,\ \omega)dx + \int_a^x f_2(x,\ \omega)\ \frac{d\omega}{dx}\ dx,$$

also, wie leicht erhellen wird,

$$f_1(x,\ \omega) = \int_a^x f(x,\ \omega)dx + \int_a^x f_2(x,\ \omega)\ \frac{d\omega}{dx}\ dx + C.$$

Bezeichnet man nun die Werthe, welche

$$f(x,\ \omega),\ f_1(x,\ \omega),\ f_2(x,\ \omega)$$

für $\omega = x$ erhalten, respective durch

$$\varphi(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x);$$

so ist

$$\varphi_1(x) = \int_a^x \varphi(x)dx + \int_a^x \varphi_2(x)dx + C.$$

Nach dem Obigen wird $\varphi_1(x)$ erhalten, wenn man, ω als constant betrachtend,

$$\int_a^x f(x,\ \omega)dx$$

entwickelt, und nach der Integration $\omega = x$ setzt, woraus sich auf der Stelle ergiebt, dass

$$\varphi_1(x) = \int_a^x f(\omega,\ x)d\omega,$$

wo bei der Integration x als constant behandelt wird, und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\int_a^x f(\omega, x)d\omega = \int_a^x \varphi(x)dx + \int_a^x \varphi_2(x)dx + C$$

ist. Weil nun aber die drei in dieser Gleichung vorkommenden Integrale für $x = a$ offenbar verschwinden, so ist $C = 0$, und folglich

$$\int_a^x f(\omega, x)d\omega = \int_a^x \varphi(x)dx + \int_a^x \varphi_2(x)dx.$$

Von dieser allgemeinen Gleichung lässt sich die folgende Anwendung machen. Man setze

$$f(x, \omega) = \frac{l(1+\omega x)}{1+x^2},$$

so ist, wie man leicht findet,

$$\frac{d_\omega f(x, \omega)}{d\omega} = \frac{x}{(1+\omega x)(1+x^2)},$$

und folglich für $a = 0$ nach dem Obigen

$$f_2(x, \omega) = \int_0^x \frac{xdx}{(1+\omega x)(1+x^2)},$$

wo bei der Integration ω als constant betrachtet wird. Zerlegt man, um dieses Integral zu finden, den Bruch

$$\frac{x}{(1+\omega x)(1+x^2)}$$

auf bekannte Weise in Partialbrüche, so erhält man:

$$\frac{x}{(1+\omega x)(1+x^2)}$$
$$= -\frac{\omega}{(1+\omega^2)(1+\omega x)} + \frac{x}{(1+\omega^2)(1+x^2)} + \frac{\omega}{(1+\omega^2)(1+x^2)},$$

folglich

$$f_2(x, \omega) = \int_0^x \frac{xdx}{(1+\omega x)(1+x^2)}$$
$$= -\frac{l(1+\omega x)}{1+\omega^2} + \frac{l(1+x^2)}{2(1+\omega^2)} + \frac{\omega \text{ Arctang } x}{1+\omega^2},$$

wo Arctang x den der Tangente x zugehörenden Bogen bezeichnen soll, welcher den kleinsten absoluten Werth hat. Also ist nach dem Obigen

$$\varphi(x) = \frac{l(1+x^2)}{1+x^2}$$

und

$$\varphi_2(x) = -\frac{l(1+x^2)}{2(1+x^2)} + \frac{x \text{ Arctang } x}{1+x^2},$$

Digitized by Google

da $\varphi(x)$ und $\varphi_2(x)$ aus $f(x)$ und $f_2(x)$ erhalten werden, wenn man $\omega = x$ setzt. Ferner ist

$$f(\omega, x) = \frac{l(1+x\omega)}{1+\omega^2},$$

und daher nach der oben gefundenen Hauptgleichung

$$\int_0^x \frac{l(1+x\omega)}{1+\omega^2}\,d\omega = \tfrac{1}{2}\int_0^x \frac{l(1+x^2)}{1+x^2}\,dx + \int_0^x \frac{x\ \text{Arctang}\ x}{1+x^2}\,dx.$$

Nun ist aber nach einer sehr bekannten Formel der Integralrechnung

$$\int \frac{x\ \text{Arctang}\ x}{1+x^2}\,dx = \text{Arctang}\ x \int \frac{x\,dx}{1+x^2} - \int d\,\text{Arctang}\ x \int \frac{x\,dx}{1+x^2} + C$$

$$= \tfrac{1}{2} l(1+x^2)\,.\,\text{Arctang}\ x - \tfrac{1}{2}\int \frac{l(1+x^2)}{1+x^2}\,dx + C,$$

und folglich

$$\int_0^x \frac{x\ \text{Arctang}\ x}{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2} l(1+x^2)\,.\,\text{Arctang}\ x - \tfrac{1}{2}\int_0^x \frac{l(1+x^2)}{1+x^2}\,dx.$$

Also ist nach dem Obigen

$$\int_0^x \frac{l(1+x\omega)}{1+\omega^2}\,d\omega = \tfrac{1}{2} l(1+x^2)\,.\,\text{Arctang}\ x.$$

Setzt man in diesem Integrale $x = 1$, so erhält man

$$\int_0^1 \frac{l(1+\omega)}{1+\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{8}\,l2,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\,l2.$$

In einer Note zu dem Aufsatze des Herrn Bertrand bemerkt Herr Liouville, dass sich dieses bestimmte Integral auch aus dem oben gefundenen Ausdrucke von

$$\int_0^x \frac{x\,dx}{(1+\omega x)\,(1+x^2)}$$

auf folgende Art ableiten lässt. Setzt man die obere Gränze dieses Integrals nämlich der Einheit gleich, so erhält man aus dem Obigen

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+\omega x)\,(1+x^2)} = -\frac{l(1+\omega)}{1+\omega^2} + \frac{l2}{2(1+\omega^2)} + \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\omega}{1+\omega^2};$$

also

$$\int_0^1 d\omega \int_0^1 \frac{x dx}{(1+\omega x)\,(1+x^2)}$$

$$= -\int_0^1 \frac{l(1+\omega)}{1+\omega^2}\, d\omega + \tfrac{1}{2} l2 \cdot \int_0^1 \frac{d\omega}{1+\omega^2} + \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{\omega d\omega}{1+\omega^2},$$

und folglich (Archiv. Thl. II. S. 282)

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x d\omega}{(1+x^2)\,(1+\omega x)}$$

$$= -\int_0^1 \frac{l(1+\omega)}{1+\omega^2}\, d\omega + \tfrac{1}{2} l2 \cdot \int_0^1 \frac{d\omega}{1+\omega^2} + \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{\omega d\omega}{1+\omega^2},$$

oder

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \int_0^1 \frac{x d\omega}{1+x\omega}$$

$$= -\int_0^1 \frac{l(1+\omega)}{1+\omega^2}\, d\omega + \tfrac{1}{2} l2 \cdot \int_0^1 \frac{d\omega}{1+\omega^2} + \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{\omega d\omega}{1+\omega^2},$$

also

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\, dx = -\int_0^1 \frac{l(1+\omega)}{1+\omega^2}\, d\omega + \frac{\pi}{4} l2,$$

woraus man, weil natürlich

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\, dx = \int_0^1 \frac{l(1+\omega)}{1+\omega^2}\, d\omega$$

ist, auf der Stelle

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{8} l2$$

erhält, ganz wie oben.

Das von Herrn Bertrand gefundene allgemeinere Resultat

$$\int_0^x \frac{l(1+x\omega)}{1+\omega^2}\, d\omega = \tfrac{1}{2} l(1+x^2) \,.\, \text{Arctang } x,$$

so wie auch die allgemeine Gleichung

$$\int_a^x f(\omega, x) d\omega = \int_a^x \varphi(x) dx + \int_a^x \varphi_2(x) dx,$$

ist aber für sich wichtig und interessant, und letztere scheint uns zu verdienen, dass man weitere Anwendungen von derselben zu machen suche, wozu wir die Leser des Archivs uns wohl aufzufordern erlauben möchten.

Setzt man

$$f(x, \omega) = F(x)\ \psi(\omega),$$

so ist

$$\frac{d_\omega f(x, \omega)}{d\omega} = F(x)\ \psi'(\omega).$$

und folglich

$$f_2(x, \omega) = \psi'(\omega) \int_a^x F(x)\,dx.$$

Also ist

$$\varphi(x) = F(x)\ \psi(x)$$

und

$$\varphi_2(x) = \psi'(x) \int_a^x F(x)dx.$$

Ferner ist

$$f(\omega, x) = F(\omega)\ \psi(x),$$

und folglich

$$\int_a^x f(\omega, x)d\omega = \psi(x) \int_a^x F(\omega)d\omega.$$

Daher ist nach der obigen allgemeinen Gleichung

$$\psi(x) \int_a^x F(\omega)d\omega$$

$$= \int_a^x F(x)\,\psi(x)dx + \int_a^x \psi'(x) \int_a^x F(x)dx,$$

oder, was offenbar dasselbe ist,

$$\psi(x) \int_a^x F(x)dx$$

$$= \int_a^x F(x)\,\psi(x)dx + \int_a^x \psi'(x) \int_a^x F(x)dx;$$

und folglich

$$\int_a^x \psi(x)\ F(x)dx$$

$$= \psi(x) \int_a^x F(x)dx - \int_a^x \psi'(x) \int_a^x F(x)dx,$$

in welcher Gleichung offenbar das bekannte Princip der theilweisen Integration enthalten ist, so dass also die von Herrn Bertrand gefundene allgemeine Gleichung dieses Princip einschliesst, und als eine bemerkenswerthe Verallgemeinerung desselben betrachtet werden muss.

II.

In dem Cambridge mathematical Journal. T. III. p. 168. No. XVI. November. 1842. hat ein ungenannter Correspondent aus der Gleichung

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

mehrere bestimmte Integrale auf sehr einfache Weise hergeleitet.

Um zuerst die obige allgemeine Gleichung zu beweisen, setze man $a - x = u$, so ist $dx = -du$, und folglich

$$f(a-x)dx = -f(u)du.$$

Weil nun für $x = 0$, $x = a$ respective $u = a$, $u = 0$ ist, so ist

$$\int_0^a f(a-x)dx = -\int_a^0 f(u)du = -\int_a^0 f(x)dx,$$

und folglich, weil bekanntlich

$$\int_a^0 f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$$

ist,

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx,$$

wie bewiesen werden sollte.

1) Man setze der Kürze wegen

$$U = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \sin x \,.\, dx,$$

so ist nach der vorhergehenden allgemeinen Gleichung, weil $\cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi - x)$ ist,

$$U = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \cos x \,.\, dx,$$

und folglich

$$2U = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\log \sin x + \log \cos x)dx,$$

d. i.

$$2U = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log (\sin x \cos x) \,.\, dx,$$

also, weil $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ ist,

$$2U = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\log \sin 2x + \log \tfrac{1}{2})dx,$$

d. i.

$$2U = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \sin 2x \,.\, dx + \tfrac{1}{2}\pi \log \tfrac{1}{2}.$$

Setzt man jetzt $2x = v$, also $2dx = dv$, so ist

$$\log \sin 2x \,.\, dx = \tfrac{1}{2} \log \sin v \,.\, dv,$$

und folglich, weil für $x=0$, $x=\frac{1}{2}\pi$ respective $v=0$, $v=\pi$ ist,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \sin 2x \,.\, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \log \sin v \,.\, dv = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \log \sin x \,.\, dx.$$

Also ist

$$2U = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \log \sin x \,.\, dx + \tfrac{1}{2}\pi \log \tfrac{1}{2}.$$

Nun ist aber, wie aus dem Hauptsatze der Theorie der bestimmten Integrale (Archiv. Thl. II. S. 275) auf der Stelle erhellet,

$$\int_0^{\pi} \log \sin x \,.\, dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \sin x \,.\, dx = 2U.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$2U = U + \tfrac{1}{2}\pi \log \tfrac{1}{2},\quad U = \tfrac{1}{2}\pi \log \tfrac{1}{2},$$

d. i.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \sin x \,.\, dx = \tfrac{1}{2}\pi \log \tfrac{1}{2},$$

und nach dem Obigen auch

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \cos x \,.\, dx = \tfrac{1}{2}\pi \log \tfrac{1}{2}.$$

2) Man setze

$$U = \int_0^{\pi} x \log \sin x \,.\, dx.$$

Weil nach der oben bewiesenen allgemeinen Gleichung

$$\int_0^{\pi} x^2 \log \sin x \,.\, dx = \int_0^{\pi} (\pi - x)^2 \log \sin (\pi - x) \,.\, dx,$$

d. i.

$$\int_0^{\pi} x^2 \log \sin x \,.\, dx = \int_0^{\pi} (\pi - x)^2 \log \sin x \,.\, dx$$

ist, so ist

$$0 = \int_0^{\pi} (\pi^2 - 2\pi x) \log \sin x \,.\, dx$$

oder

$$0 = \pi^2 \int_0^{\pi} \log \sin x \,.\, dx - 2\pi \int_0^{\pi} x \log \sin x \,.\, dx,$$

also

$$\int_0^{\pi} x \log \sin x \,.\, dx = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^{\pi} \log \sin x \,.\, dx.$$

Nach 1. ist aber

$$\int_0^{\pi} \log \sin x \,.\, dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \sin x \,.\, dx = \pi \log \tfrac{1}{2},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\int_0^{\pi} x \log \sin x \,.\, dx = \tfrac{1}{2}\pi^2 \log \tfrac{1}{2}.$$

3) Man setze

$$U = \int_0^{\pi} x \sin x^n \, dx,$$

so ist nach der obigen allgemeinen Gleichung

$$U = \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin (\pi - x)^n dx = \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin x^n dx,$$

also

$$U = \pi \int_0^{\pi} \sin x^n dx - \int_0^{\pi} x \sin x^n dx \,.$$

woraus sogleich

$$\int_0^{\pi} x \sin x^n dx = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^{\pi} \sin x^n dx$$

erhalten wird, und hierdurch also das gesuchte Integral auf das bekannte Integral $\int \sin x^n dx$ zurückgeführt ist.

4) Man setze

$$U = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos x^2} \, dx,$$

so ist nach unserer obigen allgemeinen Gleichung

$$U = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin x}{1 + \cos x^2} \, dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos x^2} \, dx - U,$$

folglich

$$U = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos x^2} \, dx$$

oder

$$U = -\tfrac{1}{2}\pi \int_0^{\pi} \frac{d \cos x}{1 + \cos x^2}.$$

Weil nun bekanntlich

$$\int \frac{d \cos x}{1 + \cos x^2} = \text{Arctang } \cos x$$

ist, so ist

$$\int_0^{\pi} \frac{d \cos x}{1 + \cos x^2} = \text{Arctang } (-1) - \text{Arctang } 1,$$

Digitized by Google

also

$$\int_0^{\pi} \frac{d\cos x}{1+\cos x^2} = -\tfrac{1}{2}\pi,$$

und folglich nach dem Obigen $U = \frac{1}{4}\pi^2$, d. i.

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos x^2}\, dx = \tfrac{1}{4}\pi^2.$$

5) Man setze

$$F(a) \stackrel{*}{=} \int_0^{\pi} \log\,(1 - 2a\,\cos x + a^2)\,.\,dx,$$

so ist nach unserer obigen allgemeinen Gleichung

$$F(a) = \int_0^{\pi} \log\,\{1 - 2a\,\cos\,(\pi - x) + a^2\}\,.\,dx,$$

d. i.

$$F(a) = \int_0^{\pi} \log\,(1 + 2a\,\cos\,x + a^2)\,.\,dx,$$

und folglich durch Addition, wie man leicht findet,

$$2F(a) = \int_0^{\pi} \log\,\{1 + 2a^2(1 - 2\cos\,x^2) + a^4\}\,.\,dx,$$

also

$$2F(a) = \int_0^{\pi} \log\,(1 - 2a^2\,\cos\,2x + a^4)\,.\,dx.$$

Für $2x = v$ ist $2dx = dv$, und folglich

$$\int_0^{\pi} \log\,(1 - 2a^2\,\cos\,2x + a^4)\,.\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \log\,(1 - 2a^2\,\cos\,v + a^4)\,.\,dv$$

oder

$$\int_0^{\pi} \log\,(1 - 2a^2\,\cos\,2x + a^4)\,.\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \log\,(1 - 2a^2\,\cos\,x + a^4)\,.\,dx.$$

Nach dem Hauptsatze der Theorie der bestimmten Integrale (Archiv. Thl. II. S. 275) ist aber offenbar

$$\int_0^{2\pi} \log\,(1 - 2a^2\,\cos\,x + a^4)\,.\,dx$$
$$= 2\int_0^{\pi} \log\,(1 - 2a^2\,\cos\,x + a^4)\,.\,dx.$$

d. i. in der oben eingeführten Bezeichnung

Digitized by Google

$$\int_0^{2\pi} \log\,(1-2a^2\,\cos\,x+a^4)\,.\,dx = 2F(a^2),$$

und folglich

$$\int_0^{\pi} \log\,(1-2a^2\,\cos\,2x+a^4)\,.\,dx = F(a^2).$$

Daher hat man nach dem Obigen die Gleichung

$$2F(a) = F(a^2) \text{ oder } F(a) = \tfrac{1}{2}F(a^2);$$

und ganz auf dieselbe Weise hat man jetzt also, wenn n eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet, überhaupt die folgende Reihe von Gleichungen:

$$2F(a) = F(a^2),$$
$$2F(a^2) = F(a^4),$$
$$2F(a^4) = F(a^8),$$
$$\text{u. s. w.}$$
$$2F(a^{2n}) = F(a^{4n});$$

aus denen sich, wenn man auf beiden Seiten multiplicirt und aufhebt, was sich aufheben lässt, die Gleichung

$$2^{n+1}F(a) = F(a^{4n})$$

oder

$$F(a) = \frac{F(a^{4n})}{2^{n+1}}$$

ergiebt.

Ist nun $a<1$, so ist für $n=\infty$ offenbar

$$\frac{F(a^{4n})}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\pi} \log\,(1-2a^{4n}\,\cos\,x+a^{8n})\,.\,dx = 0,$$

und daher für $a<1$ überhaupt

$$F(a) = \int_0^{\pi} \log\,(1-2a\,\cos\,x+a^2)\,.\,dx = 0.$$

Weil nun

$$1-2a\,\cos\,x+a^2 = a^2(1-\frac{2}{a}\,\cos\,x+\frac{1}{a^2}),$$

also

$$\log\,(1-2a\,\cos\,x+a^2) = 2\log\,a+\log\,(1-\frac{2}{a}\,\cos\,x+\frac{1}{a^2})$$

ist, so ist

$$\int_0^{\pi} \log\,(1-2a\,\cos\,x+a^2)\,.\,dx$$
$$= 2\pi\,\log\,a+\int_0^{\pi} \log\,(1-\frac{2}{a}\,\cos\,x+\frac{1}{a^2})\,.\,dx.$$

Für $a > 1$ ist $\frac{1}{a} < 1$, und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\int_0^\pi \log\,(1 - \frac{2}{a}\,\cos\,x + \frac{1}{a^2})\,.\,dx = 0.$$

Also ist für $a > 1$

$$\int_0^\pi \log\,(1 - 2a\,\cos\,x + a^2)\,.\,dx = 2\pi\,\log\,a.$$

Für $a = 1$ ist

$$1 - 2a\,\cos\,x + a^2 = 4\sin\,\tfrac{1}{2}x^2,$$

also

$$\log\,(1 - 2a\,\cos\,x + a^2) = \log\,4 + 2\log\,\sin\,\tfrac{1}{2}x,$$

und folglich

$$\int_0^\pi \log\,(1 - 2a\,\cos\,x + a^2)\,.\,dx$$
$$= \pi\,\log\,4 + 2\int_0^\pi \log\,\sin\,\tfrac{1}{2}x\,.\,dx.$$

Setzt man nun $\frac{1}{2}x = v$, also $dx = 2dv$, so ist

$$\int_0^\pi \log\,\sin\,\tfrac{1}{2}x\,.\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\,\sin\,v\,.\,dv,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\int_0^\pi \log\,(1 - 2a\,\cos\,x + a^2)\,.\,dx$$
$$= \pi\,\log\,4 + 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\,\sin\,x\,.\,dx,$$

also nach 1.

$$\int_0^\pi \log\,(1 - 2a\,\cos\,x + a^2)\,.\,dx = \pi\,\log\,4 + 2\pi\,\log\,\tfrac{1}{2},$$

woraus sich leicht auch in diesem Falle, nämlich für $a = 1$,

$$\int_0^\pi \log\,(1 - 2a\,\cos\,x + a^2)\,.\,dx = 0$$

ergiebt.

Auch das hier angewandte an sich sehr einfache Princip verdient, wie es uns scheint, weiter verfolgt zu werden.

III.

In dem Journal de Mathématiques publié par J. Liou-

ville. T. V. p. 117 hat Herr Lobatto, Docteur ès-sciences à la Haye, die beiden Integrale

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \, d\varphi \sqrt{1 - a^2 \sin\varphi^2},$$

$$A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi^2 \, d\varphi \sqrt{1 - a^2 \sin\varphi^2},$$

wobei wir annehmen wollen, dass a positiv und nicht grösser als die Einheit ist, auf folgende Art entwickelt.

Man setze $\cos\varphi = x$, so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$\frac{1 - a^2}{a^2} = \mu^2$$

gesetzt wird, leicht

$$A_1 = a \int_0^1 dx \sqrt{\mu^2 + x^2}.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$\int dx \sqrt{\mu^2 + x^2} = \tfrac{1}{2} x \sqrt{\mu^2 + x^2} + \tfrac{1}{2}\mu^2 l(x + \sqrt{\mu^2 + x^2}),$$

also

$$\int_0^1 dx \sqrt{\mu^2 + x^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\mu^2 + 1} + \tfrac{1}{2}\mu^2 l \, \frac{1 + \sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu},$$

und folglich nach dem Obigen

$$A_1 = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{1 - a^2}{a} \, l\sqrt{\frac{1 + a}{1 - a}}\right).$$

Ferner ist

$$A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi(1 - \cos\varphi^2) \, d\varphi \sqrt{1 - a^2 \sin\varphi^2},$$

also

$$A_2 = A_1 - a \int_0^1 x^2 dx \sqrt{\mu^2 + x^2}.$$

Nun ist aber nach einer sehr bekannten Reductionsformel

$$\int x^2 dx \sqrt{\mu^2 + x^2} = \frac{x(\mu^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - \mu^2 \int dx \sqrt{\mu^2 + x^2}}{4},$$

und folglich

$$a \int_0^1 x^2 \, dx \sqrt{\mu^2 + x^2} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2} - \mu^2 A_1\right).$$

Nach gehöriger Substitution erhält man

$$A_3 = \frac{3a^2-1}{8a^2} + \frac{(1-a^2)\,(1+3a^2)}{8a^4}\, l\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}.$$

Es früge sich, ob sich diese Methode nicht vielleicht überhaupt auf das Integral

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi^n d\varphi \sqrt{1-a^2\,\sin\varphi^2}$$

anwenden und ein allgemeines Gesetz auffinden liesse. Wenn a grösser als die Einheit ist, werden die oben für A_1 und A_3 gefundenen Ausdrücke imaginär, weshalb auch dieser Fall einer besondern Betrachtung zu unterwerfen sein dürfte.

Auf eine andere Art hat Herr Catalan die beiden obigen Integrale in dem genannten Journale T. IV. p. 335 entwickelt.

XIV.

Ueber ein Spiegelinstrument zum Einrichten gerader Linien auf dem Felde.

Von dem

Herrn Regierungs-Conducteur G. Berlin

zu Greifswald.

Das Einrichten gerader Linien auf dem Felde, namentlich die Bestimmung von Zwischenpunkten in denselben, ist bekanntlich an und für sich eine einfache und leichte Operation, die nur ein geübtes, nöthigen Falls ein bewaffnetes Auge erfordert; jedoch hat sie ihre Unbequemlichkeit darin, dass wenigstens ein Gehülfe dabei nothwendig ist, wodurch nicht allein mehr Zeitaufwand erfordert wird, sondern auch bei grösseren Linien, wo gegenseitiges Einrichten anzuwenden ist, eine Controlle des richtigen Standes der Absteckstäbe gemacht werden muss. Um die Gehülfen zu entbehren, sowie auch um einer Controllirung überhoben zu sein, lässt sich, wie ich glaube, mit Nutzen das in diesem Aufsatze näher beschriebene Spiegelinstrument anwenden, dessen praktische Brauchbarkeit einem jeden Geometer aus der blossen folgenden Darstellung um so mehr sogleich einleuchten wird, als wir als bekannt vorauszusetzen berechtigt sind, dass der Gaussische Heliotrop, namentlich in Bezug auf die Einrichtung der Spiegel, bekannt genug

ist, um einer besonderen Auseinandersetzung der ihm zum Grunde liegenden Principien hier nicht weiter zu bedürfen. Jedoch mag es in der von mir erstrebten grössern Deutlichkeit Entschuldigung finden, wenn zur Verständlichkeit der Anwendung des Instruments die Grundsätze der Reflexion rechtwinklig gegen einander stehender Spiegel hierbei in der Kürze wiederholt werden.

Zwei rechtwinklig auf einander stehende Spiegel *ab* und *cd* (Taf. II. Fig. 1. und Fig. 2.), deren spiegelnde Flächen von einander abgewendet stehen und dem in *C* befindlichen Auge zugekehrt sind, werden die beiden Gegenstände *A* und *B* dem Beobachter zugleich reflectirt erscheinen lassen, wenn der Durchschnittspunkt *e* der Spiegel sich in der Linie *AB* befindet, mögen nun wie in Taf. II. Fig. 1. die Einfallswinkel der Gegenstände *A* und *B* einander gleich sein, also 45° betragen, oder wie Taf. II. Fig. 2. eine beliebige Grösse haben. Da der Einfallswinkel dem Ausfallswinkel gleich ist, so wird es beim richtigen Stande in der Linie immer einen Punkt *C* (Taf. II. Fig. 1. 2.) oder eine Linie *Ce* geben, worin beide Gegenstände *A* und *B* reflectirt zugleich sichtbar sind.

Hierauf gründet sich nun das in Rede stehende Instrument und gewiss wird jedem Geometer sogleich einleuchten, dass die reflectirten Bilder beider Gegenstände, aus einem Punkte gesehen, den Stand im Alignement der Linie begründen, und daher eine Erklärung der praktischen Anwendung auch um so überflüssiger sein, als diese aus der Theorie von selbst hervorgeht.

Ein Rahmen *A* (Taf. II. Fig. 3.) ist durch die Balken *gg* in drei gleiche Theile getheilt, in denen zwei Spiegel *a* und *b* eingefasst sind. Ein zweiter Rahmen *B*, ebenfalls mit einem Spiegel *c* versehen, passt genau zu der mittleren Oeffnung des Rahmens *A* und wird durch zwei runde Zapfen auf der Hälfte bei *r* in den Balken *gg* befestigt. An diesem Rahmen *B* ist ein Quadrant *d* (Taf. II. Fig. 4.) befestigt, der mit dem Rahmen *A* in Verbindung steht, und zur Feststellung des Rahmens *B* in der rechtwinkligen Lage zu dem Rahmen *A* dient, zu deren genauerer Berichtigung noch eine feststehende Schraube *i* bei *h* angebracht ist. Die Stellschrauben *xx* dienen zur Berichtigung der Spiegel, insofern *a* und *b* in einer Ebene liegen müssen und *c* rechtwinklig auf dieser Ebene stehen muss. Damit jedoch diese Stellschrauben eine stete Wirkung auf die Spiegel äussern, müssen kleine Druckfedern *y* (Taf. II. Fig. 5.) an dem Hinterboden *z* befestigt sein. Der Ring *e* (Taf. II. Fig. 3.) ist zum bequemeren Halten mit der Hand bestimmt, sowie der Haken *f* zum Aufhängen eines Lothes dient, um den Punkt auf der Erde bemerken zu können. Soll das Instrument mit einem Stabe in Verbindung gesetzt werden, so lässt sich leicht anstatt des Hakens *f* eine Hülse anbringen, welcher ein Stab angepasst werden kann.

Die Berichtigung des Instruments in Bezug auf die Lage der Spiegel *a* und *b* in einer und derselben Ebene, sowie auch in Beziehung auf die rechtwinklige Stellung des Spiegels *c* gegen *a* und *b*, geschieht unmittelbar durch die Beobachtung. Denn das reflectirte Bild eines Gegenstandes muss bei richtiger Lage der Spiegel *a* und *b* nicht gebrochen in beiden Spiegeln erscheinen. Der rechtwinklige Stand von *C* gegen *a* und *b* ergiebt sich dadurch, dass zwei Gegenstände *A* und *B* (Taf. II. Fig. 1. 2.) in dem

Zwischenpunkte e reflectirt zugleich erscheinen, wobei das Nichtgebrochensein wiederum die rechtwinklige Lage der Spiegelebene c gegen a und b angiebt.

Eine andere weitere Anwendung als die bereits erwähnte dürfte dies Instrument bei Croquirungen finden, indem sich durch dasselbe leicht Zwischenpunkte einer Linie finden lassen, die zu Anhaltspunkten und zur näheren Bestimmung der Distanzen nach dem Augenmasse benutzt werden können.

XV.

Beweis der Lehrsätze in Band III. S. 442.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin.

A) $$0 = 1 - \frac{m^2}{2^2} + \frac{m^2(m^2-2^2)}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \ldots$$

B) $$2m(-1)^{\frac{m}{2}+1}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots \mp \frac{1}{m-1}\right)$$
$$= \frac{m^2}{1^2} - \frac{m^2(m^2-2^2)}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}$$

beide für ein gerades m.

C) $$(-1)^{\frac{m-1}{2}} = 1 - \frac{m^2-1^2}{2^2} + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2^2 \cdot 4^2} - \ldots$$

D) $$1 = \frac{m^2}{1^2} - \frac{m^2(m^2-1^2)}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}$$

beide für ein ungerades m.

E) $$1 + \frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \ldots + \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}$$
$$= \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\left(1 - \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}\right)$$

F) $\frac{\alpha_0}{\beta+1} - \frac{\alpha_1}{\beta+2} + \frac{\alpha_2}{\beta+3} - \ldots = \frac{\beta_0}{\alpha+1} - \frac{\beta_1}{\alpha+2} + \frac{\beta_2}{\alpha+3} - \ldots.$

G) $\frac{1.2.3....n}{\alpha+1.\alpha+2...\alpha+n} = \frac{1.\alpha+n-1}{\alpha+1.n+1} \cdot \frac{2.\alpha+n-2}{\alpha+2.n+2} \ldots.$

In den Comm. rec. soc. Gott. T. II. 1811—13 hat Gauss bewiesen, dass die Reihe

H) $1 + \frac{\alpha.\beta}{\gamma.\delta} + \frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{\gamma.\gamma+1.\delta.\delta+1} + \ldots.$

convergirt, wofern $1+\alpha+\beta < \gamma+\delta$ ist, und dass man hat für $\alpha+\beta<\gamma$

I) $1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} + \frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{1.2.\gamma.\gamma+1} + \ldots. = \frac{(\gamma-1)!\ (\gamma-\alpha-\beta-1)!}{(\gamma-\alpha-1)!\ (\gamma-\beta-1)!}$

Diese Gleichung ist sehr umfassend; sie enthält unter andern auch die Formel

A) Setzt man $\alpha = \frac{m}{2}$, $\beta = -\frac{m}{2}$, $\gamma = 1$, so ergiebt sich

$$A = \frac{1}{(\frac{m}{2})!\ (-\frac{m}{2})!}.$$

Nun ist aber (s. d. a. A.)

$$(\tfrac{1}{2}m-1)!\ (-\tfrac{1}{2}m)! = \frac{\pi}{\sin\frac{m}{2}\pi}.$$

Folglich hat man

$$A = \frac{2\sin\frac{1}{2}m\pi}{m\pi},$$

woraus für ein gerades m das Behauptete hervorgeht.

C) Setzt man $\alpha = \frac{m+1}{2}$, $\beta = \frac{-m+1}{2}$, $\gamma = 1$, so findet sich, dass die Reihe divergirt, es sei denn, dass sie von selbst abbricht, was nur für ein positives oder negatives ungerades m geschieht. In diesem Falle stellt sich der Werth derselben unter der Form $\frac{\infty}{\infty}$ dar. Es ist aber

$$\frac{(\gamma-\alpha-\beta-1)!}{(\gamma-\alpha-1)!} = (\gamma-\alpha)\ (\gamma-\alpha+1)\ldots(\gamma-\alpha-\beta-1).$$

Man erhält daher

$$C = \frac{\frac{-m+1}{2} \cdot \frac{-m+3}{2} \ldots. -2 . -1}{(\frac{m-1}{2})!}$$

oder

$$C = (-1)^{\frac{m-1}{2}}$$

D) Die Gleichung A) kann auch folgendermassen bewiesen werden. Bezeichnet man der Kürze halber den Ausdruck $(1-\frac{m^2}{2^2})\,(1-\frac{m^2}{4^2})\ldots(1-\frac{m^2}{4n^2})$ mit $\varphi(n)$, so hat man nach leichter Rechnung

$$\varphi(n)-\varphi(n-1) = (-1)^n\,\frac{m^2\,.\,(m^2-2^2)\,.\,.\,.\,.\,(m^2-4(n-1)^2)}{2^2\,.\,4^2\,.\,.\,.\,.\,4n^2}.$$

Werden hier für n alle Werthe von n bis 1 gesetzt, so erhält man eine Reihe Gleichungen, deren beide letzten sind:

$$\varphi(2)-\varphi(1) = \frac{m^2\,.\,(m^2-2^2)}{2^2\,.\,4^2}$$

$$\varphi(1)-\varphi(0) = \varphi(1)-1 = -\frac{m^2}{2^2}.$$

Addirt man sie sämmtlich, so wird

$$\varphi(n) = 1-\frac{m^2}{2^2}+\,.\,.\,.\,.+(-1)^n\,\frac{m^2\,.\,(m^2-2^2)\ldots m^2-4(n-1)^2}{2^2\,.\,4^2\,.\,.\,.\,.\,4n^2};$$

folglich ist $A = \varphi(n)$ für $n = \infty$; nach der Eulerschen Factorenentwickelung ist aber $\varphi(n) = \frac{2\sin\frac{1}{2}m\pi}{m\pi}$ für $n = \infty$.

Auf ähnliche Art ergiebt sich die Formel D). Ist nämlich $(1-\frac{m^2}{1^2})\,(1-\frac{m^2}{3^2})\ldots(1-\frac{m^2}{(2n+1)^2}) = \psi(n)$, so wird

$$\psi(n-1)-\psi(n) = (-1)^n\,\frac{m^2(m^2-1^2)\,.\,.\,.\,.\,m^2-(2n-1)^2}{1^2\,.\,3^2\,.\,.\,.\,.\,(2n+1)^2},$$

$$1-\psi(0) = \frac{m^2}{1^2};$$

mithin

$$1-\psi(n) = \frac{m^2}{1^2}-\frac{m^2(m^2-1^2)}{1^2\,.\,3^2}+\,.\,.+(-1)^n\,\frac{m^2\,.\,.\,.\,m^2-(2n-1)^2}{1^2\,.\,.\,.\,.\,(2n+1)^2}$$

und $D = 1-\psi(n)$ für $n = \infty$; es ist aber nach Euler $\psi(n) = \cos\frac{1}{2}m\pi$ für $n = \infty$; also schliesslich

$$D = 1-\cos\tfrac{1}{2}m\pi.$$

B) Setzt man in H) $\alpha = \frac{1}{2}m$, $\beta = -\frac{1}{2}m$, $\delta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, so findet sich $1+\alpha+\beta = \gamma+\delta$. Die Reihe B) divergirt also, wofern sie nicht für ein gerades m abbricht. Bezeichnet man der Kürze halber $\frac{B}{2m}$ mit $\varphi(m)$, so ist

$$\varphi(m) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{m}{1^2}-\frac{m(m^2-2^2)}{1^2\,.\,3^2}+\frac{m(m^2-2^2)\;(m^2-4^2)}{1^2\,.\,3^2\,.\,5^2}-\,.\,.\,.\right)$$

$$\varphi(m-2)=\tfrac{1}{2}\left(\frac{m-2}{1^2}-\frac{m(m-2)\,(m-4)}{1^2\cdot 3^2}+\frac{m(m^2-2^2)\,(m-4)\,(m-6)}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}-\ldots\right)$$

$$\varphi(m)+\varphi(m-2)=(m-1)\left(1-\frac{(m-1)^2-1^2}{1^2\cdot 3^2}+\frac{(m-1)^2-1^2\cdot(m-1)^2-3^2}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}-\ldots\right)$$

und wegen D)

$$\varphi(m)+\varphi(m-2)=\frac{1}{m-1}.$$

Werden nun für m alle geraden Zahlen von m bis 2 gesetzt, so ist die letzte dieser Gleichungen

$$\varphi(2)+\varphi(0)=\varphi(2)=1;$$

mithin ergiebt sich:

$$\varphi(m)=\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m-3}+\ldots.\mp\tfrac{1}{1}\pm 1$$

und daraus

$$B=2m\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m-3}+\ldots.\mp\tfrac{1}{1}\pm 1\right).$$

Aus diesen vier Formeln lassen sich eine Unzahl ähnlicher ableiten, wenn man sie für $\Delta m=2$ summirt oder differenziirt; so z. B. erhält man durch ΔA, ΣB, ΣC, ΔD beziehlich die folgenden:

1) $$\frac{4\cos\frac{1}{2}m\pi}{(1-m^2)\pi}=1-\frac{m^2-(-1)^2}{2^2}+\frac{m^2-(-1)^2\cdot m^2-1^2}{2^2\cdot 4^2}-\ldots..$$

2) $$1+(-1)^{\frac{m+1}{2}}m+\frac{2^2}{m-2}-\frac{4^2}{m-4}+\ldots.\mp\frac{(m-3)^2}{3}\pm\frac{(m-1)^2}{1}$$
$$=\frac{m^2-1^2}{1^2}-\frac{m^2-1^2\cdot m^2-3^2}{1^2\cdot 3^2}+\ldots.$$

3) $$(-1)^{\frac{m}{2}+1}\frac{m}{2}=1-\frac{m^2-2^2}{2^2}+\frac{m^2-2^2\cdot m^2-4^2}{2^2\cdot 4^2}-\ldots.$$

4) $$\frac{m^2+1-2m\sin\frac{1}{2}m\pi}{(m^2-1)^2}=\frac{1}{1^2}-\frac{m^2}{1^2\cdot 3^2}+\frac{m^2\cdot m^2-2^2}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}-\ldots$$

von denen die 2) und 3) beziehlich nur für ein ungerades und gerades m convergiren, und die 1) und 4) auch unter endlicher Ausdehnung summirt werden können, nämlich:

5) $$\left(1-\frac{m^2}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{m^2}{(2n-1)^2}\right)\cdot\frac{3^2\ldots(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\ldots 4n^2}\,(4n+1-m^2)=$$
$$1-\frac{m^2-(-1)^2}{2^2}+\ldots+(-1)^n\frac{m^2-(-1)^2\cdot m^2-1^2\ldots.m^2-(2n-3)^2}{2^2\cdot 4^2\ldots.4n^2},$$

6) $$\frac{m^2+1}{(m^2-1)^2}\frac{m}{(m^2-1)^2}m\left(1-\frac{m^2}{2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right)\frac{2^2\ldots.4n^2}{3^2\ldots(2n+1)^2}(4n+3-m^2)=$$
$$\frac{1}{1^2}-\frac{m^2}{1^2\cdot 3^2}+\ldots+(-1)^n\frac{m^2\cdot m^2-2^2\ldots.m^2-(2n-2)^2}{1^2\cdot 3^2\ldots(2n+1)^2},$$

Digitized by Google

aus welchen beiden die 1) und 4) für $n=\infty$ wieder hervorgehen.

E) Setzt man in die Gleichung 1) β, 1, $\alpha+1$ beziehlich anstatt α, β, γ, so erhält man

$$1+\frac{\beta}{\alpha+1}+\frac{\beta\,.\,\beta+1}{\alpha+1\,.\,\alpha+2}+\ldots=\frac{\alpha!\,(\alpha-\beta-1)!}{(\alpha-1)!\,(\alpha-\beta)!}=\frac{\alpha}{\alpha-\beta},$$

wie auch der Herr Herausgeber dieses Archivs in Crelle's Journal Bd. II. Nr. 36. gezeigt hat. Wird hierin $\alpha+n+1$ und $\beta+n+1$ für α und β gesetzt, so hat man

$$1+\frac{\beta+n+1}{\alpha+n+2}+\frac{\beta+n+1\,.\,\beta+n+2}{\alpha+n+2\,.\,\alpha+n+3}+\ldots=\frac{\alpha+n+1}{\alpha-\beta};$$

diese Gleichung multiplicire man mit $\frac{\beta\,.\,\beta+1\ldots.\beta+n}{\alpha+1\,.\,\alpha+2\ldots.\alpha+n+1}$ und ziehe das Resultat von der obigen ab, so wird

$$E=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\left(1-\frac{\beta\,.\,\beta+1\ldots.\beta+n}{\alpha\,.\,\alpha+1\ldots.\alpha+n}\right).$$

Diese Herleitung zeigt, dass man die Grunertsche Summation nicht für einen speciellen Fall der Gleichung für E halten darf. So wie man aus jener den Ausdruck E herleiten kann, so kann man auch den letzteren unabhängig von ihr entwickeln und dann n unendlich werden lassen, um zur Grunertschen Reihe zu gelangen. Bezeichnet man nämlich den Bruch in obiger Parenthese mit $\varphi(n)$, so ist

$$1-\varphi(n)=\{1-\varphi(0)\}+\{\varphi(0)-\varphi(1)\}+\ldots+\{\varphi(n-1)-\varphi(n)\}.$$

Entwickelt man die einzelnen Glieder und multiplicirt mit $\frac{\alpha}{\alpha-\beta}$, so hat man die Formel für E. Lässt man nun n unendlich werden, so kann der Bruch $\varphi(n)$ zwar als aus einer Reihe von Factoren bestehend betrachtet werden, welche, wenn auch nicht von Anfang an, doch von einem gewissen Punkte an ächte Brüche sind, sobald $\beta<\alpha$ ist. Man würde aber zu weit von der Wahrheit irren, wenn man hieraus schliessen wollte, dass $\varphi(n)$ für ein unendliches n verschwindet. Zum Beweise: die Reihe G) und alle übrigen bekannten Factorenentwickelungen. Um den erwähnten Schluss zu ziehen, muss man sich ganz anderer Folgerungen bedienen. Zu dem Ende sei m irgend eine ganze Zahl, $>-\beta$ und folglich auch $>-\alpha$, ferner sei h eine ganze Zahl $>\frac{1}{\alpha-\beta}$. Betrachten wir nun das Product

$$1)\quad \frac{h\beta+hm}{h\alpha+hm}\cdot\frac{h\beta+hm+1}{h\alpha+hm+1}\cdot\frac{h\beta+hm+2}{h\alpha+hm+2}\cdot\ldots\ldots,$$

so ist klar, dass es beständig kleiner bleibt als das Product einer gleich grossen Anzahl von Factoren der Reihe

$$2)\quad \frac{h\beta+hm}{h\beta+hm+1}\cdot\frac{h\beta+hm+1}{h\beta+hm+2}\cdot\frac{h\beta+hm+2}{h\beta+hm+3}\cdot\ldots\ldots,$$

weil die entsprechenden Nenner, wegen $h\beta+1<h\alpha$, in diesem kleiner sind als in jenem. Das Product 2) nähert sich aber beständig der Null, denn durch Vereinigung von 2, 3, ... Factoren desselben erhält man die Werthe

$$\frac{h\beta+hm}{h\beta+hm+2},\quad \frac{h\beta+hm}{h\beta+hm+3},\ldots.$$

Folglich wird um so mehr das Product 1) kleiner als jede noch so kleine Grösse. Die Factoren dieses Products wachsen beständig, wovon man sich leicht überzeugt. Fasst man also die ersten h Factoren desselben zusammen, so ist deren Produkt $>(\frac{h\beta+hm}{h\alpha+hm})^h$ oder $(\frac{\beta+m}{\alpha+m})^h$. Das Product der folgenden h Factoren ist aus dem nämlichen Grunde $>(\frac{h\beta+hm+h}{h\alpha+hm+h})^h$ oder $(\frac{\beta+m+1}{\alpha+m+1})^h$, u. s. w. Mithin bleibt das Product 1) beständig grösser als das Product

$$3)\ (\frac{\beta+m}{\alpha+m}\cdot\frac{\beta+m+1}{\alpha+m+1}\cdot\frac{\beta+m+2}{\alpha+m+2}\ldots.)^h.$$

Dieses wird also um so mehr unter jede Gränze abnehmen. Dasselbe gilt dann auch von

$$\frac{\beta+m}{\alpha+m}\cdot\frac{\beta+m+1}{\alpha+m+1}\cdot\frac{\beta+m+2}{\alpha+m+2}\ldots..$$

und schliesslich von

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\beta+1}{\alpha+1}\ldots.\frac{\beta+m-1}{\alpha+m-1}\times\frac{\beta+m}{\alpha+m}\cdot\frac{\beta+m+1}{\alpha+m+1}\ldots..$$

Uebrigens bedient sich schon Gauss in der angeführten Abhandlung des Ausdruckes E) bei seinen Untersuchungen über die Convergenz gewisser Reihen, und einer der obigen sehr ähnlichen Beweisführung. Es wird mir vielleicht gestattet werden, in einem späteren Aufsatze eine andere Entwickelung jenes Ausdrucks nebst verwandten Gegenständen mitzutheilen.

F) Setzt man in die Gleichung 1) $-\alpha$, $\beta+1$, $\beta+2$ für α, β, γ, so erhält man

$$\frac{\alpha_0}{\beta+1}-\frac{\alpha_1}{\beta+2}+\frac{\alpha_2}{\beta+3}-\ldots=\frac{\beta!\,\alpha!}{(\beta+\alpha+1)!}.$$

Da sich in diesem Ausdrucke α und β unbeschadet seines Werthes vertauschen lassen, so folgt unmittelbar die Gleichung F). Auch hat man nach Entwickelung von $(1-x)^\alpha$ im folgenden Integrale

$$\int_{1+0}(1-x)^\alpha x^\beta dx=\frac{\alpha_0}{\beta+1}-\frac{\alpha_1}{\beta+2}+\ldots$$

Substituirt man hier $1-x$ für x, so erhält man das nämliche Integral nur mit Vertauschung von α und β, woraus wieder das Behauptete folgt. Ueber alles dies kann man auch die Gaussische Abhandlung nachsehen.

Digitized by Google

Man kann auch den Bruch

$$\frac{1.2.....(\alpha+\beta+2)\ (\alpha+\beta+3)...}{\alpha+1.\alpha+2....(\beta+1)\ (\beta+2)\ (\beta+3)...}$$

nach den bekannten Regeln in seine Parzialbrüche zerlegen. Setzt man ihn zu dem Ende gleich $....+\frac{p_n}{\beta+n+1}+....$, so findet sich p_n, wenn man ihn mit $\beta+n+1$ multiplicirt und dann $\beta+n+1=0$ setzt. Auf diese Weise ergiebt sich

$$p_n=\frac{1.2....\alpha+1-n.\alpha+2-n...\alpha-1.\alpha.\alpha+1.\alpha+2...}{\alpha+1.\alpha+2....-n.-n+1....-2.-1.1.2...}$$

$$=\frac{\alpha+1-n.\alpha+2-n...\alpha-1.\alpha}{-n..n+1...-2.-1}=(-1)^n\alpha_n.$$

Durch Zerlegung des obigen Bruches erhält man also einen der Ausdrücke F). Da jener Bruch in Bezug auf α und β symmetrisch ist, so folgt wieder die Gleichung F).

G) Man hat die identische Gleichung

$$\frac{1.2....n}{\alpha+1.\alpha+2...\alpha+n}=\frac{1.2....m}{\alpha+1.\alpha+2...\alpha+m}\cdot\frac{\alpha+n+1.\alpha+n+2....\alpha+n+m}{n+1.n+2....n+m}$$

$$\times\frac{m+1.m+2.....m+n}{\alpha+m+1.\alpha+m+2...\alpha+m+n}.$$

Der letzte Factor, aus n Factoren bestehend, nähert sich für ein wachsendes m der Einheit, wovon man sich überzeugt, wenn man jeden Factor im Zähler und Nenner mit m theilt. Man kann ihn deshalb weglassen und erhält die unendliche Productenreihe G).

XVI.

Einige Untersuchungen über die Krümmung der Curven, insbesondere über die Evoluten gegebener Curven; und einige Bemerkungen über die besondern Punkte der Curven.

Von

Herrn Doctor J. Ph. Wolfers

astronomischen Rechner an der Königlichen Sternwarte zu Berlin.

I.

Einige Untersuchungen über die Krümmung der Curven und insbesondere die Evoluten gegebener Curven.

Zuvor wollen wir einige Sätze anführen, welche sich in verschiedenen Lehrbüchern der Analysis und unter andern in Lacroix Traité élementaire etc. finden.

1) Ist $y = \varphi(x)$ die Gleichung einer Curve einfacher Krümmung zwischen ihren rechtwinkligen Coordinaten, so wird die Curve gegen die Abscissenaxe convex oder concav sein, je nachdem das zweite Differential der Ordinate in Bezug auf die Abscisse positiv oder negativ ist.

2) Ist $y = \varphi(x)$ wieder die Gleichung einer gegebenen Curve und $y'' = \psi(x'')$ die Gleichung des die erstere berührenden Kreises, so hat man die Bedingungsgleichungen:

$$y = y'', \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dx''}$$

und es findet nur eine Berührung beider Curven, kein Durchschnitt statt.

3) Ist $y' = f(x')$ hingegen die Gleichung des die erste Curve osculirenden Kreises, so finden die drei Bedingungsgleichungen

$$y = y', \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx'^2}$$

statt, und in diesem Falle wird der osculirende Kreis die Curve im gemeinschaftlichen Punkte durchschneiden.

4) Die Anzahl der, eine Curve berührenden Kreise an einem Punkte der erstern ist unendlich gross. Man wird nämlich von

Digitized by Google

jedem Punkte der jenem Curvenpunkte angehörigen Normalen mit verschiedenen Halbmessern Kreise schlagen können, welche alle eine gemeinschaftliche Tangente haben und selbst also berührende Kreise sind. Von diesen Kreisen werden einige durch die Curve eingeschlossen, andere schliessen selbst die Curve ein und in der Mitte zwischen diesen beiden Abtheilungen von Kreisen liegt der osculirende Kreis.

5) Ist (Taf. II. Fig. 1.) AP die Abscissenaxe, DN die gegebene Curve, $D'N'$ ein sie berührender Kreis, $D''N''$ ein anderer derartiger Kreis und die übrige Bezeichnung wie in 2); so wird der berührende Kreis die Lage $D'N'$ haben, d. h. an der concaven Seite der Curve liegen, wenn

$$\frac{d^2y}{dx^2} > \frac{d^2y''}{dx^2}.$$

Er wird die Lage $D''N''$ haben, oder sich an der convexen Seite der Curve befinden, wenn

$$\frac{d^2y}{dx^2} < \frac{d^2y''}{dx^2}.$$

In der Mitte dieser beiden Bedingungen liegt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y''}{dx^2},$$

und in diesem Falle geht der berührende Kreis nach 3) in den osculirenden über, welcher weder ganz an der concaven, noch an der convexen Seite der Curve liegt, sondern innerhalb gewisser Gränzen mit der letztern zusammenfällt.

6) Ist wieder $y = \varphi(x)$ die Gleichung einer gegebenen Curve und bezeichnet man den Radius des osculirenden Kreises, d. h. den Krümmungshalbmesser durch γ, die Coordinaten des Mittelpunktes eben dieses Kreises durch α und β, so haben wir die drei Gleichungen

$$\gamma = -\frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{}}{dx \,.\, d^2y},\quad x-\alpha = \frac{dy(dx^2+dy^2)}{dx \,.\, d^2y},\quad y-\beta = -\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}.$$

7) Die Gleichung einer Curve zweiten Grades, bezogen auf die Axe als Abscissenaxe und den Endpunkt derselben als Anfangspunkt der Coordinaten, kann allgemein dargestellt werden durch

$$y^2 = mx + nx^2.$$

Hieraus erhalten wir

$$dy = \frac{m+2nx}{2y}\,dx,\quad dx^2+dy^2 = \frac{4y^2+(m+2nx)^2}{4y^2}\,dx^2,$$

$$d^2y = -\frac{m^2}{4y^3}\,dx^2.$$

Substituirt man diese Werthe in den drei Gleichungen (6), so wird nach einiger Transformation

$$\gamma = -\frac{\{4y^2 + (m+2nx)^2\}^{\frac{3}{2}}}{2\{4ny^2 - (m+2nx)^2\}}$$

oder wenn man y^2 eliminirt und reducirt

$$\gamma = \frac{\{4(mx+nx^2) + (m+2nx)^2\}^{\frac{3}{2}}}{2m^2}.$$

Für eine Parabel ist $n = 0$ und $\gamma = \frac{(m^2+4mx)^{\frac{3}{2}}}{2m^2}$

- - Ellipse - n negativ - $\gamma = \frac{\{4(mx-nx^2) + (m-2nx)^2\}^{\frac{3}{2}}}{2m^2}$

- einen Kreis - $n = -1$ - $\gamma = \frac{1}{2}m$

- eine Hyperbel - n positiv - $\gamma = \frac{\{4(mx+nx^2) + (m+2nx)^2\}^{\frac{3}{2}}}{2m^2}$.

Für den Scheitelpunkt ist $x = 0$, und

$$\gamma = \tfrac{1}{2}m,$$

d. h. der Krümmungshalbmesser im Scheitel einer Curve zweiter Ordnung stimmt überein mit dem Halbmesser eines Kreises, der mit dem halben Parameter als Radius beschrieben ist.

8) Substituirt man ebenso die Werthe von dy und d^2y in den oben für $x-\alpha$ und $y-\beta$ gefundenen allgemeinen Ausdrücken, und eliminirt man y vermittelst der Gleichung der gegebenen Curve, so erhält man zwei Gleichungen zwischen x, α und β. Eliminirt man endlich x aus beiden, so erhält man eine Gleichung zwischen β und α, d. h. die Gleichung der zur gegebenen Curve gehörenden Evolute oder, wie sie auch genannt wird, die Gleichung der Curve der Mittelpunkte.

9) Für die Parabel ist

$$n = 0, \quad dy = \frac{m}{2y}\,dx, \quad dx^2 + dy^2 = \frac{4y^2+m^2}{4y^2}\,dx^2,$$

$$d^2y = -\frac{m^2}{4y^3}\,dx^2$$

also

$$y - \beta = \frac{4y^2+m^2}{4y^2} \cdot \frac{4y^3}{m^2} = \frac{4y^3}{m^2} + y, \text{ oder } \beta = -\frac{4y^3}{m^2}.$$

Ferner

$$x - \alpha = -\frac{\frac{m}{2y}\,dx \cdot \frac{4y^2+m^2}{4y^2}\,dx^2}{dx} \cdot \frac{4y^3}{m^2dx^2} = -\frac{4y^2+m^2}{2m}$$

$$= -\frac{2y^2}{m} - \tfrac{1}{2}m.$$

Da aber für die Parabel $y^2 = mx$, so wird hiernach

$$x - \alpha = -2x - \tfrac{1}{2}m \text{ oder } x = \tfrac{1}{3}(\alpha - \tfrac{1}{2}m).$$

Oben war

$$\beta = -\frac{4y^2}{m^2} = -\frac{4m|x|}{m^2} = -\frac{4x|}{m^{\frac{1}{2}}}$$

und, wenn man hier den eben gefundenen Werth von x substituirt,

$$\beta = -4\frac{1}{3\sqrt{3}}\frac{(\alpha-\frac{1}{2}m)^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}},$$

oder auf beiden Seiten ins Quadrat erhoben:

$$\beta^2 = \frac{16}{27m}(\alpha-\tfrac{1}{2}m)^3$$

als Gleichung der der Parabel entsprechenden Evolute.

10) Ist (Taf. II. Fig. 2.) XAx die Parabel, AB ihre Axe, A ihr Scheitel und der Anfangspunkt der Coordinaten; so erhält man für $\beta = 0$

$$\alpha = \tfrac{1}{2}m,$$

dasselbe, was wir oben als Werth von γ für den Scheitelpunkt gefunden haben.

Ist $AD = \frac{1}{2}m$, so wollen wir für die Evolute den Anfangspunkt der Coordinaten nach D verlegen, also α' statt $\alpha - \frac{1}{2}m$ setzen, und erhalten dann für die beiden Zweige Df und DF der Evolute die einfache Gleichung

$$\beta^2 = \frac{16}{27m}\alpha'^3.$$

Dieselbe entspricht einer Parabel vom dritten Grade, indem man alle Curven, deren Gleichung die Form

$$y^q = mx^p$$

haben, unter dem allgemeinen Namen von Parabeln begreift und sie unter einander nach dem Grade des Exponenten unterscheidet.

11) Wickelt man also einen Faden um Df, so muss sein über D hervorragendes Ende $= AD = \frac{1}{2}m$ sein, wenn man die Parabel XAx durch Abwickelung desselben beschreiben will. Wäre die Länge eine andere, etwa DJ, so wird statt der Parabel AX eine andere Curve beschrieben werden, deren Krümmungshalbmesser im Scheitel kleiner, nämlich $= DJ$ ist. Die Krümmung selbst im Scheitel wird zugenommen haben und wird immer grösser werden, je kleiner DJ wird. Fällt J mit D zusammen, so ist der Krümmungshalbmesser der durch Abwickelung beschriebenen Curve $= 0$, also die Krümmung ∞.

12) Die Länge DF der Evolute ist gleich dem Unterschiede

$$MF - AD$$

der, beiden Endpunkten entsprechenden Krümmungshalbmesser, und

Digitized by Google

da diese sich (nach 6,) immer darstellen lassen, so zeigt es sich, dass die Curve *FDf* rectificabel ist. Diese Eigenschaft gilt nicht bloss für die vorliegende Evolute der Parabel, sondern für die Evoluten aller algebraischen Curven überhaupt.

In der That, setzt man der Kürze wegen

$$\frac{16}{27m} = p,$$

so ist die Gleichung der vorliegenden Evolute

$$\beta^2 = p\alpha'^3;$$

hieraus

$$\frac{d\beta}{d\alpha'} = \tfrac{1}{2}p\,\frac{\alpha'^2}{\beta} = \tfrac{1}{2}p\,\frac{\beta}{p\alpha'} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\beta}{\alpha'},$$

$$\sqrt{1+\frac{d\beta^2}{d\alpha'^2}} = \sqrt{1+\frac{9\beta^2}{4\alpha'^2}} = \sqrt{1+\frac{9p\alpha'^3}{4\alpha'^2}} = \sqrt{1+\frac{9}{4}\,p\alpha'};$$

und wenn eine unbestimmte Länge der Evolute durch v bezeichnet wird:

$$v = \int\sqrt{1+\frac{9}{4}\,p\alpha'}\;d\alpha'$$

$$= \frac{4}{9p}\cdot\tfrac{2}{3}(1+\frac{9}{4}\,p\alpha')^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{27}\;\frac{27m}{16}\,(1+\frac{9}{4}\;\frac{16}{27m}\alpha')^{\frac{3}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}m(1+\frac{4}{3m}\,\alpha')^{\frac{3}{2}}.$$

13) Behufs der Quadrirung der Evolute haben wir

$$\beta = p^{\frac{1}{2}}\,\alpha'^{\frac{1}{2}}$$

und wenn s in Taf. II. Fig. 3. den durch *Df*, α' und β eingeschlossenen Flächenraum bezeichnet,

$$s = p^{\frac{1}{2}}\int\alpha'^{\frac{1}{2}}\;d\alpha' = \tfrac{2}{5}p^{\frac{1}{2}}\;\alpha'^{\frac{5}{2}} = \tfrac{2}{5}\alpha'\beta;$$

also $\frac{2}{5}$ des über α' und β gebildeten Rechtecks *DGfH*, wogegen, wenn statt *Df* eine Parabel gezogen wäre, der durch diese und ihre Coordinaten eingeschlossene Flächenraum $\frac{2}{3}$ des entsprechenden Rechtecks betragen würde.

14) Um den Flächenraum zu bestimmen, welchen die durch Umdrehung der Evolute um die Axe *AB* beschriebene gewölbte Oberfläche hat, haben wir den Ausdruck

$$s = 2\pi\int\beta\sqrt{d\alpha'^2+d\beta^2} = 2\pi\sqrt{p}\int\alpha'^{\frac{1}{2}}d\alpha'\sqrt{1+\frac{4}{3m}\,\alpha'}$$

aus welchem sich durch Integration ein geschlossener Ausdruck ableiten lässt, der aber freilich etwas weitläufig ist. Setzt man nämlich der Kürze wegen

$$\frac{4}{3m} = \delta,$$

so wird nach einiger Reduction

$$s = 2\pi\sqrt{p}\left\{\frac{\sqrt{\alpha' + \delta\alpha'^2}(2\delta\alpha' + 8\delta\delta\alpha'^2 - 3)}{24\delta\delta} + \frac{1}{16\delta^2\sqrt{\delta}}\, ln\left(\frac{1 + 2\delta\alpha'}{2\sqrt{\delta}} + \sqrt{\alpha' + \delta\alpha'^2}\right)\right\}$$

unter *ln* hyperbolische Logarithmen verstanden.

15) Um den Cubikinhalt des durch Umdrehung um AB erzeugten Körpers zu finden, haben wir den Ausdruck

$$K = \pi\int\beta^2\, d\alpha' = \pi\int p\alpha'^2\, d\alpha' = \tfrac{1}{4}\pi p\alpha'^4 = \tfrac{1}{4}\pi\beta^2 \,.\, \alpha'$$

also ein Viertel des Cylinders, dessen Grundfläche β zum Radius hat und dessen Höhe $= \alpha'$ ist. Wäre Df eine Parabel, so würde der ihrer Umdrehung entsprechende Körper der Hälfte jenes Cylinders gleich sein.

Man kann daher eine der Construction des Archimedes entsprechende Darstellung angeben, wodurch das Verhältniss eines Cylinders, dessen Höhe noch einmal so gross als der Radius seiner Grundfläche ist, zu den beiden Conoïden, deren erzeugende Curven respective eine Parabel und die Evolute einer Parabel sind, ausgedrückt wird. Die Höhe des Cylinders soll hierbei die gemeinschaftliche Abscisse der beiden letztern und der Radius der Grundfläche des erstern die zugehörige Ordinate bezeichnen. Für die Parabel wäre demnach

$$y^2 = mx,\ y = \tfrac{1}{2}x,\ \text{also}\ x = 4m;$$

für die Evolute

$$\beta^2 = p\alpha'^2,\quad \beta = \tfrac{1}{2}\alpha',\quad \alpha' = \frac{1}{4p} = \frac{27}{64}m.$$

Wir erhalten dann das einfache Verhältniss des Cubikinhalts der gesammten drei Körper, indem man den Halbmesser der Grundfläche des Cylinders oder in Taf. II. Fig. 4. $BF = r$ setzt:

$$\text{Cylinder } BCED = 2r^2\pi$$
$$\text{Conoïd } AGBCHA = r^2\pi$$
$$\text{-} \quad AJBCKA = \tfrac{1}{2}r^2\pi$$

also Cyl. : Par. : Evol. $= 4 : 2 : 1$, wogegen bekanntlich Cyl. : Kugel : Kegel $= 3 : 2 : 1$.

16) Für die Ellipse ist die Gleichung der Kegelschnitte

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

und vergleichen wir diese mit der in 7) aufgestellten allgemeinern Gleichung, so ist hier

$$m = \frac{2b^2}{a}, \quad n = -\frac{b^2}{a^2},$$

wobei der Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Endpunkte der grossen Axe $2a$ zusammenfällt und wo b die halbe kleine Axe bezeichnet. Um die Sache etwas zu vereinfachen, verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten nach dem Mittelpunkte der Ellipse, und haben dann bekanntlich für die letztere die Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Aus ihr folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3},$$

$$\frac{dy^2 + dx^2}{dx^2} = \frac{b^4x^2 + a^4y^2}{a^4y^2} = \frac{b^4x^2 + a^4b^2 - a^2b^2x^2}{a^4y^2} = \frac{b^2}{a^2}\frac{a^2 - e^2x^2}{y^2}$$

wo

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

gesetzt ist.

Substituiren wir diese Werthe in den oben in 6) aufgestellten allgemeinen Ausdrücken von $x - \alpha$ und $y - \beta$, so wird

$$x - \alpha = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}\frac{b^2}{a^2}\frac{a^2 - e^2x^2}{y^2} - \frac{a^2y^2}{b^4} = x \cdot \frac{a^2 - e^2x^2}{a^2}$$

$$y - \beta = -\frac{b^2}{a^2}\frac{a^2 - e^2x^2}{y^2} - \frac{a^2y^2}{b^4} = y\frac{a^2 - e^2x^2}{b^2}$$

oder auch aus der ersten von beiden

$$\text{I.} \quad \alpha = \frac{e^2x^3}{a^2}.$$

Aus der zweiten folgt

$$\beta = y\left(1 - \frac{a^2 - e^2x^2}{b^2}\right)$$

oder nach einiger Transformation

$$\text{II.} \quad \beta = -\frac{a^2e^2}{b^4}y^3.$$

Wenn man zuerst y mittelst der Gleichung der Ellipse aus II. und dann aus I. und II. x eliminiren wollte, so würde die resultirende Gleichung von einem hohen Grade ausfallen. Zweckmässiger dürfte es sein, zu den in Bezug auf die Evolute der Ellipse anzustellenden Betrachtungen die Gleichungen I. und II. zu benutzen und damit die Gleichung der Ellipse

$$\text{III.} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

zu verbinden.

17) Um die Punkte auf AB und BC Taf. II. Fig. 5. zu finden, in denen die Evolute die grosse Axe schneidet, setzen wir

$$\beta = 0$$

also nach II. $y = 0$

- - III. $a^2 - x^2 = 0$ oder $x = \pm a$

und - I. $\alpha = \pm \frac{e^2 a^2}{a^2} = \pm \frac{ae \cdot ae}{a} = \pm ae^2$.

Der vorletzte Ausdruck von α eignet sich am besten zu der in Taf. II. Fig. 6. angedeuteten Construction.

$$AB = a,\ BH = BP = ae,\ BQ = BF = \frac{ae \cdot ae}{a}.$$

Für $FB = BG = ae^2$ sind F und G diese Durchschnittspunkte, und zwar wird

F dem Punkte A,
G - - C

der Ellipse entsprechen.

Um eben so die Durchschnittspunkte auf DBE zu erhalten, setzen wir, da der Anfangspunkt der Coordinaten sich in B befindet,

$$\alpha = 0$$

also nach I. $x = 0$

- - III. $y = \pm b$

und - II. $\beta = \mp \frac{a^2 e^2}{b^4} b^2 = \mp \frac{a \cdot ae^2}{b} = \mp \frac{a^2 e^2}{b}$.

Nach dem vorletzten Ausdrucke lässt sich der Werth von β finden; man erhält so die Punkte K und L und zwar, weil y und β entgegengesetzte Zeichen haben, wird

L dem Punkte D,
K - - E

der Ellipse entsprechen.

18) Aus I. folgt $d\alpha = \frac{3e^2 x^2}{a^2}\, dx$,

- II. - $d\beta = -\frac{3a^2 e^2 y^2}{b^4}\, dy$;

daher

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{a^4}{b^4} \frac{y^2}{x^2} \frac{dy}{dx}.$$

Aus III. aber ergiebt sich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}$$

mithin

Digitized by Google

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{a^4}{b^4}\,\frac{y}{x}\cdot\frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{y}{x} = -\frac{dx}{dy}$$

und auch

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{3e^2}{b^2}\,xy.$$

Da nun allgemein

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \frac{\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d^2\beta}{dx^2} - \frac{d\beta}{dx}\cdot\frac{d^2\alpha}{dx^2}}{(\frac{d\alpha}{dx})^3},$$

so haben wir zu diesem Ende

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{3e^2x^2}{a^2},\quad \frac{d^2\alpha}{dx^2} = \frac{6e^2x}{a^2}$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{3e^2}{b^2}\,xy,\quad \frac{d^2\beta}{dx^2} = \frac{3e^2}{b^2}\,y + \frac{3e^2}{b^2}\,x\,\frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{3e^2}{b^2}\,y - \frac{3e^2}{b^2}\,x\,\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y}$$

$$= \frac{3e^2}{b^2}\,y - \frac{3e^2x^2}{a^2y}$$

und so

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \frac{\frac{3e^2}{a^2}\,x^2(\frac{3e^2}{b^2}\,y - \frac{3e^2x^2}{a^2y}) - \frac{3e^2}{b^2}\,xy\,\frac{6e^2x}{a^2}}{\frac{27e^6x^6}{a^6}}$$

$$= -\frac{9e^4x^2}{a^2}\,(\frac{y}{b^2} + \frac{x^2}{a^2y})\,\frac{a^6}{27e^6x^6}$$

$$= -\frac{a^4}{3e^2x^4}\,(\frac{a^2y^2 + b^2x^2}{a^2b^2y})$$

endlich

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = -\frac{a^4}{3e^2x^4y}.$$

In so fern also y negativ ist, wie hier unterhalb AC, ist das zweite Differential der Ordinate der Curve FKG in Bezug auf die Abscisse positiv; ist y hingegen positiv, wie hier oberhalb AC, so wird jenes zweite Differential negativ; daher ist nach 1) FKG und FLG gegen die Abscissenaxe convex.

19) Diese Curve der Mittelpunkte oder Evolute der Ellipse muss nun rectificabel sein.

In der That wird

$$\sqrt{1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}} = \sqrt{\frac{b^4x^2+a^4y^2}{b^4x^2}} = \sqrt{\frac{b^4x^2+a^2b^2(a^2-x^2)}{b^4x^2}} = \frac{a\sqrt{a^2-e^2x^2}}{bx}$$

$$\sqrt{1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}}\,.\,d\alpha = \frac{3e^2}{a^2}\,x^2\,dx\,\frac{a\sqrt{a^2-e^2x^2}}{bx}$$

Digitized by Google

$$v = \int \sqrt{1 + \frac{d\beta^2}{d\alpha^2}} \, . \, d\alpha = \frac{3e^2}{ab} \int \sqrt{a^2 - e^2 x^2} \, . \, x dx$$

$$= -\frac{1}{ab} (a^2 - e^2 x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Um die Länge von FK zu erhalten, müssen wir dieses Integral

$$\text{von } \alpha = -ae^2 \text{ bis } \alpha = 0$$

oder

$$\text{- } x = -a \quad \text{- } x = 0$$

nehmen und erhalten so:

$$FK = -\frac{1}{ab} \{a^2 - e^2 a^2\}^{\frac{1}{2}} - \{-\frac{1}{ab} a^{2\frac{1}{2}}\} = -\frac{1}{ab} b^2 + \frac{1}{ab} a^2$$

$$FK = \frac{a^2 - b^2}{ab}.$$

20) Um die Fläche $FKGL$ zu quadriren, haben wir

$$\int \beta d\alpha = \int -\frac{a^2 e^2}{b^4} y^2 \frac{3e^2}{a^2} x^2 dx = -\frac{3e^4}{b^4} \frac{b^2}{a^2} \int (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} x^2 dx$$

$$= -\frac{3e^4}{a^2 b} \int (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} x^2 dx.$$

Wenden wir nun nach einander folgende Integralformeln an

$$\int (a + cx^2)^n x^m dx = \frac{1}{c(2n + m + 1)} \{(a + cx^2)^{n+1} x^{m-1}$$

$$- (m - 1) a \int (a + cx^2)^n x^{m-1} dx\}$$

$$\int (a + cx^2)^n dx = \frac{1}{2c(2n + 1)} \{2cx(a + cx^2)^n$$

$$+ 4acn \int (a + cx^2)^{n-1} dx\}$$

$$\int \sqrt{(a + cx^2)} dx = \tfrac{1}{2} x \sqrt{a + cx^2} + \tfrac{1}{2} a \int \frac{dx}{\sqrt{a + cx^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a - cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \text{ arc sin } \left(x \sqrt{\frac{c}{a}}\right)$$

so erhalten wir

$$\int \beta d\alpha = \frac{e^4}{2a^2 b} \{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} x - \tfrac{1}{4} a^2 x (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{8} a^4 x \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$- \tfrac{1}{8} a^4 \text{ arc sin } \frac{x}{a}\} + C.$$

Zur Bestimmung der Fläche FBK müssen wir diess Integral

$$\text{von } \alpha = -ae^2 \text{ bis } \alpha = 0$$

oder

$$\text{von } x = -a \text{ bis } x = 0$$

erstrecken, und da für den erstern Werth von x

$$\int \beta d\alpha = \frac{e^4}{2a^3b} \{-\tfrac{3}{4}a^4 \arcsin(-1)\} = \frac{e^4}{2a^3b} \{-\tfrac{3}{4}a^4 (-\tfrac{1}{2}\pi)\}$$

$$= \frac{3}{32} \frac{a^3e^4\pi}{b},$$

für den letzten Werth von x

$$\int \beta d\alpha = 0$$

ist, so wird

$$FBK = \frac{3}{32} \frac{a^3e^4\pi}{b}$$

und

$$FKGL = 4 \cdot FBK = \tfrac{3}{8} \frac{a^3e^4\pi}{b}$$

$$= \tfrac{3}{8} \frac{a}{b} ae^2 \cdot ae^2\pi,$$

in welcher letztern Form sich der Werth auch durch die in der Figur enthaltenen Grössen veranschaulichen lässt. Denkt man sich nämlich zu $FB = ae^2$ als halber kleinen und $BK = \frac{a}{b} \cdot ae^2$ als halber grossen Axe (17) eine Ellipse construirt, so ist ihr Flächeninhalt $= \frac{a}{b} ae^2 \cdot ae^2\pi$, und der Flächeninhalt der Figur $FKGL = \frac{1}{8}$ von jenem.

21) Zur Bestimmung der gewölbten Oberfläche, welche durch Umdrehung um die Axe FG entsteht, haben wir

$$s = 2\pi \int \beta \sqrt{d\beta^2 + d\alpha^2} = -2\pi \frac{a^2e^2}{b^4} \frac{3e^2}{ab} \int y^2 \sqrt{a^2 - e^2x^2}\, xdx$$

$$= -2\pi \frac{a^2e^2}{b^4} \frac{3e^2}{ab} \frac{b^2}{a^2} \int (a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - e^2x^2}\, xdx$$

$$= -\frac{6\pi e^4}{a^2b^2} \int (a^2 - x^2) \sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - e^2x^2)}\, xdx$$

$$= -\frac{6\pi e^4}{a^2b^2} \int \{a^2 xdx \sqrt{a^4 - (a^2 + a^2e^2)x^2 + e^2x^4}$$

$$- x^2 \cdot xdx \sqrt{a^4 - (a^2 + a^2e^2)x^2 + e^2x^4}\}.$$

Nun ist $a^2 + a^2e^2 = 2a^2 - b^2$, ferner setzen wir

$$x^2 = z,\quad x^4 = z^2,\quad x\,dx = \tfrac{1}{2}dz$$

$$\sqrt{a^4-(2a^2-b^2)x^2+e^2x^4} = \sqrt{a^4-(2a^2-b^2)z+e^2z^2} = \sqrt{R}$$

so wird

$$s = -\frac{6e^4\pi}{a^2b^2}\left\{\tfrac{1}{2}a^2\int dz\sqrt{R} - \tfrac{1}{2}\int z\,dz\sqrt{R}\right\}.$$

Das zweite Integral geht über in

$$-\tfrac{1}{3}\frac{R\sqrt{R}}{3e^2} - \tfrac{1}{3}\frac{2a^2-b^2}{2e^2}\int dz\sqrt{R}.$$

Hiermit verbunden das erste

$$\tfrac{1}{2}a^2\int dz\sqrt{R},$$

so wird

$$s = \frac{6e^4\pi}{a^2b^2}\left\{\frac{1}{6e^2}R\sqrt{R} + \frac{b^2}{4e^2}\int dz\sqrt{R}\right\}$$

$$= \frac{6e^4\pi}{a^2b^2}\left\{\frac{1}{6e^2}R\sqrt{R} + \frac{b^2}{4e^2}\frac{2e^2z-2a^2+b^2}{4e^2}\sqrt{R} + \frac{b^2}{4e^2}\frac{4a^4e^2-(2a^2-b^2)^2}{8e^2}\int\frac{dz}{\sqrt{R}}\right\}$$

$$= \frac{6e^4\pi}{a^2b^2}\left\{\frac{1}{6e^2}R\sqrt{R} + \frac{b^2}{4e^2}\frac{2e^2z-2a^2+b^2}{4e^2}\sqrt{R} - \frac{b^4}{4e^2}\frac{1}{8e^2}\frac{1}{e}\ln\frac{2e^2z-2a^2+b^2+2e\sqrt{R}}{2e}\right\}$$

$$= \frac{6e^2\pi}{a^2b^2}\left\{\frac{1}{6}R\sqrt{R} + \frac{b^2}{4}\frac{2e^2z-2a^2+b^2}{4e^2}\sqrt{R} - \frac{b^4}{4}\frac{1}{8e^2}\ln(2e^2z-2a^2+b^2+2e\sqrt{R})\right\}.$$

Um die der Umdrehung von FBK entsprechende Fläche, d. h. die Hälfte der ganzen zu erhalten, muss das Integral wie in 20)

von $x = -a$ bis $x = 0$

d. h. - $z = a^2$ - $z = 0$

erstreckt werden. Für den ersten Werth wird $R = 0$, für den zweiten $R = a^4$, und so diese Fläche

$$= \frac{6e^2\pi}{a^2b^2}\left\{-\tfrac{1}{6}a^6 + \frac{a^2b^2}{16e^2}(2a^2-b^2) - \frac{b^4}{32e^2}\ln\frac{1+e}{1-e}\right\}.$$

22) Um die Curve zu cubiren haben wir

$$K = \pi \int \beta^2 \, du = \pi \frac{3e^2}{a^2} \frac{a^4 e^4}{b^4} \int y^4 \, x^2 dx$$

$$= \frac{3\pi a^2 e^6}{b^4} \cdot \frac{b^6}{a^6} \int (a^2 - x^2)^4 \, x^2 dx$$

$$= \frac{3\pi e^6}{a^4 b^2} \left\{ \tfrac{1}{3} a^6 x^3 - \tfrac{1}{5} a^4 x^5 + \tfrac{3}{7} a^2 x^7 - \tfrac{1}{9} x^9 \right\}.$$

Für die ganze Evolute ist dieses Integral zu erstrecken von $x = -a$ bis $x = +a$, daher in diesem Falle

$$K = \frac{6\pi e^6}{a^4 b^2} \left\{ \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{3}{7} - \tfrac{1}{9} \right\} a^9 = \frac{32}{105} \pi \frac{a^5 e^6}{b^2}.$$

Diesen Ausdruck kann man auch folgendermassen schreiben:

$$K = \frac{32}{105} \pi \left(\frac{a}{b} ae^2\right) \left(\frac{a}{b} ae^2\right) . (ae^2),$$

und wenn man die in 17) gefundenen Werthe der halben Axen der Evolute, nämlich

$$FB = ae^2 \text{ mit } B$$

$$BK = \frac{a}{b} . ae^2 \text{ mit } A$$

bezeichnet, und die letztern Bezeichnungen in den Ausdruck für K setzt,

$$K = \frac{32}{105} \pi \, A^3 . B.$$

Der Cubikinhalt eines Ellipsoids, dessen beide Axen A und B, und welches durch Umdrehung um die kleinere B entstanden wäre, würde dagegen sein

$$K' = \frac{4}{3} \pi \, A^2 B,$$

so dass man das Verhältniss hat

$$K' : K = \frac{4}{3} : \frac{32}{105} = 35 : 8$$

oder

$$K = \frac{8}{35} K'.$$

23) Die für die Evolute der Ellipse gefundenen Ausdrücke gehen in die, der Evolute des Kreises entprechenden über, indem man $a = b$, $e = 0$ setzt; alsdann wird aber nach 16)

$$\text{I. } \alpha = 0, \quad \text{II. } \beta = 0, \quad \text{III. } y^2 = a^2 - x^2$$

d. h. die Evolute des Kreises ist keine Curve, sondern ein Punkt, und zwar der Anfangspunkt der Coordinaten, welcher hier der Mit-

telpunkt ist. Diess ist ein Resultat, welches man freilich auch ohne Calcul hätte erhalten können.

24) Die Betrachtungen über die, der Hyperbel entsprechenden, Evolute werden sich dadurch vereinfachen lassen, dass man aus den für die Ellipse gefundenen Resultaten einzelne durch Analogie für die Hyperbel ableiten kann.

Die Gleichung der letztern, für den einen ihrer Scheitel als Anfangspunkt der Coordinaten ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$$

und vergleicht man diese mit der allgemeinern Gleichung der Kegelschnitte

$$y^2 = mx + nx^2$$

so ist in diesem Falle

$$m = \frac{2b^2}{a}, \quad n = \frac{b^2}{a^2}.$$

Verlegt man den Anfangspunkt in den Mittelpunkt B (Taf. II. Fig. 7.) des zwischen beiden Scheitelpunkten befindlichen Stücks der Axe, so wird die Gleichung symmetrischer, nämlich

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2).$$

Aus dieser erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3},$$

$$\frac{dy^2 + dx^2}{dx^2} = \frac{b^4x^2}{a^4y^2} + 1 = \frac{b^4x^2 + a^2(b^2x^2 - a^2b^2)}{a^4y^2}$$

$$= \frac{b^2x^2(a^2 + b^2) - a^4b^2}{a^4y^2}$$

oder wenn man, der bei der Ellipse angewandte Transformation analog,

$$a^2 + b^2 = a^2e^2$$

setzt:

$$\frac{dy^2 + dx^2}{dx^2} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \left\{\frac{e^2x^2 - a^2}{y^2}\right\}.$$

Setzen wir diese Werthe in die allgemeinen Ausdrücke von $x - \alpha$ und $y - \beta$ (6), so wird

$$x - \alpha = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} \frac{\frac{b^2}{a^2} \frac{e^2x^2 - a^2}{y^2}}{-\frac{b^4}{a^2y^2}} = -\frac{b^4}{a^4} \frac{x}{y^4} (e^2x^2 - a^2) \frac{a^2y^2}{b^4}$$

$$= \frac{a^2 - e^2x^2}{a^2} x$$

und hieraus

$$\text{I.}\quad \alpha = \frac{e^2}{a^2}\, x^3.$$

Ferner

$$y-\beta = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{e^2x^2-a^2}{y^2}\cdot\frac{a^2y^2}{b^4} = y\,\frac{e^2x^2-a^2}{b^2} = y\,\frac{e^2\{\frac{a^2}{b^2}y^2+a^2\}-a^2}{b^2}$$

$$= y\cdot\frac{\frac{a^2e^2}{b^2}y^2+b^2}{b^2}$$

und hieraus

$$\text{II.}\quad \beta = -\frac{a^2e^2}{b^4}\cdot y^3.$$

Aus dem entgegengesetzten Zeichen in II. geht hervor, dass wie bei der zur Ellipse gehörigen Curve der Mittelpunkte zu einem positiven Werthe von y, etwa LM, ein negativer Werth von β, NP gehört und umgekehrt. Demnach wird

die Curve HJ dem Zweige CE der Hyperbel

" " HK " " CD " "

entsprechen, und ganz ähnlich für den zweiten Theil FAG der Hyperbel.

Man könnte nun y aus II. eliminiren mittelst der Gleichung

$$\text{III.}\quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(x^2-a^2)$$

und aus der resultirenden Gleichung und I. x fortschaffen, um so eine Gleichung zwischen α und β zu erhalten, welches die der Evolute sein würde; allein wir wollen lieber, wie wir es bei der Ellipse gethan haben, die drei Gleichungen selbst benutzen.

25) Setzt man zunächst $\beta=0$, so wird aus II. $y=0$, aus III. $x=\pm a$, aus I. $\alpha=\pm ae^2$.

Diese beiden speciellen Werthe von α geben uns die beiden Punkte H und H' der Evolute, welche respective den Scheitelpunkten C und A entsprechen.

Die nun weiter folgenden Betrachtungen werden, wegen der ganz gleichen Form der beiden ersten Gleichungen mit den für die Ellipse ihnen entsprechenden, auch den dort angestellten sehr nahe kommen, wesshalb wir uns hier etwas kürzer fassen und die dortigen Resultate ohne Weiteres anwenden können.

Wir haben demnach

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{a^4}{b^4}\cdot\frac{y^2}{x^2}\cdot\frac{dy}{dx},\quad \frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y},$$

also

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{a^2}{b^2}\,\frac{y}{x} = -\frac{dx}{dy}$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{3e^2}{a^2}x^2, \quad \frac{d^2\alpha}{dx^2} = \frac{6e^2x}{a^2}$$

$$\frac{d\beta}{dx} = -\frac{3e^2}{b^2}xy, \quad \frac{d^2\beta}{dx^2} = -\frac{3e^2}{b^2}y - \frac{3e^2x}{b^2}\frac{dy}{dx}$$

$$= -\frac{3e^2}{b^2}y - \frac{3e^2x}{b^2}\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

$$= -\frac{3e^2}{b^2}y - \frac{3e^2x^2}{a^2y}$$

und so

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \frac{-\frac{3e^2x^2}{a^2}\left\{\frac{3e^2y}{b^2} + \frac{3e^2x^2}{a^2y}\right\} + \frac{3e^2xy}{b^2}\frac{6e^2x}{a^2}}{\frac{27e^6x^6}{a^6}}$$

$$= \left(\frac{9e^4x^2y}{a^2b^2} - \frac{9e^4x^4}{a^4y}\right)\frac{a^6}{27e^6x^6}$$

$$= -\frac{a^4}{3e^2x^4}\left\{\frac{b^2x^2 - a^2y^2}{a^2b^2y}\right\} = -\frac{a^4}{3e^2x^4y}.$$

Es gelten daher auch hier dieselben Regeln wie 18) über die convexe und concave Form der Evolute.

26) Zur Rectification der Curve haben wir die Gleichung

$$v = \int\sqrt{1 + \frac{d\beta^2}{d\alpha^2}}\,.\,d\alpha = \int\sqrt{1 + \frac{a^4y^2}{b^4x^2}}\,.\,\frac{3e^2}{a^2}\,x^2dx$$

$$= \frac{3e^2}{a^2}\int x^2dx\,\frac{\sqrt{a^4\frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) + b^4x^2}}{b^2x}$$

$$= \frac{3e^2}{a^2b^2}\int xdx\,\sqrt{a^2b^2x^2 - a^4b^2 + b^4x^2}$$

$$= \frac{3e^2}{a^2b^2}\int xdx\sqrt{x^2(a^2+b^2) - a^4} = \frac{3e^2}{ab}\int xdx\sqrt{e^2x^2 - a^2}$$

oder

$$v = \frac{1}{ab}\,(e^2x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

27) Zur Quadrirung der Evolute haben wir

$$s = \int\beta d\alpha = -\frac{a^2e^2}{b^4}\,\frac{3e^2}{a^2}\int y^3x^2dx = -\frac{3e^4}{b^4}\,\frac{b^3}{a^3}\int(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}x^3dx$$

$$= -\frac{3e^4}{a^3b}\int(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}x^2dx$$

und hierfür findet man nach denselben drei ersten Integralformeln wie in 20) und der vierten

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} ln(x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2})$$

$$s = -\frac{e^4}{2a^2b} \{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}x + \tfrac{1}{4}a^2x(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{8}a^4x\sqrt{x^2-a^2} + \tfrac{1}{8}a^6 ln(x+\sqrt{x^2-a^2})\} + C.$$

28) Zur Bestimmung der gewölbten Oberfläche haben wir

$$s = 2\pi \int \beta \sqrt{d\beta^2 + da^2} = -2\pi \frac{a^2e^2}{b^4} \frac{3e^2}{ab} \int y^1 x dx \sqrt{e^2x^2 - a^2}$$

$$= -2\pi \frac{a^2e^2}{b^4} \cdot \frac{3e^2}{ab} \cdot \frac{b^3}{a^3} \int (x^2-a^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{e^2x^2-a^2} \cdot x dx$$

$$s = -\frac{6\pi e^4}{a^2b^2} \int \{x^3 \cdot x dx \sqrt{a^4 - (a^2+a^2e^2)x^2 + a^2x^4} - a^2 x dx \sqrt{a^4 - (a^2+a^2e^2)x^2 + e^2x^4}\}$$

ganz denselben Ausdruck wie bei der zur Ellipse gehörigen Evolute, nur mit entgegengesetzten Zeichen; also nach der dortigen Auseinandersetzung in 21)

$$x^2 = z, \sqrt{a^4 - (a^2+a^2e^2)x^2 + e^2x^4} = \sqrt{a^4 - (2a^2+b^2)z + e^2z^2} = \sqrt{R}$$

gesetzt:

$$s = \frac{6\pi e^4}{a^2b^2} \int \{\tfrac{1}{2}a^2 dz\sqrt{R} - \tfrac{1}{2}z dz\sqrt{R}\},$$

$$-\tfrac{1}{2}\int z dz \sqrt{R} = -\tfrac{1}{2}\frac{R^{\frac{3}{2}}}{3e^2} - \tfrac{1}{2}\frac{2a^2+b^2}{2e^2}\int \sqrt{R}\, dz,$$

$$\int \sqrt{R}\, dz = \frac{(2e^2z - 2a^2 - b^2)\sqrt{R}}{4e^2} + \frac{4a^4e^2 - (2a^2+b^2)^2}{8e^2} \int \frac{dz}{\sqrt{R}},$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{R}} = \frac{1}{e} ln \frac{2e^2z - 2a^2 - b^2 + 2e\sqrt{R}}{2e},$$

$$4a^2e^2 - (2a^2+b^2)^2 = -b^4;$$

endlich

$$s = \frac{6e^4\pi}{a^2b^2} \{-\frac{1}{6e^2} \cdot R^{\frac{3}{2}} + \frac{b^2}{4e^2} \frac{(2e^2z - 2a^2 - b^2)\sqrt{R}}{4e^2} - \frac{b^4}{4e^2} \cdot \frac{1}{8e^2} ln \frac{2e^2z - 2a^2 - b^2 + 2e\sqrt{R}}{2e}\} + C.$$

29) Zur Cubatur erhalten wir die Formel

$$K = \pi \int \beta^2\, da = \pi \frac{a^4e^4}{b^4} \frac{3e^2}{a^2} \int y^4 x^2 dx$$

Digitized by Google

$$= \pi \frac{3a^2 \cdot e^6}{b^6} \frac{b^6}{a^6} \int (x^2 - a^2)^3 x^2 dx$$

$$= \frac{3\pi e^6}{a^6 \cdot b^2} \int \{x^8 - 3a^2 x^6 + 3a^4 x^4 - a^6 x^2\} dx$$

$$K = \frac{3\pi e^6}{a^6 \cdot b^2} \{\tfrac{1}{9}x^9 - \tfrac{3}{7}a^2 x^7 + \tfrac{3}{5}a^4 x^5 - \tfrac{1}{3}a^6 x^3\} + C.$$

II.

Einige Bemerkungen über die besondern Punkte der Curven.

Ist $y = \varphi(x)$ die Gleichung einer Curve, so nehmen die positiven Ordinaten so lange an Grösse zu, als $\frac{dy}{dx}$ positiv, nehmen hingegen so lange ab, als $\frac{dy}{dx}$ negativ ist. Wenn also in einem Punkte der Curve $\frac{dy}{dx}$ vom Positiven zum Negativen übergeht, so ist das demselben Punkte entsprechende y ein Maximum, im entgegengesetzten Falle ein Minimum.

Ist z. B.

$$y = b + c(x-a)^m,$$

$$\frac{dy}{dx} = mc(x-a)^{m-1};$$

so wird $\frac{dy}{dx}$ dem Zeichen nach dem von x entsprechen, je nachdem m beschaffen ist.

1) Es sei m grade, also $m-1$ ungrade, so wird

$(x-a)^{m-1}$ negativ wenn $x < a$

positiv - $x > a$

es findet ein Minimum statt - $x = a$.

Denn für $x = a - h$ wird $y = b + ch^m$

und - $x = a + h$ - $y = b + ch^m$

also beide grösser als für $x = a$, wo $y = b$.

Eine Grösse geht vom Negativen zum Positiven über entweder durch 0 oder durch ∞. Im vorliegenden Falle findet das Erstere statt, es ist also im gesuchten Punkte

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

d. h. weil $\frac{dy}{dx}$ die trigonometrische Tangente des Winkels bezeichnet, den die Berührungslinie im betreffenden Punkte der Curve mit

Digitized by Google

der Abscissenaxe bildet, ist diese Berührungslinie der Abscissenaxe parallel, wie MR in Taf. II. Fig. 8., wenn

$$AP = a$$
$$PM = b.$$

Man kann diess auch so fassen. Aus

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

folgt durch Integration

$$y = \text{Constans},$$

d. h. im Punkte M ist das Element der Curve eine grade Linie, welche parallel mit der Abscissenaxe fortgeht; ein Resultat, welches der Sache nach mit dem vorigen übereinstimmt.

Wäre die gegebene Gleichung der Curve

$$y = b - c(x-a)^m,$$

so wird

$$\frac{dy}{dx} = -mc(x-a)^{m-1},$$

und hier geht $\frac{dy}{dx}$ von $+mch^{m-1}$ für $x = a-h$

durch 0 - $x = a$

in $-mch^{m-1}$ - $x = a+h$

über, daher findet in diesem Falle ein Maximum in M (Taf. II. Fig. 9.) statt.

2) Ist in der ersten Gleichung

$$y = b + c(x-a)^m$$

m ungrade, also $m-1$ grade, so wird, für $x = a-h$,

$$\frac{dy}{dx} = +mch^{m-1};$$

und auch, für $x = a+h$,

$$\frac{dy}{dx} = +mch^{m-1};$$

und in der Mitte liegt, für $x = a$,

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Ein Maximum oder Minimum kann daher in diesem Falle nicht stattfinden. Betrachtet man aber das zweite Differential

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m.(m-1)\ c(x-a)^{m-2},$$

so wird, da $m-2$ ungrade ist,

$$\text{für } x=a-h,\ \frac{d^2y}{dx^2}=-m.(m-1)ch^{m-2};$$

$$\text{- } x=a,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=0;$$

$$\text{- } x=a+h,\ \frac{d^2y}{dx^2}=+m(m-1)ch^{m-2}.$$

Die Curve ist also nach den frühern Untersuchungen (1) für $x=a-h$ concav und für $x=a+h$ convex gegen die Abscissenaxe. Der Punkt M (Taf. II. Fig. 10.), in welchem sie für $x=a$ von dem Einen zum Andern übergeht, wird ein Wendepunkt genannt.

Für c negativ, wie in der zweiten vorausgesetzten Gleichung, würde die Curve umgekehrt von der convexen Form gegen die Abscissenaxe in die concave übergehen.

Im Wendepunkte ist also

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

und aus dieser Gleichung erhalten wir durch zweimalige Integration

$$y=\alpha x+\beta$$

die Gleichung einer graden Linie, d. h. im Wendepunkte ist das Element der Curve gradlinig und diese grade Linie gibt, da

$$\frac{dy}{dx}=\alpha,$$

zugleich die Richtung der Tangente MR in M an.

Oben haben wir den Krümmungshalbmesser einer Curve

$$\gamma=-\frac{(1+\frac{dy^2}{dx^2})^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

gefunden. Im vorliegenden Falle wird für den Punkt M

$$\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

also

$$\gamma=\frac{1}{0}=\infty,$$

d. h. der Krümmungshalbmesser unendlich gross, die Krümmung also unendlich klein oder vielmehr das Element in M gradlinig.

Digitized by Google

3) Es sei m ein Bruch, dessen Zähler grade und Nenner ungrade, etwa $m = \frac{2}{3}$; so wird aus

$$y = b + c(x-a)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\,\frac{c}{(x-a)^{\frac{1}{3}}},$$

also für

$$x = a - h,\ \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}\,\frac{c}{\sqrt[3]{h}};$$

$$x = a + h,\ \frac{dy}{dx} = +\frac{2}{3}\,\frac{c}{\sqrt[3]{h}};$$

$$x = a,\qquad \frac{dy}{dx} = \infty.$$

Da hier $\frac{dy}{dx}$ durch ∞ vom Negativen zum Positiven übergeht, so findet im Punkt M ein Minimum statt, denn sowohl

$$\text{für } x = a - h \text{ ist } y = b + ch^{\frac{2}{3}},$$

$$\text{als auch - } x = a + h \text{ - } y = b + ch^{\frac{2}{3}}.$$

Ferner ist in M (Taf. II. Fig. 11.) die Tangente, wegen

$$\frac{dy}{dx} = \infty,$$

senkrecht auf der Abscissenaxe. Da

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\,\frac{c}{(x-a)^{\frac{1}{3}}}$$

und so

$$\text{für } x = a - h,\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{9}\,\frac{c}{h^{\frac{1}{3}}},$$

$$\text{- } x = a + h,\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{9}\,\frac{c}{h^{\frac{1}{3}}};$$

so ist die Curve diess- und jenseits M gegen die Abscissenaxe concav und der Punkt M kein Wendepunkt. In M ist für $x = a$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \infty.$$

Dieser Punkt, in welchem die Curve bei der Vereinigung der beiden Zweige DM und EM (Taf. II. Fig. 12.) plötzlich innehält, wird Kehrpunkt genannt.

Für c negativ wird M ebenfalls ein Kehrpunkt, PM aber ein Maximum, indem nun $\frac{dy}{dx}$ durch ∞ vom Positiven zum Negativen übergeht.

Digitized

Der Krümmungshalbmesser

$$\gamma = -\frac{(1+\frac{dy^2}{dx^2})^{\frac{1}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

wird im Punkt $M = 0$, die Krümmung also unendlich gross, was auch der Fall sein muss, da die Curve, ohne in Bezug auf concave oder convexe Form ihre Lage gegen die Abscissenaxe zu ändern, doch die Richtung ihres Laufes selbst plötzlich ändert.

Wenn demnach

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ oder } = \infty,$$

so findet ein Maximum oder Minimum von y statt, je nachdem $\frac{dy}{dx}$ vom Positiven zum Negativen oder umgekehrt übergeht. Findet kein Zeichenwechsel statt, so ergibt sich weder ein Maximum noch ein Minimum, sondern ein Wendepunkt.

4) Die Tangente am Wendepunkte oder am Kehrpunkte kann gegen die Abscissenaxe eine ganz willkührliche Lage haben, da man ja die Lage der letztern Linie beliebig ändern kann. Der erstere Punkt findet sich stets, wenn man

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ oder } = \infty$$

setzt und $\frac{d^2y}{dx^2}$ vor und hinter dem gefundenen Punkte verschiedene Zeichen haben, letzterer hingegen, wenn die Zeichen unverändert bleiben.

Während

$$y = b + c(x-a)^{\frac{1}{3}} \text{ für } x = a,\ y = \text{Minimum}$$
$$y = b - c(x-a)^{\frac{1}{3}} \text{ - } x = a,\ y = \text{Maximum}$$

und in beiden Fällen einen Kehrpunkt M ergeben, erhalten wir aus

$$y = b + c(x-a)^{\frac{1}{3}}$$

für $x = a$ einen Wendepunkt, weil

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3}c(x-a)^{\frac{1}{3}-2} = -\frac{6c}{25(x-a)^{\frac{5}{3}}}$$
$$= \infty \text{ für } x = a$$

und weil

$$\text{für } x = a-h,\ \frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{6c}{25h^{\frac{5}{3}}}$$
$$\text{- } x = a+h,\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6c}{25h^{\frac{5}{3}}}.$$

Die Ordinate bleibt in beiden Fällen reell und die Curve erstreckt sich daher nach beiden Seiten hin von jenem Punkte aus.

Hätten wir dagegen die Gleichung

$$y = b + c(x-a)^{\frac{1}{2}}$$

so wird y imaginär für $x = a - h$, also endet die Curve mit dem kleinsten Werthe $x = a$, in welchem Falle $y = b$; hingegen für jeden Werth $x = a + h$ wird

$$y = b \pm ch^{\frac{1}{2}}$$

so dass jedem Werthe $a + h$ von x zwei Ordinaten entsprechen, welche unter sich um $2ch^{\frac{1}{2}}$ verschieden sind, wie in Taf. II. Fig. 13. in welcher M den Vereinigungspunkt beider Zweige ME und MD bildet.

Um die bisher gefundenen Relationen an einer bestimmten Curve darzustellen, denken wir uns den Kreis DFE (Taf. II. Fig. 14.), welcher auf der Linie DG fortrollt. Ein innerhalb der Peripherie gelegener Punkt R wird alsdann eine gestreckte Cycloïde beschreiben.

Setzt man

$$RC = a$$
$$EC = r$$

und ist der erzeugende Kreis nach HG gekommen, so dass, wenn

$$< DCF = v$$
$$GD = rv;$$

so wird der erzeugende Punkt sich jetzt in K befinden, indem $< JLH = v$. Die KM, senkrecht auf ED gefällt, sei die Ordinate y und $RM = x$ die Abscisse des Punktes K; alsdann ist

$$x = a - a \cos v,$$
$$y = rv + a \sin v;$$

hieraus

$$\frac{dx}{dv} = a \sin v, \quad \frac{d^2x}{dv^2} = a \cos v,$$
$$\frac{dy}{dv} = r + a \cos v, \quad \frac{d^2y}{dv^2} = -a \sin v$$

und da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dv}}{\frac{dx}{dv}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dv} \cdot \frac{d^2y}{dv^2} - \frac{dy}{dv} \cdot \frac{d^2x}{dv^2}}{(\frac{dx}{dv})^3},$$

so wird, nach gehöriger Substitution:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r + a \cos v}{a \sin v}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a + r \cos v}{a^2 \sin v^3}.$$

Für $v = 0$, d. h. für den Punkt R der Curve, wird also

$$\frac{dy}{dx} = \infty \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = \infty.$$

Die erstere Bedingung sagt, dass in R die Tangente der Curve RT senkrecht auf der Abscissenaxe ist.

Da ferner für

$$v = -\alpha, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{r + a\cos\alpha}{a\sin\alpha};$$

$$v = +\alpha, \quad \frac{dy}{dx} = +\frac{r + a\cos\alpha}{a\sin\alpha};$$

so ist in diesem Punkt y ein Minimum, nämlich $= 0$.

So lange

$$a + r\cos v > 0,$$

bleibt $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, also RK gegen RD concav. Für

$$a + r\cos v = 0 \text{ also } \cos v = -\frac{a}{r}$$

wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

und es tritt der Wendepunkt der Curve ein, indem für

$$a + r\cos v < 0$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv, also die Curve gegen RD convex wird. Für den Wendepunkt hat man

$$x = a + \frac{a^2}{r} = \frac{a(r+a)}{r}.$$

Für $v = 180°$ wird $\frac{dy}{dx} = \infty$, mithin die Tangente wieder senkrecht auf RD. Ferner wird in diesem Punkte

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a\sin v}{r + a\cos v} = 0$$

und

$$\text{für } v = 180° - \alpha, \quad \frac{dx}{dy} = +\frac{a\sin\alpha}{r - a\cos\alpha};$$

$$v = 180° + \alpha, \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{a\sin\alpha}{r - a\cos\alpha};$$

mithin $x = 2a$ ein Maximum.

Drücken wir, nach Elimination von v, y durch x aus, so wird

$$y = r \cdot \text{arc cos}\,\frac{a-x}{a} + a\sqrt{x(2a-x)}$$

und es würde also für $x > 2a$, y imaginär werden. In dem Punkte, der durch

$$v = 180°$$

bestimmt wird, findet ein Zusammentreffen zweier Zweige der Curve statt, und in ihm wird

$$y = r\pi.$$

Da endlich für denselben

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \infty,$$

und

$$\text{für } v = 180° - \alpha,\ \frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{r\cos\alpha - a}{a^2\sin\alpha^2} \text{ positiv;}$$

$$\text{- } v = 180° + \alpha,\ \frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{r\cos\alpha - a}{-a^2\sin\alpha^2} \text{ negativ;}$$

so ist der gefundene Punkt gleichzeitig ein Wendepunkt, in welchem die Curve vom Convexen zum Concaven in Bezug auf die Abscissenaxe übergeht.

Von diesem Punkte aus geht ein neuer Zweig der Curve an, in welchem von $v = 180°$ bis $v = 360°$ dieselben Verhältnisse, welche wir für die beiden ersten Quadranten von v gefunden haben, in entgegengesetzter Reihefolge wiederkehren.

XVII.

Aufgabe.

Von

Herrn Doctor Anton Vállas

zu Wien.

Es sei

$$m_1 = m$$

$$m_2 = \frac{m(m-1)}{1.2}$$

$$m_3 = \frac{m(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

. . . . . .

$$m_k = \frac{m(m-1)\,..\,\{m-(k-1)\}}{1\,.\,2\,...\,k}$$

so hat man, wenigstens für jedes ganze positive m:

$$\begin{aligned}
m_1 &= m_1^{\,2} - 2m_2 \\
m_2 &= m_2^{\,2} - 2m_1 m_3 + 2m_4 \\
m_3 &= m_3^{\,2} - 2m_2 m_4 + 2m_1 m_5 - 2m_6 \\
&\;\;\vdots \\
m_r &= m_r^{\,2} - 2m_{r-1}m_{r+1} + 2m_{r-2}m_{r+2} \\
&\quad - 2m_{r-3}m_{r+3} + 2m_{r-4}m_{r+4} \\
&\;\;\vdots \\
&\quad (-)^{r-1}\,.\,2m_1 m_{2r-1}\,(-)^{r}\,.\,2m_{2r}.
\end{aligned}$$

Man verlangt den Beweis dieses Satzes.

XVIII.

Sammlung physikalischer Aufgaben nebst ihrer Auflösung. Zum Gebrauch in Schulen und beim Selbstunterricht. Von Dr. Friedrich Kries, Herzogl. Sachsen-Coburg-Gothaischen Hofrath und Professor, mehrerer gelehrten Gesellschaften Mitgliede. Mit zwei Kupfertafeln. Jena, Friedrich Frommann. 1843. 8. 15 Sgr.

Von

Herrn Professor L. Kunze

zu Weimar.

Die Physik bietet für die Bildung von Uebungsaufgaben, die mit Hülfe der elementaren Mathematik aufgelöset werden können,

Digitized by Google

einen so reichen Stoff dar, dass man sich billig wundern muss, sie für solche Zwecke bis jetzt so wenig benutzt zu sehen. Ohne hier die Ursachen dieser Erscheinung näher zu erörtern, wird wohl Niemand die Nützlichkeit einer Sammlung physikalischer Aufgaben in Abrede stellen, wenn nur die Auswahl und die Behandlung derselben dem Bedürfniss der Lernenden gehörig angepasst ist. Und wir können das Letztere von der vorliegenden Sammlung mit gutem Grunde behaupten. — Sie wird gewiss allen Lehrern der Mathematik und Physik an Schulen eine willkommene Erscheinung sein, insonderheit aber von Denen freundlich begrüsst werden, die nach den weit verbreiteten Lehrbüchern des ehrwürdigen Herrn Verfassers ihren Unterricht ertheilen.

Die ganze Sammlung enthält 318 Aufgaben, nebst den vollständigen Auflösungen. Jene nehmen 43 Seiten, diese 115 Seiten ein; welche zwei Zahlen sich beinahe wie 3 zu 8 verhalten. Die Aufgaben sind mit fortlaufenden Nummern versehen, sonst aber nach zwölf verschiedenen Ueberschriften geordnet, die wir zur näheren Bezeichnung des Inhaltes hier namhaft machen wollen.

I. Bestimmung des specifischen Gewichts der Körper (15 Aufgaben).

II. Bewegung der Körper (13 Aufgaben).

III. Fall der Körper (Schwerpunkt; schiefe Ebene; Pendel; 43 Aufgaben).

IV. Stoss der Körper (49 Aufgaben).

V. Gleichgewicht fester Körper (23 Aufgaben).

VI. Gleichgewicht flüssiger Körper (23 Aufgaben).

VII. Verdichtung und Verdünnung elastischer Flüssigkeiten (9 Aufgaben).

VIII. Gleichgewicht fester und flüssiger Körper (16 Aufgaben).

IX. Archimedische Aufgabe (mit einigen anderen, zusammen 7).

X. Das Licht betreffend (76 Aufgaben).

XI. Die Wärme betreffend (7 Aufgaben).

XII. Gegenstände der angewandten Naturlehre betreffend (math. Geographie; sphärische Astronomie; Höhenmessen mit dem Barometer; 37 Aufgaben).

Wenn wir uns nun erlauben, dieser Inhaltsanzeige einige Bemerkungen über die Aufgaben selber beizufügen, so geschieht es lediglich in dem Interesse für die gute Sache und in der Hoffnung, dass diese Bemerkungen in dem Archiv keine unpassende Stelle finden werden.

1) Die meisten von den Aufgaben I. sollten mit den verwandten VIII. zusammenstehen; denn der Schüler kann sie nicht lösen, wenn er den hydrostatischen Satz vom Auftrieb nicht kennt.

2) Bei den Auflösungen der Aufgaben 13, 14 und 15 scheint es uns unnöthig, das absolute Gewicht p des Körpers in Betracht zu ziehen, da bei einerlei Volumen die absoluten Gewichte sich verhalten wie die specifischen; p fällt auch immer aus der Rechnung heraus. Wir würden die Aufgabe 14 noch etwas allgemeiner so vortragen: In einem Gefäss befindet sich eine Flüssigkeit A; darüber steht eine leichtere B; eine Kugel C (oder ein Körper von beliebiger Gestalt) sinkt in B unter und schwimmt auf A: man fragt, mit welchem Theil $= x$ die Kugel C in A eintaucht. Sind nun von A, B, C die specifischen Gewichte a, b, c, so heisst

das: wenn eine Wasser-Kugel $=1$ wiegt, so wiegt eine gleich grosse

$$A\text{-Kugel} = a$$
$$B\text{-Kugel} = b$$
$$C\text{-Kugel} = c$$

und das Segment x der A-Kugel $= ax$

$\ldots\ldots 1-x$ der B-Kugel $= b(1-x)$.

Demnach ist für den Zustand des Gleichgewichts $ax+b(1-x)=c$, folglich

$$x = \frac{c-b}{a-b}.$$

Der Herr Verfasser hat b für das hiesige c und 1 für das hiesige b gesetzt. In der 13. Aufgabe ist nun unmittelbar $x = \frac{6,8}{12,6} = \frac{34}{63} = 0,53968\ldots$; und in der 15. Aufgabe, nach der Formel $c = x(a-b)+b$, das gesuchte $c = 0,6 \,.\, 0,9987 + 0,0013 = 0,60052$.

3) Bei dem ballistischen Problem, Nr. 37., sagt der Herr Verf. in der Auflösung: „Da ein schief in die Höhe geworfener Körper, ohne den Widerstand der Luft, eine Parabel beschreibt, so muss hier die Theorie dieser Linie berücksichtiget werden.“ Der Herr Verf. geht nun von der Gleichung der Parabel aus und beruft sich dabei auf sein bekanntes Lehrbuch der reinen Mathematik (6. Aufl.). Er hat jedoch weder in diesem, noch in seinem Lehrbuch der Physik (5. Aufl.) nachgewiesen, dass die Bahn eines schief aufwärts geworfenen Körpers eine Parabel sein müsse. Es wäre dabei wohl zweckmässig gewesen, das Fehlende hier nachzuholen. Für die Lösung der in Rede stehenden Aufgabe scheint uns Bekanntschaft mit der Parabel unmittelbar gar nicht nothwendig, indem man sich an die ursprüngliche Betrachtung des Gegenstandes hält. Referent glaubt nichts Unnützes zu thun, wenn er in Kürze mittheilt, wie er seinen Schülern die Sache vorzutragen pflegt. In Fig. 2. des Buches sei $AD = k$ die Wurfsgeschwindigkeit in 1 Secunde. Man setze $AP = p$ und $DP = q$; $Dm = g$ sei der Fallraum in der ersten Secunde. Wenn nun die Punkte D', P', m' für eine Zeit von t Secunden eben das bedeuten, was D, P, m für 1 Secunde sind, so hat man

$$AD' = k \,.\, t;\ AP' = p \,.\, t;\ D'P' = q \,.\, t;\ D'm' = g \,.\, tt$$

und es gilt demnach für die Höhe $m'P' = h$ des geworfenen Körpers, nach Ablauf von t Secunden, die Gleichung

$$h = q \,.\, t - g \,.\, tt = (q - g \,.\, t)t.$$

Für den Endpunkt B der Bahn ist $h = 0$, folglich $g \,.\, t = q$ und $t = \frac{q}{g}$. Die Abscisse AP' wächst nun an zur Weite des Wurfs AB, wenn die Zeit $t = \frac{q}{g}$ ist; folglich ist

$$AB = \frac{p \cdot q}{g}.$$

Da p und q Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks sind, dessen Hypotenuse k constant ist, so wird das Produkt $p \cdot q$ ein Grösstes, wenn $p = q$ ist. Demnach findet die grösste Weite bei einem Elevationswinkel DAP von 45° statt, und sie ist $= \frac{kk}{2g}$, weil in diesem Falle $p \cdot q = \frac{1}{2}kk$ ist. Für zwei Elevationen, die einander zu 90° ergänzen, also für $45° + w$ und $45° - w$, werden bloss die Katheten p und q mit einander vertauscht; zu diesen Elevationen gehören also gleiche Wurfweiten. Zur Elevation 15° oder 75° gehört die halbe grösste Wurfweite; dies folgt leicht aus einer einfachen geometrischen Construction. Die Höhe $h = (q - g \cdot t)t$ wird ein Grösstes, wenn $\frac{h}{g} = (\frac{q}{g} - t)t$ eines ist. Das Product zweier veränderlicher Zahlen $\frac{q}{g} - t$ und t, die eine beständige Summe $= \frac{q}{g}$ geben, bekömmt aber seinen grössten Werth, wenn die Factoren einander gleich sind, $\frac{q}{g} - t = t$, woraus folgt $t = \frac{q}{2g}$. Die grösste Höhe gehört also zur halben Zeit des Wurfs. Nach dieser halben Zeit ist der Körper senkrecht über der Mitte von AB. Darum gehört die grösste Höhe SC auch zur halben Wurfweite und sie wird erhalten, wenn man in $h = q \cdot t - g \cdot tt$ für t an den Platz setzt $\frac{q}{2g}$. Also ist

$$SC = \frac{qq}{2g} - \frac{qq}{4g} = \frac{qq}{4g}.$$

Bei der Elevation 45° ist $qq = \frac{1}{2}kk$, folglich ist $SC = \frac{kk}{8g} = \frac{1}{4} \cdot \frac{kk}{2g}$, d. h. die grösste Höhe beträgt in diesem Falle immer ein Viertel von der grössten Weite. Für andere Elevationen, als die in der Aufgabe vorkommen, muss man natürlich die trigonometrischen Tafeln zu Hülfe nehmen; man hat nämlich, den Elevationswinkel $= u$ gesetzt,

$$p = k \cdot \cos u; \quad q = k \cdot \sin u.$$

Bei gleichen Zeiten vor und nach der halben Zeit des Wurfs erlangt der Körper gleiche Höhe; dies folgt, wenn man in $h = q \cdot t - g \cdot tt$ für t zuerst $\frac{q}{2g} - t'$ und dann $\frac{q}{2g} + t'$ setzt. Da aber zu solchen Zeiten auch gleiche Entfernungen CP diesseits und jenseits von C gehören, so ist klar, dass die ganze Wurfslinie ASB durch SC in zwei congruente Theile AS, SB getheilt wird. Man kann nun auch leicht zeigen, dass die Wurfslinie eine Parabel sei. Denkt man sich nämlich die Bewegung in jedem Punkte der Bahn aus einer verticalen und horizontalen zusammengesetzt, so ist klar, dass in S die verticale bis auf Null abgenommen hat und nur noch die horizontale vorhanden ist, in Folge

welcher der Körper eine halbe Parabel SB beschreibt, wie in allen Elementarbüchern der Physik gewiesen wird. Will man aber lieber rechnen, so sehe man in Fig. 1. unseres Buches $SN = x$ als Abscisse und $MN = y$ als Ordinate an, und man erhält dann aus dem Vorigen leicht die Werthe

$$x = \frac{qq}{4g} - q \cdot t + g \cdot tt, \quad y = \frac{p \cdot q}{2g} - p \cdot t;$$

woraus, wenn man y quadrirt und $\frac{pp}{g}$ als gemeinschaftlichen Factor absondert, folgt

$$yy = \frac{pp}{g} \cdot x.$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel, die $\frac{pp}{g}$ zum Parameter hat.

4) Die Aufgabe 63 hat der Herr Verf. nur mit Hülfe der Differentialrechnung behandelt; eine elementare Auflösung scheint ihm nicht beigefallen zu sein. Wir wollen hier eine solche mittheilen. Es handelt sich darum, in einem rechtwinkeligen Dreieck, dessen eine Kathete a gegeben ist, die Hypotenuse x und die andere Kathete y so zu bestimmen, dass $\frac{xx}{y}$ ein Kleinstes werde. Errichtet man nun in dem Endpunkte von x, der y gegenüberliegt, auf x eine Senkrechte, die der verlängerten y begegnet, so entsteht ein rechtwinkeliges Dreieck, worin a senkrecht auf der Hypotenuse, x eine Kathete und y der eine der beiden Abschnitte ist, in welche die Hypotenuse durch a getheilt wird. Demnach ist die Hypotenuse selber $= \frac{xx}{y}$. Aber in einem rechtwinkeligen Dreieck, dessen Höhe a gegeben ist, fällt die Hypotenuse offenbar dann am kleinsten aus, wenn sie von a halbirt wird, d. h. wenn $y = a$ und $x = a\sqrt{2}$ ist. Eine andere elementare Auflösung bietet die Trigonometrie dar (vergl. Seite 90, unten).

5) Für die Aufgabe 129: auf einer Waage mit ungleichen Armen das richtige Gewicht eines Körpers zu finden, kann die Betrachtung wohl etwas einfacher werden. Die ungleichen Arme seien a, a'; das wahre Gewicht des Körpers x; die ungleichen Gegengewichte p, p'. Dann ist $ax = a'p'$; $a'x = ap$; folglich $aa'xx = aa'pp'$ und $xx = pp'$.

6) Auch die Auflösung der Aufgabe 141 lässt sich kürzer geben. Man findet sofort die Gleichung (Fig. 15. des Buches)

$$P = p \cdot BH \cdot \frac{CE}{CH}$$

oder, wenn man das, womit p multiplicirt ist, z nennt, $P = p \cdot z$; und hier soll P, mithin z, ein Grösstes werden. Es ist aber

$$CH : CE = BH : z$$

folglich muss z eine Senkrechte von B auf CH sein. Diese Senkrechte fällt aber offenbar dann am grössten aus, wenn CH um C

Digitized by Google

so gedreht wird, dass BC auf CH senkrecht ist (Fig. 16. des Buches). Will man zur Differentialrechnung seine Zuflucht nehmen, so gewinnt die Auflösung durch Einführung des Winkels bei H an Eleganz. Nennen wir diesen u, so finden wir leicht

$$P = p(c \cdot \sin u + a \cdot \cos u).$$

Und hier wird der eingeklammerte Ausdruck ein Grösstes, wenn $\cot u = \frac{a}{c}$. Da nun stets auch $\cot u = \frac{x}{a}$ ist, so erhalten wir $x = \frac{aa}{c}$, wie im Buche.

7) Bei der Aufgabe 143 findet unter derselben Bedingung ein Maximum statt, wie bei der Aufgabe 63 ein Minimum, weshalb die elementare Lösung, die wir oben für 63 mitgetheilt haben, auch hier in Anwendung kommen kann.

8) Unter den 76 Aufgaben, die das Licht betreffen, kommen mehrere vor, die sich recht zweckmässig beim Unterricht in der Stereometrie benutzen lassen, z. B. Nr. 220. für den Wechselschnitt beim Kegel. Wir haben überhaupt die Bemerkung gemacht, dass die Schüler in den physikalischen Lehrstunden weniger Neigung zeigen, einen Gegenstand aus der Physik ausführlich mit Hülfe der Mathematik zu verfolgen; während sie mit grossem Interesse bei einer physikalischen Aufgabe verweilen, die gelegentlich in den mathematischen Lehrstunden als Anwendung eines vorgetragenen Satzes behandelt wird.

9) Bei Gelegenheit der Aufgabe 229 mag die etwas schwerere hier genannt werden: Auf einer geraden Linie sind fünf beliebige Strecken AB, BC, CD, DE, EF gegeben; man soll den Standpunkt P finden, von welchem aus die beiden äussersten Strecken AB, EF und die mittlere CD unter gleichen Sehewinkeln erscheinen.

10) Bei der Aufgabe 254 können die Sinusverhältnisse füglich entbehrt werden; die Auflösung folgt kürzer aus einem bekannten Satze vom Dreieck mit einem halbirten Winkel.

11) Die Aufgaben 272 und 273 über die Ortsveränderung des Bildes bei paralleler Bewegung des ebenen Spiegels hätten etwas kürzer behandelt werden können. Die Auflösung beruht ganz einfach darauf, dass zwischen $a+b$ und $a-b$ die Differenz $= 2b$ ist.

12) Die letzte Aufgabe: „In welcher Entfernung von dem Mittelpunkt der Erdkugel wird ein Körper, der sich zwischen ihr und dem Monde befindet, von beiden Weltkörpern gleich stark angezogen?“ lässt eine etwas elegantere Auflösung zu, wobei die Form einer unreinen quadratischen Gleichung vermieden wird. Ist nämlich die Entfernung der beiden Weltkörper $= 60$ Erdhalbmesser; die Masse des Mondes $= \frac{1}{80}$ der Erdmasse (nach Hansen); die gesuchte Entfernung vom Mittelpunkte des Mondes $= x$: so ist nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz

$$\frac{1}{(60-x)^2} = \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{x^2}, \quad 80x^2 = (60-x)^2, \quad x\sqrt{80} = 60 - x,$$

$$x = \frac{60}{\sqrt{80}+1} = \frac{60(\sqrt{80}-1)}{79} = 6{,}0336\ldots$$

Digitized by Google

So viel von dem Inneren des Buches. Was das Aeussere desselben anlanget, so sind Druck und Papier gut zu nennen, und zwei saubere Kupfertafeln (aus der Kunstanstalt von Herrn A. Mädel in Weimar) gereichen dem Buche zur besonderen Zierde. Dass ausser den angezeigten Druckfehlern noch einige wenige stehen geblieben sind, wird man mit Schonung beurtheilen, da es gar zu leicht möglich ist, dass man bei der Correctur in den Zahlen und Formeln etwas übersieht. Die folgenden Fehler sind von dem Herrn Verf. selber, nach dem völligen Abdrucke des Buches, noch aufgefunden worden:

S. 9 Z. 12 v. u. lies 45 statt 25

- 11 - 4 v. u. - 20 - 30

- 44 - 5 v. u. - der statt die

- 53 ist immer 15,095 st. 15,1 zu setzen

- 54 Z. 11 l. 15,095 . 930 st. 15,1 — 930

- 60 - 10 v. u. l. $AD = BC = y$ st. $AD = y$; auch fehlen in der 6ten Figur die Linien AD und CD.

- 63 Z. 8 ist nach „Gleichung" einzuschalten „und der"

- 73 in der Aufgabe 94. 2) ist in den Ausdrücken für sin z und sin u im Zähler $2G^2$ wegzustreichen (wie aus 94. 1. sogleich erhellet, wenn $g = G$ gesetzt wird)

- 77 Z. 3 l. 122° 23′ st. 165° 31′
  - 12 v. u. l. 15,88 st. 18,61 und Z. 8 l. 125° 28′ st. 175° 4′

- 78 - 3 l. 21′ 3″ st. 22′ 48″.

Referent hat durch die vorstehenden Bemerkungen (die etwas mehr Raum fordern, als sonst im Archiv bei der Anzeige eines Buches üblich ist *) das Interesse seiner verehrten Herren Collegen für die treffliche Aufgabensammlung, die uns hier geboten wird, in Anspruch nehmen wollen. Dass er sich selber lebhaft dafür interessirt und dem Buche eine fruchtbringende Verbreitung wünscht, mag die Ausführlichkeit dieser Bemerkungen, wenn auch nicht rechtfertigen, doch entschuldigen.

---

*) Auch ausführlichern, so werthvolle Bemerkungen wie die vorliegende enthaltenden Recensionen werde ich immer sehr gern einen Platz in dem Archive einräumen. G.

Digitized by Google

XIX.

Einiges über die Eulerischen Integrale der zweiten Art.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

---

§. 1.

Im 3ten Hefte des 2ten Bandes dieses Archivs hat in Nr. XXV. der Herr Herausgeber mehrere der neuesten Entwickelungen in der interessanten Lehre von den Eulerischen Integralen mitgetheilt. Aus den dort aufgestellten Formeln lassen sich noch einige wichtige Sätze sehr kurz ableiten, von denen ein Theil auf anderem weniger einfachen Wege schon gefunden worden ist.

Wir nehmen unseren Auslauf von der in jener Abhandlung §. 19. Nr. 7. entwickelten Formel:

$$\frac{d\,.\,l\Gamma(a)}{da} = \int_0^\infty \left\{e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a}\right\} \frac{dx}{x}$$

$$= \int_0^\infty e^{-x}\,\frac{dx}{x} - \int_0^\infty \frac{dx}{x(1+x)^a}.$$

Nimmt man im zweiten Integrale $\frac{1}{1+x} = y$, also $x = \frac{1}{y} - 1$, so wird $y = 0$ und $y = 1$, wenn $x = \infty$ und $x = 0$ geworden ist, und man erhält

$$\frac{d\,.\,l\Gamma(a)}{da} = \int_0^\infty e^{-x}\,.\,\frac{dx}{x} - \int_0^1 \frac{y^{a-1}dy}{1-y}. \quad (1)$$

eine Formel, die mancherlei Anwendungen fähig ist.

Man bemerke zunächst, dass das erste Integral auf der rechten Seite von a ganz unabhängig ist; schreibt man daher diese Gleichung für $a = 1 + \alpha$ und $a = 1 + \beta$ hin, so fällt bei der Subtraktion beider Gleichungen das erste transcendente Integral weg und es bleibt blos die Differenz der beiden anderen algebraischen Integrale stehen, welche man wegen der gleichen Integrationsgränzen in ein einziges Integral zusammenziehen kann. Man erhält so die Gleichung:

$$\frac{d\,.\,l\Gamma(1+\alpha)}{d\alpha} - \frac{d\,.\,l\Gamma(1+\beta)}{d\beta} = \int_0^1 \frac{y^\beta - y^\alpha}{1-y}\,dy \quad (2)$$

welche man sonst auf einem Umwege ableitete *).

§. 2.

Wir wollen jetzt folgende beiden Integrale betrachten:

$$\int_{1-\varepsilon}^{n} e^{-x}\,.\,\frac{dx}{x} \text{ und } \int_0^{\varepsilon} \frac{y^\alpha dy}{1-y}$$

in welchen n eine beliebige Zahl, ε einen positiven ächten Bruch bedeuten soll.

Entwickelt man im ersten e^{-x} nach Potenzen von x, so wird durch Integration der einzelnen Glieder:

$$\int_{1-\varepsilon}^{n} e^{-x}\,\frac{dx}{x} = ln - \tfrac{1}{1}\cdot\frac{n}{1} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{1\,.\,2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{n^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots\ldots$$
$$- l(1-\varepsilon) + \tfrac{1}{1}\cdot\frac{1-\varepsilon}{1} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(1-\varepsilon)^2}{1\,.\,2} + \ldots\ldots$$

Es fragt sich jetzt, was aus dieser Gleichung wird, wenn man n ins Unendliche wachsen lässt. Man erfährt diess leicht, wenn man sich aus der Theorie des Integrallogarithmus erinnert, dass

$$li(e^{-u}) = \int_\infty^u e^{-x}\,.\,\frac{dx}{x}$$

ist. Die Entwickelung giebt hier, wenn wir das Unendliche als Lim einer grossen Zahl n betrachten:

$$\text{li}\,(e^{-u}) = lu - \tfrac{1}{1}\cdot\frac{u}{1} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{1\,.\,2} - \ldots\ldots$$
$$+ \text{Lim}\,\{-ln + \tfrac{1}{1}\cdot\frac{n}{1} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{1\,.\,2} + \ldots\ldots\}.$$

Der zweite Theil ist die berühmte Constante 0,5772156 deren Bestimmung in der Theorie des Integrallogarithmus eine nicht unerhebliche Schwierigkeit war, welche Mascheroni auf sinnreiche Weise gehoben hat. Vergleichen wir diess mit dem Werthe unseres Integrales, so ist durch Entwickelung von $l(1-\varepsilon)$

$$\left.\begin{aligned}\int_{1-\varepsilon}^{\infty} e^{-x}\,\frac{dx}{x} = -C + \frac{\varepsilon}{1} + \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} + \ldots\ldots \\ + \tfrac{1}{1}\cdot\frac{1-\varepsilon}{1} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(1-\varepsilon)^2}{1\,.\,2} + \ldots\ldots\end{aligned}\right\} C = 0{,}577\ldots, \quad (3)$$

Setzen wir ferner im zweiten Integrale, welches wir betrachten, für $\frac{1}{1-y}$ die Reihe: $1 + y + y^2 + y^3 + \ldots$, so ergiebt sich

---

*) Legendre: Traité des fonctions elliptiques, tome II. Chap. XIII.

Digitized by Google

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{y^\alpha dy}{1-y} = \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{\varepsilon^{\alpha+2}}{\alpha+2} + \frac{\varepsilon^{\alpha+3}}{\alpha+3} + \ldots \quad (4).$$

Multipliziren wir die Gleichung (3) mit ε^α und ziehen die vorstehende davon ab, so kommt

$$\varepsilon^\alpha \int_{1-\varepsilon}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} - \int_0^{\varepsilon} \frac{y^\alpha dy}{1-y} = \varepsilon^\alpha \{-C + \tfrac{1}{1} \cdot \frac{1-\varepsilon}{1} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(1-\varepsilon)^2}{1.2} + \ldots\}$$

$$+ \varepsilon^{\alpha+1}(1 - \frac{1}{\alpha+1}) + \varepsilon^{\alpha+2}(\tfrac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+2}) + \ldots$$

$$= \varepsilon^\alpha \{-C + \tfrac{1}{1} \cdot \frac{1-\varepsilon}{1} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(1-\varepsilon)^2}{1.2} + \ldots.\}$$

$$+ \tfrac{1}{1} \cdot \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon^{\alpha+2}}{\alpha+2} + \ldots$$

Während die beiden Reihen (3) und (4) nur für positive ächt gebrochene ε convergirten, so convergirt die vorstehende auch noch für $\varepsilon = 1$; wir erhalten für diesen Werth:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} - \int_0^1 \frac{y^\alpha dy}{1-y} = -C + \tfrac{1}{1} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+1} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+2} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+3} + \ldots$$

Bringen wir auf der linken Seite die Gleichung (1) in Anwendung und transponiren die Constante $C = 0{,}5772156$ so erhalten wir das elegante Resultat:

$$C + \frac{d \cdot l\Gamma(1+\alpha)}{d\alpha} = \tfrac{1}{1} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+1} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+2} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+3} + \ldots. \quad (5)$$

eine für jedes positive α und für negative α, deren absoluter Werth kleiner als die Einheit ist, convergirende Reihe.

Sobald α zwischen den Gränzen $+1$ und -1 liegt, lässt sich jedes einzelne Glied in eine convergirende Reihe umwandeln und man erhält

$$C + \frac{d \cdot l\Gamma(1+\alpha)}{d\alpha} = \tfrac{1}{1}\{\alpha - \alpha^2 + \alpha^3 - \alpha^4 + \ldots.\}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\{\frac{\alpha}{2} - (\frac{\alpha}{2})^2 + (\frac{\alpha}{2})^3 - (\frac{\alpha}{2})^4 + \ldots.\}$$

$$+ \tfrac{1}{3}\{\frac{\alpha}{3} - (\frac{\alpha}{3})^2 + (\frac{\alpha}{3})^3 - (\frac{\alpha}{3})^4 + \ldots.\}$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Nimmt man diese Reihen in vertikaler Richtung zusammen und bezeichnet mit S_n die Summe der Reihe:

$$\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots.$$

so ergiebt sich:

Digitized by Google

$$C+\frac{d\,.\,\Pi(1+\alpha)}{d\alpha}=S_2\alpha-S_3\alpha^2+S_4\alpha^3-\ldots,\quad +1>\alpha>-1.\ (6)^*).$$

Multiplizirt man die Gleichung mit $d\alpha$ und integrirt, so ist

$$\Pi(1+\alpha)=-C\alpha+\tfrac{1}{2}S_2\alpha^2-\tfrac{1}{3}S_3\alpha^3+\tfrac{1}{4}S_4\alpha^4-\ldots,\quad +1>\alpha>-1\ (7).$$

Eine Constante ist nicht beizufügen, weil für $\alpha=0$, $\Pi(1)=l1=0$ wird und die rechte Seite sich ebenfalss annullirt. Für negative α ist

$$\Pi(1-\alpha)=C\alpha+\tfrac{1}{2}S_2\alpha^2+\tfrac{1}{3}S_3\alpha^3+\tfrac{1}{4}S_4\alpha^4+\ldots,\quad +1>\alpha>-1.\ (8).$$

Da die Zahlen S_2, S_3, S_4 u. s. w. immer weniger von der Einheit differiren, je grösser der Index ist, so übersieht man leicht, dass die Gleichung (7) auch noch für $\alpha=+1$ gilt, was bei Formel (8) nicht der Fall ist. Aus jeder von beiden lässt sich C bestimmen, wenn man α so nimmt, dass $\Pi(1\pm\alpha)$ bekannt ist. Diess findet in (7) statt, wenn, man $\alpha=+1$ setzt, weil dann $\Pi(1)=0$ wird und in (8) für $\alpha=+\frac{1}{2}$, wobei $\Pi(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}l\pi$ ist.

Durch Addition erhält man

$$\Pi(1+\alpha)+\Pi(1-\alpha)=l\{\Gamma(1+\alpha)\ \Gamma(1-\alpha)\}=l\{\alpha\Gamma(\alpha)\ \Gamma(1-\alpha)\}$$

oder

$$l\frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}=S_2\alpha^2+\tfrac{1}{2}S_4\alpha^4+\tfrac{1}{3}S_6\alpha^6+\ldots$$

Durch Substitution dieses Werthes erhöht man die Convergenz der Reihen (7) und (8) und bekommt:

$$\Pi(1+\alpha)=\tfrac{1}{2}l\frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}-C\alpha-\tfrac{1}{3}S_3\alpha^3-\tfrac{1}{5}S_5\alpha^5-\ldots.\quad (9)$$

$$\Pi(1-\alpha)=\tfrac{1}{2}l\frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}+C\alpha+\tfrac{1}{3}S_3\alpha^3+\tfrac{1}{5}S_5\alpha^5+\ldots.\quad (10).$$

§. 3.

Die Formel (5) kann auch dazu dienen, die Gammafunktion $\Gamma(1+\alpha)$ in ein unendliches Produkt zu verwandeln. Man kann nämlich jene Gleichung so schreiben:

$$\begin{aligned}C+\frac{d\,.\,\Pi(1+\alpha)}{d\alpha}&=(\tfrac{1}{1}-\frac{1}{\alpha+1})+(\tfrac{1}{2}-\frac{1}{\alpha+2})+(\tfrac{1}{3}-\frac{1}{\alpha+3})+\ldots\\ &=\quad 1\quad +\quad \tfrac{1}{2}\quad +\quad \tfrac{1}{3}\quad +\ldots\\ &\quad -\frac{1}{\alpha+1}\quad -\quad \frac{1}{\alpha+2}\quad -\quad \frac{1}{\alpha+3}\quad -\ldots\end{aligned}$$

---

*) Legendre geht gerade den umgekehrten Weg. Er findet zuerst diese Formel und reduzirt die Gleichung (5) auf dieselbe. Traité des fonct. ell. tome II. chap. IX. et X.

Bezeichnen wir die erste Reihe mit K, so ist durch Multiplikation mit $d\alpha$ und Integration zwischen den Gränzen $\alpha = \alpha$ und $\alpha = 0$:

$$C\alpha + l\Gamma(1+\alpha) = K\alpha - l(1+\alpha) - l(2+\alpha) - l(3+\alpha) - \ldots$$
$$+ l1 \quad + l2 \quad + l3 \quad + \ldots$$

oder

$$l\Gamma(1+\alpha) = (K-C)\alpha - l(1+\frac{\alpha}{1}) - l(1+\frac{\alpha}{2}) - l(1+\frac{\alpha}{3}) - \ldots$$

Bemerken wir, dass $(K-C)\alpha = le^{(K-C)\alpha}$ ist und gehen von den Logarithmen auf die Zahlen zurück, so ergiebt sich

$$\Gamma(1+\alpha) = \frac{e^{(K-C)\alpha}}{(1+\frac{\alpha}{1})\,(1+\frac{\alpha}{2})\,(1+\frac{\alpha}{3})\ldots\ldots}$$

und wenn wir uns an den Werth von K erinnern

$$\Gamma(1+\alpha) = e^{-C\alpha}\,\frac{e^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\ldots)\alpha}}{(1+\frac{\alpha}{1})\,(1+\frac{\alpha}{2})\,(1+\frac{\alpha}{3})\ldots}$$

oder auch

$$e^{C\alpha}\Gamma(1+\alpha) = \frac{e^{\alpha}}{1+\frac{\alpha}{1}} \cdot \frac{e^{\frac{\alpha}{2}}}{1+\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{\alpha}{3}}}{1+\frac{\alpha}{3}} \ldots\ldots \quad (12)$$

Schreibt man diese Gleichung auch für negative α hin und multiplizirt beide, so erhält man die bekannte unendliche Faktorenfolge für $\sin \alpha\pi$.

Nimmt man in (12) $\alpha = 1$ und dann beiderseits die natürlichen Logarithmen, so ergiebt sich

$$C = l(\tfrac{1}{1}e) + l(\tfrac{2}{1}e^{\frac{1}{2}}) + l(\tfrac{3}{2}e^{\frac{1}{3}}) + \ldots\ldots \quad (13).$$

Die Reihe ist hinsichtlich ihres Bildungsgesetzes merkwürdig, zur praktischen Berechnung indessen unbrauchbar wegen der sehr geringen Convergenz. Durch eine kleine Umwandlung erhält man hieraus eine schon bekannte Eigenschaft von C. Gehen wir nämlich bis zu einem $n$ten Gliede, so ist

$$C = \text{Lim}\,\{l(\tfrac{1}{1}e) + l(\tfrac{2}{1}e^{\frac{1}{2}}) + l(\tfrac{3}{2}e^{\frac{1}{3}}) + \ldots + l(\tfrac{n-1}{n}\,e^{\frac{1}{n-1}})\}$$

oder wenn man alle Logarithmen auflöst:

$$C = \text{Lim}\left\{\begin{array}{l} l\frac{1}{1} + l\frac{2}{1} + l\frac{3}{2} + \ldots\ldots + l\frac{n-1}{n} \\ +1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n-1} \end{array}\right\}$$

Die erste Reihe ist $= l(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n}) = l(\frac{1}{n})$, mithin

$$C = \text{Lim } \{1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - ln\}. \quad (14)$$

Man könnte leicht einen allgemeineren Satz dieser Art aufstellen, wenn man in Formel (11) α als positiv und ganz annimmt. Er ist indessen von keiner besonderen Bedeutung.

§. 4.

Bezeichnen wir $\frac{d \cdot l\Gamma(1+\alpha)}{d\alpha}$ für den Augenblick mit $f(\alpha)$, so ergiebt sich aus Formel (5) für $\alpha = 0$, $f(0) = -C$. Nehmen wir daher in Gleichung (2) $\beta = 0$, so ist

$$f(\alpha) + C = \int_0^1 \frac{1-y^\alpha}{1-y}\, dy$$

oder, wenn wir uns an die Bedeutung von $f(\alpha)$ erinnern und im Integral x für y setzen,

$$\frac{d \cdot l\Gamma(1+\alpha)}{d\alpha} = -C + \int_0^1 \frac{1-x^\alpha}{1-x}\, dx. \quad (15)$$

Das Integral kann jederzeit leicht ausgeführt werden. Denn was auch α sein möge, so kann man es durch die gehörige Substitution für x immer auf die Form

$$\int_0^1 \frac{z^m - z^n}{1-z^p}\, dz$$

bringen, worin m, n, p positive ganze Zahlen sind. Man kennt aber den unbestimmten Werth eines solchen Integrales, folglich auch den zwischen den Gränzen 0 und 1. Man hat nun ferner:

$$\int_0^\infty x^\mu e^{-x}\, lx\, dx = \Gamma(\mu+1) = \Gamma(\mu+1)\frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)}$$
$$= \Gamma(\mu+1)\frac{d \cdot l\Gamma(\mu+1)}{d\mu}$$

und mit Hülfe der Gleichung (15)

$$\int_0^\infty x^\mu e^{-x}\, lx\, dx = \Gamma(\mu+1)\,[-C + \int_0^1 \frac{1-x^\mu}{1-x}\, dx] \quad (16)$$

wodurch der Werth des Integrals links jederzeit gefunden werden kann. Für $\mu = 0$ hat man sehr einfach

$$\int_0^\infty e^{-x}\, lx\, dx = -C = -(0{,}5772156\ldots) \quad (17).$$

Man kann sich von dem Integral (16) zu einem allgemeineren erheben, indem man kx für k setzt, wo k eine willkührliche aber positive Grösse ist. Die linke Seite wird dann:

$$= k^{\mu+1} lk \int_0^\infty x^\mu e^{-kx}\, dx + k^{\mu+1} \int_0^\infty x^\mu e^{-kx}\, lx\, dx$$

$$= \quad lk \,.\, \Gamma(\mu+1) \quad + k^{\mu+1} \int_0^\infty x^\mu e^{-kx}\, lx\, dx,$$

und durch Vergleichung mit der rechten Seite in (16) findet man nun

$$\int_0^\infty x^\mu e^{-kx}\, lx\, dx = \frac{\Gamma(\mu+1)}{k^{\mu+1}} \left[-C - lk + \int_0^1 \frac{1-x^\mu}{1-x}\, dx\right] \quad (18)$$

und dieses Resultat ist allgemeiner, weil darin eine willkührliche Constante vorkommt.

Ein Paar bemerkenswerthe spezielle Fälle sind folgende. Für $\mu = -\frac{1}{2}$:

$$\int_0^\infty e^{-kx} \cdot \frac{lx}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}} \left[-C - lk - 2l2\right];$$

oder für $x = t^2$:

$$\int_0^\infty e^{-kt^2}\, lt\, dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{k}} \left(lk + C + 2l2\right) \quad (19).$$

Ist ferner in (18) μ eine ganze positive Zahl $= n$, so hat man $\Gamma(n+1) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, n$; ferner

$$\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\, dx = \int_0^1 (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})\, dx$$

$$= \quad 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Folglich ist:

$$\int_0^\infty x^n e^{-kx}\, lx\, dx = \frac{n!}{k^{n+1}} \left[-C - lk + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right] \quad (20).$$

Daraus lässt sich leicht ein in die Differenzialrechnung gehörendes Theorem ableiten. Wenn man nämlich in (18) $\mu = 0$ setzt, so ist

$$\int_0^\infty e^{-kx}\, lx\, dx = -\frac{c}{k} - \frac{lk}{k}.$$

Differenziirt man diese Gleichung n mal nach k, so erhält man leicht

$$\int_0^\infty x^n e^{-kx}\, lx\, dx = -\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n}{k^{n+1}} C - (-1)^n \frac{d^n}{dk^n} \left(\frac{lk}{k}\right).$$

Vergleicht man diess mit der Formel (20), so wird

$$(-1)^n \cdot \frac{d^n}{dk^n} \left(\frac{lk}{k}\right) = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n}{k^{n+1}} \left[lk - \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\right] \quad (21).$$

Digitized by Google

§. 5.

Ein anderweit bemerkenswerthes Resultat lässt sich auf folgende Weise aus Formel (2) ableiten. Man setze $\alpha = \mu + u$, $\beta = \nu + u$. wo μ und ν für die Differenziation constant bleiben sollen, so ist:

$$\frac{d \cdot l\Gamma(1+\mu+u)}{du} - \frac{d \cdot l\Gamma(1+\nu+u)}{du} = \int_0^1 \frac{x^\nu - x^\mu}{1-x}\, x^u dx.$$

Es werde nun beiderseits mit du multiplizirt und nach u innerhalb der Gränzen $u = \alpha$, $u = \beta$ integrirt, so kommt:

$$l \cdot \frac{\Gamma(1+\mu+\alpha)}{\Gamma(1+\mu+\beta)} - l\frac{\Gamma(1+\nu+\alpha)}{\Gamma(1+\nu+\beta)} = \int_\beta^\alpha du \int_0^1 \frac{x^\nu - x^\mu}{1-x}\, x^u dx.$$

Kehren wir auf der rechten Seite die Ordnung der Integration um und integriren zuerst nach u, so wird das Integral

$$= \int_0^1 \frac{x^\nu - x^\mu}{1-x}\, dx \int_\beta^\alpha x^u du = \int_0^1 \frac{x^\nu - x^\mu}{1-x}\, dx\, \frac{(x^\alpha - x^\beta)}{lx}$$

$$= \int_0^1 \frac{(x^\alpha - x^\beta)\ (x^\mu - x^\nu)}{1-x} \cdot \frac{dx}{l\frac{1}{x}}.$$

Vergleichen wir diess mit der linken Seite, so ist

$$\int_0^1 \frac{(x^\alpha - x^\beta)\ (x^\mu - x^\nu)}{1-x} \cdot \frac{dx}{l\frac{1}{x}} = l\,\frac{\Gamma(1+\mu+\alpha)}{\Gamma(1+\mu+\beta)}\,\frac{\Gamma(1+\nu+\beta)}{\Gamma(1+\nu+\alpha)} \quad (22).$$

eine Formel, welche sich ebenso sehr durch ihre Allgemeinheit, als durch ihren symmetrischen Bau auszeichnet.

Digitized by Google

XX.

Ueber das Fundamentalproblem der Katoptrik und Dioptrik.

Von

dem Herausgeber.

§. 1.

Die neuesten Arbeiten der Herren Schleiermacher und Petzval auf dem Gebiete der Optik veranlassen mich, dem im zweiten Theile dieser Zeitschrift veröffentlichten Aufsatze über die Grundformeln der Katoptrik und Dioptrik nach und nach einige andere Abhandlungen über diese interessanten Theile der Mathematik folgen zu lassen, welche ich ursprünglich in einem grössern, der weitern Ausbildung der Katoptrik und Dioptrik gewidmeten Werke mit einander zu vereinigen und zu einem systematischen Ganzen zu verarbeiten dachte.

In der vorliegenden, die Reihe dieser Arbeiten eröffnenden Abhandlung werde ich zuvörderst eine neue Auflösung der Fundamentalaufgabe der Katoptrik und Dioptrik zu geben versuchen, da mir diese Aufgabe, auch nach den bisherigen sehr verdienstlichen Arbeiten über diesen Gegenstand, so weit dieselben zu meiner Kenntniss gekommen sind, noch nicht mit der Geschmeidigkeit, Allgemeinheit, Strenge und Eleganz, wie man wohl wünschen möchte, aufgelöst worden zu sein scheint; wobei ich, wie wohl kaum noch besonders zu bemerken nöthig ist, unter der Fundamentalaufgabe der Katoptrik und Dioptrik die Bestimmung des Weges eines von einem gewissen gegebenen Punkte im Raume nach einer bestimmten Richtung hin ausgehenden, und an einer Reihe gegebener sphärischer Flächen, — denn auf solche bis jetzt allein in der Praxis vorkommende Flächen werde ich die folgenden Untersuchungen einschränken, wenngleich eine Erweiterung derselben auf Flächen überhaupt eine besondere Schwierigkeit nicht darbieten würde *), — eine Zurückwerfung oder Brechung erleidenden Lichtstrahls verstehe. An die allgemeine Auflösung dieses Fundamentalproblems sollen sich dann späterhin verschiedene speciellere Untersuchungen anschliessen.

*) Eine Ebene kann immer als eine Kugelfläche mit einem unendlich grossen Halbmesser betrachtet werden.

§. 2.

Es seien überhaupt

$$1)\quad y = Ax + B,\quad z = A_1 x + B_1$$

die Gleichungen einer geraden Linie im Raume in Bezug auf das beliebige rechtwinklige Coordinatensystem der xyz. In dieser geraden Linie nehme man einen beliebigen Punkt als Anfang eines neuen dem primitiven Systeme der xyz parallelen Coordinatensystems der $x_1 y_1 z_1$ an. Dann sind nach den Principien der analytischen Geometrie

$$2)\quad y_1 = Ax_1,\quad z_1 = A_1 x_1$$

die Gleichungen unserer geraden Linie in Bezug auf das System der $x_1 y_1 z_1$. Die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche einer der beiden Theile unserer geraden Linie, in welche dieselbe von dem Anfange der $x_1 y_1 z_1$ getheilt wird, mit den positiven Theilen der Axen der x_1, y_1, z_1 einschliesst, seien respective α, β, γ; und a_1, b_1, c_1 seien die Coordinaten eines beliebigen Punktes in dem in Rede stehenden Theile unserer geraden Linie in dem Systeme der $x_1 y_1 z_1$. Bezeichnen wir dann die Entfernung dieses Punktes von dem Anfange der $x_1 y_1 z_1$ durch ϱ, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$3)\quad a_1 = \varrho \cos \alpha,\ b_1 = \varrho \cos \beta,\ c_1 = \varrho \cos \gamma;$$

wie augenblicklich erhellet, wenn man nur überlegt, dass nach einer bekannten Construction die geometrischen Darstellungen der Coordinaten a_1, b_1, c_1 des Punktes $(a_1 b_1 c_1)$ leicht erhalten werden, wenn man von diesem Punkte auf die Axen der x_1, y_1, z_1 drei Perpendikel fällt. Weil nun nach 2)

$$b_1 = Aa_1,\ c = A_1 a_1$$

ist, so ist nach 3)

$$\varrho \cos \beta = \varrho A \cos \alpha,\ \varrho \cos \gamma = \varrho A_1 \cos \alpha;$$

und folglich

$$4)\quad A = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha},\ A_1 = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha}.$$

Sind nun a, b, c die Coordinaten irgend eines Punktes der durch die Gleichungen 1) charakterisirten geraden Linie in dem Systeme der xyz, so ist nach 1)

$$b = Aa + B,\ c = A_1 a + B_1;$$

und folglich, wenn man diese Gleichungen von den Gleichungen 1) subtrahirt:

$$y - b = A(x - a),\ z - c = A_1 (x - a).$$

Also lassen sich nach 4) die Gleichungen der gegebenen geraden Linie immer unter der Form

$$5)\begin{cases} y-b=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(x-a), \\ z-c=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(x-a) \end{cases}$$

oder unter der Form

$$6)\ \frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}$$

darstellen, wobei man aber nicht aus den Augen zu lassen hat, dass hierbei immer rechtwinklige Coordinaten vorausgesetzt werden.

Von diesen, übrigens auch sonst schon bekannten, für das Folgende aber sehr wichtigen allgemeinen Bemerkungen über die gerade Linie im Raume wollen wir nun zu unserm eigentlichen Gegenstande übergehen.

§. 3.

Wir denken uns drei von einem Punkte im Raume ausgehende sämmtlich in einer Ebene liegende gerade Linien, welche wir für jetzt die erste, zweite, dritte gerade Linie nennen wollen, und bezeichnen die Gleichungen dieser drei geraden Linien und natürlich auch ihrer Verlängerungen über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt hinaus in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz respective durch

$$7)\begin{cases} y=ax+f,\ z=bx+g; \\ y=a'x+f',\ z=b'x+g'; \\ y=a_1x+f_1,\ z=b_1x+g_1. \end{cases}$$

Die Coordinaten des Punktes, von welchem diese drei geraden Linien ausgehen, in dem angenommenen rechtwinkligen Systeme der xyz seien p_1, q_1, r_1; und die Gleichung der Ebene, in welcher die drei in Rede stehenden Linien liegen, sei

$$8)\ Ax+By+Cz+D=0.$$

Ferner seien Θ und Θ_1 die beiden 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die erste und dritte gerade Linie mit der zweiten geraden Linie einschliessen.

Weil der Punkt $(p_1q_1r_1)$ in jeder der drei geraden Linien, also auch in der durch die Gleichung 8) charakterisirten Ebene liegt; so haben wir nach 7) und 8) die folgenden Gleichungen:

$$9)\begin{cases} q_1=ap_1+f,\ r_1=bp_1+g; \\ q_1=a'p_1+f',\ r_1=b'p_1+g'; \\ q_1=a_1p_1+f_1,\ r_1=b_1p_1+g_1; \end{cases}$$

und

Digitized by Google

$$10)\quad Ap_1 + Bq_1 + Cr_1 + D = 0.$$

Weil ferner jede unserer drei geraden Linien nebst ihrer Verlängerung über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt hinaus ganz in der durch die Gleichung 8) charakterisirten Ebene liegt; so ist nach 7) und 8) offenbar für jedes x

$$\begin{aligned}(A + Ba + Cb)x + Bf + Cg + D &= 0,\\ (A + Ba' + Cb')x + Bf' + Cg' + D &= 0,\\ (A + Ba_1 + Cb_1)x + Bf_1 + Cg_1 + D &= 0;\end{aligned}$$

woraus sich unmittelbar die beiden folgenden Systeme von Gleichungen ergeben:

$$11)\quad \begin{cases} A + Ba + Cb = 0,\\ A + Ba' + Cb' = 0,\\ A + Ba_1 + Cb_1 = 0 \end{cases}$$

und

$$12)\quad \begin{cases} Bf + Cg + D = 0,\\ Bf' + Cg' + D = 0,\\ Bf_1 + Cg_1 + D = 0. \end{cases}$$

Ferner ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$13)\quad \begin{cases} \sin\Theta = \sqrt{\dfrac{(a-a')^2 + (b-b')^2 + (ab'-a'b)^2}{(1+a^2+b^2)\,(1+a'^2+b'^2)}},\\ \sin\Theta_1 = \sqrt{\dfrac{(a'-a_1)^2 + (b'-b_1)^2 + (a'b_1-a_1b')^2}{(1+a'^2+b'^2)\,(1+a_1^2+b_1^2)}}; \end{cases}$$

und folglich, wie leicht erhellet,

$$14)\quad \sin\Theta : \sin\Theta_1 = \sqrt{\frac{1+a_1^2+b_1^2}{1+a^2+b^2}} : \sqrt{\frac{(a'-a_1)^2 + (b'-b_1)^2 + (a'b_1-a_1b')^2}{(a-a')^2 + (b-b')^2 + (ab'-a'b)^2}}.$$

Wegen der Gleichungen 11) ist nun

$$15)\quad \begin{cases} A(a-a') + C(ab'-a'b) = 0,\\ A(a'-a_1) + C(a'b_1-a_1b') = 0,\\ A(a_1-a) + C(a_1b-ab_1) = 0 \end{cases}$$

und

$$16)\quad \begin{cases} B(a-a') + C(b-b') = 0,\\ B(a'-a_1) + C(b'-b_1) = 0,\\ B(a_1-a) + C(b_1-b) = 0; \end{cases}$$

oder

Digitized by Google

$$17)\begin{cases} A(a-a') = -C(ab'-a'b), \\ A(a'-a_1) = -C(a'b_1-a_1b'), \\ A(a_1-a) = -C(a_1b-ab_1) \end{cases}$$

und

$$18)\begin{cases} B(a-a') = -C(b-b'), \\ B(a'-a_1) = -C(b'-b_1), \\ B(a_1-a) = -C(b_1-b). \end{cases}$$

Also ist

$$19)\ \frac{ab'-a'b}{a-a'} = \frac{a'b_1-a_1b'}{a'-a_1} = \frac{a_1b-ab_1}{a_1-a} = -\frac{A}{C}$$

und

$$20)\ \frac{b-b'}{a-a'} = \frac{b'-b_1}{a'-a_1} = \frac{b_1-b}{a_1-a} = -\frac{B}{C}.$$

Nach 17) und 18) hat man auch die folgenden Gleichungen:

$$A^2(a-a')^2 = C^2(ab'-a'b)^2,$$
$$B^2(a-a')^2 = C^2(b-b')^2,$$
$$C^2(a-a')^2 = C^2(a-a')^2$$

und

$$A^2(a'-a_1)^2 = C^2(a'b_1-a_1b')^2,$$
$$B^2(a'-a_1)^2 = C^2(b'-b_1)^2,$$
$$C^2(a'-a_1)^2 = C^2(a'-a_1)^2.$$

Also ist

$$(A^2+B^2+C^2)\,(a-a')^2$$
$$= C^2\{(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-a'b)^2\}$$

und

$$(A^2+B^2+C^2)\,(a'-a_1)^2$$
$$= C^2\{(a'-a_1)^2+(b'-b_1)^2+(a'b_1-a_1b')^2\};$$

folglich

$$\left(\frac{a'-a_1}{a-a'}\right)^2 = \frac{(a'-a_1)^2+(b'-b_1)^2+(a'b_1-a_1b')^2}{(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-a'b)^2}.$$

Weil nun nach 14)

$$\sin\Theta^2 : \sin\Theta_1{}^2$$
$$= \frac{1+a_1{}^2+b_1{}^2}{1+a^2+b^2} : \frac{(a'-a_1)^2+(b'-b_1)^2+(a'b_1-a_1b')^2}{(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-a'b)^2}$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\sin\Theta^2 : \sin\Theta_1{}^2 = \frac{1+a_1{}^2+b_1{}^2}{1+a^2+b^2} : \left(\frac{a'-a_1}{a-a'}\right)^2,$$

also

$$21)\ \left(\frac{a-a'}{a'-a_1}\right)^2 \cdot \frac{1+a_1^2+b_1^2}{1+a^2+b^2} = \left(\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta_1}\right)^2,$$

oder, wenn wir annehmen, dass das Verhältniss

$$\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta_1}$$

constant ist, und der Kürze wegen

$$22)\ \frac{\sin\Theta}{\sin\Theta_1} = n$$

setzen,

$$23)\ \left(\frac{a-a'}{a'-a_1}\right)^2 \cdot \frac{1+a_1^2+b_1^2}{1+a^2+b^2} = n^2.$$

Da nach 20)

$$\frac{a-a'}{a'-a_1} = \frac{b-b'}{b'-b_1}$$

und nach 19)

$$\frac{a-a'}{a'-a_1} = \frac{ab'-a'b}{a'b_1-a_1b'}$$

ist, so ist auch

$$24)\ \left(\frac{b-b'}{b'-b_1}\right)^2 \cdot \frac{1+a_1^2+b_1^2}{1+a^2+b^2} = n^2$$

und

$$25)\ \left(\frac{ab'-a'b}{a'b_1-a_1b'}\right)^2 \cdot \frac{1+a_1^2+b_1^2}{1+a^2+b^2} = n^2.$$

§. 4.

Durch den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt unserer drei geraden Linien denken wir uns jetzt ein dem primitiven Systeme der xyz paralleles Coordinatensystem der $x_1y_1z_1$ gelegt, und bezeichnen die von den drei Linien mit den positiven Theilen der Axen der x_1, y_1, z_1 eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch α, β, γ; α', β', γ'; α_1, β_1, γ_1; so sind nach 6) die Gleichungen unserer drei Linien nebst ihren Verlängerungen über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt hinaus in dem Systeme der xyz, da p_1, q_1, r_1 die Coordinaten des gemeinschaftlichen Ausgangspunkts der drei Linien in diesem Systeme sind:

$$26)\begin{cases} \dfrac{x-p_1}{\cos\alpha} = \dfrac{y-q_1}{\cos\beta} = \dfrac{z-r_1}{\cos\gamma}, \\ \dfrac{x-p_1}{\cos\alpha'} = \dfrac{y-q_1}{\cos\beta'} = \dfrac{z-r_1}{\cos\gamma'}, \\ \dfrac{x-p_1}{\cos\alpha_1} = \dfrac{y-q_1}{\cos\beta_1} = \dfrac{z-r_1}{\cos\gamma_1} \end{cases}$$

Digitized by Google

und im Obigen ist also

$$27)\begin{cases} a = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}, & b = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}; \\ a' = \frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}, & b' = \frac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'}; \\ a_1 = \frac{\cos\beta_1}{\cos\alpha_1}, & b_1 = \frac{\cos\gamma_1}{\cos\alpha_1} \end{cases}$$

zu setzen.

Daher ist nach 19)

$$28)\ \frac{A}{C} = \frac{\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta'}{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'} = \frac{\cos\beta'\cos\gamma_1 - \cos\gamma'\cos\beta_1}{\cos\alpha'\cos\beta_1 - \cos\beta'\cos\alpha_1} = \frac{\cos\beta_1\cos\gamma - \cos\gamma_1\cos\beta}{\cos\alpha_1\cos\beta - \cos\beta_1\cos\alpha}$$

und

$$29)\ \frac{B}{C} = -\frac{\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha'}{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'} = -\frac{\cos\alpha'\cos\gamma_1 - \cos\gamma'\cos\alpha_1}{\cos\alpha'\cos\beta_1 - \cos\beta'\cos\alpha_1} = -\frac{\cos\alpha_1\cos\gamma - \cos\gamma_1\cos\alpha}{\cos\alpha_1\cos\beta - \cos\beta_1\cos\alpha};$$

also

$$30)\ \frac{A}{B} = -\frac{\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta'}{\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha'} = -\frac{\cos\beta'\cos\gamma_1 - \cos\gamma'\cos\beta_1}{\cos\alpha'\cos\gamma_1 - \cos\gamma'\cos\alpha_1} = -\frac{\cos\beta_1\cos\gamma - \cos\gamma_1\cos\beta}{\cos\alpha_1\cos\gamma - \cos\gamma_1\cos\alpha};$$

oder, wie man etwas symmetrischer diese Ausdrücke auch schreiben kann:

$$31)\ \frac{A}{B} = \frac{\cos\gamma\cos\beta' - \cos\beta\cos\gamma'}{\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha'} = \frac{\cos\gamma'\cos\beta_1 - \cos\beta'\cos\gamma_1}{\cos\alpha'\cos\gamma_1 - \cos\gamma'\cos\alpha_1} = \frac{\cos\gamma_1\cos\beta - \cos\beta_1\cos\gamma}{\cos\alpha_1\cos\gamma - \cos\gamma_1\cos\alpha},$$

$$32)\ \frac{B}{C} = \frac{\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha'}{\cos\beta\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\beta'} = \frac{\cos\alpha'\cos\gamma_1 - \cos\gamma'\cos\alpha_1}{\cos\beta'\cos\alpha_1 - \cos\alpha'\cos\beta_1} = \frac{\cos\alpha_1\cos\gamma - \cos\gamma_1\cos\alpha}{\cos\beta_1\cos\alpha - \cos\alpha_1\cos\beta},$$

Digitized by Google

$$33)\quad \frac{C}{A} = \frac{\cos\beta\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\beta'}{\cos\gamma\cos\beta' - \cos\beta\cos\gamma'}$$

$$= \frac{\cos\beta'\cos\alpha_1 - \cos\alpha'\cos\beta_1}{\cos\gamma'\cos\beta_1 - \cos\beta'\cos\gamma_1}$$

$$= \frac{\cos\beta_1\cos\alpha - \cos\alpha_1\cos\beta}{\cos\gamma_1\cos\beta - \cos\beta_1\cos\gamma}.$$

Nach der Gleichung 23) ist ferner

$$\left(\frac{\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} - \frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}}{\frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'} - \frac{\cos\beta_1}{\cos\alpha_1}}\right)^2 \cdot \frac{1 + (\frac{\cos\beta_1}{\cos\alpha_1})^2 + (\frac{\cos\gamma_1}{\cos\alpha_1})^2}{1 + (\frac{\cos\beta}{\cos\alpha})^2 + (\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha})^2} = n^2,$$

woraus sich leicht

$$(\frac{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'}{\cos\alpha'\cos\beta_1 - \cos\beta'\cos\alpha_1})^2 \cdot \frac{\cos\alpha_1{}^2 + \cos\beta_1{}^2 + \cos\gamma_1{}^2}{\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2} = n^2,$$

d. i., weil nach einem aus der analytischen Geometrie bekannten Satze

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1,$$

$$\cos\alpha_1{}^2 + \cos\beta_1{}^2 + \cos\gamma_1{}^2 = 1$$

ist,

$$(\frac{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'}{\cos\alpha'\cos\beta_1 - \cos\beta'\cos\alpha_1})^2 = n^2,$$

und folglich, wenn wir der Kürze wegen

$$34)\quad \mu = \pm\frac{1}{n}$$

setzen,

$$35)\quad \frac{\cos\alpha'\cos\beta_1 - \cos\beta'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'} = \mu$$

ergiebt.

Weil nun aber nach dem Obigen

$$\frac{\cos\alpha'\cos\beta_1 - \cos\beta'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'}$$

$$= \frac{\cos\beta'\cos\gamma_1 - \cos\gamma'\cos\beta_1}{\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta'}$$

$$= \frac{\cos\gamma'\cos\alpha_1 - \cos\alpha'\cos\gamma_1}{\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma'}$$

ist, so haben wir nach 35) die drei folgenden Gleichungen:

Digitized by Google

$$36)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos\alpha'\cos\beta_1-\cos\beta'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha'}=\mu, \\ \dfrac{\cos\beta'\cos\gamma_1-\cos\gamma'\cos\beta_1}{\cos\beta\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\beta'}=\mu, \\ \dfrac{\cos\gamma'\cos\alpha_1-\cos\alpha'\cos\gamma_1}{\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\gamma'}=\mu; \end{cases}$$

aus denen sich auch leicht die Relationen

$$37)\quad \left.\begin{aligned} &(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\beta')\cos\alpha_1 \\ &+(\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\gamma')\cos\beta_1 \\ &+(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha')\cos\gamma_1 \end{aligned}\right\}=0$$

oder

$$38)\quad \left.\begin{aligned} &(\cos\beta\cos\gamma_1-\cos\gamma\cos\beta_1)\cos\alpha' \\ &+(\cos\gamma\cos\alpha_1-\cos\alpha\cos\gamma_1)\cos\beta' \\ &+(\cos\alpha\cos\beta_1-\cos\beta\cos\alpha_1)\cos\gamma' \end{aligned}\right\}=0$$

oder

$$39)\quad \left.\begin{aligned} &(\cos\beta'\cos\gamma_1-\cos\gamma'\cos\beta_1)\cos\alpha \\ &+(\cos\gamma'\cos\alpha_1-\cos\alpha'\cos\gamma_1)\cos\beta \\ &+(\cos\alpha'\cos\beta_1-\cos\beta'\cos\alpha_1)\cos\gamma \end{aligned}\right\}=0$$

ergeben.

Nach 36) ist nun

$$\cos\beta'\cos\alpha_1-\cos\alpha'\cos\beta_1=\mu(\cos\beta\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\beta'),$$
$$\cos\gamma'\cos\beta_1-\cos\beta'\cos\gamma_1=\mu(\cos\gamma\cos\beta'-\cos\beta\cos\gamma'),$$
$$\cos\alpha'\cos\gamma_1-\cos\gamma'\cos\alpha_1=\mu(\cos\alpha\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\alpha');$$

und man hat daher die drei folgenden Systeme von Gleichungen:

$$\cos\alpha'\cos\alpha_1=\cos\alpha'\cos\alpha_1,$$
$$\cos\alpha'\cos\beta_1=\cos\beta'\cos\alpha_1+\mu(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha'),$$
$$\cos\alpha'\cos\gamma_1=\cos\gamma'\cos\alpha_1+\mu(\cos\alpha\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\alpha');$$

ferner

$$\cos\beta'\cos\alpha_1=\cos\alpha'\cos\beta_1+\mu(\cos\beta\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\beta'),$$
$$\cos\beta'\cos\beta_1=\cos\beta'\cos\beta_1,$$
$$\cos\beta'\cos\gamma_1=\cos\gamma'\cos\beta_1+\mu(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\beta');$$

endlich

$$\cos\gamma'\cos\alpha_1=\cos\alpha'\cos\gamma_1+\mu(\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\gamma'),$$
$$\cos\gamma'\cos\beta_1=\cos\beta'\cos\gamma_1+\mu(\cos\gamma\cos\beta'-\cos\beta\cos\gamma'),$$
$$\cos\gamma'\cos\gamma_1=\cos\gamma'\cos\gamma_1.$$

Quadrirt man auf beiden Seiten dieser Gleichungen, und addirt die

dadurch hervorgehenden Gleichungen zu einander, so erhält man, weil bekanntlich

$$\cos\alpha_1^2 + \cos\beta_1^2 + \cos\gamma_1^2 = 1$$

ist, die drei folgenden Gleichungen:

$$40)\quad \begin{cases} \cos\alpha'^2 = \cos\alpha'^2\cos\alpha_1^2 \\ \qquad + \{\cos\beta'\cos\alpha_1 + \mu(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')\}^2 \\ \qquad + \{\cos\gamma'\cos\alpha_1 + \mu(\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha')\}^2, \\ \cos\beta'^2 = \cos\beta'^2\cos\beta_1^2 \\ \qquad + \{\cos\alpha'\cos\beta_1 + \mu(\cos\beta\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\beta')\}^2 \\ \qquad + \{\cos\gamma'\cos\beta_1 + \mu(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta')\}^2, \\ \cos\gamma'^2 = \cos\gamma'^2\cos\gamma_1^2 \\ \qquad + \{\cos\alpha'\cos\gamma_1 + \mu(\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma')\}^2 \\ \qquad + \{\cos\beta'\cos\gamma_1 + \mu(\cos\gamma\cos\beta' - \cos\beta\cos\gamma')\}^2 \end{cases}$$

oder auch

$$1 = \left\{\frac{\cos\beta'\cos\alpha_1 + \mu(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')}{\cos\alpha'\sin\alpha_1}\right\}^2 + \left\{\frac{\cos\gamma'\cos\alpha_1 + \mu(\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha')}{\cos\alpha'\sin\alpha_1}\right\}^2,$$

$$1 = \left\{\frac{\cos\alpha'\cos\beta_1 + \mu(\cos\beta\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\beta')}{\cos\beta'\sin\beta_1}\right\}^2 + \left\{\frac{\cos\gamma'\cos\beta_1 + \mu(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta')}{\cos\beta'\sin\beta_1}\right\}^2,$$

$$1 = \left\{\frac{\cos\alpha'\cos\gamma_1 + \mu(\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma')}{\cos\gamma'\sin\gamma_1}\right\}^2 + \left\{\frac{\cos\beta'\cos\gamma_1 + \mu(\cos\gamma\cos\beta' - \cos\beta\cos\gamma')}{\cos\gamma'\sin\gamma_1}\right\}^2.$$

Durch gehörige Entwickelung der ersten der Gleichungen 40) erhält man, weil bekanntlich

$$\cos\alpha'^2 + \cos\beta'^2 + \cos\gamma'^2 = 1$$

ist, die Gleichung

$$\cos\alpha'^2 = \cos\alpha_1^2 + 2\mu\left\{\begin{matrix}\cos\beta'(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha') \\ +\cos\gamma'(\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha')\end{matrix}\right\}\cos\alpha_1 + \mu^2\left\{\begin{matrix}(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')^2 \\ +(\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha')^2\end{matrix}\right\}$$

und folglich

$$\cos\alpha_1^2 + 2\mu\left\{\begin{matrix}\cos\beta'(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha') \\ +\cos\gamma'(\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha')\end{matrix}\right\}\cos\alpha_1$$
$$= \cos\alpha'^2 - \mu^2\left\{\begin{matrix}(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')^2 \\ +(\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha')^2\end{matrix}\right\}.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}&\cos\beta'(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha') \\ &+\cos\gamma'(\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha') \\ &=\cos\alpha(\cos\beta'^2 + \cos\gamma'^2) - \cos\alpha'(\cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma') \\ &=\cos\alpha(\cos\alpha'^2 + \cos\beta'^2 + \cos\gamma'^2) \\ &\quad -\cos\alpha'(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma').\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}&(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')^2 \\ &+(\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha')^2 \\ &=\cos\alpha^2(\cos\beta'^2 + \cos\gamma'^2) + \cos\alpha'^2(\cos\beta^2 + \cos\gamma^2) \\ &\quad -2\cos\alpha\cos\alpha'(\cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma') \\ &=\cos\alpha^2(\cos\alpha'^2 + \cos\beta'^2 + \cos\gamma'^2) \\ &\quad +\cos\alpha'^2(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2) \\ &\quad -2\cos\alpha\cos\alpha'(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma').\end{aligned}$$

Weil nun bekanntlich

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1,$$
$$\cos\alpha'^2 + \cos\beta'^2 + \cos\gamma'^2 = 1,$$

und

41) $\cos\Theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$

ist, so ist

$$\begin{aligned}&\cos\beta'(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha') \\ &+\cos\gamma'(\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha') \\ &=\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\Theta\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')^2 \\ &+(\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha')^2 \\ &=\cos\alpha^2 + \cos\alpha'^2 - 2\cos\alpha\cos\alpha'\cos\Theta.\end{aligned}$$

Folglich ist nach dem Obigen

Digitized by Google

$$\cos\alpha_1^2 + 2\mu(\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\Theta)\cos\alpha_1$$
$$= \cos\alpha'^2 - \mu^2(\cos\alpha^2 + \cos\alpha'^2 - 2\cos\alpha\cos\alpha'\cos\Theta),$$

also

$$\{\cos\alpha_1 + \mu(\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\Theta)\}^2$$
$$= \cos\alpha'^2 - \mu^2\{\cos\alpha^2 + \cos\alpha'^2 - 2\cos\alpha\cos\alpha'\cos\Theta - (\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\Theta)^2\}$$
$$= \cos\alpha'^2 - \mu^2\cos\alpha'^2\sin\Theta^2$$
$$= \cos\alpha'^2(1 - \mu^2\sin\Theta^2).$$

Daher ist

$$\cos\alpha_1 + \mu(\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\Theta) = \pm\cos\alpha'\sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2}$$

und folglich

$$\cos\alpha_1 = -\mu\cos\alpha + \cos\alpha'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2}).$$

Nach dem Obigen ist

$$\cos\beta_1 = \frac{\cos\beta'\cos\alpha_1 + \mu(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')}{\cos\alpha'}$$
$$\cos\gamma_1 = \frac{\cos\gamma'\cos\alpha_1 + \mu(\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha')}{\cos\alpha'}.$$

Führt man in diese Gleichungen den vorher gefundenen Ausdruck von $\cos\alpha_1$ ein, so erhält man die drei folgenden Gleichungen, in denen die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen:

$$42)\begin{cases}\cos\alpha_1 = -\mu\cos\alpha + \cos\alpha'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2}),\\ \cos\beta_1 = -\mu\cos\beta + \cos\beta'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2}),\\ \cos\gamma_1 = -\mu\cos\gamma + \cos\gamma'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2});\end{cases}$$

oder

$$43)\begin{cases}\frac{\cos\alpha_1 + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha'} = \mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2},\\ \frac{\cos\beta_1 + \mu\cos\beta}{\cos\beta'} = \mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2},\\ \frac{\cos\gamma_1 + \mu\cos\gamma}{\cos\gamma'} = \mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2}.\end{cases}$$

Vorzüglich entsteht jetzt die Frage, wie in diesen Formeln die Zeichen zu nehmen sind, worüber auf folgende Art eine bestimmte Entscheidung gegeben werden kann, wobei wir von nun an die zweite gerade Linie das Einfallsloth nennen wollen.

Nach 26) sind

$$y - \eta_1 = \frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}(x - \xi_1),$$

Digitized by Google

$$z - r_1 = \frac{\cos \beta'}{\cos \alpha'} (x - p_1)$$

die Gleichungen der durch das Einfallsloth und seine Verlängerung über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt der drei Linien hinaus dargestellten geraden Linie. Sind nun ϱ und ϱ_1 die Entfernungen zweier beliebigen Punkte in der ersten und dritten geraden Linie von dem gemeinschaftlichen Ausgangspunkte $(p_1 q_1 r_1)$ der drei Linien; so sind die Coordinaten dieser Punkte in dem Systeme der xyz, wie leicht erhellen wird, in völliger Allgemeinheit:

$$p_1 + \varrho \cos \alpha,\ q_1 + \varrho \cos \beta,\ r_1 + \varrho \cos \gamma$$

und

$$p_1 + \varrho_1 \cos \alpha_1,\ q_1 + \varrho_1 \cos \beta_1,\ r_1 + \varrho_1 \cos \gamma_1.$$

Die Gleichungen der durch diese Punkte der Lage nach bestimmten geraden Linie sind nach den Principien der analytischen Geometrie:

$$y - q_1 - \varrho \cos \beta = \frac{\varrho \cos \beta - \varrho_1 \cos \beta_1}{\varrho \cos \alpha - \varrho_1 \cos \alpha_1} (x - p_1 - \varrho \cos \alpha),$$

$$z - r_1 - \varrho \cos \gamma = \frac{\varrho \cos \gamma - \varrho_1 \cos \gamma_1}{\varrho \cos \alpha - \varrho_1 \cos \alpha_1} (x - p_1 - \varrho \cos \alpha);$$

oder

$$y - q_1 - \varrho \cos \beta = \frac{\cos \beta - \frac{\varrho_1}{\varrho} \cos \beta_1}{\cos \alpha - \frac{\varrho_1}{\varrho} \cos \alpha_1} (x - p_1 - \varrho \cos \alpha),$$

$$z - r_1 - \varrho \cos \gamma = \frac{\cos \gamma - \frac{\varrho_1}{\varrho} \cos \gamma_1}{\cos \alpha - \frac{\varrho_1}{\varrho} \cos \alpha_1} (x - p_1 - \varrho \cos \alpha).$$

Soll nun diese gerade Linie der durch das Einfallsloth und seine Verlängerung über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt der drei Linien hinaus dargestellten Linie parallel sein, so muss nach den Principien der analytischen Geometrie $\frac{\varrho_1}{\varrho}$ so bestimmt werden, dass

$$\frac{\cos \beta'}{\cos \alpha'} = \frac{\cos \beta - \frac{\varrho_1}{\varrho} \cos \beta_1}{\cos \alpha - \frac{\varrho_1}{\varrho} \cos \alpha_1},$$

$$\frac{\cos \gamma'}{\cos \alpha'} = \frac{\cos \gamma - \frac{\varrho_1}{\varrho} \cos \gamma_1}{\cos \alpha - \frac{\varrho_1}{\varrho} \cos \alpha_1};$$

d. h., wie man hieraus leicht findet, dass

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} = - \frac{\cos \alpha \cos \beta' - \cos \beta \cos \alpha'}{\cos \alpha' \cos \beta_1 - \cos \beta' \cos \alpha_1},$$

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} = -\frac{\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha'}{\cos\alpha'\cos\gamma_1 - \cos\gamma'\cos\alpha_1}$$

oder

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = -\frac{\cos\alpha'\cos\beta_1 - \cos\beta'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'},$$

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = -\frac{\cos\alpha'\cos\gamma_1 - \cos\gamma'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha'}$$

ist.

Nach 32) ist

$$\frac{\cos\alpha'\cos\beta_1 - \cos\beta'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'} = \frac{\cos\alpha'\cos\gamma_1 - \cos\gamma'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha'},$$

und die beiden vorhergehenden Gleichungen werden sich also, wobei man zu beachten hat, dass $\frac{\varrho}{\varrho_1}$ seiner Natur nach eine positive Grösse ist, jederzeit zugleich erfüllen lassen, wenn die Grösse

$$\frac{\cos\alpha'\cos\beta_1 - \cos\beta'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'}$$

negativ ist; oder mit andern Worten:

Wenn die Grösse

$$\frac{\cos\alpha'\cos\beta_1 - \cos\beta'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'}$$

negativ ist, so werden sich immer zwei Punkte, der eine in der ersten, der andere in der dritten geraden Linie, von solcher Lage angeben lassen, dass die durch diese beiden Punkte der Lage nach bestimmte gerade Linie der durch das Einfallsloth und seine Verlängerung über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt der drei Linien hinaus dargestellten Linie parallel ist.

Nun erhellet aber auf der Stelle, dass sowohl bei der Reflexion *), als auch bei der Refraction die erste und dritte gerade Linie immer auf verschiedenen oder entgegengesetzten Seiten der durch das Einfallsloth und seine Verlängerung über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt der drei Linien hinaus dargestellten geraden Linie liegen, und dass es also nie zwei in der ersten und dritten geraden Linie liegende Punkte von solcher Lage geben kann, dass die durch diese beiden Punkte der Lage nach bestimmte gerade Linie der durch das Einfallsloth und seine Verlängerung über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt der drei Linien hinaus dargestellten geraden Linie parallel ist, indem von jeder durch zwei in der ersten und dritten geraden Linie liegende Punkte gezogenen geraden Linie die durch das Einfallsloth und seine Verlängerung über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt

*) Man vergleiche Archiv. Thl. II. S. 147 die Note.

Digitized by Google

hinaus dargestellte gerade Linie offenbar nothwendig geschnitten werden muss. Daher kann weder bei der Reflexion, noch bei der Refraction die Grösse

$$\frac{\cos\alpha'\cos\beta_1-\cos\beta'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha'}$$

jemals negativ sein, und ist folglich in allen Fällen positiv. Hieraus, in Verbindung mit der ersten der Gleichungen 36) und der Gleichung 34), ergiebt sich auf ganz unzweideutige Weise, dass sowohl bei der Reflexion, als auch bei der Refraction, nie $\mu=-\frac{1}{n}$ gesetzt werden darf, sondern immer

$$44)\quad \mu=\frac{1}{n}$$

gesetzt werden muss, wie von nun an auch im Laufe der ganzen folgenden Untersuchung immer geschehen soll.

Aus den drei Gleichungen 42) folgt, wenn man dieselben nach der Reihe mit

$$\cos\alpha',\ \cos\beta',\ \cos\gamma'$$

multiplicirt, und dann zu einander addirt:

$$\begin{aligned}&\cos\alpha'\cos\alpha_1+\cos\beta'\cos\beta_1+\cos\gamma'\cos\gamma_1\\ =\ &-\mu(\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma')\\ &+(\cos\alpha'^2+\cos\beta'^2+\cos\gamma'^2)\,(\mu\cos\Theta\pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),\end{aligned}$$

und folglich, weil

$$45)\begin{cases}\cos\Theta=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma',\\ \cos\Theta_1=\cos\alpha'\cos\alpha_1+\cos\beta'\cos\beta_1+\cos\gamma'\cos\gamma_1\end{cases}$$

und

$$\cos\alpha'^2+\cos\beta'^2+\cos\gamma'^2=1$$

ist,

$$\cos\Theta_1=-\mu\cos\Theta+(\mu\cos\Theta\pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

d. i.

$$46)\quad \cos\Theta_1=\pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}.$$

Nun erhellet aber sehr leicht mittelst einer einfachen Construction, dass bei der Reflexion die 180° nicht übersteigenden Winkel Θ und Θ_1 immer entweder beide kleiner als 90°, oder beide grösser als 90° sind; dass dagegen bei der Refraction der eine dieser beiden 180° nicht übersteigenden Winkel immer kleiner als 90°, der andere grösser als 90° ist. Demnach haben $\cos\Theta$ und $\cos\Theta_1$ bei der Reflexion immer gleiche, bei der Refraction immer ungleiche Vorzeichen, und es ergeben sich daher nach 46) jetzt die folgenden Regeln.

Digitized by Google

I. Reflexion.

1) Wenn $\Theta < 90°$, d. h. cos Θ positiv ist, so ist auch $\Theta_1 < 90°$, d. h. cos Θ_1 positiv, und folglich

$$\cos \Theta_1 = +\sqrt{1-\mu^2 \sin \Theta^2}$$

zu setzen, also in den obigen Formeln die obern Zeichen zu nehmen.

2) Wenn $\Theta > 90°$, d. h. cos Θ negativ ist, so ist auch $\Theta_1 > 90°$, d. h. cos Θ_1 negativ, und folglich

$$\cos \Theta_1 = -\sqrt{1-\mu^2 \sin \Theta^2}$$

zu setzen, also in den obigen Formeln die untern Zeichen zu nehmen.

II. Refraction.

1) Wenn $\Theta < 90°$, d. h. cos Θ positiv ist, so ist $\Theta_1 > 90°$, d. h. cos Θ_1 negativ und folglich

$$\cos \Theta_1 = -\sqrt{1-\mu^2 \sin \Theta^2}$$

zu setzen, also in den obigen Formeln die untern Zeichen zu nehmen.

2) Wenn $\Theta > 90°$, d. h. cos Θ negativ ist, so ist $\Theta_1 < 90°$, d. h. cos Θ_1 positiv, und folglich

$$\cos \Theta_1 = +\sqrt{1-\mu^2 \sin \Theta^2}$$

zu setzen, also in den obigen Formeln die obern Zeichen zu nehmen.

Wir sind daher durch die vorhergehende Untersuchung jetzt überhaupt zu dem folgenden Resultate gelangt:

Es ist

47)
$$\mu = \frac{1}{n},$$

$$\cos \Theta = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'$$

und

$$\cos \alpha_1 = -\mu \cos \alpha + \cos \alpha'(\mu \cos \Theta \pm \sqrt{1-\mu^2 \sin \Theta^2}),$$

$$\cos \beta_1 = -\mu \cos \beta + \cos \beta'(\mu \cos \Theta \pm \sqrt{1-\mu^2 \sin \Theta^2}),$$

$$\cos \gamma_1 = -\mu \cos \gamma + \cos \gamma'(\mu \cos \Theta \pm \sqrt{1-\mu^2 \sin \Theta^2})$$

oder

$$\frac{\cos \alpha_1 + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha'} = \mu \cos \Theta \pm \sqrt{1-\mu^2 \sin \Theta^2},$$

$$\frac{\cos \beta_1 + \mu \cos \beta}{\cos \beta'} = \mu \cos \Theta \pm \sqrt{1-\mu^2 \sin \Theta^2},$$

Digitized by Google

$$\frac{\cos\gamma_1+\mu\cos\gamma}{\cos\gamma'}=\mu\cos\Theta\pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2};$$

auch

$$\cos\Theta_1=\pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2};$$

mit der Bestimmung, dass man in diesen Formeln im Falle der Reflexion die obern oder untern Zeichen zu nehmen hat, jenachdem $\Theta<90°$ oder $\Theta>90°$ ist; im Falle der Reflexion dagegen die obern oder untern Zeichen nehmen muss, jenachdem $\Theta>90°$ oder $\Theta<90°$ ist.

§. 5.

Im Folgenden wollen wir uns nun immer die erste gerade Linie von einem gewissen Punkte, dessen Coordinaten p, q, r sein mögen, ausgehend denken, und wollen unter dieser Voraussetzung, allen übrigen im Vorhergehenden eingeführten Symbolen die ihnen beigelegte Bedeutung lassend, fernerhin die von der ersten Linie mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt (pqr) gelegter, den primitiven Axen der xyz paralleler Axen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch α, β, γ bezeichnen. Dann muss man offenbar in allen obigen Formeln für α, β, γ respective $180°-\alpha$, $180°-\beta$, $180°-\gamma$ setzen, und erhält dadurch die folgenden Formeln.

Die Gleichungen der ersten Linie sind wie früher

$$48)\quad \frac{x-p_1}{\cos\alpha}=\frac{y-q_1}{\cos\beta}=\frac{z-r_1}{\cos\gamma}$$

oder auch

$$49)\quad \frac{x-p}{\cos\alpha}=\frac{y-q}{\cos\beta}=\frac{z-r}{\cos\gamma},$$

da der Punkt (pqr) auch in der ersten Linie liegt.

Ferner ist:

$$50)\quad \mu=\frac{1}{n}$$

$$\cos\Theta=-(\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma')$$

und

$$\cos\alpha_1=\mu\cos\alpha+\cos\alpha'(\mu\cos\Theta\pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

$$\cos\beta_1=\mu\cos\beta+\cos\beta'(\mu\cos\Theta\pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

$$\cos\gamma_1=\mu\cos\gamma+\cos\gamma'(\mu\cos\Theta\pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

$$\frac{\cos\alpha_1-\mu\cos\alpha}{\cos\alpha'}=\mu\cos\Theta\pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2},$$

$$\frac{\cos\beta_1-\mu\cos\beta}{\cos\beta'}=\mu\cos\Theta\pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2},$$

$$\frac{\cos\gamma_1-\mu\cos\gamma}{\cos\gamma'}=\mu\cos\Theta\pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2};$$

auch

$$\cos \Theta_1 = \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2};$$

mit der Bestimmung, dass man in diesen Formeln im Falle der Reflexion die obern oder untern Zeichen zu nehmen hat, jenachdem $\Theta < 90°$ oder $\Theta > 90°$ ist; im Falle der Refraction dagegen die obern oder untern Zeichen nehmen muss, jenachdem $\Theta > 90°$ oder $\Theta < 90°$ ist.

§. 6.

Es sei nun

$$51)\quad (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2 = R_1^2$$

die Gleichung einer Kugelfläche, und p_1, q_1, r_1 seien die Coordinaten des Durchschnittspunkts der ersten geraden Linie mit dieser Kugelfläche; so haben wir nach 49) und 51) zur Bestimmung von p_1, q_1, r_1 die folgenden Gleichungen:

$$\frac{p_1-p}{\cos\alpha} = \frac{q_1-q}{\cos\beta} = \frac{r_1-r}{\cos\gamma},$$

$$(p_1-a_1)^2 + (q_1-b_1)^2 + (r_1-c_1)^2 = R_1^2$$

oder

$$\frac{p_1-p}{\cos\alpha} = \frac{q_1-q}{\cos\beta} = \frac{r_1-r}{\cos\gamma},$$

$$\{p_1-p-(a_1-p)\}^2 + \{q_1-q-(b_1-q)\}^2 + \{r_1-r-(c_1-r)\}^2 = R_1^2.$$

Weil nun wegen der zwei ersten Gleichungen

$$q_1-q-(b_1-q) = \frac{(p_1-p)\cos\beta - (b_1-q)\cos\alpha}{\cos\alpha},$$

$$r_1-r-(c_1-r) = \frac{(p_1-p)\cos\gamma - (c_1-r)\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

ist, so ist wegen der dritten Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &\{p_1-p-(a_1-p)\}^2\cos\alpha^2 \\ &+\{(p_1-p)\cos\beta-(b_1-q)\cos\alpha\}^2 \\ &+\{(p_1-p)\cos\gamma-(c_1-r)\cos\alpha\}^2 \end{aligned}\right\} = R_1^2\cos\alpha^2,$$

also, weil bekanntlich

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

ist,

$$(p_1-p)^2 - 2\{(a_1-p)\cos\alpha + (b_1-q)\cos\beta + (c_1-r)\cos\gamma\}(p_1-p)\cos\alpha = \{R_1^2 - [(a_1-p)^2 + (b_1-q)^2 + (c_1-r)^2]\}\cos\alpha^2,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$52)\begin{cases} E_1 = \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}, \\ K_1 = (a_1-p)\cos\alpha+(b_1-q)\cos\beta+(c_1-r)\cos\gamma \end{cases}$$

setzen, wo E_1 bekanntlich die Entfernung des Punktes (pqr) von dem Mittelpunkte $(a_1b_1c_1)$ der gegebenen Kugelfläche ist:

$$(p_1-p)^2-2K_1(p_1-p)\cos\alpha=(R_1^2-E_1^2)\cos\alpha^2.$$

Lösen wir diese quadratische Gleichung auf, so erhalten wir

$$\frac{p_1-p}{\cos\alpha}=K_1\pm\sqrt{R_1^2+K_1^2-E_1^2},$$

und nach dem Obigen haben wir daher überhaupt die drei folgenden Gleichungen:

$$53)\begin{cases} \frac{p_1-p}{\cos\alpha}=K_1\pm\sqrt{R_1^2+K_1^2-E_1^2}, \\ \frac{q_1-q}{\cos\beta}=K_1\pm\sqrt{R_1^2+K_1^2-E_1^2}, \\ \frac{r_1-r}{\cos\gamma}=K_1\pm\sqrt{R_1^2+K_1^2-E_1^2}; \end{cases}$$

in denen natürlich die obern und untern Zeichen auf einander zu beziehen sind.

Nehmen wir nun den nach dem Punkte $(p_1q_1r_1)$ gezogenen Halbmesser der gegebenen Kugelfläche als Einfallsloth an, so haben wir die folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen:

$$a_1-p_1=R_1\cos\alpha',$$
$$b_1-q_1=R_1\cos\beta',$$
$$c_1-r_1=R_1\cos\gamma';$$

also

$$\cos\alpha'=\frac{a_1-p_1}{R_1},\ \cos\beta'=\frac{b_1-q_1}{R_1},\ \cos\gamma'=\frac{c_1-r_1}{R_1};$$

und folglich nach 53)

$$54)\begin{cases} \cos\alpha'=\frac{a_1-p-(K_1\pm\sqrt{R_1^2+K_1^2-E_1^2})\cos\alpha}{R_1}, \\ \cos\beta'=\frac{b_1-q-(K_1\pm\sqrt{R_1^2+K_1^2-E_1^2})\cos\beta}{R_1}, \\ \cos\gamma'=\frac{c_1-r-(K_1\pm\sqrt{R_1^2+K_1^2-E_1^2})\cos\gamma}{R_1}. \end{cases}$$

Weil nach 50)

$$\cos\Theta=-(\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma')$$

ist, so erhalten wir aus 54) mit Hülfe von 52) leicht

$$55)\quad \cos\Theta = \pm\frac{\sqrt{R_1^2 + K_1^2 - E_1^2}}{R_1}.$$

§. 7.

Wir wollen nun die erste gerade Linie immer den einfallenden Strahl, die zweite wie früher das Einfallsloth, die dritte den ausfallenden Strahl nennen, und wie vorher annehmen, dass der einfallende Strahl von dem Punkte (pqr) ausgehe, und die im vorhergehenden Paragraphen betrachtete Kugelfläche in dem Punkte $(p_1 q_1 r_1)$ treffe. Jenachdem die concave oder convexe Seite dieser Kugelfläche der Richtung, nach welcher der einfallende Strahl von dem Punkte (pqr) ausgeht, zugekehrt ist, wollen wir sagen, dass der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite der in Rede stehenden Kugelfläche treffe.

Trifft der einfallende Strahl die concave Seite, so ist immer $\Theta < 90°$; trifft dagegen der einfallende Strahl die convexe Seite, so ist immer $\Theta > 90°$; welches Alles mittelst einer ganz einfachen geometrischen Betrachtung leicht erhellen wird.

Nach §. 5. sind daher in den Formeln

$$\cos\alpha_1 = \mu\cos\alpha + \cos\alpha'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\beta_1 = \mu\cos\beta + \cos\beta'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\gamma_1 = \mu\cos\gamma + \cos\gamma'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

im Falle der Reflexion die obern oder die untern Zeichen zu nehmen, jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite der in Rede stehenden Kugelfläche trifft; dagegen sind in diesen Formeln im Falle der Refraction die obern oder die untern Zeichen zu nehmen, jenachdem der einfallende Strahl die convexe oder concave Seite der in Rede stehenden Kugelfläche trifft.

Nehmen wir nun aber im Folgenden das Einfallsloth mit dem einfallenden Strahle immer auf einer Seite der zurückwerfenden oder brechenden Kugelfläche an, so muss man in dem Falle, wo der einfallende Strahl die convexe Seite trifft, offenbar in den obigen Formeln statt

$$\Theta \text{ und } \alpha', \beta', \gamma'$$

respective

$$180° - \Theta \text{ und } 180° - \alpha',\ 180° - \beta',\ 180° - \gamma'$$

setzen, wodurch in diesem Falle die obigen Formeln *) in die folgenden übergehen:

$$\cos\alpha_1 = \mu\cos\alpha + \cos\alpha'(\mu\cos\Theta \mp \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

*) Der oben in 50) für cos Θ gegebene Ausdruck bleibt ungeändert.

Digitized by Google

$$\cos\beta_1 = \mu\cos\beta + \cos\beta'(\mu\cos\Theta \mp \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\gamma_1 = \mu\cos\gamma + \cos\gamma'(\mu\cos\Theta \mp \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}).$$

Unter der gemachten Voraussetzung ist daher allgemein im Falle der Reflexion:

$$\cos\alpha_1 = \mu\cos\alpha + \cos\alpha'(\mu\cos\Theta + \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\beta_1 = \mu\cos\beta + \cos\beta'(\mu\cos\Theta + \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\gamma_1 = \mu\cos\gamma + \cos\gamma'(\mu\cos\Theta + \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2});$$

und im Falle der Refraction:

$$\cos\alpha_1 = \mu\cos\alpha + \cos\alpha'(\mu\cos\Theta - \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\beta_1 = \mu\cos\beta + \cos\beta'(\mu\cos\Theta - \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\gamma_1 = \mu\cos\gamma + \cos\gamma'(\mu\cos\Theta - \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}).$$

Also ist

$$\cos\alpha_1 = \mu\cos\alpha + \cos\alpha'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\beta_1 = \mu\cos\beta + \cos\beta'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\gamma_1 = \mu\cos\gamma + \cos\gamma'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2});$$

wo im Falle der Reflexion immer die obern, im Falle der Refraction immer die untern Zeichen zu nehmen sind.

In der Gleichung 55) des vorhergehenden Paragraphen ist das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite der gegebenen Kugelfläche trifft. Also sind auch in den aus 53) bekannten Formeln

$$\frac{p_1 - p}{\cos\alpha} = K_1 \pm \sqrt{R_1^2 + K_1^2 - E_1^2},$$
$$\frac{q_1 - q}{\cos\beta} = K_1 \pm \sqrt{R_1^2 + K_1^2 - E_1^2},$$
$$\frac{r_1 - r}{\cos\gamma} = K_1 \pm \sqrt{R_1^2 + K_1^2 - E_1^2},$$

oder in den Formeln

$$\frac{p_1 - p}{\cos\alpha} = K_1 \pm R_1\sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}},$$
$$\frac{q_1 - q}{\cos\beta} = K_1 \pm R_1\sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}},$$
$$\frac{r_1 - r}{\cos\gamma} = K_1 \pm R_1\sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}}$$

die obern oder untern Zeichen zu nehmen, jenachdem der einfal-

lende Strahl die concave oder convexe Seite trifft. Nehmen wir nun aber den Halbmesser R_1 positiv oder negativ, jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite trifft, so können wir allgemein

$$\frac{p_1 - p}{\cos \alpha} = K_1 + R_1 \sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}},$$

$$\frac{q_1 - q}{\cos \beta} = K_1 + R_1 \sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}},$$

$$\frac{r_1 - r}{\cos \gamma} = K_1 + R_1 \sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}}$$

setzen; oder

$$p_1 = p + (K_1 + R_1 \sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}}) \cos \alpha,$$

$$q_1 = q + (K_1 + R_1 \sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}}) \cos \beta,$$

$$r_1 = r + (K_1 + R_1 \sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}}) \cos \gamma.$$

Halten wir die vorher wegen des Einfallsloths gegebene Bestimmung fest, so ist offenbar, wenn man R_1 immer als positiv betrachtet,

$$R_1 \cos \alpha' = a_1 - p_1,$$
$$R_1 \cos \beta' = b_1 - q_1,$$
$$R_1 \cos \gamma' = c_1 - r_1$$

oder

$$R_1 \cos (180^\circ - \alpha') = a_1 - p_1,$$
$$R_1 \cos (180^\circ - \beta') = b_1 - q_1,$$
$$R_1 \cos (180^\circ - \gamma') = c_1 - r_1;$$

jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite trifft; und folglich

$$\pm R_1 \cos \alpha' = a_1 - p_1,$$
$$\pm R_1 \cos \beta' = b_1 - q_1,$$
$$\pm R_1 \cos \gamma' = c_1 - r_1;$$

indem man die obern oder untern Zeichen nimmt, jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite trifft. Nimmt man aber wie vorher den Halbmesser R_1 positiv oder negativ, jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite trifft, so ist allgemein

$$R_1 \cos \alpha' = a_1 - p_1,$$
$$R_1 \cos \beta' = b_1 - q_1,$$
$$R_1 \cos \gamma' = c_1 - r_1;$$

also

$$\cos\alpha' = \frac{a_1 - p_1}{R_1},$$

$$\cos\beta' = \frac{b_1 - q_1}{R_1},$$

$$\cos\gamma' = \frac{c_1 - r_1}{R_1};$$

und folglich nach dem Obigen

$$\cos\alpha' = \frac{a_1 - p - (K_1 + R_1\sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}})\cos\alpha}{R_1},$$

$$\cos\beta' = \frac{b_1 - q - (K_1 + R_1\sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}})\cos\beta}{R_1},$$

$$\cos\gamma' = \frac{c_1 - r - (K_1 + R_1\sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}})\cos\gamma}{R_1};$$

oder

$$\cos\alpha' = \frac{a_1 - p - K_1\cos\alpha}{R_1} - \cos\alpha\sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}},$$

$$\cos\beta' = \frac{b_1 - q - K_1\cos\beta}{R_1} - \cos\beta\sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}},$$

$$\cos\gamma' = \frac{c_1 - r - K_1\cos\gamma}{R_1} - \cos\beta\sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}}.$$

Weil nach dem Obigen bekanntlich

$$\cos\Theta = -(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma')$$

ist, so erhält man aus den vorhergehenden Formeln leicht

$$\cos\Theta = \sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}}$$

oder

$$\cos\Theta = \sqrt{1 - \frac{(E_1 + K_1)(E_1 - K_1)}{R_1^2}},$$

und folglich

$$\sin\Theta = \sqrt{\frac{(E_1 + K_1)(E_1 - K_1)}{R_1^2}}.$$

Also ist nach dem Obigen auch

$$p_1 = p + (K_1 + R_1\cos\Theta)\cos\alpha,$$
$$q_1 = q + (K_1 + R_1\cos\Theta)\cos\beta,$$
$$r_1 = r + (K_1 + R_1\cos\Theta)\cos\gamma.$$

Digitized by Google

§. 8.

Es wird nöthig sein, die im Vorgehenden gefundenen Formeln zur Bestimmung der Lage des ausfallenden Strahles nochmals übersichtlich zusammenzustellen.

Zum Grunde gelegt wird ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz.

Gegeben sind:

die Coordinaten p, q, r des Punktes, von welchem der einfallende Strahl ausgeht;

die 180° nicht übersteigenden Winkel α, β, γ, welche der einfallende Strahl mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt (pqr) gelegter, den primitiven Axen der x, y, z paralleler Axen einschliesst;

die Gleichung der zurückwerfenden oder brechenden Kugelfläche, nämlich die Gleichung

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=R_1^2,$$

wo der Halbmesser R_1 als positiv oder als negativ betrachtet wird, jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite dieser Kugelfläche trifft.

Gesucht werden die Coordinaten p_1, q_1, r_1 des Einfallspunkts, in welchem der einfallende Strahl die gegebene Kugelfläche trifft, und die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der von dem Punkte $(p_1q_1r_1)$ ausgehende ausfallende Strahl mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt $(p_1q_1r_1)$ gelegter den primitiven Axen der x, y, z paralleler Axen einschliesst.

Zur Berechnung dieser sechs Grössen, durch welche die Lage des ausfallenden Strahls offenbar vollkommen bestimmt wird, hat man nach dem Obigen die folgenden Formeln.

Zuerst berechnet man die Grössen E_1 und K_1 mittelst der Formeln

$$E_1=\sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2},$$

$$K_1=(a_1-p)\cos\alpha+(b_1-q)\cos\beta+(c_1-r)\cos\gamma;$$

und hierauf den 180° nicht übersteigenden Winkel Θ *) mittelst der Formeln

$$\cos\Theta=\sqrt{1-\frac{(E_1+K_1)(E_1-K_1)}{R_1^2}}$$

oder

$$\sin\Theta=\sqrt{\frac{(E_1+K_1)(E_1-K_1)}{R_1^2}}.$$

Dann ergeben sich die Coordinaten p_1, q_1, r_1 mittelst der Formeln

$$p_1=p+(K_1+R_1\cos\Theta)\cos\alpha,$$

*) Man sieht übrigens aus dem folgenden Ausdrucke von $\cos\Theta$, dass unter den oben gemachten Voraussetzungen der Winkel Θ nie 90° übersteigt.

$$q_1 = q + (K_1 + R_1 \cos \Theta) \cos \beta,$$
$$r_1 = r + (K_1 + R_1 \cos \Theta) \cos \gamma;$$

und hierauf die 180° nicht übersteigenden Winkel α', β', γ' mittelst der Formeln

$$\cos \alpha' = \frac{a_1 - p_1}{R_1},$$
$$\cos \beta' = \frac{b_1 - q_1}{R_1},$$
$$\cos \gamma' = \frac{c_1 - r_1}{R_1}.$$

Endlich erhält man die 180° nicht übersteigenden Winkel α_1, β_1, γ_1 mittelst der Formeln

$$\cos \alpha_1 = \mu \cos \alpha + \cos \alpha'(\mu \cos \Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$
$$\cos \beta_1 = \mu \cos \beta + \cos \beta'(\mu \cos \Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$
$$\cos \gamma_1 = \mu \cos \gamma + \cos \gamma'(\mu \cos \Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2});$$

in denen im Falle der Reflexion die obern, im Falle der Refraction die untern Zeichen zu nehmen sind.

Durch Einführung einiger Hülfswinkel kann man sich die Rechnung nach diesen Formeln erleichtern.

Berechnet man die Hülfswinkel φ und ψ mittelst der Formeln

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{c_1 - r}{b_1 - q},$$
$$\operatorname{tang} \psi = \frac{b_1 - q}{(a_1 - p) \cos \varphi} = \frac{c_1 - r}{(a_1 - p) \sin \varphi};$$

so ist, wie man leicht findet,

$$E_1^2 = \left(\frac{a_1 - p}{\cos \psi}\right)^2.$$

Nimmt man nun aber, was offenbar verstattet ist, wenn

$b_1 - q$	und	$c_1 - r$
positiv		positiv
negativ		positiv
negativ		negativ
positiv		negativ

ist, φ so, dass respective

$$0 < \varphi < 90°,$$
$$90° < \varphi < 180°,$$
$$180° < \varphi < 270°,$$
$$270° < \varphi < 360°$$

ist, so hat $\cos\varphi$ mit $b_1 - q$ stets einerlei Vorzeichen, und das Vorzeichen von $\tang\psi$ hängt also bloss von $a_1 - p$ ab. Nimmt man dann ferner ψ stets positiv und nicht grösser als 180°, so hat $\cos\psi$ einerlei Vorzeichen mit $a_1 - p$, und man kann also unter diesen Voraussetzungen immer

$$E_1 = \frac{a_1 - p}{\cos\psi}$$

setzen.

Berechnet man ferner den Hülfswinkel ω mittelst der Formel

$$\sin\omega = \mu \sin\Theta,$$

und nimmt ω nicht grösser als 90°, so ist

$$\sqrt{1 - \mu^2 \sin\Theta^2} = \cos\omega,$$

und folglich, weil

$$\mu = \frac{\sin\omega}{\sin\Theta}$$

ist, nach dem Obigen, wie man leicht findet:

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha \frac{\sin\omega}{\sin\Theta} + \cos\alpha' \frac{\sin(\omega \pm \Theta)}{\sin\Theta},$$

$$\cos\beta_1 = \cos\beta \frac{\sin\omega}{\sin\Theta} + \cos\beta' \frac{\sin(\omega \pm \Theta)}{\sin\Theta},$$

$$\cos\gamma_1 = \cos\gamma \frac{\sin\omega}{\sin\Theta} + \cos\gamma' \frac{\sin(\omega \pm \Theta)}{\sin\Theta};$$

wo im Falle der Reflexion die obern, im Falle der Refraction die untern Zeichen zu nehmen sind.

Daher sind die bequemsten Formeln zur Auflösung unserer Aufgabe die folgenden:

$$\tang\varphi = \frac{c_1 - r}{b_1 - q},$$

$$\tang\psi = \frac{b_1 - q}{(a_1 - p)\cos\varphi} = \frac{c_1 - r}{(a_1 - p)\sin\varphi};$$

$$E_1 = \frac{a_1 - p}{\cos\psi},$$

$$K_1 = (a_1 - p)\cos\alpha + (b_1 - q)\cos\beta + (c_1 - r)\cos\gamma;$$

$$\sin\Theta = \sqrt{\frac{(E_1 + K_1)(E_1 - K_1)}{R_1^2}},\quad \sin\omega = \mu\sin\Theta;$$

$$p_1 = p + (K_1 + R_1\cos\Theta)\cos\alpha,$$

$$q_1 = q + (K_1 + R_1\cos\Theta)\cos\beta,$$

$$r_1 = r + (K_1 + R_1\cos\Theta)\cos\gamma;$$

$$\cos\alpha' = \frac{a_1 - p_1}{R_1},$$

$$\cos\beta' = \frac{b_1 - q_1}{R_1},$$

$$\cos\gamma' = \frac{c_1 - r_1}{R_1};$$

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha\,\frac{\sin\omega}{\sin\Theta} + \cos\alpha'\,\frac{\sin(\omega \pm \Theta)}{\sin\Theta},$$

$$\cos\beta_1 = \cos\beta\,\frac{\sin\omega}{\sin\Theta} + \cos\beta'\,\frac{\sin(\omega \pm \Theta)}{\sin\Theta},$$

$$\cos\gamma_1 = \cos\gamma\,\frac{\sin\omega}{\sin\Theta} + \cos\gamma'\,\frac{\sin(\omega \pm \Theta)}{\sin\Theta}.$$

Wie die Winkel φ, ψ, ω genommen werden müssen, ist aus dem Obigen bekannt; der Winkel Θ ist nie grösser als 90° zu nehmen.

Die Gleichungen des ausfallenden Strahls sind

$$\frac{x - p_1}{\cos\alpha_1} = \frac{y - q_1}{\cos\beta_1} = \frac{z - r_1}{\cos\gamma_1}.$$

Wenn die Gleichungen

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = R_1^2,$$
$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 = R_2^2,$$
$$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = R_3^2.$$

u. s. w.

$$(x - a_k)^2 + (y - b_k)^2 + (z - c_k)^2 = R_k^2$$

mehrerer zurückwerfenden oder brechenden Kugelflächen und die Zurückwerfungsverhältnisse *) oder die Brechungsverhältnisse für je zwei durch diese Kugelflächen von einander getrennte brechende Media gegeben sind, so hat es nun auch nach dem Vorhergehenden nicht die geringste Schwierigkeit mehr, die zur Bestimmung der Lage des letzten ausfallenden Strahls erforderlichen Formeln zu construiren. Weitere Untersuchungen über diesen Gegenstand und Anwendungen der im Vorhergehenden gewonnenen allgemeinen Formeln behalten wir aber spätern Abhandlungen vor.

---

*) Man vergleiche über den hier immer zum Grunde gelegten allgemeinern Begriff der Zurückwerfung Archiv. Thl. II. S. 147. Note.

XXI.

Drei Eigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung und ihrer conjugirten Halbmesser.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin.

1.

Wenn die Summe der Quadrate der aus n gegebenen Punkten auf eine Ebene gefällten Normalen constant ist, so berührt diese Ebene beständig eine centrale Oberfläche zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt im Schwerpunkt der n Punkte liegt und deren Axen mit den Hauptaxen des Systems der n Punkte zusammenfallen (S. Litt. Bericht. Nr. XII. S. 191) und deren Brennpunkte eine bestimmte Entfernung vom Mittelpunkte haben.

Ehe ich zum Beweise dieses Satzes schreite, rufe ich einige elementare Sätze der analytischen Geometrie ins Gedächtniss zurück.

Die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung in Bezug auf ihren Mittelpunkt, als Anfangspunkt, und ihre (rechtwinkligen) Hauptaxen, als Coordinatenaxen, ist:

$$1)\quad A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = 1.$$

Ihre Halbaxen sind der Reihe nach $\sqrt{\frac{1}{A}}$, $\sqrt{\frac{1}{B}}$, $\sqrt{\frac{1}{C}}$, wie man findet, wenn der Reihe nach $y=0$, $z=0$; $z=0$, $x=0$; $x=0$, $y=0$ gesetzt wird. Die Gattung der Oberfläche wird leicht an den Zeichen von A, B, C erkannt. Sind alle drei positiv, so sind alle drei Halbaxen reell und man hat ein Ellipsoid. Ist eine der Grössen A, B, C negativ, so wird eine Halbaxe imaginär, und die Gleichung gehört einem einhülligen Hyperboloid an. Sind zwei derselben negativ, so liefert sie ein zweihülliges Hyperboloid.

Differenziirt man die Gleichung 1), so hat man

$$2)\quad A\alpha d\alpha + B\beta d\beta + C\gamma d\gamma = 0.$$

Betrachtet man hier α, β, γ als beliebig gegeben und unveränderlich, so stellt diese Gleichung in Bezug auf die Coordinaten $d\alpha$,

$d\beta$, $d\gamma$ ein unendlich kleines, um den Punkt (α, β, γ) herumliegendes Stück der krummen Oberfläche dar. Da sie vom ersten Grade ist, so wird sie die Gleichung einer Ebene, welche die Oberfläche im Punkte (α, β, γ) berührt, wenn man statt der unendlich kleinen vom Berührungspunkte an gezählten Coordinaten $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ die endlichen $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ setzt, wo x, y, z die laufenden Coordinaten bedeuten; nämlich

$$3)\quad A\alpha(x-\alpha)+B\beta(y-\beta)+C\gamma(z-\gamma)=0.$$

Addirt man hiezu die Gleichung 1), so ergiebt sich

$$4)\quad A\alpha x+B\beta y+C\gamma z=1$$

als Gleichung der Tangentialebene im Punkte (α, β, γ). Diese Gleichung stellt zugleich die ganze Schaar der Tangentialebenen vor, wenn man den α, β, γ alle möglichen der Gleichung 1) genügenden Werthe giebt. Wenn umgekehrt die Gleichung einer Ebene

$$5)\quad px+qy+rz=D$$

gegeben ist, so findet man sehr leicht die zwischen p, q, r, D stattfindende Bedingungsgleichung, damit sie die Oberfläche 1) berühre. Es muss nämlich

$$p=A\alpha D,\ q=B\beta D,\ r=C\gamma D$$

sein; eliminirt man hieraus mit Hülfe der Gleichung 1) α, β und γ, so bleibt als Bedingungsgleichung

$$6)\quad \frac{p^2}{A}+\frac{q^2}{B}+\frac{r^2}{C}=D^2.$$

Bedeuten nun p, q, r die Cosinus der Winkel, welche eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade mit den Coordinatenaxen macht, so ist

$$7)\quad p^2+q^2+r^2=1.$$

Sind ferner x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes, so bildet sein Leitstrahl mit den Axen Winkel, deren Cosinus beziehlich

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

sind. Der Cosinus des Winkels, den derselbe mit der Geraden (p, q, r) bildet, ist daher

$$p\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+q\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+r\cdot\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$=\frac{px+qy+rz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

die Länge des Leitstrahls ist $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, und folglich ist

$px+qy+rz$ die Projection desselben auf die Gerade (p, q, r). Es werden also der Gleichung 5)

$$px+qy+rz=D$$

alle diejenigen Punkte (x, y, z) genügen, deren Projectionen auf die Gerade (p, q, r) um D vom Anfangspunkt entfernt sind. Folglich ist obige Gleichung diejenige einer Ebene, deren Abstand vom Anfangspunkt gleich D ist und deren Normale mit den Axen Winkel von den Cosinus p, q, r macht. Die Gleichung einer Ebene kann immer auf die obige Form gebracht werden; denn sollte in der Gleichung

$$p_1x+q_1y+r_1z=D_1$$

nicht $p_1^2+q_1^2+r_1^2=1$ sein, so darf man nur beide Seiten durch $\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}$ dividiren, um sogleich die gewünschte Form zu erhalten.

Seien nun $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots . x_n, y_n, z_n$ die Coordinaten der in dem Lehrsatze gegebenen n Punkte; sei ferner

$$px+qy+rz=D,$$

wo $p^2+q^2+r^2=1$, die Gleichung der fraglichen Ebene. Wenn man den Punkt $(x_1y_1z_1)$ auf die Normale (p, q, r) projicirt, so ist dem Obigen zufolge

$$px_1+qy_1+rz_1$$

der Abstand dieser Projection vom Anfangspunkt; mithin ist

$$8)\quad px_1+qy_1+rz_1-D$$

der Abstand derselben von der in Rede stehenden Ebene. Aehnliche Ausdrücke erhält man für die übrigen Punkte $(x_2y_2z_2)$ u. s. w.

Wir wollen jetzt, den Lehrsatz ein wenig verallgemeinernd, die Quadrate dieser Abstände mit beliebigen Coefficienten m_1, $m_2, \ldots . m_n$ multipliciren und dann addiren. Auf diese Weise erhalten wir zwischen den Bestimmungsstücken der Ebene (p, q, r, D) die folgende Bedingung:

$$9)\quad \left.\begin{aligned} &m_1(px_1+qy_1+rz_1-D)^2\\ &+m_2(px_2+qy_2+rz_2-D)^2\\ &+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ &+m_n(px_n+qy_n+rz_n-D)^2 \end{aligned}\right\}=K$$

wo K eine Constante ist. Bedienen wir uns der Summenzeichen S und entwickeln wir die Quadrate, so erhalten wir

$$10)\quad \left.\begin{aligned} &p^2S(mx^2)+2qrS(myz)-2DpS(mx)\\ &+q^2S(my^2)+2rpS(mzx)-2DqS(my)\\ &+r^2S(mz^2)+2pqS(mxy)-2DrS(mz)\\ &+D^2S(m) \end{aligned}\right\}=K$$

Denken wir uns nun die gegebenen n Punkte mit den Massen $m_1, m_2, \ldots m_n$ behaftet, und stellen wir uns den Anfangspunkt und die Coordinatenaxen in dem Schwerpunkt und den Haupt-(trägheits)axen dieses materiellen Systems vor, so ist den Elementen der Statik zufolge:

11) $S(mx) = S(my) = S(mz) = S(myz) = S(mzx) = S(mxy) = 0.$

Führt man ferner die folgenden Bezeichnungen ein:

$$12) \quad P = S(mx^2),\ Q = S(my^2),\ R = S(mz^2),$$
$$M = S(m);$$

so stellt sich die Bedingungsgleichung 10) folgendermassen dar:

$$13) \quad Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 + MD^2 = K,$$

oder, wegen $p^2 + q^2 + r^2 = 1$, so:

$$14) \quad MD^2 = (K - P)p^2 + (K - Q)q^2 + (K - R)r^2.$$

Diese Gleichung hat dem Vorhergehenden zufolge genau die nöthige Form, damit die Ebene 5) eine Oberfläche zweiter Ordnung berühre, deren Mittelpunkt und Hauptaxen in den Anfangspunkt und die Coordinatenaxen, d. h. in den Schwerpunkt und die Hauptaxen des erwähnten materiellen Systems fallen. Hiemit ist der erste Theil des Lehrsatzes erwiesen.

Die Halbaxen dieser Oberfläche erhält man durch Vergleichung von 14) mit 6); nämlich

$$15) \quad \frac{1}{A} = \frac{K-P}{M},\ \frac{1}{B} = \frac{K-Q}{M},\ \frac{1}{C} = \frac{K-R}{M}.$$

Nun sind $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$, wie zu Anfang erwähnt worden, beziehlich gleich a^2, b^2, c^2, wenn a, b, c die halben Axen der Oberfläche zweiter Ordnung bedeuten. Es sind daher wegen 15) die Differenzen

$$a^2 - b^2,\ b^2 - c^2,\ c^2 - a^2$$

von der Constanten K unabhängig; woraus wir schliessen, dass die zu verschiedenen Werthen von K gehörigen krummen Oberflächen sämmtlich confocal sind. Hiermit ist auch der zweite Theil unseres Lehrsatzes erwiesen.

II.

Je zwei Ternionen conjugirter Halbmesser einer krummen Oberfläche zweiter Ordnung liegen in einer Kegelfläche zweiter Ordnung.

Die allgemeine Gleichung einer Kegelfläche in Bezug auf drei beliebig durch ihre Spitze gehende Axen ist

$$1) \quad Lx^2 + My^2 + Nz^2 + Pyz + Qzx + Rxy = 0.$$

Wenn die drei Axen auf ihrer Oberfläche liegen, so muss

$$L = M = N = 0$$

sein; weil alsdann die Gleichungen $y = 0$, $z = 0$; $z = 0$, $x = 0$; $x = 0$, $y = 0$ ihr genügen müssen. Man hat daher

$$2) \quad \frac{P}{x} + \frac{Q}{y} + \frac{R}{z} = 0$$

als Gleichung einer durch die drei Coordinatenaxen gehenden Kegelfläche. Die Gerade, deren Gleichung

$$3) \quad x : y : z = p : q : r$$

ist, wird daher in dieser Fläche liegen, wenn p, q, r der Gleichung

$$4) \quad \frac{P}{p} + \frac{Q}{q} + \frac{R}{r} = 0$$

genügen.

Sind nun (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ die auf der Oberfläche zweiter Ordnung

$$5) \quad A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = 1$$

liegenden Endpunkte dreier conjugirten Halbmesser, so ist der Definition derselben zufolge die Tangentialebene an einem dieser Punkte parallel mit der von den Leitstrahlen der beiden anderen gebildeten Ebene. Die Gleichung der Tangentialebene am ersten Punkt ist aber

$$6) \quad A\alpha x + B\beta y + C\gamma z = 1;$$

wird durch den Anfangspunkt eine Ebene mit dieser parallel geführt, so ist deren Gleichung

$$7) \quad A\alpha x + B\beta y + C\gamma z = 0;$$

in dieser Ebene liegen aber der zweite und dritte Punkt. Folglich ist

$$8) \begin{cases} A\alpha\alpha' + B\beta\beta' + C\gamma\gamma' = 0 \\ A\alpha''\alpha + B\beta''\beta + C\gamma''\gamma = 0; \end{cases}$$

und auf dieselbe Art findet sich noch die zugehörige Gleichung

$$8) \quad A\alpha'\alpha'' + B\beta'\beta'' + C\gamma'\gamma'' = 0.$$

Führt man nun die Bezeichnungen

$$9) \quad A\alpha\alpha'\alpha'' = P, \; B\beta\beta'\beta'' = Q, \; C\gamma\gamma'\gamma'' = R$$

ein, so kann man jene drei Gleichungen auch so schreiben:

Digitized by Google

$$10)\begin{cases}\frac{P}{\alpha}+\frac{Q}{\beta}+\frac{R}{\gamma}=0\\ \frac{P}{\alpha'}+\frac{Q}{\beta'}+\frac{R}{\gamma'}=0\\ \frac{P}{\alpha''}+\frac{Q}{\beta''}+\frac{R}{\gamma''}=0;\end{cases}$$

mithin genügen die drei Punkte (α, β, γ) $(\alpha', \beta', \gamma')$ $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ der Gleichung

$$2)\quad \frac{P}{x}+\frac{Q}{y}+\frac{R}{z}=0;$$

und folglich liegen die durch sie bestimmten drei conjugirten Halbmesser auf der von dieser Gleichung ausgedrückten Kegelfläche. Diese Kegelfläche geht aber durch die drei Coordinatenaxen; also liegen schiesslich diese conjugirten Halbmesser mit denjenigen, auf welche wir die Gleichung 5) bezogen haben, auf einer und derselben Kegelfläche zweiter Ordnung.

III.

Je zwei Ternionen conjugirter Durchmesserebenen einer Oberfläche zweiter Ordnung berühren einen Kegel zweiter Ordnung.

Wenn man in der obigen allgemeinen Gleichung der Kegelfläche der Reihe nach $x=0$, $y=0$, $z=0$ setzt, so erhält man, α, β, γ für x, y, z setzend:

$$1)\begin{cases}M\beta^2+N\gamma^2+P\beta\gamma=0\\ N\gamma^2+L\alpha^2+Q\gamma\alpha=0\\ L\alpha^2+M\beta^2+R\alpha\beta=0.\end{cases}$$

Jede dieser Gleichungen liefert zwei Gerade, als Durchschnitte der Kegelfläche mit den drei Coordinatenebenen. Setzt man nun

$$2)\quad P^2=4MN,\ Q^2=4NL,\ R^2=4LM,$$

so werden obige Ausdrücke vollständige Quadrate und liefern also jede nur eine Gerade. Unter den Bedingungen 2) wird folglich der Kegel die drei Coordinatenebenen berühren. Man erhält aus ihnen

$$3)\quad L=\pm\frac{QR}{2P},\ M=\pm\frac{RP}{2Q},\ N=\pm\frac{PQ}{2R}.$$

Die oberen Zeichen würden die Gleichung des Kegels zu einem vollständigen Quadrate machen; mithin gelten die unteren. Nach Substitution der Werthe 3) hat man

$$4)\quad \frac{\alpha^2}{P^2}+\frac{\beta^2}{Q^2}+\frac{\gamma^2}{R^2}-\frac{2\beta\gamma}{QR}-\frac{2\gamma\alpha}{RP}-\frac{2\alpha\beta}{PQ}=0$$

Digitized by Google

als Gleichung einer die drei Coordinatenebenen berührenden Kegelfläche.

Differentiirt man und setzt dann $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ für $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, so wird die Gleichung einer Tangentialebene:

$$\left(\frac{\alpha}{P}-\frac{\beta}{Q}-\frac{\gamma}{R}\right)\frac{x-\alpha}{P}+\left(\frac{\beta}{Q}-\frac{\gamma}{R}-\frac{\alpha}{P}\right)\frac{y-\beta}{Q}$$

$$+\left(\frac{\gamma}{R}-\frac{\alpha}{P}-\frac{\beta}{Q}\right)\frac{z-\gamma}{R}=0$$

oder nach Addition von 4)

$$5)\quad \left(\frac{\alpha}{P}-\frac{\beta}{Q}-\frac{\gamma}{R}\right)\frac{x}{P}+\left(\frac{\beta}{Q}-\frac{\gamma}{R}-\frac{\alpha}{P}\right)\frac{y}{Q}$$

$$+\left(\frac{\gamma}{R}-\frac{\alpha}{P}-\frac{\beta}{Q}\right)\frac{z}{R}=0.$$

Führt man jetzt die folgenden Bezeichnungen ein:

$$6)\quad u=\frac{\alpha}{P}-\frac{\beta}{Q}-\frac{\gamma}{R},\ v=\frac{\beta}{Q}-\frac{\gamma}{R}-\frac{\alpha}{P},\ w=\frac{\gamma}{R}-\frac{\alpha}{P}-\frac{\beta}{Q};$$

so ist

$$\frac{\alpha}{P}=-\tfrac{1}{2}(v+w),\ \frac{\beta}{Q}\tfrac{1}{2}=-(w+u),\ \frac{\gamma}{R}=-\tfrac{1}{2}(u+v).$$

Durch Einführung dieser Werthe reduzirt sich die Gleichung der Kegelfläche 4) auf

$$7)\quad \frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=0$$

und die ihrer Tangentialebene 5) auf

$$8)\quad \frac{ux}{P}+\frac{vy}{Q}+\frac{wz}{R}=0.$$

Die Ebene (p, q, r), nämlich deren Gleichung

$$9)\quad px+qy+rz=0$$

ist, berührt daher den Kegel 4), wenn, wie sich durch Vergleichung von 9) mit 8) findet,

$$10)\quad \frac{1}{Pp}+\frac{1}{Qq}+\frac{1}{Rr}=0$$

ist.

Für die Oberfläche zweiter Ordnung, deren Gleichung

$$11)\quad Ax^2+By^2+Cz^2=1,$$

sind folgende die Gleichungen dreier conjugirter Durchmesserebenen:

$$12)\begin{cases} A\alpha x + B\beta y + C\gamma z = 0 \\ A\alpha' x + B\beta' y + C\gamma' z = 0 \\ A\alpha'' x + B\beta'' y + C\gamma'' z = 0, \end{cases}$$

wenn α, β, u. s. w. den Bedingungen:

$$13)\begin{cases} A\alpha'\alpha'' + B\beta'\beta'' + C\gamma'\gamma'' = 0 \\ A\alpha''\alpha + B\beta''\beta + C\gamma''\gamma = 0 \\ A\alpha\alpha' + B\beta\beta' + C\gamma\gamma' = 0 \end{cases}$$

entsprechen, wie aus dem Beweise zum vorigen Lehrsatze erhellt. Wenn man

$$14)\quad A^2\alpha\alpha'\alpha'' = \frac{1}{P},\ B^2\beta\beta'\beta'' = \frac{1}{Q},\ C^2\gamma\gamma'\gamma'' = \frac{1}{R}$$

setzt, so erhalten die Bedingungen 13) die Form

$$14)\begin{cases} \frac{1}{P\,.\,A\alpha} + \frac{1}{Q\,.\,B\beta} + \frac{1}{R\,.\,C\gamma} = 0 \\ \frac{1}{P\,.\,A\alpha'} + \frac{1}{Q\,.\,B\beta'} + \frac{1}{R\,.\,C\gamma'} = 0 \\ \frac{1}{P\,.\,A\alpha''} + \frac{1}{Q\,.\,B\beta''} + \frac{1}{R\,.\,C\gamma''} = 0. \end{cases}$$

Stellt man sich daher die Gleichungen 12) unter der Form $px + qy + rz = 0$ vor, so genügen die Coefficienten von allen dreien der Gleichung 10)

$$\frac{1}{P\,.\,p} + \frac{1}{Q\,.\,q} + \frac{1}{R\,.\,r} = 0.$$

Die drei Ebenen 12) berühren also den Kegel 4), wo P, Q, R die Werthe 14) haben; also berühren schliesslich diese drei conjugirten Durchmesserebenen nebst denen, auf welche wir die Gleichung 11) bezogen haben, einen und denselben Kegel zweiter Ordnung.

Die beiden Lehrsätze II. und III. können für die vollständige Verallgemeinerung des folgenden Satzes von Herrn Steiner (s. dessen Entwickelung der Abhängigkeit u. s. w. p. 313) gelten:

59) „Denkt man sich im Raume irgend zwei rechtwinklige „Coordinatensysteme um einen und denselben Anfangspunkt, so „findet Folgendes statt:

„Die 6 Coordinatenaxen „liegen allemal in irgend „einer Kegelfläche zwei- „ten Grades.

Die 6 Coordinatenebenen berühren allemal irgend eine Kegelfläche zweiten Grades.

„Dieser Satz ist ein besonderer Fall eines umfassenderen Satzes.“,

Obgleich aber umgekehrt aus den Gleichungen 13) leicht hervorgeht, dass je zweimal drei Seiten einer Kegelfläche immer als zwei Ternionen zugeordneter Halbmesser einer Oberfläche zwei-

ten Grades angesehen werden können, so sind unsere beiden Lehrsätze doch nur besondere Fälle von zwei umfassenderen Sätzen, deren analytische Behandlung sehr verwickelt ausfallen dürfte, und die ich bei einer andern Gelegenheit mittheilen werde.

XXII.

Bestimmung eines Polynomiums durch Integrale seiner partiellen Differentialien, nebst einer Anwendung derselben.

Von

Herrn L. Mossbrugger

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

1. Sind $y_1, y_2, \ldots\ldots y_m$ eine Anzahl veränderlicher Grössen, $A'_1, A''_1, A''_2, A''_3, \ldots\ldots; A'''_1, A'''_2, A'''_3, \ldots\ldots$ u. s. w. aber beständige Coefficienten, und ist allgemein:

1) $\ldots F =$

$$A'_1 y_1^n + \{A''_1 y_2 + A''_2 y_3 + A''_3 y_4 + \ldots + A''_{m-1} y_m + A''_m\} y_1^{n-1}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} A'''_1 y_2^2 + A'''_2 y_2 y_3 + A'''_3 y_2 y_4 + \ldots\ldots \\ \qquad + A'''_{m-1} y_2 y_m + A'''_m y_3^2 \\ + A'''_{m+1} y_3 y_4 + \ldots\ldots + A'''_{2m-2} y_3 y_m \\ \qquad + A'''_{2m-1} y_4^2 + \ldots\ldots \\ A'''\frac{m(m-1)+2}{2} y_2 + \ldots\ldots + A'''\frac{m(m+1)-2}{2} y_m \\ \qquad + A^m \frac{m(m+1)}{2} \end{array} \right\} y_1^{n-2}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left\{\begin{array}{l} \overset{n}{A}_1 y_2^{n-1} + \overset{n}{A}_2 y_2^{n-2}.y_3 + \ldots + \overset{n}{A}_{m-1} y_2^{n-2}.y_m + \overset{n}{A}_m y_2^{n-1} \\ + \overset{n}{A}_{m+1} y_2^{n-2}.y_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \overset{n}{A}\left(\frac{(m+n-2)\,(m+n-3)\ldots\ldots(n+1)n}{1.2\ldots.(m-2)\,(m-1)} - 1\right) y_m \\ + \overset{n}{A}\left(\frac{(m+n-2)\,(m+n-3)\ldots\ldots(n+1)n}{1.2\ldots.(m-2)\,(m-1)}\right) \end{array}\right\} y_1$$

$$+\left\{\begin{array}{l} \overset{n+1}{A}_1 y_2^{n} + \overset{n+1}{A}_2 y_2^{n-1} y_3 + \ldots\ldots + \overset{n+1}{A}_{m-1} y_2^{n-1}.y_m + \overset{n+1}{A}_m y_2^{n} \\ \qquad + \overset{n+1}{A}_{m+1} y_2^{n-1} y_4 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \overset{n+1}{A}\left(\frac{(m+n-1)\,(m+n-2)\ldots\ldots(n+2)\,(n+1)}{1.2\ldots.(m-2)\,(m-1)} - 2\right) y_{m-1} \\ \quad + \overset{n+1}{A}\left(\frac{(m+n-1)\,(m+n-2)\ldots.(n+2)\,(n+1)}{1.2\ldots.(m-2)\,(m-1)} - 1\right) y_m \\ + \overset{n+1}{A}\left(\frac{(m+n-1)\,(m+n-2)\ldots\ldots(n+2)\,(n+1)}{1.2\ldots\ldots(m-2)\,(m-1)}\right) \end{array}\right\}$$

so kann gezeigt werden, dass, wenn:

$$\int \frac{dF}{dy_1} dy_1 + \int \frac{dF}{dy_2}.dy_2 + \int \frac{dF}{dy_3}.dy_3 + \ldots\ldots\ldots + \int \frac{dF}{dy_m}.dy_m = S' \ldots 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \int dy_1 \int \frac{d^2F}{dy_1 dy_2}\, dy_2 + \int dy_1 \int \frac{d^2F}{dy_1 dy_3}\, dy_3 + \ldots\ldots\ldots \\ \qquad + \int dy_1 \int \frac{d^2F}{dy_1 dy_m}\, dy_m \\ + \int dy_2 \int \frac{d^2F}{dy_2 dy_3} dy_3 + \ldots\ldots\ldots + \int dy_{m-1} \int \frac{d^2F}{dy_{m-1} dy_m}.dy_m \end{array}\right\} = S'' \ldots 3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \int dy_1 \int dy_2 \int \frac{d^3F}{dy_1 dy_2 dy_3}\, dy_3 + \\ \qquad \int dy_1 \int dy_3 \int \frac{d^3F}{dy_1 dy_3 dy_4}\, dy_4 + \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad + \int dy_1 \int dy_2 \int \frac{d^3F}{dy_1 dy_2 dy_m}.dy_m \\ + \int dy_1 \int dy_3 \int \frac{d^3F}{dy_1 dy_3 dy_4} dy_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + \int dy_{m-2} \int dy_{m-1} \int \frac{d^3F}{dy_{m-2} dy_{m-1} dy_m}\, dy_m \end{array}\right\} = S''' \ldots 4)$$

$$+ \text{ u. s. w.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \text{ u. s. w.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.\begin{aligned}&\int dy_1 \int dy_2 \ldots\ldots \int dy_{m-2} \int \frac{d^{m-1}F}{dy_1 dy_2 \ldots\ldots dy_{m-1}} \cdot dy_{m-1} \\ &+ \int dy_1 \int dy_2 \ldots\ldots \int dy_{m-2} \int \frac{d^{m-1}F}{dy_1 dy_2 \ldots dy_{m-2} \cdot dy_m} \cdot dy_m \\ &+ \ldots\ldots + \int dy_2 \int dy_3 \ldots \int dy_{m-1} \int \frac{d^{m-1}F}{dy_2 dy_3 \ldots dy_{m-1} dy_m} \cdot dy_m\end{aligned}\right\} = {}^{(m-1)}S \ldots 5)$$

$$\int dy_1 \int dy_2 \ldots\ldots \int dy_{m-1} \int \frac{d^m F}{dy_1 dy_2 \ldots dy_m} dy_m = {}^{(m)}S \ldots\ldots 6)$$

gesetzt wird, alsdann:

$$F = S' - S'' + S''' - S'''' + \ldots\ldots\ldots\ldots = \mp {}^{(m-1)}S \pm {}^{(m)}S + \text{Const.} \ldots 7)$$

Das obere Zeichen gilt für ein ungerades, und das untere für ein gerades m.

Hiebei ist jedoch zu bemerken, dass bei der Integration eines jeden partiellen Differentials die Constante jedesmal gleich Null gesetzt werden muss. Die einzige der ganzen Summe in Nr. 7. beizufügende Constante ist das letzte Glied des Ausdrucks von F in Nr. 1., welches wir erhalten, wenn wir $y_1 = y_2 = \ldots\ldots = y_m = 0$ setzen, so dass also

$$\text{Const} = A\left(\frac{(m+n-1)\,(m+n-2)\ldots\ldots(n+2)\,(n+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots\ldots(m-2)\,(m-1)}\right)\ldots\ldots 8)$$

Die Richtigkeit der Gleichung Nr. 7. können wir aus Folgendem entnehmen. Differenziiren wir die Gleichung 1) nach einander nach y_1, y_2, y_4, $\ldots\ldots\ldots y_m$; integriren alsdann die so entstandenen partiellen Differentialien, so finden wir:

a) Dass in der Summe Nr. 2. jedes der Glieder, in welchem nur eine einzige der Veränderlichen y_1, y_2, y_3, $\ldots\ldots y_m$ in Verbindung mit einem der constanten Coefficienten A'_1, A''_1, A''_2, ... u. s. w. enthalten ist, nur einmal vorkommt. Wir finden auch in der gleichen Summe S' Nr. 2., dass jedes der Glieder, in welchem irgend eine Verbindung von je zwei jener Veränderlichen vorkommt, in jener Summe zweimal enthalten ist. Ebenso kommt jedes der Glieder der Summe S', in dem eine Verbindung von 3, 4, $\ldots\ldots m$ jener Veränderlichen enthalten ist, respective 3mal, 4mal, $\ldots\ldots\ldots\ldots m$mal vor.

b) Differenziiren wir aber die Gleichung 1) nach einander nach y_1 und y_2; nach y_1 und y_3; u. s. w. $\ldots\ldots$ nach y_{m-1} und y_m; und suchen alsdann, mit der Berücksichtigung, dass wie in *a*) bei jeder partiellen Integration die Constante als Null genommen wird, die Werthe der Integrale, welche in der Summe S'' der Nr. 3. vorkommen, so werden wir wieder finden, dass in der Summe S'' jedes Glied, in welchem eine Verbindung je zweier jener Veränderlichen vorkommt, $\frac{2\,.\,1}{1\,.\,2}$ mal enthalten ist; ebenso kömmt in der gleichen Summe jedes der Glieder, in dem eine Verbindung von 3, 4, $\ldots\ldots m$ Veränderlichen enthalten ist, respektive $\frac{3\,.\,2}{1\,.\,2}$,

Digitized by Google

$\frac{4.3}{1.2}$ . . . . . $\frac{m(m-1)}{1.2}$ mal vor; hingegen befindet sich in der Summe S'' kein einziges Glied, welches nur eine einzige Veränderliche enthält.

c) Differenziiren wir ferner die Gleichung 1) nach einander in Beziehung auf y_1, y_2 und y_3; in Beziehung auf y_1, y_2 und y_4; u. s. w. . . . . in Beziehung auf y_{m-2}, y_{m-1} und y_m; nehmen alsdann mit der gleichen Berücksichtigung bei der Bestimmung der Constanten, wie in *a*) und *b*), die Integrale jener partiellen Differentialien, so werden wir die in Nr. 4. enthaltene Summe S''' erhalten, und in dieser so wie in den Vorhergehenden bemerken, dass in ihr kein Glied vorkommt, welches nur eine oder zwei Veränderliche enthält, hingegen, dass

jedes Glied, das drei Veränderliche enthält, $\frac{3.2.1}{1.2.3}$ mal vorkommt.

\- - - vier - - $\frac{4.3.2}{1.2.3}$ - -

\- - - fünf - - $\frac{5.4.3}{1.2.3}$ - -

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

\- - - m - - $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$ mal -

d) Fahren wir bei der Bestimmung der übrigen Summen S^{IV}, S^{V}, u. s. w. auf die oben angegebene Art fort, und differenziiren, wenn wir endlich zur Bestimmung der Summe $S^{(m-1)}$ kommen, die Gleichung 1) in Beziehung auf y_1, y_2, y_3, ... y_{m-1}; y_1, y_2, y_3, ... y_{m-2}, y_m; u. s. w. . . . . y_2, y_3, y_4, ... y_m; integriren alsdann wieder die partiellen Differentiale, indem wir ebenfalls bei jeder Integration die Constante gleich Null setzen, so erhalten wir die in Nr. 5. angegebene Summe $S^{(m-1)}$; in dieser Summe kommen keine Glieder vor, die weniger als $m-1$ Veränderliche enthalten; jedes der mit $m-1$ Veränderlichen behafteten Glieder kommt aber

$$\frac{(m-1)\,(m-2) \ldots\ldots 3.2.1}{1.2 \ldots\ldots (m-2)\,(m-1)} = 1 \text{ mal}$$

vor; jene hingegen, in welchen die Anzahl der Veränderlichen gleich m ist, kommen $\frac{m(m-1) \ldots\ldots 3.2}{1.2 \ldots\ldots (m-1)} = m$ mal vor. Auf ähnliche Art finden wir die Summe $S^{(m)}$, in welcher das mit m Veränderlichen behaftete Glied einmal enthalten ist. Nehmen wir alsdann die Glieder sämmtlicher Summen S', S'', S''', ... $S^{(m)}$ wie es die Zeichen in Nr. 7. verlangen, zusammen, fügen endlich dem

Aggregat noch die in 8) angegebene Constante bei, und bemerken bei der Summation dieser Glieder den bekannten Satz, dass:

$$(1-1)^m = 0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + - + - + - \ldots \pm \frac{m}{1} \mp 1 \text{ ist,}$$

so finden wir, dass die Gleichung in 7) mit der in 1) identisch sei.

II. Dieser durch die Gleichung 7) ausgedrückte Satz lässt sich noch sehr erweitern. Um jedoch nicht allzuweitläufig zu werden, können wir, ohne dass dadurch der Allgemeinheit des Verfahrens geschadet wird, statt der m Veränderlichen nur drei, nemlich x, y und z nehmen; dadurch geht die Gleichung Nr. 7. I. in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} F = \int \frac{dF}{dx}.dx + \int \frac{dF}{dy}.dy + \int \frac{dF}{dz}.dz \\ - \int dy \int \frac{d^2F}{dxdy}.dx \\ - \int dx \int \frac{d^2F}{dxdz}.dz - \int dy \int \frac{d^2F}{dydz}.dz \\ + \int dx \int dy \int \frac{d^3F}{dxdydz}.dz + \text{Const.} \end{aligned}\right\} \ldots . 1)$$

Bei der Bestimmung der Werthe der einzelnen Integralien in dieser Gleichung (wobei jedoch jedesmal die Constante gleich Null gesetzt wird), werden wir sogleich bemerken, dass das erste x, das zweite y, und das dritte z zum gemeinschaftlichen Faktor hat; die Ausdrücke für das 4te, 5te, 6te und 7te Integral haben aber respektive xy, xz, yz und xyz zum gemeinschaftlichen Faktor, so dass wir also setzen können:

$$\int \frac{dF}{dx}.dx = xF', \int \frac{dF}{dy}.dy = yF'', \int \frac{dF}{dz}.dz = zF''';$$

$$\int dy \int \frac{d^2F}{dxdy}.dx = xy.f', \int dx \int \frac{d^2F}{dxdz}.dz = xz.f'',$$

$$\int dz \int \frac{d^2F}{dydz}.dy = yz.f''';$$

$$\int dx \int dy \int \frac{d^3F}{dxdydz}.dz = xyz\,\mathfrak{f}.;$$

wo F', F'', ... diejenigen Theile der Werthe von $\int \frac{dF}{dx}dx$, $\int \frac{dF}{dx}.dy$, ... bezeichnen, welche respektive mit den Faktoren x, y, u. s. w. vervielfacht sind. Da nun diesem nach auch F', F'', F''', f' u. s. w. in Beziehung auf x, y und z Funktionen von gleicher Form sind wie F, so folgt auch nach Nr. 7. I. dass ebenso:

$$F = \int \frac{dF}{dx} . dx + \int \frac{dF}{dy} . dy + \int \frac{dF}{dz} . dz - \int dy \int \frac{d^2F}{dxdy} . dx - \int dx \int \frac{d^2F}{dxdz} . dz - \int dz \int \frac{d^2F}{dydz} . dy + \int dx \int dy \int \frac{d^3F}{dxdydz} . dz + \text{Const.} \quad 2)$$

$$f = \int \frac{df}{dx} . dx + \int \frac{df}{dy} . dy + \int \frac{df}{dz} . dz - \int dy \int \frac{d^2f}{dxdy} - \int dx \int \frac{d^2f}{dxdz} . dz - \int dz \int \frac{d^2f}{dy . dz} . dy + \int dx \int dy \int \frac{d^3f}{dxdydz} . dz + \text{Const.} \quad 3)$$

$$\mathfrak{f} = \int \frac{d\mathfrak{f}}{dx} . dx + \int \frac{d\mathfrak{f}}{dy} . dy + \int \frac{d\mathfrak{f}}{dz} . dz - \int dy \int \frac{d^2\mathfrak{f}}{dxdy} . dx - \int dx . \int \frac{d^2\mathfrak{f}}{dxdz} . dz - \int dz \int \frac{d^2\mathfrak{f}}{dydz} . dy + \int dx \int dy \int \frac{d^3\mathfrak{f}}{dxdydz} . dz + \text{Const.} \quad 4)$$

Aehnliche Ausdrücke erhalten wir für F'', F''', f'', f'''. Die so eben in 2), 3) und 4) angegebenen Ausdrücke können wir auch leicht unter eine andere Form bringen; setzen wir nemlich:

$$xF' = \overset{1}{V}_1, \; yF'' = \overset{1}{V}_2, \; zF''' = \overset{1}{V}_3;$$

$$xy . f' = \overset{2}{V}_1, \; xzf'' = \overset{2}{V}_2, \; yzf''' = \overset{2}{V}_3, \; xyz\mathfrak{f} = \overset{3}{V}_1;$$

so ist auch: $\frac{V'_1}{x} = F'$ also $\frac{dF'}{dx} = \frac{1}{x} . \frac{dV'_1}{dx} - \frac{V'_1}{x^2}$, und daher:

$$\int \frac{dF'}{dx} . dx = \int \frac{1}{x} . \frac{dV'_1}{dx} . dx - \int \frac{V'_1}{x^2} dx;$$

$$\int \frac{dF'}{dy} dy = \frac{1}{x} . \int \frac{dV'_1}{dy} . dy, \; \int \frac{dF'}{dz} . dz = \frac{1}{x} \int \frac{dV'_1}{dz} . dz;$$

$$\int dy \int \frac{d^2F'}{dxdy} . dx = \int dy \int \frac{1}{x} . \frac{d^2V'_1}{dxdy} . dx - \int dy \int \frac{1}{x^2} \frac{dV'_1}{dy} . dx;$$

$$\int dx \int \frac{d^2F'}{dx . dz} dz = \int dx \int \frac{1}{x} . \frac{d^2V'_1}{dxdz} dz - \int dx \int \frac{1}{x^2} \frac{dV'_1}{dz} dz;$$

$$\int dz \int \frac{d^2F'}{dydz} . dy = \frac{1}{x} \int dz \int \frac{d^2V'_1}{dydz} dz;$$

$$\int dx \int dy \int \frac{d^3F'}{dxdydz} dz = \int dx \int dy \int \frac{1}{x} . \frac{d^3V'_1}{dxdydz} . dz - \int dx \int dy \int \frac{1}{x^2} \frac{d^2V'_1}{dydz} . dz.$$

Digitized by Google

Führen wir diese Werthe in 2) ein, so ist:

$$\left.\begin{aligned} F' = &\int \frac{dV'_1}{xdx} \cdot dx + \frac{1}{x}\int \frac{dV'_1}{dy} \cdot dy + \frac{1}{x}\int \frac{dV'_1}{dz}\, dz \\ &\qquad - \int dy \int \frac{d^2V'_1}{xdxdy}\, dx \\ &- \int dx \int \frac{d^2V'_1}{xdxdz} \cdot dz - \frac{1}{x}\int dz \int \frac{d^2V'_1}{dydz} \cdot dy \\ &\qquad + \int dy \int \frac{dV'_1}{x^2dy} \cdot dx \\ &+ \int dx \int \frac{dV'_1}{x^2dz} \cdot dz + \int dx \int dy \int \frac{d^3V'_1}{xdxdydx}\, dx \\ &\qquad - \int dx \int dy \int \frac{d^2V'_1}{x^2dydz} \cdot dz + \text{Const.} \end{aligned}\right\} 5)$$

Ganz auf gleiche Art erhalten wir auch für F'', F''', f' f'', f''' und f ähnliche Ausdrücke, wie hier von F'; und wir werden erkennen, dass die auf diese Weise für F', F'', F''' gefundenen Werthe durch die zweiten, dritten, vierten Ableitungen von F und durch eine Constante bestimmt sind; ebenso hängt die Bestimmung der Werthe von f', f'', f''' von einer Constanten und der dritten, vierten, fünften, so wie die von f von der vierten, fünften und sechsten Ableitung von F und einer Constanten ab. Führen wir die gefundenen Werthe der Ausdrücke F', F'', F''', f' u. s. w. in der Gleichung 1) ein, so erhalten wir einen neuen Ausdruck, welcher die Abhängigkeit der Funktion F von den Integralien ihrer ersten, zweiten, u. s. w. Ableitungen angiebt. Auf welche Weise dieses Verfahren weiter fortgesetzt werden kann ist klar.

III. Der Taylor'sche Satz zeigt uns, wie aus der Gleichung der Fläche die Gleichungen der Oerter der Mittelpunkte gefunden werden können. Es ist nemlich bekannt, dass wenn durch $F = 0$ die Gleichung einer Fläche des $n$ten Grades, und mit x_1, y_1, z_1 die Coordinaten ihres Mittelpunkts ausgedrückt werden, dass alsdann, für $n = 2m$,

$$\frac{d^{2m-1}F}{dz_1{}^{2m-1}} = 0;\ \frac{d^{2m-1}F}{dz^{2m-2}dy_1} = 0;\ \text{u. s. w. . . . . .}$$

$$\frac{d^{2m-3}F}{dz_1{}^{2m-3}} = 0;\ \frac{d^{2m-3}F}{dx_1{}^{2m-4}dy_1} = 0;\ \text{u. s. w. . . . . .}$$

u. s. w. . . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

$$\frac{dF}{dz} = 0;\ \frac{dF}{dy} = 0;\ \frac{dF}{dx} = 0$$

und für $n = 2m + 1$

$$\frac{d^{2m}F}{dz_1^{2m}}=0;\quad \frac{d^{2m}F}{dz_1^{2m-1}dy_1}=0;\text{ u. s. w. . . . . .}$$

$$\frac{d^{2m-2}F}{dz_1^{2m-2}}=0;\quad \frac{d^{2m-2}F}{dz_1^{2m-3}dy_1}=0;\text{ u. s. w. . . . . .}$$

. .

. .

. .

$$\frac{d^2F}{dz_1^2}=0;\qquad \frac{d^2F}{dz_1dy_1}=0;\text{ u. s. w. . . . . .}$$

die Bedingungsgleichungen für das Vorhandensein von Mittelpunkten einer Fläche des $n$ten Grades sind. Die Gleichung 1). II. zeigt uns aber, wie aus einer gegebenen Constanten, und den gegebenen Werthen der Ausdrücke

$$\frac{dF}{dz},\ \frac{dF}{dy},\ \frac{dF}{dx},\ \frac{d^2F}{dxdy},\ \frac{d^2F}{dxdz},\ \frac{d^2F}{dydz},\ \frac{d^3F}{dxdydz}$$

die Funktion F oder die Gleichung der Fläche des $n$ten Grades dargestellt werden kann; oder wie wir mittelst der Gleichungen 1, 2, 3, u. s. w. im Stande sind, aus gegebenen Constanten, und den 2ten, 3ten, 4ten, 5ten und 6ten Ableitungen von $F=0$ die Gleichung der Fläche selbst herzustellen. Wir wollen dieses in einem Beispiel ausführen.

Es seien die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}3Ax^2+Fy^2+Gxy+Hx^2+2Exz+2Dyz\\+2A'x+F'y+E'x+A''=\frac{dF}{dz}\end{aligned}\right\}=0\ldots 1)$$

$$\left.\begin{aligned}Dx^2+2By^2+Kx^2+2Mxy+Gxz+2Fyz\\+F'z+2B'y+D'x+B''=\frac{dF}{dy}\end{aligned}\right\}=0\ldots 2)$$

$$\left.\begin{aligned}Ex^2+My^2+3Cx^2+2Kxy+2Hxz+Gyz\\+E'z+D'y+2C'x+C''=\frac{dF}{dx}\end{aligned}\right\}=0\ldots 3)$$

$$Gz+2My+2Kx+D'=\frac{d^2F}{dxdy}=0\ldots 4)$$

$$2Ez+2Hx+Gy+E'=\frac{d^2F}{dxdz}=0\ldots 5)$$

$$2Dz+2Fy+Gx+F'=\frac{d^2F}{dydz}=0\ldots 6)$$

$$\frac{d^3F}{dxdydz}=G\ldots\ldots 7)$$

gegeben, so finden wir aus 1, 2, 3:

Digitized by Google

$$\int \frac{dF}{dz}\,dz = Az^3 + Fy^2z + Gxyz + Hx^2z + Exz^2 + Dyz^2 + A'z^2 + F'yz + E'xz + A''z$$

$$\int \frac{dF}{dy}\,dy = Dz^2y + By^3 + Kx^2y + Mxy^2 + Gxyz + Fy^2z + F'yz + B'y^2 + D'xy + B''y$$

$$\int \frac{dF}{dx}\,.\,dx = Ez^2x + My^2x + Cx^3 + Kx^2y + Hx^2z + Gxyz + E'xz + D'yx + C'x^2 + C''x$$

und aus 4), 5), 6):

$$\int dy \int \frac{d^2F}{dxdy}\,.\,dx = Gxyz + Mxy^2 + Kx^2y + D'xy$$

$$\int dx \int \frac{d^2F}{dxdz}\,.\,dz = Ez^2x + Hx^2z + Gxyz + E'xz$$

$$\int dz \int \frac{d^2F}{dydz}\,.\,dy = Dz^2y + Fy^2z + Gxyz + F'yz$$

endlich ist aus 7):

$$\int dx \int dy \int \frac{d^3F}{dxdydz}\,.\,dz = Gxyz.$$

Führen wir diese Werthe in die Gleichung 1). II. ein, so erhalten wir:

$$F = \left\{\begin{array}{l} Az^3 + Dz^2y + Ez^2x + Fxy^2 + Gzxy + Hzx^2 \\ \qquad + By^3 + My^2x + Kyx^2 \\ + Cx^3 + A'z^2 + B'y^2 + C'x^2 + D'xy + E'xz \\ \qquad + F'yz + A''z + B''y \\ + C''x + \text{Const.} \end{array}\right\} = 0 \;..\; 8)$$

Wir können nun die Gleichungen 1), 2) und 3) als drei Flächen angehörig betrachten, auf deren Oberfläche reelle oder imaginäre Mittelpunkte der Fläche, die durch die zu bestimmende Gleichung $F = 0$ ausgedrückt wird, liegen müssen. Ebenso können die Gleichungen 4), 5), 6) als Gleichungen von drei Ebenen angesehen werden, auf denen sich ebenfalls reelle oder imaginäre Mittelpunkte der zu bestimmenden Fläche befinden müssen. Der Ausdruck 7) stellt einen aus jeder der drei Gleichungen 4), 5) oder 6) zu erhaltenden, also bekannten Coefficienten vor.

Um die Fläche 8) vollends zu bestimmen, können wir die Bedingungen treffen, dass sie durch einen gegebenen Punkt (a, b, c) gehe, so dass also:

$$\left.\begin{array}{l} Ac^3 + Dc^2b + Ec^2a + Fcb^2 + Gcba + Hca^2 + Bb^3 + Mb^2a \\ + Kba^2 + Ca^3 + A'c^2 + B'b^2 + C'a^2 + D'ab + E'ac + F'bc \\ + A''c + B''b + C''a + \text{Const.} \end{array}\right\} = 0.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich der Werth der Constanten. Auf ganz gleiche Art können wir aus den 3 gegebenen Gleichungen:

$$\frac{dF}{dz} = az + c'y + b'x + a'' = 0 \ldots . 9)$$

$$\frac{dF}{dy} = c'z + by + a'x + b'' = 0 \ldots . 10)$$

$$\frac{dF}{dx} = b'z + a'y + cx + b'' = 0 \ldots . 11)$$

und der Bedingung, dass die Fläche, deren Gleichung gesucht wird, durch einen gegebenen Punkt (α, β, γ) gehen soll, die Gleichung einer Fläche zweiten Grades bestimmen, deren Mittelpunkt auf den drei Ebenen 9), 10) und 11) liegt. Denn es ist aus 9), 10) und 11)

$$\frac{d^2F}{dzdy} = c', \quad \frac{d^2F}{dzdx} = b', \quad \frac{d^2F}{dydx} = a';$$

$$\frac{d^3F}{dxdydz} = 0.$$

Aus 9), 10), 11) und den so eben erhaltenen Werthen von $\frac{d^2F}{dxdy}$, $\frac{d^2F}{dxdz}$, u. s. w. erhalten wir, wie im vorigen Beispiel, für die fragliche Gleichung folgende:

$$az^2 + by^2 + cx^2 + 2a'xy + 2b'xz + 2c'yz + 2a''z + 2b''y + 2c''x + d = 0$$

wo wir der Kürze wegen

$$d = -\tfrac{1}{2}\{a\gamma^2 + b\beta^2 + c\alpha^2 + 2a'\alpha\beta + 2b'\alpha\gamma + 2c'\beta\gamma + 2a''\gamma + 2b''\beta + 2c''\alpha\}$$

gesetzt haben.

Stellt endlich $F = 0$ die Gleichung einer Fläche des $n$ten Grades vor, so kann diese ebenfalls bestimmt werden, wenn die Werthe der Ausdrücke $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dz}$, also auch die von $\frac{d^2F}{dxdy}$, $\frac{d^2F}{dxdz}$, $\frac{d^2F}{dydz}$, $\frac{d^3F}{dxdydz}$ und noch eine Constante bekannt sind; die Gleichung 1). II. ist ebenfalls zur Bestimmung von F erforderlich.

Digitized by Google

XXIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn Doctor A. Wiegand, Lehrer der Mathematik an der Realschule zu Halle.

Denkt man sich die Kanten einer regulären Pyramide, so wie auch die Seiten der Grundfläche in den Zusammenstossungspunkten beweglich, so wird man diesem Gestelle (um diesen kurzen Ausdruck zu gebrauchen) verschiedene Gestalten geben können, wobei sich jedoch nur die Winkel der Grundfläche ändern können. Bringt man zwischen die Seiten der Grundfläche dieses Gestelles eine Kugel und drückt diese zwischen die Kanten, so wird dieselbe, wenn sie am weiteren Vordringen gehindert wird

1) die reguläre Pyramide herstellen;

2) die Kanten werden die Kugel sämmtlich berühren;

3) die Berührungspunkte werden sämmtlich in einem Kreise liegen;

4) die Berührungspunkte werden diesen Kreis in n gleiche Theile theilen, wenn die Grundfläche des Gestelles n Seiten hatte.

5) Wie gross ist der Radius dieses Kreises, wenn der Radius der Kugel $= r$, die Kanten $= k_1\ k_2 \ldots k_n$, die Seiten der Grundfläche $s_1\ s_2 \ldots s_n$ sind?

6) Wie weit wird die Kugel vordringen, d. h. wie gross wird der Abstand ihres Mittelpunkts von der Spitze sein?

7) Wenn man sich ein solches Gestelle durch Drähte, Stäbe u. s. w. machen wollte, was hätte man bei der Wahl des Winkels an der Spitze oder der Seite der Grundfläche zu beachten?

8) Kann man bei jeder beliebig vielseitigen Pyramide einen construirbaren Winkel an der Spitze wählen?

9) Welche Winkel würden die bequemsten sein, wenn man sich einen Kreis auf die angegebene Weise in 7, 9, 11, 13 u. s. w. gleiche Theile theilen wollte?

10) Unter welchen Umständen wird die Kugel die Seiten der Grundfläche berühren?

11) Wird die Kugel die Seiten der Grundfläche und die Kanten zugleich berühren können?

12) Wie werden die Erscheinungen sich abändern, wenn man statt der Kugel einen Kegel nimmt?

13) Wird jeder Kegel gebraucht werden können?

14) Was wird eintreten, wenn die Seitenlänge des Kegels gleich der Kante des Gestelles ist? u. s. w.

Digitized by Google

Verbindet man die Mittelpunkte der drei Seiten eines Dreiecks durch gerade Linien, sucht in den entstehenden 4 Dreiecken die 4 ausgezeichneten Punkte und verbindet in den 3 äussern Dreiecken die analogen Punkte durch gerade Linien, dann ist zu untersuchen:

1) In welcher Beziehung stehen die Seiten und Flächeninhalte dieser Dreiecke unter sich und zum ursprünglichen Dreiecke?

2) In welcher Beziehung stehen zu den neuen Dreiecken und zum ursprünglichen die ausgezeichneten Punkte des mittleren?

3) Welche ähnlichen Betrachtungen lassen sich beim 4eck, 5eck, (regelmässigen und unregelmässigen) *n*eck anstellen?

4) Wenn man die ausgezeichneten Punkte eines beliebigen Dreiecks mit den Winkelspitzen desselben verbindet und die ausgezeichneten Punkte der entstandenen 3 Dreiecke in ähnlicher Weise, wie vorher, verbindet, welche Resultate geben dann die den vorigen ähnlichen Betrachtungen der entstehenden Dreiecke?

5) Wenn man ein reguläres 4eck, 5eck, 6eck, 8eck, 10eck u. s. w. durch Radien in 4, 5, 6 u. s. w. Dreiecke theilt und verbindet die entsprechenden ausgezeichneten Punkte dieser Dreiecke, in welcher Beziehung stehen die durch ähnliche Verbindung der merkwürdigen Punkte entstehenden 4, 5, 6 . . ecke unter sich und zum ursprünglichen?

6) Welche Progressionen ergeben sich bei fortgesetzter Operation für die Flächenräume, Seiten und Radien der um- und eingeschriebenen Kreise?

XXIV.

Miscellen.

Auszug aus einem Briefe des Herrn Professors G. J. Verdam an der Universität zu Leiden an den Herausgeber.

En developpant pour mes élèves, ces jours ci, les premières règles du calcul intégral, il m'a paru, que la recherche de l'integrale $\int \frac{dx}{x}$ ne fait pas un cas d'exception, quand on envisage la question d'un autre point de vue qu'ordinairement.

Dans touts les Traités on se contente de dire:

puisqu'on a $d \cdot x^{m+1} = (m+1)x^m \cdot dx$, on en conclut

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

La valeur $m = -1$ donne un cas d'exception, puisqu'elle entraine un changement dans la nature de la fonction, par la quelle l'intégrale est représentée; et en effet, on sait, par le calcul différentiel, que $d \cdot l(x) = \frac{dx}{x}$, d'ou, reciproquement,

$$\int \frac{dx}{x} = l(x) + C.$$

Pareillement on conclut de $d \cdot e^x = e^x dx$, que l'on aura $\int e^x dx = e^x + C$, et ainsi de suite.

D'ailleurs on explique, que la considération d'un cas d'exception pour la formule $\frac{dx}{x}$ peut être évitée par l'emploi d'une intégrale définie, savoir:

$$\int_a^x x^m dx = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1},$$

dont la valeur est indeterminée $\frac{0}{0}$ pour $m = -1$; puis la vraie valeur $l(\frac{x}{a})$ est fournie par l'application de la règle connue du calcul différentiel.

Or ni une telle inversion de formules, ni une pareille remarque sont nécessaires, si l'on part d'un autre principe. Ce principe est celui de l'intégration par parties, par lequel on a $\int v \cdot du = v \cdot u - \int u dv$. Ainsi, par exemple, et sans avoir egard a la constante arbitraire,

$$\int x^m \cdot dx = x^m \cdot x - \int x \cdot m x^{m-1} dx = x^{m+1} - m \int x^m dx;$$

d'ou

$$(1+m) \int x^m dx = x^{m+1},$$

et

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

De la même manière, et par une application répétée du même principe on peut trouver directement les integrales des formules différentielles, que l'on considère comme fondamentales, et que l'on pose ordinairement par inversion. La formule $\frac{dx}{x}$ même n'en fait pas exception. A la vérité, quand on y applique directement le dit principe, on retombe sur l'indétermination, ou conduit la méthode ordinaire; mais rien n'empèche de poser la variable x comme étant la somme d'une autre variable y et d'une constante, par exemple l'unité. Faisant ainsi $x = 1 + y$, on aura $dx = dy$, et

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dy}{1+y}=\int\frac{1}{1+y}\,.\,dy=\frac{y}{1+y}-\int y\,.\,d\,.\,\frac{1}{1+y}$$

$$=\frac{y}{1+y}+\int\frac{ydy}{(1+y)^2}$$

$$=\frac{y}{1+y}+\tfrac{1}{2}\frac{y^2}{(1+y)^2}-\tfrac{1}{2}\int y^2\,.\,d\,.\,\frac{1}{(1+y)^2}$$

$$=\frac{y}{1+y}+\tfrac{1}{2}\frac{y^2}{(1+y)^2}+\int\frac{y^2dy}{(1+y)^3}$$

$$=\frac{y}{1+y}+\tfrac{1}{2}\frac{y^2}{(1+y)^2}+\tfrac{1}{3}\frac{y^3}{(1+y)^3}+\int\frac{y^3dy}{(1+y)^4}$$

$$=\frac{y}{1+y}+\tfrac{1}{2}(\frac{y}{1+y})^2+\tfrac{1}{3}(\frac{y}{1+y})^3+\tfrac{1}{4}(\frac{y}{1+y})^4+$$

etc.

et comme la valeur de cette serie a pour limite $-l(1-\frac{y}{1+y})$ $=-l(\frac{1}{1+y})=+l(1+y)=+l(x)$, on pourra conclure que c'est la valeur de l'integrale cherchée.

Comme je trouve de temps en temps dans votre Journal des nouvelles démonstrations, dévéloppemens ou expositions de Theorèmes, formules ou règles connues, il ne m'a paru pas sans intérêt de vous communiquer le dévéloppement ci dessus; bien qu'il n'est pas difficile de trouver, dans plusiers cas, d'autres voies pour atteindre un but deja connu, mais il pourrait que la voie, indiquée ci haut, fut digne de rémarque.

Herr Divisionsprediger Otto zu Stargard hat mir folgende bloss auf den ptolemäischen Lehrsatz gestützte, also von trigonometrischen Betrachtungen ganz unabhängige Auflösung der Aufgabe von der Trisection des Winkels mitgetheilt.

In Taf. II. Fig. 15. sei ACB der in drei gleiche Theile zu theilende Winkel, und um dessen Spitze C als Mittelpunkt mit dem beliebigen Halbmesser $AC=r$ ein Kreis beschrieben. Setzen wir die bekannten Sehnen $AB=a$, $BF=k$, den bekannten Durchmesser $AF=d$, und $AD=DE=BE=x$, $AE=BD=y$, so liefert das in den Kreis beschriebene Viereck $ADEB$ nach dem ptolemäischen Lehrsatze die Gleichung

$$x^2+ax=y^2,$$

und das in den Kreis beschriebene Viereck $ADBF$ liefert nach demselben Satze, weil $DF=\sqrt{d^2-x^2}$ ist, die Gleichung

$$kx+dy=a\sqrt{d^2-x^2}.$$

Durch Elimination von y erhält man aus diesen beiden Gleichungen

$$kx + d\sqrt{x^2 + ax} = a\sqrt{d^2 - x^2}.$$

Quadrirt man auf beiden Seiten, so kommt

$$(k^2 + d^2)x^2 + ad^2x + 2kdx\sqrt{x^2 + ax} = a^2(d^2 - x^2)$$

oder

$$(k^2 + a^2 + d^2)x^2 + ad^2x + 2kdx\sqrt{x^2 + ax} = a^2d^2,$$

also, weil $k^2 + a^2 = d^2$ ist, wenn man zugleich durch d dividirt:

$$2kx\sqrt{x^2 + ax} = d(a^2 - ax - 2x^2).$$

Quadrirt man nun auf beiden Seiten, so ergiebt sich nach einigen leichten Reductionen, wobei man immer zu beachten hat, dass $d^2 - k^2 = a^2$ ist, die Gleichung des vierten Grades

$$4x^4 + 4ax^3 - 3d^2x^2 - 2ad^2x + a^2d^2 = 0$$

oder, wenn man $d = 2r$ setzt, die Gleichung des vierten Grades

$$x^4 + ax^3 - 3r^2x^2 - 2ar^2x + a^2r^2 = 0,$$

mittelst welcher die gesuchte Sehne x, durch die der dritte Theil des gegebenen Winkels bestimmt wird, gefunden werden muss.

Beträgt der gegebene Winkel zwei rechte Winkel oder 180°, so ist $a = 2r$, und die Gleichung zur Bestimmung der Sehne x des dritten Theils wird nach dem Obigen

$$x^4 + 2rx^3 - 3r^2x^2 - 4r^3x + 4r^4 = 0.$$

Bekanntlich ist in diesem Falle $x = r$, und wirklich ist auch

$$r^4 + 2r \cdot r^3 - 3r^2 \cdot r^2 - 4r^3 \cdot r + 4r^4 = 0.$$

G.

Berichtigung.

Auf Seite 127 hat man statt Taf. II. überall Taf. III. zu setzen.

Digitized by Google

XXV.

Bemerkungen zu den Aufsätzen XXXI. und XXXII. des Herrn Dr. Schlömilch in Thl. III. S. 269 und S. 278. dieses Archives.

Von

Herrn Doctor Barfuss

zu Weimar.

1.

In diesen beiden Aufsätzen ist Herr Dr. Schlömilch zuerst gegen die Methode der unbestimmten Coefficienten und dann gegen den Gebrauch divergirender Reihen aufgetreten und hat seine Meinung in Bezug auf den zweiten Punkt durch Beispiele unterstützt, die gewiss jeden Mathematiker sogleich auf seine Parthei führen würden, wenn die Grundlagen der Rechnungen richtig wären. Da man heut zu Tage allgemein auf Seiten des Verfassers steht und von einer Gegenparthei fast gar nicht die Rede ist, so halte ich es für angemessen, dass auch einmal die letztere ergriffen werde, und versuche demgemäss, das Irrige der Ansichten, namentlich in den genannten Aufsätzen des Herrn Verfassers, aufzuklären.

2.

Zuerst also wird gegen die Methode der unbestimmten Coefficienten der schon wiederholt besprochene Einwand gemacht: „dass noch gezeigt werden müsse, dass die Function $f(x)$ durch die Eigenschaft, durch welche die Entwickelung gemacht wurde, vollkommen charakterisirt sei, dass es keine andere Function $\varphi(x)$ gebe, welche die nämliche Eigenschaft besitze, ohne mit $f(x)$ identisch zu sein.“ Verstehe ich hier recht, so ist die Meinung die, dass wohl für zwei ganz verschiedene Functionen in Folge gemeinschaftlicher syntaktischer Eigenschaften ein und dieselbe, in allen ihren Theilen vollkommen bestimmte, Reihe gefunden werden könnte. Dann

Digitized by Google

passt aber das angeführte Beispiel nicht hierher; denn müsste dasselbe nicht so gewählt sein, dass durch die Methode der unbestimmten Coefficienten für zwei verschiedene Functionsformen doch ein und dieselbe Reihe hervorginge?

So haben allerdings die Funktionen $\frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ und $\cos ax$ die Eigenschaft gemein, dass $f(x+y)+f(x-y)=2f(x).f(y)$, allein diess beweist gar nichts gegen die Methode der unbestimmten Coefficienten. Beide Functionen haben die Eigenschaft, dass sie $=1$ sind für $x=0$ und für gleiche aber entgegengesetzte Werthe von x ganz gleiche Werthe erhalten, so dass man für beide setzen darf:

$$f(x)=1+bx^2+cx^4+dx^6+\ldots.$$

Durch die gedachte Eigenschaft beider Functionen bestimmt sich nun für beide auch einerlei Relation der Reihencoefficienten, aber auch weiter nichts. Denn setzen wir $x+y$ und $x-y$ statt x, so erhalten wir durch leichte Rechnung:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+1.2by^2+3.4.cx^2y^2+5.6dx^4y^2+\ldots+Py^4.$$

Wir erhalten aber auch

$$2f(x)\,f(y)=2f(x)+2by^2+2bbx^2y^2+2bcx^4y^2+\ldots..+Qy^4,$$

und wenn wir nun beide Entwickelungen einander gleich setzen, so hebt sich $2f(x)$ und Alles lässt sich mit y^2 dividiren. Setzen wir dann noch $y=0$, so wird

$$1.2b+3.4cx^2+5.6dx^4+\ldots.$$
$$=2b+2bbx^2+2bcx^4+\ldots.$$

und folglich $b=b$, $c=\frac{2b^2}{3.4}$, $d=\frac{2^2b^3}{3.4.5.6}$ u. s. w. Daher gilt für $\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$ sowohl, als auch für $\cos ax$ die Entwickelung

$$1+bx^2+\frac{2b^2}{3.4}.x^4+\frac{2^2b^3}{3.4.5.6}x^6+\ldots.,$$

aber b ist noch nicht bestimmt und hat in der That in jeder Function einen eignen Werth, der nur durch eine Eigenschaft gefunden werden kann, die eine jede Function als verschieden von der anderen charakterisirt.

Hatte aber Herr Dr. Schlömilch nun noch für beide Functionen dasselbe b gefunden, so wäre sein Beispiel treffend gewesen. So wird aber im Beispiele der Schluss verfehlt. Es werden dem Ausdrucke $f(x)$ die Eigenschaften beigelegt, die der Function arctg x zukommen, und es findet sich für $f(x)$ eine vollkommen bestimmte Reihe, welche zeigt, dass jedem bestimmten Werthe von x ein bestimmter Werth von $f(x)$ angehört, und dass folglich die Func-

tion $f(x)$ durch die ihr beigelegten Eigenschaften vollkommen bestimmt ist. Die Nachweisung, dass $f(x) = \text{arctg } x$ sei, hat mit der Methode der unbestimmten Coefficienten nichts zu schaffen.

Und wo wollte man auch den Beweisgrund hernehmen, dass zwei verschiedene Functionen dennoch einerlei Reihenentwickelung geben könnten. Dass eine gemeinschaftliche syntaktische Eigenschaft derselben auch eine gemeinschaftliche Relation der Coefficienten in beiden Entwickelungen begründet, ist doch wohl ganz natürlich.

Dennoch aber müssen wir den Gegnern zugeben, dass die Methode der unbestimmten Coefficienten, so wie sie meistens in Anwendung gebracht worden, nicht befriedigt; der Grund davon ist aber nicht der vom Herrn Dr. Schlömilch angegebene, sondern ist lediglich in dem Umstande zu suchen, dass, bevor die Coefficienten berechnet werden, die Form der Reihe bezüglich der Hauptgrösse gar nicht hinlänglich begründet ist. Weil für $x=0$ auch $f(x)=0$ wird, sagt Herr Dr. Schlömilch *), so darf die fragliche Reihe kein von x freies Glied enthalten. Ja wenn überhaupt eine solche Reihe existirt! Dann ist aber auch der Satz nicht richtig, denn oft existiren zwei Reihen neben einander, von denen die erste kein von x freies Glied hat und nach positiven Potenzen von x geordnet ist, während die andere ein constantes Glied hat und nach negativen Potenzen der Hauptgrösse fortschreitet. Vor diesem Schlusse warnte vor einiger Zeit ein Engländer, indem er die Function $e^{-\frac{1}{x}}$ als Beispiel anführte; dieselbe verschwindet für $x=0$, hat aber in ihrer Entwickelung ein constantes Glied und ist aus negativen Potenzen von x gebildet.

Die Existenz der Reihe muss vor Allem erwiesen sein! und dieses können die unbestimmten Coefficienten nicht leisten. So wird der binomische Lehrsatz sehr gut allgemein mit Hülfe der unbestimmten Coefficienten bewiesen, weil sich sehr leicht zeigen lässt, dass bei jedem Werthe von m für $(1+x)^m$ eine Reihe von der Form $1+mx+Ax^2+Bx^3+\ldots$ wirklich existirt. Die Methode der unbestimmten Coefficienten soll die Reihe nicht erfinden, sondern nur auf eine leichte Weise die Coefficienten und ihr Bildungsgesetz darthun. Hierauf kommt der Herr Verfasser der gedachten Aufsätze später, wo er das Beispiel $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots$ anführt, wirklich zurück. Die Existenz dieser Reihe hätte erst dargethan sein müssen.

Die Existenz einer Reihe wird nur dann mit Evidenz bewiesen, wenn sie auf schon bekannte Entwickelungen zurückgeführt wird. Diess geht leicht bei dem Binom und dann bei den Exponentialfunctionen, nicht aber bei den Ausdrücken $\sin x$ und $\cos x$, weil dieselben nicht durch eine Synthesis der allgemeinen Arithmetik, sondern durch geometrische Abstractionen gewonnen worden sind. Hier könnte man die Methode der unbestimmten Coefficienten schon damit chicaniren, dass man fragte, ob denn auch $\sin x$ oder $\cos x$ einerlei Functionsformen für alle Werthe von x seien. Die geome-

*) Es versteht sich, dass diese Behauptung nicht dem Herrn Verfasser sondern Anderen zur Last fällt.

trische Betrachtung giebt uns keine bestimmtere Relation zwischen Sinus und Bogen als die, dass die Sinus verschwindender Bögen mit den Bögen zusammenfallen, oder vielmehr, dieser Satz ist ein Postulat für die geometrische Anschauung. Daher können wir auf keine andere Art vom Bogen zum Sinus hinüber geführt werden, als durch die Betrachtung der verschwindenden Elemente. Dafür bieten uns die leicht zu findenden Formeln für sin mx und cos mx durch sin x und cos x die Hand, und es bedarf der Methode der unbestimmten Coefficienten nicht. Sind nun aber die Entwickelungen für sin x und cos x gefunden, so ergiebt sich alsbald auch die Nothwendigkeit ähnlicher Entwickelungen für alle anderen goniometrischen Ausdrücke, und hierfür kann man sich der Methode der unbestimmten Coefficienten bedienen.

3.

Der zweite Vorwurf, welcher die Methode der unbestimmten Coefficienten trifft, ist der, dass sie die Ergänzung der Reihe zur vollständigen Function nicht beachte, wodurch die natürliche Bestimmung der Divergenz oder Convergenz verloren gehe. Dieser Vorwurf hängt innig mit der jetzt allgemeinen Ansicht zusammen, dass divergirende Reihen ganz falsche Ausdrücke seien, und diese will ich daher zuerst zu beleuchten suchen.

Es ist sehr zu billigen, dass man ein gewisses oft getriebenes unnützes Spiel mit divergirenden Reihen bei Seite setzte, aber woher der Schluss gezogen wurde, dass divergirende Reihen fehlerhaft werden, ist nicht abzusehen. Wie es scheint, rechnete man damit und fand falsche Resultate. Da aber anderseits auch richtige Resultate aus divergirenden Reihen hervorgingen, so wird man veranlasst zu fragen, nach welcher Logik man den Grund der Fehler in der Divergenz finden konnte. Wie es nun mit jenen Fehlern etwa stehen mag, davon will ich ein Beispiel geben, indem ich die Irrungen aufkläre, wodurch Herr Dr. Schlömilch in seiner Abhandlung auf so widersinnige Resultate durch divergirende Reihen gekommen ist.

Zu diesem Behufe frage ich zuerst, was wird aus dem Ausdrucke $S=\frac{v\cos x-v^2}{1-2v\cos x+v^2}$ wenn $v=1$ und $x=0$ ist? Setzen wir zuerst $v=1$, so wird $S=\frac{\cos x-1}{2-2\cos x}=-\frac{1}{2}$, und hiernach also $S=-\frac{1}{2}$ für $v=1$ und $x=0$. Setzen wir aber zuerst $x=0$, so wird $S=\frac{v-v^2}{(1-v)^2}=\frac{v}{1-v}$, was für $v=1$ unendlich wird. Welches Resultat ist nun das richtige?

So hätte Herr Dr. Schlömilch berücksichtigen sollen, dass die Gleichung $S=\cos x+2S\cos x-1-S$ in dem Falle, wo $x=0$ oder $=2n\pi$ ist, keine Bestimmung giebt, dass also auch, wenn $x=2n\pi$, $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots$ nicht ohne Weiteres $=-\frac{1}{2}$ gesetzt werden durfte. Für diesen Fall lässt sich die Summe nur bestimmen, wenn man zu einem allgemeineren Ausdrucke übergeht, in welchem der fragliche als besonderer Fall enthalten ist. Die Summe $1+1+1+\ldots$ ist also $=\infty$ und nicht $=-\frac{1}{2}$, und dieses stimmt auf das Schönste mit anderen Entwicke-

lungen, z. B. mit der von $\frac{1}{1-x}$ zusammen, wenn $x=1$ genommen wird.

Hiermit fallen nun alle Argumente, welche der Herr Verfasser der gedachten Aufsätze gegen die divergirenden Reihen aufgestellt hat. Zuerst nämlich ist nicht

$$S=-\tfrac{1}{2}=1+1+1+\ldots.$$
$$-(1^2+2^2+3^2+\ldots.)\frac{x^2}{1.2}$$
$$+(1^4+2^4+3^4+\ldots.)\frac{x^4}{1.2.3.4}$$

für jeden Werth von x, sondern für $x=0$ wird

$$S=\infty=1+1+1+\ldots.,$$

was in der Ordnung ist. Für jeden andern Werth von x aber erhalten wir das triviale Resultat $\infty-\infty+\infty-\ldots.$

Ich komme nun zu der unter (7) angeführten Folgerung. Der Ausdruck $\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=-\frac{1}{2}+\frac{\sin(\frac{2n+1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}$ sagt, dass, wenn eine beliebige Anzahl von Gliedern der Reihe $\cos x+\cos 2x+\ldots.$ die Summe $-\frac{1}{2}$ geben soll, immer noch $-\frac{\sin(\frac{2n+1}{2})x}{2\sin x}$ als Ergänzung hinzugefügt werden müsse. Diess sagt unsere divergirende unendliche Reihe auch eben so gut. Wir haben $\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx+\cos(n+1)x+\cos(n+2)x+\ldots\ldots=-\frac{1}{2}$, also wenn wir bei dem Gliede $\cos nx$ abbrechen, den Rest $R=\cos(n+1)x+\cos(n+2)x+\ldots.=-\frac{1}{2}-(\cos x+\cos 2x+\ldots.+\cos nx)$; wir werden also darauf hingewiesen, die Summirung bis $\cos nx$ in endlicher Weise zu machen. Jedermann sieht ein, dass hier mit der Supposition $n=\infty$ nicht mehr ausgerichtet wird, als wenn $n=3$ wäre, jene ist nur unbestimmter. Diese Bemerkung würde den Herrn Verfasser nicht auf $\sin\infty x$ und $\cos\infty x=0$, sondern auf eine identische Gleichung geführt haben.

Die unendliche Reihe drückt nichts weiter aus als das Entwickelungsgesetz, und ihre Bedeutung ist zunächst nur die syntaktische. Es ist $\cos x+\cos 2x+\ldots.+\cos nx-\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}=-\frac{1}{2}$, und wenn der Rest noch weiter entwickelt wird, so kommen Glieder hinzu, die nach demselben Gesetz gebildet sind. Das Bildungsgesetz der Reihe enthält also schon den Rest, daher dieser weggelassen ist. Desshalb kann man aus der Formel (7) durch die Annahme $n=\infty$ nicht auf Eulers Reihe gelangen, ohne zugleich auch den Rest wegzulassen. So aber ist die unendliche, d. h. die unvollendete oder unvollendbare Reihe mit der endlichen verwechselt worden.

Zuletzt wird die Eulersche Reihe durch eine Integration mit den Lagrangeschen oder Fourierschen Reihen in Verbindung ge-

bracht. Der Herr Verfasser hat aber nur mit der beschränkten Summenformel $-\frac{1}{2} = \cos x + \cos 2x + \ldots$ gerechnet, von welcher wir wissen, dass sie für $x = 0$, welchen Werth das unbestimmte Integral durchlaufen muss, nicht mehr gilt. Daher kann auch die Rechnung, deren Basis die Allgemeingültigkeit der Summenformel ist, nicht richtig sein. Führt man aber statt $\cos x + \cos 2x + \ldots$ die allgemeinere Reihe $v \cos x + v^2 \cos 2x + v^3 \cos 3x + \ldots$ in die Rechnung ein, deren Summe $= \frac{v \cos x - v^2}{1 - 2v \cos x + v^2}$ sein wird, integrirt und setzt dann $v = 1$, so wird man mit anderen, z. B. mit Martin Ohm, das gewünschte Resultat mit völliger Allgemeinheit erhalten.

Also nicht in der Unrichtigkeit der divergirenden Reihe, sondern in der beschränkten Geltung der Summenformel ist der Grund aller Irrungen zu finden. Die Summe der Reihe $\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \ldots$ wird von $x = 0$ bis $x = \pm\pi$ durch $\frac{1}{2}$ richtig dargestellt, daher man auch mit ihr richtige Resultate erhält, wenn man ihre Anwendung nicht über die gedachten Grenzen ausdehnt. Multiplicirt man z. B. mit dx und integrirt von 0 an, so erhält man $\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots$, welche Reihe bis zu $\pm\pi$ als richtig anerkannt wird, aber für $x = \pm\pi$ nicht mehr gilt, eben weil die Urreihe $\cos x - \cos 2x + \ldots$ für diesen Werth nicht mehr gilt.

Keine unserer Functionsformen $f(x)$ kann unmittelbar die Eigenschaft haben, dass sie constant $= -\frac{1}{2}$ für jeden Werth von x wäre, aber für $x = 0$, $x = 2n\pi$ unendlich würde. Daher liess sich auch die Summe der Reihe $\cos x + \cos 2x + \ldots$ nicht allgemein ausdrücken. Wir müssen daher den fraglichen Ausdruck einem allgemeineren unterordnen, in welchem er als specieller Fall für einen gewissen Werth einer gewissen Constante enthalten ist. Diese Bemerkung ist von Wichtigkeit; so können wir eine Form von den gedachten Eigenschaften nur mit Hülfe einer Constante $v = 1$ etwa in dem Ausdrucke $\frac{v \cos x - v^2}{1 - 2v \cos x + v^2}$ darstellen.

4.

Nach diesen Betrachtungen kann die Bemerkung, dass die Methode der unbestimmten Coefficienten den Rest der Reihe nicht brachte, nur noch wenig Bedeutung haben; sie ist aber auch durchaus grundlos. — Es ist sonderbar, dass während in der allgemeinen Arithmetik überall nach Allgemeinheit der Formen gestrebt worden ist, dieselbe bei den Reihen gegenwärtig so entschieden zurückgewiesen wird. Die Grundoperationen aller Grössenlehre sind Zusammenfügen und Trennen, und die daher entspringenden des Vervielfachens und Theilens. So lange wir es unmittelbar nur mit diesen zu thun haben, sind wir im Gebiete der gemeinen Arithmetik, aber schon im Beginn der Wissenschaft macht sich die Nothwendigkeit grösserer Allgemeinheit der Formen geltend. Dieselbe wird nun durch die grosse Maxime erhalten, dass für jedwede zwei direct entgegengesetzte Operationen eine einzige Form gesucht wird, in welcher beide enthalten sind. Diess geschieht zuerst bei der Multiplication, welche ur-

Digitized by Google

sprünglich ein Vervielfachen ist, aber mit Hülfe gebrochener Multiplicatoren auch die Operation des Theilens in sich aufnimmt. Diese allgemeine Multiplication ist bloss eine syntaktische, die nur desshalb sich so eng an die arithmetischen Grundoperationen anschliesst, weil sie sich so bestimmt mit der Bildung der Zahlen aus der Eins vergleichen lässt. Hier liesse sich aber der Unterschied zwischen vervielfältigenden und theilenden Factoren auf ähnliche Weise durchführen, wie der Unterschied positiver und negativer Summenglieder in der Addition. Die Theorie der letzteren bringt man gewöhnlich erst später, füglicher würde man sie aber gleich nach den festgestellten Begriffen des arithmetischen Addirens und Subtrahirens als das Mittel hinstellen, den Unterschied in der Operation des Zu- und Abzählens aufzuheben und denselben durch Unterscheidung positiver und negativer Summenglieder wieder zu gewinnen. Die Potenzenlehre schafft alsdann mit Zuziehung gebrochener Exponenten einen allgemeinen Ausdruck für die eigentliche Potenzirung und das eigentliche Wurzelausziehen, und durch Einführung negativer Exponenten einerlei Rechnungsgesetze für die Multiplication und Division mit Potenzen. Weiter aber ist das obige Princip mit Gewinn noch nicht durchgeführt worden.

Hieraus ersehen wir nun, dass in der allgemeinen Arithmetik jede Operation eine höhere syntaktische Bedeutung hat, der die arithmetische untergeordnet ist. Diese höhere syntaktische Bedeutung ist der Grund aller Schwierigkeiten, aber zugleich auch die Quelle aller Gleichförmigkeit und Einheit und der meisten höheren Entdeckungen gewesen. Wegen ihrer syntaktischen Allgemeinheit haben daher auch unsere Formeln oft nur syntaktische Bedeutung und verlieren die arithmetische Brauchbarkeit; sie sind blosse Figuren der combinatorischen Analysis. (Vergl. Fries mathem. Naturphilosophie).

Warum nun die Reihen in ihrer allgemeinen syntaktischen Bedeutung bei Seite schieben wollen, ist nicht abzusehen. Ist denn nicht $x + x^2 + x^3 + \ldots$. die Entwickelung von $\frac{x}{1-x}$ und nur von diesem, auch wenn nicht hinzugefügt wird, x müsse kleiner als 1 sein? Die Reihe hat vom Standpunkte der allgemeinen Arithmetik aus zunächst nur eine syntaktische Bedeutung durch ihr Entwickelungsgesetz, und die Frage nach ihrer Summe wird hier nicht durch die Summe aller Glieder, sondern durch die erzeugende Function beantwortet. Ihre arithmetische Bedeutung gewinnt sie erst dann, wenn sie convergirt aber unabhängig von dieser Eigenschaft ist in ihr Alles durch ihr Entwickelungsgesetz und folglich auch ihr Rest bestimmt.

Indem nun die Reihe entwickelt wird, kommt es lediglich darauf an, das Gesetz ihrer Entwickelung zu finden, und hierzu kann der Rest nichts beitragen. Die Bestimmung der Convergenz ist eine untergeordnete und kommt erst dann in Frage, wenn die Reihe arithmetische Brauchbarkeit gewinnen soll. Hier kann ich wiederum nicht absehen, wozu die Beachtung des Restes nützen soll. Die erzeugende Function ist jedesfalls die wahre Summe, aber ich kann sie aus der Reihe nur dann näherungsweise erhalten, wenn diese convergirt, d. h. nicht wenn der Rest verschwindet, sondern wenn er gegen den Werth der erzeugenden Function verschwindet. In den Fällen also, wie der Werth der erzeugenden Function

unendlich gross wird, braucht der Rest nicht unendlich klein, sondern nur endlich zu werden. Hiernach bestimmt sich der Begriff der Convergenz allgemeiner. Die Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\ldots$. divergirt nicht, sondern convergirt, weil der Rest gegen ihre Summe verschwindet. Daher hat Poisson ganz Recht, wenn er sagt, dass jede Reihe convergire, deren Glieder verschwindend klein werden; und hiernach ist die Bestimmung der Convergenz, die man nicht mit dem Zusammenzählen unendlich vieler Glieder verwechseln muss, wenigstens nicht schwerer als mit Beachtung des Restes.

5.

Die Abhandlung XXXII. wird uns recht klar zeigen, wie nöthig es sei, auf die syntaktische Bedeutung unserer Formen zu achten. An die Spitze stellt Herr Dr. Schlömilch den nachher bewiesenen Satz

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1-x^n} = \frac{\pi}{n \operatorname{tg} \frac{m\pi}{n}}$$

und findet dann für $m=1$ und $n=2$ den Ausdruck

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} = 0;$$

„allein wenn man für $\frac{1}{1-x^2}$ die Reihe $1+x^2+x^4+\ldots$.
„setzen wollte, so würde man $\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} = \infty+\frac{1}{2}\infty^3+\ldots$.
„und also $=\infty$ erhalten, ein ganz falsches Resultat.“

Zuerst bemerke ich, dass der Herr Verfasser bei der Entwickelung des Ausdrucks $J=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1-x}$ in dem Schlusse, dass der Rest allgemein verschwinde, sich geirrt hat, denn es wird allerdings die Function $\frac{1-x^{1-2a}}{1-x}$ unendlich, nämlich für $x=0$ wenn $a>\frac{1}{2}$. Für $a=\frac{1}{2}$ bekommt man das unbestimmte Resultat 0^0, allein wenn $a<\frac{1}{2}$, so hat obiger Ausdruck allerdings nur endliche Werthe zwischen $x=0$ und $x=1$. Ich will daher zuerst mit Berücksichtigung des Restes das Resultat genauer begründen und zugleich die eigentliche Basis der ganzen Rechnung bestimmter hervorheben.

Man hat

$$J=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1-x} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{1-x} + \int_1^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1-x}.$$

Hier erlaube ich mir nun im zweiten Gliede $-\frac{1}{x-1}$ *statt* $\frac{1}{1-x}$ *zu setzen* und erhalte

$$J=\int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{1-x} - \int_1^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x-1}.$$

Nun habe ich identisch

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$$\frac{1}{x-1} = x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + \ldots + x^{-n} + \frac{x^{-n}}{x-1}$$

also

$$J = \int_0^1 dx(x^{a-1} + x^a + x^{a+1} + x^{a+2} + \ldots + x^{a+n-1})$$

$$- \int_1^\infty dx(x^{a-2} + x^{a-3} + x^{a-4} + \ldots + x^{a-n-1})$$

$$+ \int_0^1 \frac{x^{a+n}dx}{1-x} - \int_1^\infty \frac{x^{a-n-1}dx}{x-1}.$$

Man hat aber zwischen diesen Grenzen die erste Reihe

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a+3} + \ldots + \frac{1}{a+n}$$

die andere aber

$$-\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a-2} - \frac{1}{a-3} \cdots - \frac{1}{a-n}$$

also den Unterschied beider =

$$\frac{1}{a} - 2a\left(\frac{1}{1^2-a^2} + \frac{1}{2^2-a^2} + \frac{1}{3^2-a^2} + \ldots + \frac{1}{n^2-a^2}\right) = R,$$

daher

$$J = R + \int_0^1 \frac{x^{a+n}dx}{1-x} - \int_1^\infty \frac{x^{a-n-1}dx}{x-1}.$$

Um nun für die beiden Integrale gleiche Grenzen zu erhalten, setze ich mit Herrn Dr. Schlömilch im zweiten $\frac{1}{z}$ statt x und erhalte es dadurch

$$= -\int_1^0 \frac{dz}{z^{a-n}(1-z)} = -\int_1^0 \frac{z^{n-a}dz}{1-z} = \int_0^1 \frac{z^{n-a}dz}{1-z}.$$

Daher erhalte ich für den Rest der Reihe den Ausdruck

$$\int_0^1 \frac{x^{n+a}dx}{1-x} - \int_0^1 \frac{x^{n-a}dx}{1-x} = \int_0^1 \frac{x^{2a}-1}{1-x}\, x^{n-a}dx,$$

welches nun, da in Folge des positiven a die Function $\frac{x^{2a}-1}{1-x}$ zwischen $x=0$ und $x=1$ immer nur endliche Werthe hat, für wachsende n verschwindet. Und da nun die ins Unendliche fortgesetzte Reihe R den Werth $\frac{\pi}{\operatorname{tg} an}$ hat, so ist

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1-x} = \frac{\pi}{\operatorname{tg} an}, \quad +1 > a > 0.$$

Digitized by Google

Doch diese Rechnung kann uns hier nicht zur Klarheit führen, wir müssen ihre Grundlage näher erörtern. Da sehen wir denn, dass ich, wie auch Herr Dr. Schlömilch, den Ausdruck $\frac{1}{1-x}$ in $\frac{-1}{x-1}$ umänderte; was giebt mir aber dazu ein Recht? Wird denn hierdurch nicht die Functionsform ganz wesentlich abgeändert? Es ist gar nicht einerlei, ob ich z. B. $\int\frac{dx}{1-x}$ oder $-\int\frac{dx}{x-1}$ schreibe.

Daher ist der Ausdruck $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}$ ein imaginärer; er hat bloss eine syntaktische Bedeutung und ist ein arithmetischer Unsinn. Warum derselbe aber doch ohne weitere Zusätze in die Lehrbücher überging, daran ist lediglich die beschränkte Auffassung des bestimmten Integrales Schuld. Dasselbe ist nicht

$$\int_a^b f(x)dx = \delta(fa + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots.)$$

für $\delta = \frac{b-a}{\infty}$, das ist es nur, wenn das allgemeine Integral $\int f(x)dx$ für alle Werthe von $x = a$ bis $x = b$ eine reelle Function von x ist. Das bestimmte Integral ist nichts anderes, als die Differenz zweier besonderen Werthe eines allgemeinen, und diess ist seine syntaktische Bedeutung, der jene arithmetische untergeordnet ist.

Betrachten wir nun den Ausdruck $\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}$, so lässt er sich, weil $m < n$ und beide ganze Zahlen sind, in

$$\frac{Adx}{1-x} + \frac{B\,\psi(x)\,dx}{1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}}$$

zerlegen, wo $\psi(x)$ eine ganze rationale Function von x sein wird. Hier ist nun der zweite Theil immer das Differential einer reellen Function von $x = 0$ bis $x = \infty$, nicht so aber der erste; denn es ist $\frac{dx}{1-x} = -d\log(1-x)$ und also nur von 0 bis 1 reell. Wollte ich aber $\frac{-dx}{x-1}$ setzen, so wäre dieses $= -d\log(x-1)$ und also nur von 1 bis ∞ reell.

Ich will zur besseren Anschaulichkeit das Beispiel $\int\frac{dx}{1-x^3}$ wählen, welches von $x = 0$ bis $x = \infty$ nach dem Lehrsatze $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1-x^n} = \frac{\pi}{n\,\mathrm{tg}\,\frac{m\pi}{n}}$ so viel als $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ werden würde. Aber ich finde

$$\frac{1}{1-x^3} = \frac{\frac{1}{3}}{1-x} + \frac{\frac{1}{3}(2+x)dx}{1+x+x^2},$$

also wenn ich integrire

Digitized by Google

$$\int \frac{dx}{1-x^3} = \tfrac{1}{3}\int \frac{dx}{1-x} + \tfrac{1}{6}\log(1+x+x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Hier giebt nun $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ von $x=0$ bis $x=\infty$ den Werth $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, also dasselbe wie oben; aber was wird denn aus $\int_0^\infty \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{6}\log(1+\infty+\infty^2)$?

Also die Form muss vor Allem gesichert sein! wenn anders unsere Rechnungen nicht sinnlos sein sollen. Die wahre Bedeutung von $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1-x^n} = \frac{\pi}{n\,.\,\operatorname{tg}\frac{m}{n}\pi}$ ist die, dass es die Differenz zweier ganz verschiedener bestimmten Integrale bedeutet, die sich auf die Formen $\int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{1-x}$ und $\int_1^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x-1}$ bringen lassen. Weil nun hier eigentlich eine Aenderung der Functionsform während des Integrirens eintritt, so sollte man so etwas nicht durch $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1-x}$ ausdrücken.

Hier ist nun klar, worin der Fehler des Herrn Dr. Schlömilch bei der Integration von $\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2}$ zu suchen sei. Indem die Integration mittels der Reihe $\frac{1}{1-x^2} = 1+x^2+x^4+\ldots$ geschah, wurde die Functionsform von $x=0$ bis $x=\infty$ beibehalten und dadurch $\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} = \infty + \frac{1}{3}\infty^3 + \frac{1}{5}\infty^5 + \ldots$ gefunden. Hier darf ich nun nicht darnach fragen, was alle Glieder dieser Reihe zusammengenommen ausmachen, sondern ich muss ihre syntaktische Bedeutung nachweisen. Darnach ist sie die Entwickelung von $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$ für $x=\infty$, und folglich ist

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+\infty}{1-\infty}\right) = \tfrac{1}{2}\log(-1).$$

Wenn ich aber $\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2}$ in $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{1-x^2}$ trenne und nachher $-\int_1^\infty \frac{dx}{x^2-1}$ aus $\int_1^\infty \frac{dx}{1-x^2}$ mache, so verändere ich die Functionsform und habe zwei ganz verschiedene Integrale. Dass ihr Unterschied $=0$ sei, findet man durch Substitution der Reihen

$$\frac{1}{1-x^2} = 1+x^2+\ldots.$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \ldots.$$

nun sehr leicht, denn wir erhalten

$$(1-1)+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3})+(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{5})+\ldots. = 0.$$

Digitized by Google

Dass aber die Integrale $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$ und $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3-1}$ wesentlich verschiedenen Formen angehören, kann man leicht sehen, wenn man die allgemeinen Integrale sucht; ersteres ist $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$, das andere $\frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1}$.

Anmerkung. Meine eignen Ansichten über die Methode der unbestimmten Coefficienten darf ich als hinreichend bekannt voraussetzen; immer aber werde ich auch entgegengesetzten Ansichten, wenn sie nur mit Würde und Ruhe vorgetragen werden, gern verstatten, sich in dem Archive geltend zu machen. G.

XXVI.

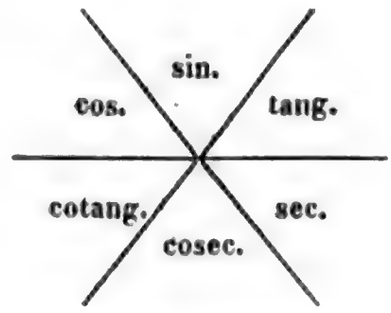
Goniometrischer Zirkel.

Von dem

Herrn Oberlehrer Dr. Brehmer

am Pädagogium zu Putbus.

Werden die goniometrischen Functionen eines und desselben Winkels x in einem Zirkel folgendermassen neben einander gestellt:



so lassen sich die einfachen Relationen zwischen ihnen durch folgende Gesetze ausdrücken:

1) Das Product zweier in Scheitelwinkeln stehender Functionen ist gleich 1.

$$\sin x \,.\, \operatorname{cosec} x = 1, \text{ u. s. w.}$$

2) Das Product zweier über oder unter derselben Linie stehender Functionen ist gleich der eingeschlossenen Function.

$$\sin x \,.\, \sec x = \operatorname{tang} x, \text{ u. s. w.}$$

Digitized by Google

3) Der Quotient zweier anliegender Functionen ist gleich der dem Dividendus auf der anderen Seite anliegenden Function,

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \text{tang } x, \text{ u. s. w.}$$

Anmerkung. Wir verweisen bei dieser Gelegenheit auf das Programm: Ein Schema zur Erleichterung des Elementarunterrichtes in der Trigonometrie von Dr. E. W. Grebe. Cassel. 1840. Das in diesem Programm mitgetheilte Schema erstreckt sich auch auf die Formeln zur Auflösung der ebenen rechtwinkligen Dreiecke.

G.

XXVII.

Ueber Theilung und Verwandlung einiger ebenen Figuren.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin.

Wenn man H. Gerwien's sinnreichen Beweis der Gleichheit zweier Dreiecke von derselben Grundlinie und Höhe vermittelst blosser Congruenz weiter verfolgt, so gelangt man zu nicht minder merkwürdigen Theilungen und Verwandlungen. Die erwähnte Construction besteht im Folgenden. Man lege die beiden Dreiecke ABC und ABC' mit ihrer gemeinschaftlichen Grundlinie AB so an einander, dass die Spitzen C und C' auf verschiedene Seiten derselben fallen. Die Verbindungslinie CC' wird dann durch ihren Durchschnittspunkt D mit der Grundlinie AB gehälftet. Von D ziehe man nach den Mitten der vier übrigen Seiten der beiden gegebenen Dreiecke gerade Verbindungslinien. Durch dieselben wird jedes dieser Dreiecke in ein Viereck und zwei Dreiecke getheilt, die einander beziehlich congruent sind; so dass man also aus den Theilen des einen Dreiecks mittelst geeigneter Drehung und Verschiebung das andere Dreieck zusammensetzen kann.

Eine solche Theilung und Verwandlung lässt sich auch bei zwei beliebigen Dreiecken ausführen, die weder dieselbe Grundlinie noch dieselbe Höhe haben, sondern einander schlechthin gleich

sind. Heissen ABC und $A'B'C'$ diese beiden Dreiecke, so kann man offenbar immer ein Mittelglied (Dreieck) auffinden, welches mit jedem der beiden gegebenen Dreiecke gemeinschaftliche Grundlinie und Höhe (freilich mit jedem eine andere) hat. Man darf nur von jedem Dreiecke eine geeignete Seite z. B. AB und $A'B'$ (Taf. IV. Fig. 1.) auswählen und aus ihnen unter geeignetem Winkel ein Dreieck ABB' bilden, welches mit ABC die Grundlinie AB und mit $A'B'C'$ die Grundlinie $A'B'$ gemeinschaftlich hat. Führt man nun, der obigen Methode zufolge, die theilenden Geraden für die beiden Dreiecke ABC und ABB' aus, so werden dieselben hiedurch in die nöthigen Theile zerlegt, um das eine in das andere verwandeln zu können. Die Theile des Dreiecks ABB' werden durch eine nochmalige Anwendung derselben Construction in Bezug auf die Dreiecke ABB' und $A'B'C'$ wiederum in Theile zerlegt. Wenn man nun die letztere Theilung auf die schon vorhandenen Theile des Dreiecks ABC überträgt und wenn man umgekehrt die erste Theilung von ABC und ABB' auf das Dreieck $A'B'C'$ ausdehnt, welche Construction in der Figur zu erblicken ist, so sind offenbar die entstandenen Theilungen hinlänglich, nicht nur um aus den Theilen von ABC der Reihe nach die Dreiecke ABB' und $A'B'C'$ zu bilden, sondern auch um das Dreieck ABC unmittelbar in das Dreieck $A'B'C'$ zu verwandeln. In der Figur sind die congruenten Theile durch dieselben Buchstaben α, β, ... bezeichnet.

Es ist nun klar, dass man auch die Gleichheit zweier Parallelogramme durch Congruenz nachweisen kann. Man braucht zu dem Ende nur jedes derselben durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zu theilen, und auf jedes dieser Dreiecke die beschriebene Theilung anzuwenden. Wenn man aber in Taf. IV. Fig. 1. die Parallelogramme über AB und AB' vollendet und in jedem der hinzutretenden Dreiecke dieselbe Theilung anbringt, so wird man gewahr, dass sich die Sache viel einfacher gestalten lässt. In den beiden Parallelogrammen BD und $B'D'$ haben nämlich einerseits die Theile δ, α, ζ und andererseits die Theile γ, β, ε dieselbe Lage in Beziehung auf einander. Man kann sie daher beziehlich zusammenfassen und braucht sie, um das Parallelogramm BD in das Parallelogramm $B'D'$ zu verwandeln, nicht erst in ihre Theile α, δ, ζ oder γ, β, ε zu zerlegen. Es ergiebt sich daher die folgende Construction (Taf. IV. Fig. 2.).

„Um das Parallelogramm BD in das Parallelogramm $B'D'$ zu „verwandeln, ziehe man durch die Mitte von BD eine Gerade „dergestalt, dass das auf ihr von einem Seitenpaare (z. B. AB „und CD) abgeschnittene Stück, einer Seite (z. B. AB') des Pa„rallelogramms $B'D'$ gleich wird. Von den Mitten des anderen „Seitenpaares (also AD, BC) fälle man auf diese Gerade zwei „andere Gerade unter dem Parallelogramm-Winkel von $B'D'$. „Durch diese drei Gerade wird das Parallelogramm BD in solche „Stücke getheilt werden, dass sich aus ihnen das Parallelogramm „$B'D'$ zusammensetzen lässt.“

Vermittelst dieser Construction kann man offenbar auch den pythagoräischen Lehrsatz durch Congruenz beweisen, wenn man auf Euklidische Weise das Quadrat der Hypotenuse mit der Höhe des rechtwinkligen Dreiecks in zwei Rechtecke zerlegt, welche den

Quadraten der beiden Katheten beziehlich gleich sind. In diesem Falle lässt sich die Construction einfach so angeben:

„Durch die Mitte des Quadrats *BD* (Taf. IV. Fig. 3.) ziehe „man eine Parallele mit der Hypotenuse, und auf diese Pa„rallele fälle man von den Mitten der Seiten *BC* und *DE* „zwei Perpendikel; so wird man aus den entstandenen „Stücken durch Drehung und Verschiebung das Rechteck „*CF* zusammensetzen können."

Dasselbe gilt natürlich auch von dem Quadrate der kleineren Kathete, nur dass man hier auch subtractive Stücke in Betracht zu ziehen hat.

Eine andere Verwandlung des Quadrats der Hypotenuse in die beiden Quadrate der Katheten, wobei nur eine parallele Verschiebung nöthig ist, lehren Fig. 4. und Fig. 5. auf Taf. IV. Sie sind ohne weitere Erläuterung verständlich.

Den Beweis für alles Vorstehende wird man mir erlassen.

XXVIII.

Ueber die Berechnung des Elasticitäts-Modulus aus directen Dehnungsversuchen.

Von dem

Herrn Fabriken-Commissionsrath A. F. W. Brix

zu Berlin.

Bei der Berechnung der Elasticität prismatischer Körper, die durch gegebene Kräfte nach der Richtung ihrer Länge gespannt werden, geht man bekanntlich von dem durch die Erfahrung bestätigten Gesetze aus, dass unter übrigens gleichen Umständen die beobachteten Längendehnungen, sofern sie die sogenannte Elasticitätsgrenze nicht überschreiten, den spannenden Kräften und den Längen der Prismen direct, den Querschnitten derselben aber umgekehrt proportional sind. Bezeichnet also λ die Länge, a den Querschnitt eines Prismas, und ist λ die Ausdehnung, welche dasselbe erleidet, sobald es einer Längenspannung $= P$ unterworfen wird, so ist λ der Grösse $\frac{Pl}{a}$ proportional, und es findet daher die Gleichung Statt:

$$1) \quad m\lambda = \frac{Pl}{a},$$

worin m einen Erfahrungscoefficienten bezeichnet, der nur von der physischen Beschaffenheit des Körpers abhängig, für Körper einerlei Art also constant ist. Man nennt ihn bekanntlich den Elasticitäts-Modulus, und um seinen numerischen Werth für irgend eine gegebene Substanz durch directe Dehnungsversuche zu ermitteln, dient die Formel

$$2) \quad m = \frac{Pl}{a\lambda},$$

in welcher P, l und a bekannte, dem Versuche zum Grunde gelegte Grössen bedeuten, während λ die beobachtete Dehnung ist, die jedoch wieder verschwinden muss, sobald die Spannung P aufgehoben wird.

Bei den auf Veranlassung Eines Hohen Finanzministerii unter meiner Leitung im Königlichen Gewerbe-Institut angestellten Versuchen über die Festigkeit verschiedener Baumaterialien kamen unter Andern auch schmiedeeiserne Rundstangen bis zu einer Stärke von etwa 1¼ Zoll mittleren Durchmesser zur Anwendung, um sie in Bezug auf ihr elastisches Verhalten bei einer gewissen Längenspannung zu prüfen. Da aber viele von diesen Stangen nicht an allen Stellen denselben Durchmesser hatten, so kam es darauf an, eine Methode zu ermitteln, durch welche der Elasticitäts-Modulus genauer gefunden werden konnte, als nach dem gewöhnlichen Verfahren, bei welchem die Stange als ein Cylinder vorausgesetzt wird, dessen Durchmesser dem mittleren Durchmesser der geprüften Stange gleich ist. Das Ungenügende dieses Verfahrens hat schon Lagerhjelm erkannt, weshalb er bei seinen Versuchen *) diejenigen Stangen, welche nicht überall denselben Durchmesser zeigten, als eine Aneinanderfügung mehrerer Cylinder von verschiedenen Durchmessern betrachtete, und darauf die Berechnung ihrer Längendehnung basirte.

Das zu gleichem Zwecke von mir in Anwendung gebrachte Verfahren, welches den Gegenstand dieser Mittheilung bildet, besteht im Folgenden:

Man denke sich die Stange in n gleiche Theile getheilt, und in den Theilpunkten die Querschnitte bestimmt, welche sämmtlich als verschieden vorausgesetzt werden. Betrachtet man demnächst jeden dieser Theile als einen abgekürzten Kegel, und berechnet unter dieser Voraussetzung die Dehnungen aller einzelner Theile, so muss deren Summe gleich der beobachteten Dehnung der ganzen Stange sein. Auf diesem Wege gelangt man zu einer Gleichung, aus welcher sodann der Elasticitäts-Modulus leicht gefunden werden kann.

Um dies Verfahren in Ausübung zu bringen, könnte es zuvör-

---

*) Peter Lagerhjelm's Versuche zur Bestimmung der Dichtheit, Gleichartigkeit, Elasticität u. s. w. des gewalzten und geschmiedeten Stabeisens. Aus dem Schwedischen übersetzt von Dr. J. W. Pfaff. Nürnberg. 1829. Seite 134.

Digitized by Google

derst darauf an, die Dehnung eines abgekürzten Kegels zu berechnen, welche sich folgendermassen gestaltet:

Der grösseren Allgemeinheit wegen setzen wir eine abgekürzte Pyramide voraus, deren parallele Endflächen mit a und a' bezeichnet werden sollen. Es sei l die Länge dieses Körpers und λ die Dehnung, welche durch eine, nach der Richtung seiner Schwerpunktsachse wirkende Kraft P hervorgebracht worden ist. Man denke sich von a aus ein unbestimmtes Stück $= x$ auf der Achse abgeschnitten, und bezeichne den Querschnitt der Pyramide im Endpunkte von x mit y. Zur Bestimmung dieses Querschnittes hat man dann die Gleichung

$$\begin{aligned} l\sqrt{y} &= (l-x)\sqrt{a} + x\sqrt{a'} \\ &= l\sqrt{a} - x(\sqrt{a} - \sqrt{a'}); \end{aligned}$$

aus welcher sich demnächst ergiebt:

$$y = \frac{1}{l^2}\,(l\sqrt{a} - x(\sqrt{a} - \sqrt{a'}))^2.$$

Bezeichnet nun λ_x die Dehnung des in Rede befindlichen Körpers auf die Länge x, dann ist $d\lambda_x$ die dem Increment dx zukommende Dehnung, und dafür kann nun nach (1) die Gleichung aufgestellt werden:

$$m \,.\, d\lambda_x = \frac{P \,.\, dx}{y}.$$

Aus ihr ergiebt sich, nach Einsetzung des obigen Ausdruckes von y,

$$d\lambda_x = \frac{Pl^2}{m} \cdot \frac{dx}{(l\sqrt{a} - x(\sqrt{a} - \sqrt{a'}))^2};$$

also

$$\lambda = \frac{Pl^2}{m} \int_0^l \frac{dx}{(l\sqrt{a} - x(\sqrt{a} - \sqrt{a'}))^2}.$$

Vollführt man die hier angedeutete Integration zwischen den bezeichneten Grenzen, was keine Schwierigkeiten hat, so findet man

$$3) \quad \lambda = \frac{Pl^2}{m} \cdot \frac{1}{l\sqrt{aa'}} = \frac{Pl}{m\sqrt{aa'}}.$$

Die Dehnung der abgekürzten Pyramide ist demnach der eines Prismas gleich, dessen Querschnitt das geometrische Mittel zwischen den Endflächen des ersten Körpers ist.

Ist die Rede von einem abgekürzten Kegel, und man bezeichnet die den Endflächen a und a' zugehörigen Durchmesser bezüglich mit d und d', so verwandelt sich die vorige Formel in folgende

$$4) \quad \lambda = \frac{4Pl}{\pi m d d'}.$$

Zur Anwendung der letzten Formel auf den mir bei den Ver-

suchen vorgelegenen besondern Fall seien nun $d_1, d_2, d_3, \ldots d_n, d_{n+1}$ die verschiedenen, in den $n+1$ Theilpunkten gemessenen Durchmesser, und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ seien die Dehnungen in den einzelnen Abtheilungen der Stange. Alle diese Theile haben dieselbe Länge $= \frac{l}{n}$, wenn l die Länge der Stange in ihrem natürlichen Zustande bezeichnet. In Gemässheit der obigen Formel hat man dann nach einander:

$$\lambda_1 = \frac{4Pl}{\pi m n} \cdot \frac{1}{d_1 d_2};$$

$$\lambda_2 = \frac{4Pl}{\pi m n} \cdot \frac{1}{d_2 d_3};$$

$$\lambda_3 = \frac{4Pl}{\pi m n} \cdot \frac{1}{d_3 d_4};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_n = \frac{4Pl}{\pi m n} \cdot \frac{1}{d_n d_{n+1}}.$$

Summirt man diese Gleichungen, und setzt die ganze Dehnung der Stange, nemlich $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots \lambda_n = \lambda$, so kömmt

$$\lambda = \frac{4Pl}{\pi m n} \cdot \left(\frac{1}{d_1 d_2} + \frac{1}{d_2 d_3} + \frac{1}{d_3 d_4} + \ldots + \frac{1}{d_n d_{n+1}}\right);$$

oder, wenn der Kürze wegen die Summe der Reihe in der Klammer gleich $\Sigma\left(\frac{1}{d_1 d_2}\right)$ gesetzt wird,

$$5) \quad \lambda = \frac{4Pl}{\pi m n} \cdot \Sigma\left(\frac{1}{d_1 d_2}\right).$$

Diese Gleichung liefert nun für den Elasticitäts-Modulus die Formel

$$6) \quad m = \frac{4Pl}{\pi n \lambda} \cdot \Sigma\left(\frac{1}{d_1 d_2}\right),$$

nach welcher die Eingangs erwähnten Versuche berechnet worden sind.

Die dadurch gewonnenen Resultate werden später der Oeffentlichkeit übergeben werden, weshalb ich mich für den Zweck dieser Mittheilung darauf beschränke, hier nur einen der vielen Versuche anzuführen, den ich nach der obigen Formel und nach dem gewöhnlichen Verfahren berechnen will, um den Unterschied in den numerischen Werthen von m für beide Methoden ersehen zu lassen. Dieser Versuch betrifft eine Stange englisches Rundeisen von der Sorte, wie es gewöhnlich zu den Ankerketten verwendet wird. Es wurde auf derselben eine Länge von 5 Fuss abgetheilt, und von Fuss zu Fuss wurden die Durchmesser ermittelt, für welche sich folgende, in Linien ausgedrückte Zahlenwerthe ergaben:

$$d_1 = 12{,}29; \; d_2 = 11{,}68; \; d_3 = 11{,}71;$$
$$d_4 = 11{,}68; \; d_5 = 11{,}66; \; d_6 = 11{,}89.$$

Digitized by Google

Das arithmetische Mittel derselben ist $d = 11{,}818$ Linien. Die bei dem Versuche beobachtete Dehnung der Stange betrug im Mittel von zwölf verschiedenen Beobachtungen 0,3072 Linien auf 5 Fuss Länge, wenn eine Längenspannung $P = 9021$ Pfd. angewendet wurde.

Um nun hierauf die Formel (6) anwenden zu können, muss man l in demselben Maasse wie λ, also beide in Linien ausdrücken, dann wird sich der Elasticitäts-Modulus in Pfunden für die Quadratlinie als Einheit des Querschnittes ergeben.

Demnach ist $l = 720'''$ und $\lambda = 0{,}3072'''$. Nach den obigen Werthen der Durchmesser findet man zuerst

$$\Sigma\left(\frac{1}{d_1 d_2}\right) = \frac{1}{d_1 d_2} + \frac{1}{d_2 d_3} + \frac{1}{d_3 d_4} + \frac{1}{d_4 d_5} + \frac{1}{d_5 d_6} = 0{,}0362.$$

Setzt man diese Zahlenwerthe in Formel (5) ein und berücksichtigt zugleich, dass $n = 5$ ist, so findet man

$$m = 194933 \text{ Pfd. pro } \square \text{ Linie.}$$

Um die Grösse m nach dem mittleren Durchmesser $d = 11{,}818$ Linien zu berechnen, dient die Formel

$$m = \frac{4Pl}{\pi\lambda d^2},$$

welche nach Substitution der entsprechenden Zahlenwerthe

$$m = 192772 \text{ Pfd.}$$

giebt, ebenfalls für die Quadratlinie des Querschnittes.

Digitized by Google

XXIX.

Auflösung einer algebraischen Aufgabe, und Hinsteilung einer anderen.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin.

Aus den Gleichungen

$$1)\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1; & a'a''+b'b''+c'c''=0 \\ a'^2+b'^2+c'^2=1; & a''a+b''b+c''c=0 \\ a''^2+b''^2+c''^2=1; & aa'+bb'+cc'=0 \end{cases}$$

die Gleichungen

$$2)\begin{cases} a^2+a'^2+a''^2=1; & bc+b'c'+b''c''=0 \\ b^2+b'^2+b''^2=1; & ca+c'a'+c''a''=0 \\ c^2+c'^2+c''^2=1; & ab+a'b'+a''b''=0 \end{cases}$$

herzuleiten. (S. Litter. Bericht. Nr. XII. S. 191).

Diese bei der Verwandlung der Coordinaten vorkommenden Gleichungen pflegt man gewöhnlich aus ihrer geometrischen Bedeutung abzuleiten. Hat man nämlich zwei rechtwinklige Axensysteme OX, OY, OZ und OX', OY', OZ' und sind

a,	b,	c	die Cosinus der Winkel	$X'OX$,	$X'OY$, $X'OZ$
a',	b',	c'	- - - -	$Y'OX$,	$Y'OY$, $Y'OZ$
a'',	b'',	c''	- - - -	$Z'OX$,	$Z'OY$, $Z'OZ$

so finden die Gleichungen 1) statt; und namentlich gelten die drei letzten derselben, weil $a'a''+b'b''+c'c''$ gleich dem Cosinus des Winkels $Y'OZ'$ ist, dieser aber als ein rechter Winkel vorausgesetzt wurde; u. s. w. Unter diesen Voraussetzungen sind aber auch

a,	a',	a''	die Cosinus der Winkel	XOX',	XOY', XOZ'
b,	b',	b''	- - - -	YOX',	YOY', YOZ'
c,	c',	c''	- - - -	ZOX',	ZOY', ZOZ';

Digitized by Google

und da das Axensystem OX', OY', OZ' rechtwinklig vorausgesetzt wurde, so folgen aus ähnlichen Gründen die Gleichungen 2). Rein algebraisch dürften dieselben am leichtesten folgendermassen hergeleitet werden. Schreibt man die erste, fünfte und sechste der Gleichungen 1) so:

$$3)\begin{cases} a\,.\,a+b\,.\,b+c\,.\,c=1 \\ a'\,.\,a+b'\,.\,b+c'\,.\,c=0 \\ a''\,.\,a+b''\,.\,b+c''\,.\,c=0, \end{cases}$$

so folgt aus ihnen durch eine einfache Elimination, wenn zur Abkürzung:

$$4)\quad \varepsilon = a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)$$

gesetzt wird:

$$5)\quad \varepsilon\,.\,a=b'c''-b''c',\ \varepsilon\,.\,b=c'a''-c''a',\ \varepsilon\,.\,c=a'b''-a''b'.$$

Auf dieselbe Art ergeben sich aus der 2ten, 4ten, 6ten; und aus der 3ten, 4ten, 5ten der Gleichungen 1) die folgenden:

$$6)\quad \varepsilon\,.\,a'=b''c-bc'',\ \varepsilon\,.\,b'=c''a-ca'',\ \varepsilon\,.\,c'=a''b-ab''$$

$$7)\quad \varepsilon\,.\,a''=bc'-b'c,\ \varepsilon\,.\,b''=ca'-c'a,\ \varepsilon\,.\,c''=ab'-a'b$$

Multiplicirt man nun von den Gleichungen 5), 6), 7) beziehlich die ersten mit a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'', und addirt, so ergiebt sich nach Division mit ε:

$$a^2+a'^2+a''^2=1,\ ab+a'b'+a''b''=0,\ ac+a'c'+a''c''=0.$$

Auf ähnliche Art erhält man aus denselben Gleichungen die übrigen Gleichungen 2). Die Division mit ε setzt voraus, dass ε nicht Null ist; sein Werth findet sich sehr leicht gleich ± 1. Denn quadrirt man die Gleichungen 5) (oder auch 6) oder 7)), und addirt, so erhält man:

$$\begin{aligned} 8)\quad \varepsilon^2(a^2+b^2+c^2) &= (b'c''-b''c')^2+(c'a''-c''a')^2+(a'b''-a''b')^2 \\ &= (a'^2+b'^2+c'^2)\,(a''^2+b''^2+c''^2) \\ &\qquad -(a'a''+b'b''+c'c'')^2 \end{aligned}$$

also wegen 1)

$$9)\quad \varepsilon^2=1.$$

Das Zeichen von ε ist seiner Natur nach unbestimmt; in der geometrischen Bedeutung hängt es bekanntlich davon ab, ob die Axen OX', OY', OZ' in derselben Drehrichtung um einander liegen, wie die Axen OX, OY, OZ oder in entgegengesetzter. Im ersten Falle ist $\varepsilon=+1$, im zweiten $\varepsilon=-1$.

Ich stelle nun die *Aufgabe*:
Man soll aus den Gleichungen:

$$Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + 2Dbc + 2Eca + 2Fab + 2Ga + 2Hb + 2Ic = P$$

$$Aa'^2 + Bb'^2 + Cc'^2 + 2Db'c' + 2Ec'a' + 2Fa'b' + 2Ga' + 2Hb' + 2Ic' = P$$

$$Aa''^2 + Bb''^2 + Cc''^2 + 2Db''c'' + 2Ec''a'' + 2Fa''b'' + 2Ga'' + 2Hb'' + 2Ic'' = P$$

$$Aa'a'' + Bb'b'' + Cc'c'' + D(b'c'' + b''c') + E(c'a'' + c''a') + F(a'b'' + a''b') + G(a' + a'') + H(b' + b'') + I(c' + c'') = p$$

$$Aa''a + Bb''b + Cc''c + D(b''c + bc'') + E(c''a + ca'') + F(a''b + ab'') + G(a'' + a) + H(b'' + b) + I(c'' + c) = q$$

$$Aa'a + Bb'b + Cc'c + D(bc' + b'c) + E(ca' + c'a) + F(ab' + a'b) + G(a + a') + H(b + b') + I(c + c') = r$$

ähnliche Systeme von Gleichungen herleiten und die geometrische Bedeutung derselben darthun.

XXX.

Theorie der involutorischen Gebilde nebst Anwendungen auf die Kegelschnitte.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

Gegenwärtige Abhandlung soll das Wesen der sogenannten Involutionen im Verhältniss zu projektivischen Eigenschaften überhaupt darstellen und die bereits von Steiner S. 167. seines Werkes angekündigte Wichtigkeit dieser Lehre an der Theorie der zugeordneten Durchmesser, denen hier die zugeordneten Achsenpunkte und Achsenpunktwinkel mit ganz analogen Eigenschaften sich zur Seite stellen, an der Theorie der Brennpunkte und, wenn der Raum es gestattet, der gemeinschaftlichen Sekanten- und Tangentendurchschnitte nachweisen. Denn durch diese Lehre erhält die Geometrie nicht bloss einen Ersatz für das, was die Ana-

lysis durch den Gebrauch des Imaginären vermag, sondern sogar einen Vortheil über die letztere, indem sie ihrem intuitiven Charakter getreu, statt ein nicht-seiendes Objekt kraft der Form eines reellen sich einzubilden, vielmehr von einem Objekte der Anschauung zu einem anderen reellen Objekte von derselben Grösse, aber verschiedener Bedeutung übergeht und somit zugleich an Wahrheit und Mannigfaltigkeit der Begriffe gewinnt.

Des Zusammenhanges wegen und dem Hauptzwecke des Archivs gemäss geht eine kurze Uebersicht desjenigen aus der „Systematischen Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander" voraus, worauf im Folgenden Bezug genommen werden wird, und für eine solche dürfte wohl eine blosse Andeutung der Beweise hinreichen, um so mehr, da sich voraussetzen lässt, dass das genannte Werk sich schon längst in der Hand eines jeden Mathematikers befindet. *)

Die Gerade und der ebene Strahlbüschel.

1. Wird eine Gerade A von den Strahlen $a, b, c, d \ldots$ eines ebenen Strahlbüschels B d. h. von den sämmtlichen durch einen Punkt B (Mittelpunkt) gehenden Geraden einer Ebene, in den Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ geschnitten, und man denkt sich sofort die beiden Gebilde A, B in irgend einer Lage zu einander, in welcher nur die gegenseitige Neigung der Strahlen von B und die gegenseitigen Abstände der Punkte von A, so wie die Beziehung, dass immer diesem Strahl a dieser Punkt $\mathfrak{a}$ entspricht, festgehalten wird, so heissen die Gebilde A, B in Ansehung der entsprechenden Elementenpaare $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ und $a, b, c, d \ldots$ projektivisch, und zwar schief liegend, wenn die Strahlen von B nicht durch ihre entsprechenden Punkte gehen, perspektivisch liegend dagegen oder perspektivisch, wenn dies durchweg der Fall ist. Die Projektivität von A, B erlaube ich mir hier der Kürze wegen durch

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots) = B(a, b, c, d \ldots),$$

und dass sie insbesondere perspektivisch sind, durch

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots) \equiv B(a, b, c, d \ldots)$$

zu bezeichnen.

2. Für perspektivische Gebilde A, B hat man in Bezug auf zwei beliebige Elementenpaare $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}$; a, c, wenn $B\mathfrak{p}$ senkrecht auf A, die metrische Relation

$$B\mathfrak{p} \,.\, \mathfrak{ac} = B\mathfrak{a} \,.\, B\mathfrak{c} \,.\, \sin \,.\, ac,$$

und ebenso

---

*) Der Leser wird gebeten, die Figuren der jedesmaligen Angabe gemäss selbst zu entwerfen.

$$Bp \,.\, bc = Bb \,.\, Bc \,.\, \sin\,.\, bc,$$

also

$$\frac{ac}{bc} = \frac{Ba}{Bb} \cdot \frac{\sin\, ac}{\sin\,.\, bc},$$

und ebenso

$$\frac{ad}{bd} = \frac{Ba}{Bb} \cdot \frac{\sin\,.\, ad}{\sin\,.\, bd},$$

also

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{\sin\,.\, ac}{\sin\,.\, bc} : \frac{\sin\,.\, ad}{\sin\,.\, bd},$$

als Fundamental-Gesetz der Projektivität überhaupt; d. h. es gilt von je 4 entsprechenden Elementenpaaren, wenn

$$A(a,\ b,\ c,\ d\ldots) = B(a,\ b,\ c,\ d\ldots),$$

und ist ersteres der Fall und zugleich die Ordnung der Elemente in A und B übereinstimmend, so gilt auch das letztere, wie durch Construktion näher nachgewiesen wird. Hieraus folgt:

a) Das ganze System der entsprechenden Elementenpaare zweier projektivischen Gebilde A, B ist bestimmt, sobald irgend drei dieser Paare gegeben sind.

b) Bei zwei beliebig liegenden Gebilden A, B kann man ganz nach Willkür drei Paar Elemente a, a; b, b; c, c auswählen und sodann festsetzen, die Gebilde sollen projektivisch und diese Elementenpaare sollen entsprechende Elementenpaare sein.

Besondere Fälle.

3. Hier ist hervorzuheben:
Wenn der Werth eines der Doppelverhältnisse

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd},\ \frac{\sin\,.\, ac}{\sin\,.\, bc} : \frac{\sin\,.\, ad}{\sin\,.\, bd} = 1$$

ist, was immer zugleich stattfindet, so heissen die 4 Punkte a, b, c, d oder die 4 Strahlen a, b, c, d harmonisch, und zwar a und b, c und d oder a und b, c und d zugeordnete harmonische Punkte oder Strahlen.

Wird in diesem Falle die Strecke ab in c gehälftet, so liegt d auf A unendlich entfernt, und wird der Winkel ab durch c gehälftet, so ist c rechtwinklig zu d. Geschieht dasselbe aber in einem andern Punkte m, und durch einen andern Strahl h, so ist

$$mc \,.\, md = ma^2 = mb^2;\ \operatorname{tng} .\, hc \,.\, \operatorname{tng} .\, hd = \operatorname{tng}^2 .\, ha = \operatorname{tng}^2 .\, hb.$$

Bei irgend vier harmonischen Punkten ist das Rechteck unter den Abständen zweier zugeordneter Punkte von dem in der Mitte zwischen den beiden anderen

Bei irgend vier harmonischen Strahlen ist das Produkt der Tangenten der Winkel, welche zwei zugeordnete Strahlen mit dem in der Mitte zwischen den bei-

Digitized by Google

liegenden Punkte gleich dem Quadrate des halben Abstandes der letzteren von einander.

den anderen liegenden einschliessen, gleich der zweiten Potenz der Tangente des halben Winkels, welchen die letzteren einschliessen.

Zwei und mehrere Gerade oder Strahlbüschel.

4. Ist zu gleicher Zeit

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots) = B(a, b, c, d \ldots)$$

und

$$A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots) = B(a, b, c, d \ldots),$$

oder ist zu gleicher Zeit

$$B(a, b, c, d \ldots) = A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots)$$

und

$$B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots) = A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots),$$

so heissen die Geraden A, A_1 selber in Ansehung der entsprechenden Punktenpaare $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$; $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots$, oder die Strahlbüschel B, B_1 selber in Ansehung der entsprechenden Strahlenpaare $a, b, c, d \ldots$; $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$ projektivisch, und ich schreibe

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots);$$
$$B(a, b, c, d \ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots).$$

Liegen insbesondere A und A_1 mit B, oder B und B_1 mit A perspektivisch, so heissen A, A_1 oder B, B_1 perspektivisch u.s.w., wo nicht, schiefliegend. Der Punkt B heisst der Projektionspunkt der perspektivischen Geraden A, A_1, und die Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1 \ldots$ in jedem Falle die Projektionsstrahlen von A, A_1. Endlich wird A der perspektivische Durchschnitt der perspektivischen Strahlbüschel B, B_1 genannt.

Auf jeder von zwei perspektivischen und folglich auch von zwei projektivischen Geraden A, A_1 überhaupt giebt es einen Punkt $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$, dessen entsprechender auf der anderen Geraden A_1, A ihr unendlich-entfernter Punkt $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{q}$ ist. Diese beiden Punkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ heissen die Durchschnitte der Parallelstrahlen. Eben so giebt es unter den entsprechenden Strahlenpaaren zweier perspektivischen und folglich auch zweier projektivischen Strahlbüschel B, B_1 überhaupt zwei Paare s, t; s_1, t_1 von der Eigenschaft, dass sowohl s zu t als auch s_1 zu t_1 rechtwinklig ist. Denn ein durch die Mittelpunkte B, B_1 gelegter Kreis, dessen Centrum auf dem perspektivischen Durchschnitte A liegt, schneidet letzteren in zwei Punkten $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$, denen solche Strahlenpaare s, t; s_1, t_1 entsprechen müssen. Sie heissen die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel.

5) Bei zwei projektivischen Gebilden A, A_1, so wie B, B_1 finden folgende metrische Relationen statt:

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{a_1c_1}{b_1c_1} : \frac{a_1d_1}{b_1d_1}; \quad \frac{\sin.ac}{\sin.bc} : \frac{\sin.ad}{\sin.bd} = \frac{\sin.a_1c_1}{\sin.b_1c_1} : \frac{\sin.a_1d_1}{\sin.b_1d_1},$$

und demnach ähnliche Lehrsätze als die unter 2) ausgesprochenen.

Hieraus ergiebt sich als Nerv der ganzen Methode der Satz:

Ist bei irgend einer Anzahl n Gebilden — Gerade und ebene Strahlbüschel — in irgend einer bestimmten Ordnung genommen der Reihe nach ein jedes Gebilde mit dem darauf folgenden projektivisch, so ist jedes mit jedem, also namentlich auch das erste mit dem letzten projektivisch.

Besondere Fälle.

6. *a*) Vertauscht man in 5) die Punktenpaare c, d; c_1, d_1 mit den besonderen q, r; q_1, r_1, und die Strahlenpaare c, d; c_1, d_1 mit den besonderen s, t; s_1, t_1 (4), so sind die Verhältnisse $\frac{aq}{bq}$ und $\frac{a_1r_1}{b_1r_1} = 1$, und $\sin.at = \cos.as$ u. s. w., folglich $ar.a_1q_1 = br.b_1q_1$; $\operatorname{tng}.as.\operatorname{tng}a_1t_1 = \operatorname{tng}.bs.\operatorname{tng}.b_1t_1$.

Bei zwei projektivischen Geraden ist das Rechteck unter den Abständen irgend zweier entsprechender Punkte von den Durchschnitten der Parallelstrahlen von unveränderlichem Inhalt.

Bei zwei projektivischen Strahlbüscheln ist das Produkt der Tangenten der Winkel, welche irgend zwei entsprechende Strahlen mit den ungleichnamigen Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel einschliessen, von unveränderlichem Werthe.

b) Vier harmonischen Punkten von A entsprechen vier harmonische Punkte von A_1, und vier harmonischen Strahlen von B entsprechen vier harmonische Strahlen von B_1 (5).

7. *c*) Haben je zwei entsprechende Abschnitte der Geraden A, A_1 gleiches Verhältniss, d. h. ist

$$\frac{ab}{a_1b_1} = \frac{ac}{a_1c_1} = \frac{bc}{b_1c_1} \text{ u. s. w.},$$

so heissen A, A_1 projektivisch-ähnlich, und sind je zwei entsprechende Abschnitte einander gleich: $ab = a_1b_1$, $bc = b_1c_1$, u. s. w., so heissen sie projektivisch-gleich. In beiden Fällen sind die unendlich-entfernten Punkte beider Geraden entsprechende Punkte. Eben so heissen zwei Strahlbüschel B, B_1 projektivisch-gleich, wenn je zwei entsprechende Winkel einander gleich sind, und dann giebt es unzählige Paare entsprechender rechter Winkel.

Digitized by Google

Gegenseitige Lage der Gebilde.

a) Bedingungen der projektivischen Lage.

8. Da bei zwei projektivischen Geraden oder Strahlbüscheln, wenn sie perspektivisch liegen, zwei entsprechende Punkte im Durchschnitte der ersteren, oder zwei entsprechende Strahlen mit dem gemeinschaftlichen Strahle der letzteren zusammenfallen, und da das ganze System ihrer entsprechenden Punkten- oder Strahlenpaare bestimmt ist, sobald irgend drei Paare gegeben sind (5), so folgt:

Zwei projektivische Gerade befinden sich allemal und nur dann in perspektivischer Lage, wenn entweder irgend zwei entsprechende Punkte in ihrem Durchschnitte vereinigt sind, oder wenn irgend drei Projektionsstrahlen in einem Punkte zusammentreffen.

Zwei projektivische Strahlbüschel befinden sich allemal und nur dann in perspektivischer Lage, wenn entweder irgend zwei entsprechende Strahlen auf einander fallen, oder wenn irgend drei entsprechende Strahlenpaare sich auf einer Geraden schneiden.

b) Auf einander gelegte Gerade, concentrische Strahlbüschel.

9) Werden zwei projektivische Gerade A, A_1 beliebig auf einander, oder zwei projektivische Strahlbüschel beliebig concentrisch gelegt, so ist wesentlich zu unterscheiden, ob die Elemente beider Gebilde nach derselben oder nach entgegengesetzter Richtung geordnet, d. h. ob sie gleichliegend oder ungleichliegend sind. Es frägt sich, ob bei solchen Gebilden, und wie viele entsprechende Elementenpaare zusammenfallen können?

Sind A, A_1 gleichliegend, so können sich höchstens nur zwischen den beiden Durchschnitten der Parallelstrahlen $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ entsprechende Punkte vereinigen, und nie zwischen $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$, wenn A, A_1 ungleichliegend sind. Denn liegt ein solcher Punkt $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$, in dem sich entsprechende $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$ vereinigen, nicht zwischen $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$, so ist die Richtung der Punktenreihe $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}$ der Richtung der entsprechenden Punktenreihe $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{q}_1$ entgegengesetzt, einerlei dagegen mit dieser, wenn $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$ zwischen $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ liegt.

Da nach 6) das Rechteck $\mathfrak{a}\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{a}_1\mathfrak{q}_1$ constant ist z. B. $= g^2$, so ist auch für den Punkt $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$ $\mathfrak{e}\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{e}_1\mathfrak{q}_1 = g^2$. Theilt man also die Strecke $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$, wenn A, A_1 gleichliegend, dergestalt in einem Punkte x, dass $x\mathfrak{r} \,.\, x\mathfrak{q}_1 = g^2$, so ist x nothwendig ein solcher Punkt $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$; und bestimmt man, wenn A, A_1 ungleichliegend, auf der Verlängerung von $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ einen Punkt x so, dass $x\mathfrak{r} \,.\, x\mathfrak{q}_1 = g^2$, so ist auch jetzt x nothwendig ein Punkt $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$. Denn entspräche dem auf A vorgestellten Punkte x ein Punkt x_1 auf A_1, der nicht mit x zusammenfiele, so wäre doch $x\mathfrak{q}_1 = x_1\mathfrak{q}_1$, und es würden die Punktenreihen x, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}$ und x_1, $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{q}_1$ im ersten Falle nach entgegengesetzter, im zweiten nach einerlei Seite hin gerichtet sein.

Jenachdem der Abschnitt $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ grösser, gleich oder kleiner als $2g$, sind zwischen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ zwei, einer oder kein Punkt x möglich. Dagegen gibt es auf den Verlängerungen von $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ beider-

seits einen Punkt x. In jedem Falle liegen die beiden Punkte x zu den Punkten r, r_1 symmetrisch.

Haben endlich zwei projektivische Strahlbüschel B, B_1 einerlei Mittelpunkt und werden durch eine beliebige Gerade geschnitten, so sind in dieser zwei projektivische Gerade A, A_1 auf einander gelegt, indem A mit B, A_1 mit B_1 perspektivisch ist. Jenachdem nun B, B_1 gleichliegend oder ungleichliegend sind, sind es auch die Geraden A, A_1, und jedem Punkte (cc_1) der letzteren muss ein Strahl (cc_1) der ersteren entsprechen.

a) Werden zwei projektivische Gerade beliebig auf einander gelegt, so vereinigen sich, wenn sie gleichliegend sind, entweder zwei, oder nur ein, oder kein Paar entsprechende Punkte; dagegen allemal zwei solche Paare, wenn sie ungleichliegend sind.

a) Werden zwei projektivische Strahlbüschel beliebig concentrisch gelegt, so fallen, wenn sie gleichliegend sind, entweder zwei, oder nur ein, oder kein Paar entsprechende Strahlen auf einander; dagegen allemal zwei solche Paare, wenn sie ungleichliegend sind.

Insbesondere:

b) Werden zwei projektivisch-ähnliche Gerade beliebig auf einander gelegt — gleich- oder ungleichliegend — so vereinigen sich allemal zwei Paar entsprechende Punkte, wovon eines namentlich die unendlich-entfernten Punkte sind.

c) Werden zwei projektivisch-gleiche Gerade gleichliegend auf einander gelegt, so treffen sich entweder nur ein Paar entsprechende, nämlich die unendlich-entfernten, oder je zwei entsprechende Punkte.

c) Werden zwei projektivisch-gleiche Strahlbüschel gleichliegend concentrisch gelegt, so fallen entweder gar keine, oder es fallen je zwei entsprechende Strahlen auf einander.

Werden zwei projektivisch-gleiche Gerade ungleichliegend auf einander gelegt, so treffen sich allemal zwei Paar entsprechende Punkte, deren eines unendlich-entfernt, das andere in der Mitte zwischen je zwei entsprechenden Punkten liegt.

Werden zwei projektivisch-gleiche Strahlbüschel ungleichliegend concentrisch gelegt, so fallen allemal zwei Paar entsprechende Strahlen auf einander, nämlich die Schenkel zweier entsprechender rechten Winkel.

Von dem ganzen weiteren Inhalte des Werkes hebe ich zu meinem Zwecke nur noch das Folgende hervor:

10. Liegen die Strahlen a, b, c, d...; a_1 b_1 c_1 d_1... zweier projektivischer ebener Strahlbüschel B, B_1 in den Ebenen α, β, γ, δ...; α_1, β_1, γ_1, δ_1... zweier Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, d. h. in solchen Ebenen, welche sich alle in einer Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ schneiden, und man legt durch jeden dieser beiden Ebenenbüschel eine

beliebige Ebene, so erzeugen diese in jenen zwei neue ebene Strahlbüschel B', B'_1, welche in Ansehung der Strahlen $a', b', c', d' \ldots$; $a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots$, die nämlich denselben Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \ldots$ als die bezüglichen Strahlen von B, B_1 angehören, projektivisch sind. Denn B, B' sind beide mit einer Geraden A, der Durchschnittslinie ihrer Ebenen, und eben so B_1, B'_1 mit einer Geraden A_1 perspektivisch, also der Reihe nach

$$B'(a', b', c', d' \ldots) \equiv A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots) \equiv B(a, b, c, d \ldots)$$
$$= B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots) \equiv A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots) \equiv B'_1(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots).$$

11. Nachdem die Kegelschnitte durch Projektion des Kreises erzeugt und als unterscheidendes Merkmal ihrer Arten gefunden, dass die Ellipse keinen, die Parabel nur einen und die Hyperbel zwei unendlich-entfernte Punkte, und dass nur die Parabel eine unendlich-entfernte Tangente hat, wird sofort mittels der Sätze, dass der Centriwinkel eines Kreises, dessen Schenkel nach den Durchschnitten zweier festen mit einer beweglichen Tangente gehen, constant ist, und dass somit seine Schenkel zwei projektivisch-gleiche concentrische Strahlbüschel erzeugen, so wie dass Peripheriewinkel auf gleichen Bogen gleiche Grösse haben, der folgende Satz zunächst vom Kreise, und sonach mittels 10) von Kegelschnitten überhaupt erwiesen:

Jede zwei Tangenten eines Kegelschnittes sind in Ansehung der Punktenpaare, in welchen sie von den übrigen Tangenten geschnitten werden, projektivisch, und zwar entsprechen den in ihrem Durchschnitte vereinigten Punkten ihre wechselseitigen Berührungspunkte;

Jede zwei Punkte eines Kegelschnittes sind die Mittelpunkte zweier projektivischen ebenen Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlen sich in den übrigen Punkten desselben schneiden, und zwar entsprechen den vereinigten Strahlen die Tangenten in den gegenseitigen Mittelpunkten;

und umgekehrt.

Involutorische Gebilde.

Zwei involutorische Gerade oder ebene Strahlbüschel.

§. 1.

Werden zwei projektivische Gerade A, A_1 dergestalt auf einander gelegt, dass ihre beiden Durchschnitte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ der Parallelstrahlen sich in einem Punkte $\mathfrak{m}$ vereinigen, oder werden zwei projektivische ebene Strahlbüschel B, B_1 dergestalt concentrisch gelegt, dass die ungleichnamigen Schenkel s, t_1; t, s_1 ihrer entsprechenden rechten Winkel in einen Strahl m, n zusammenfallen, so erhalten dieselben ganz eigenthümliche Eigenschaften, welche überall da hervortreten, wo es sich um ganz singuläre Punkte und Linien der Figuren handelt, und durch welche

selbst Erscheinungen, deren Betrachtung sonst der Geometrie der Grösse ganz besonders anzugehören schien, als nothwendige Momente des Systemes „der Abhängigkeit geometrischer Gestalten" aufgezeigt werden.

I. Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ irgend zwei entsprechende Punkte der so auf einander gelegten Geraden A, A_1 und denkt man sich einen Augenblick z. B. die Gerade A_1 aus ihrer Lage gebracht und in der ihrer vorigen entgegengesetzten Richtung wieder auf A gelegt, jedoch so, dass nun der Punkt $\mathfrak{a}_1$ sich mit $\mathfrak{a}$ vereinigt, indem sich nämlich die A_1 um den Mittelpunkt des Abschnittes $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ dreht, so treten jetzt im Allgemeinen die Punkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ wieder aus einander, und bezeichnet man denjenigen Punkt von A, welcher vorher vom Punkte $\mathfrak{a}_1$ gedeckt wurde mit α, und denjenigen Punkt von A_1, welcher den Punkt $\mathfrak{a}$ deckte, mit α_1, so werden sich, so wie $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, zugleich auch die Punkte α und α_1 vereinigen, und überdies die beiden Punkte $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)$ und $(\alpha\alpha_1)$ zu den Punkten $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ symmetrisch zu liegen kommen. Da aber eine solche Lage allemal den beiden Paaren vereinigter Punkte $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$, $(\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1)$ zukommt (9), und da $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)$ ein solcher Punkt $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$ ist, in welchem sich zwei entsprechende vereinigen, so sind nothwendig auch die beiden anderen vereinigten α, α_1 entsprechende Punkte. Da nun das Entsprechen der Punkte von der gegenseitigen Lage der Geraden A, A_1 nicht abhängt, und da $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ beliebig gewählt wurden, so folgt, dass, wenn in zwei auf einander gelegten projektivischen Geraden A, A_1 die Durchschnitte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ der Parallelstrahlen sich in einem Punkte $\mathfrak{m}$ vereinigen, je zwei entsprechende Punkte sich in doppeltem Sinne entsprechen, jenachdem sie wie $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ als den Geraden A, A_1, oder wie α_1, α als den Geraden A_1, A zugehörig vorgestellt werden, d. h. die Geraden A, A_1 sind in Ansehung der entsprechenden Punktenpaare $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots$ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ projektivisch, oder $A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots$ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots)$, indem jeder Punkt zu beiden Geraden gerechnet wird.

Und umgekehrt: entsprechen sich bei zwei auf einander gelegten projektivischen Geraden A, A_1 ein einziges Paar Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ in doppeltem Sinne, so gilt dies auch von jedem Durchschnitte der Parallelstrahlen und dem ihm entsprechenden unendlich-entfernten Punkte, oder diese beiden Durchschnitte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ vereinigen sich in einem Punkte $\mathfrak{m}$, und dann entsprechen sich alle entsprechenden Punktenpaare in doppeltem Sinne. Denn durch Umkehrung der einen Geraden erhält man zwei Punkte $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)$ und $(\alpha\alpha_1)$, in deren jedem sich zwei entsprechende $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ und α, α_1 vereinigen, folglich liegen beide zu $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ symmetrisch, und diese letzteren müssen also, wenn die Geraden in ihre erste Lage zurückgebracht werden, in einen Punkt $\mathfrak{m}$ zusammenfallen.

Ein wesentlicher Unterschied tritt ein, jenachdem die Geraden A, A_1 gleichliegend oder ungleichliegend sind. Im ersten Falle nämlich werden dieselben durch die Umkehrung der einen ungleichliegend, also müssen jetzt die Punkte $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)$ und $(\alpha\alpha_1)$ ausserhalb der Strecke $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$, ursprünglich also die wieder getrennten Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ zu beiden Seiten von $\mathfrak{m}$ liegen, so dass jeder Punkt rechts von $\mathfrak{m}$ einem Punkte links von $\mathfrak{m}$ entspricht. Im zweiten Falle dagegen stellt sich alles umgekehrt, und es kann kein Punkt der einen Seite von $\mathfrak{m}$ einem Punkte der anderen entsprechen. Hieraus ersieht man, dass die Geraden A, A_1, wenn sie gleichliegend sind, weder

Digitized by Google

zwei noch einen Punkt, in welchem sich entsprechende vereinigen, enthalten können; denn auch der Punkt m ist kein solcher, weil in ihm zwei nicht entsprechende Punkte r, q_1 sich vereinigen sollen. Dagegen giebt es, dem allgemeinen Gesetze (9) zufolge, bei ungleichliegenden Geraden A, A_1 allemal zwei solche Punkte, die in der Folge mit g, h bezeichnet werden sollen, und zwar liegt m in der Mitte zwischen beiden.

Da das Rechteck $ar \cdot a_1q_1$ unter den Abständen irgend zweier entsprechender Punkte a, a_1 von den Durchschnitten der Parallelstrahlen von unveränderlichem Inhalt ist (6), so ist in unserem besonderen Falle

$$am \cdot a_1m = bm \cdot b_1m = cm \cdot c_1m = gm^2 = hm^2;$$

folglich sind bei ungleichliegenden Geraden A, A_1 je zwei entsprechende Punkte a, a_1; b, b_1; c, c_1 ... mit den Punkten g, h harmonisch (3). Und hieraus ersieht man auch, dass alle Punkte, welche der unendlichen Strecke jenseits g (h) angehören, solchen entsprechen, die auf der begrenzten Strecke gm (hm) liegen.

Endlich leuchtet es ein, dass das ganze System entsprechender Punktenpaare der in Rede stehenden Geraden A, A_1 bestimmt sei, wenn zwei beliebige dieser Paare gegeben sind. Denn nimmt man auf zwei auf einander liegenden Geraden A, A_1 zwei Punktenpaare a, a_1; b, b_1 beliebig an, so kann man als drittes diejenigen Punkte α, α_1 hinzufügen, welche z. B. mit den Punkten a_1, a der jedesmaligen anderen A_1, A zusammenliegen, und sofort festsetzen (2), beide Geraden sollen projektivisch und diese drei Punktenpaare entsprechende sein. Dies wäre denn allemal und nur auf einzige Weise möglich, und zwar müssen, wie gezeigt, die Durchschnitte der Parallelstrahlen zusammenfallen. Dasselbe ergibt sich übrigens auch aus der in (2) entwickelten metrischen Relation, wenn man in dieser a_1 statt b und a statt b_1 setzt. Sie und die gleichzeitig stattfindenden Relationen verwandeln sich hierdurch nämlich in folgende:

$$1.\ \frac{ac}{bc} : \frac{a_1c_1}{b_1c_1} = \frac{ab_1}{ba_1}; \qquad 4.\ \frac{ab \cdot ab_1}{ac \cdot ac_1} = \frac{a_1b \cdot a_1b_1}{a_1c \cdot a_1c_1};$$

$$2.\ \frac{ab}{cb} : \frac{a_1b_1}{c_1b_1} = \frac{ac_1}{ca_1}; \qquad 5.\ \frac{ba \cdot ba_1}{bc \cdot bc_1} = \frac{b_1a \cdot b_1a_1}{b_1c \cdot b_1c_1};$$

$$3.\ \frac{ba}{ca} : \frac{b_1a_1}{c_1a_1} = \frac{bc_1}{cb_1}; \qquad 6.\ \frac{ca \cdot ca_1}{cb \cdot cb_1} = \frac{c_1a \cdot c_1a_1}{c_1b \cdot c_1b_1}.$$

Vertauscht man hier, was offenbar erlaubt ist, von Neuem zwei entsprechende Punkte mit einander, so behalten die drei letzten Relationen ihre Form, aus der 1sten, 2ten und 3ten dagegen entstehen durch Vertauschung von c, c_1; b, b_1; a, a_1 die neuen, aber unter sich identischen:

$$7.\ \frac{ac_1}{bc_1} : \frac{a_1c}{b_1c} = \frac{ab_1}{ba_1}; \quad \frac{ab_1}{cb_1} : \frac{a_1b}{c_1b} = \frac{ac_1}{ca_1}; \quad \frac{ba_1}{ca_1} : \frac{b_1a}{c_1a} = \frac{bc_1}{cb_1}.$$

Uebrigens erhält man diese auch, wenn 1) und 2) durch einander dividirt, und das Resultat mit 3) verbunden wird.

Für den Fall eines Punktes g (oder h) ergeben sich die besonderen:

Digitized by Google

$$1.\ \frac{ag}{bg} : \frac{a_1g}{b_1g} = \frac{ab_1}{ba_1};\qquad 3.\ \frac{ag^2}{a_1g^2} = \frac{ab \cdot ab_1}{a_1b \cdot a_1b_1};$$

$$2.\ \frac{ag \cdot bg}{a_1g \cdot b_1g} = \frac{ab}{a_1b_1};\qquad 4.\ \frac{bg^2}{b_1g^2} = \frac{ba \cdot ba_1}{b_1a \cdot b_1a_1};$$

hieraus für g, h, a, a_1:

$$ag : a_1g = ah : a_1h.$$

Vielleicht war es der Umstand, dass man die Auflösung eines Productes von Verhältnissen in ein Aggregat eine Evolution zu nennen pflegt, welcher Désargues, den Lehrer des Pascal, veranlasste, die 4te, 5te und 6te der obigen 7 Relationen mit dem Worte „Involution" zu bezeichnen. Und dieses Wort kommt hier um so gelegener, da es, als französisches betrachtet, die scheinbare Verwirrung bezeichnen würde, welche dadurch entsteht, dass die Punkte a, b, c, d... ursprünglich zu A, hinterdrein aber auch zu A_1 gerechnet werden. Es sollen also zwei auf einander gelegte projektivische Gerade, deren Durchschnitte der Parallelstrahlen sich in einem Punkte vereinigen, zwei involutorische Gerade, und das ganze System ihrer entsprechenden Punktenpaare eine Involution von Punkten heissen. Ferner sollen je zwei entsprechende Punkte derselben zugeordnete Punkte, der Punkt m der Mittelpunkt der Involution und die Punkte g, h die Hauptpunkte der Involution genannt werden. Drei beliebige Paare zugeordneter Punkte bilden eine Involution von sechs, zwei solche Paare mit einem Hauptpunkte eine Involution von fünf, und jedes Paar mit den beiden Hauptpunkten eine Involution von vier Punkten oder vier harmonische Punkte.

II. Sind andererseits B, B_1 irgend zwei concentrische projektivische ebene Strahlbüschel, deren ungleichnamige Schenkel s, t_1; t, s_1 der entsprechenden rechten Winkel in einen Strahl m, n zusammenfallen, so lassen sich von ihnen ähnliche Eigenschaften, wie von den Geraden A, A_1, und zwar entweder auf dieselbe Art, oder auch kürzer so, wie folgt, nachweisen. Eine beliebige Gerade A werde von den Strahlen a, b, c, d, s, t... des einen Strahlbüschels B in den Punkten a, b, c, d, s, t..., und eine mit A vereinigte Gerade A_1 werde von den entsprechenden Strahlen a_1, b_1, c_1 d_1, s_1, t_1... des anderen Strahlbüschels B_1 in den Punkten a_1, b_1, c_1, d_1, s_1, t_1... geschnitten, so ist der Reihe nach

$$A(a, b, c, d, s, t...) \equiv B(a, b, c, d, s, t...)$$
$$= B_1(a_1, b_1, c_1, d_1, s_1, t_1...) \equiv A_1(a_1, b_1, c_1, d_1, s_1, t_1...),$$

also auch

$$A(a, b, c, d, s, t ..) = A_1(a_1, b_1, c_1, d_1, s_1, t_1...).$$

Nun fallen die Strahlen s und t_1, t und s_1, also auch die Punkte s und t_1, t und s_1, zusammen, d. h. die Punkte s, s_1 (t, t_1) entsprechen sich in doppeltem Sinne; demnach sind die Geraden A, A_1 involutorisch, und da nun je zwei entsprechende Punkte derselben sich in doppeltem Sinne entsprechen müssen, so gilt das nämliche

auch von je zwei entsprechenden Strahlen von B, B_1, mit denen jene perspektivisch liegen, oder

$$B(a, b, c, d, s, t \ldots a_1, b_1, c_1, d_1, s_1, t_1 \ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1, s_1, t_1 \ldots a, b, c, d, s, t \ldots).$$

Und da hierbei die Eigenthümlichkeit der Stralen s, t; s_1, t_1 nicht in Betracht kommt, und es in zwei projektivischen Strahlbüscheln nur ein einziges Paar entsprechender rechter Winkel giebt, so folgt auch umgekehrt, dass wenn in zwei concentrischen projektivischen Strahlbüscheln B, B_1 irgend zwei Strahlen sich in doppeltem Sinne entsprechen, das nämliche von allen entsprechenden Strahlenpaaren gilt, und dass, wenn nun s von σ_1, s_1 von σ t von τ_1, t_1 von τ gedeckt wird, t_1 mit σ_1, und t mit σ einerlei sein muss, weil sonst den beiden rechten Winkeln st und $\sigma\tau$ von B ebenfalls rechte Winkel s_1t_1 und $\sigma_1\tau_1$ entsprechen würden.

Denkt man sich insbesondere die Geraden A, A_1 rechtwinklig zu dem Strahle m oder n, so schneidet er sie in einem Punkte m, dem der unendlich-entfernte Punkt in doppeltem Sinne entspricht. Hieraus in Verbindung mit I. ergibt sich, dass bei gleichliegenden Strahlbüscheln je zwei entsprechende Strahlen auf verschiedenen Seiten von m oder n liegen müssen, bei ungleichliegenden dagegen beide zwischen m und n; ferner, so wie bereits aus dem Vorigen, dass nur bei Strahlbüscheln der letzten Art solche Strahlen g, h stattfinden, in denen sich entsprechende vereinigen, dass dieselben mit je zwei entsprechenden Strahlen harmonisch sind, und die von g und h gebildeten Winkel durch m und n gehälftet werden.

Aus (6) ergibt sich, dass

$$\operatorname{tng} am \cdot \operatorname{tng} a_1m = \operatorname{tng} bm \cdot \operatorname{tng} b_1m = \operatorname{tng} an \cdot \operatorname{tng} a_1n = \operatorname{tng}^2 hm = \operatorname{tng}^2 gm = \operatorname{tng}^2 hn$$

u. s. w.

Endlich lässt es sich wie oben zeigen, dass das ganze System entsprechender Strahlenpaare der in Rede stehenden Strahlbüschel durch zwei beliebige dieser Paare bestimmt sei, und dass zwischen je drei derselben, zwischen je zweien und einem Strahle g oder h, endlich zwischen jedem Paare und den beiden Strahlen g, h folgende Relationen statthaben:

$$1.\quad \frac{\sin . ac}{\sin . bc} : \frac{\sin . a_1c_1}{\sin . b_1c_1} = \frac{\sin . ab_1}{\sin . ba_1};$$

$$2.\quad \frac{\sin . ab}{\sin . cb} : \frac{\sin . a_1b_1}{\sin . c_1b_1} = \frac{\sin . ac_1}{\sin . ca_1};$$

$$3.\quad \frac{\sin . ba}{\sin . ca} : \frac{\sin . b_1a_1}{\sin . c_1a_1} = \frac{\sin . bc_1}{\sin . cb_1};$$

$$4.\quad \frac{\sin ab . \sin ab_1}{\sin . ac . \sin . ac_1} = \frac{\sin . a_1b . \sin . a_1b_1}{\sin . a_1c . \sin . a_1c_1};$$

$$5.\quad \frac{\sin . ba . \sin . ba_1}{\sin . bc . \sin . bc_1} = \frac{\sin . b_1a . \sin . b_1a_1}{\sin . b_1c . \sin . b_1c_1};$$

$$6.\quad \frac{\sin . ca . \sin . ca_1}{\sin . cb . \sin . cb_1} = \frac{\sin . c_1a . \sin . c_1a_1}{\sin . c_1b . \sin . c_1b_1};$$

Digitized by Google

$$7.\quad \frac{\sin . ac_1}{\sin . bc_1} : \frac{\sin . a_1 c}{\sin . b_1 c} = \frac{\sin . ab_1}{\sin . ba_1}.$$

$$1.\quad \frac{\sin . ag}{\sin . bg} : \frac{\sin . a_1 g}{\sin . b_1 g} = \frac{\sin . ab_1}{\sin . ba_1};$$

$$2.\quad \frac{\sin . ag . \sin . bg}{\sin . a_1 g . \sin . b_1 g} = \frac{\sin . ab}{\sin . a_1 b_1};$$

$$3.\quad \frac{\sin^2 . ag}{\sin^2 . a_1 g} = \frac{\sin . ab . \sin . ab_1}{\sin . a_1 b . \sin . a_1 b_1};$$

$$4.\quad \frac{\sin^2 . bg}{\sin^2 . b_1 g} = \frac{\sin . ba . \sin . ba_1}{\sin . b_1 a . \sin . b_1 a_1}.$$

1. $\sin . ag : \sin . a_1 g = \sin . ah : \sin . a_1 h.$

Zwei concentrische projektivische ebene Strahlbüschel B, B_1, deren ungleichnamige Schenkel der entsprechenden rechten Winkel sich vereinigen, heissen zwei involutorische Strahlbüschel, und das ganze System ihrer entsprechenden Strahlenpaare eine Involution von Strahlen, je zwei entsprechende Strahlen zugeordnete Strahlen, die beiden mit m, n bezeichneten die Achsen der Involution, und die Strahlen g, h die Hauptstrahlen der Involution. Drei beliebige Paare zugeordneter Strahlen bilden eine Involution von sechs, zwei solche Paare mit einem Hauptstrahle eine Involution von fünf, und jedes Paar mit beiden Hauptstrahlen eine Involution von vier Strahlen oder vier harmonische Strahlen.

Mit Hülfe dieser Benennungen drücken wir nun die beiderseitigen Resultate dergestalt aus:

a) Bei zwei involutorischen Geraden entsprechen sich je zwei zugeordnete Punkte in doppeltem Sinne, d. h. die Geraden sind in Ansehung der zugeordneten Punktenpaare projektivisch, wie man auch die Punkte eines jeden Paares unter beide Gerade vertheilen mag.

a) Bei zwei involutorischen Strahlbüscheln entsprechen sich je zwei zugeordnete Strahlen in doppeltem Sinne, d. h. die Strahlbüschel sind in Ansehung der zugeordneten Strahlenpaare projektivisch, wie man auch die Strahlen eines jeden Paares unter beide Strahlbüschel vertheilen mag.

b) Entsprechen sich bei zwei auf einander gelegten projektivischen Geraden ein einziges Paar in doppeltem Sinne, so sind die Geraden involutorisch.

b) Entsprechen sich bei zwei concentrischen projektivischen Strahlbüscheln ein einziges Paar Strahlen in doppeltem Sinne, so sind die Strahlbüschel involutorisch.

c) Bei zwei gleichliegenden involutorischen Geraden liegen je zwei zugeord-

c) Bei zwei gleichliegenden involutorischen Strahlbüscheln liegen je zwei zu-

Digitized by Google

nete Punkte rechts und links vom Mittelpunkte der Involution, und es wechseln die Punkte jedes Paares mit denen der anderen Paare ab; bei zwei ungleichliegenden dagegen liegen je zwei zugeordnete Punkte auf einerlei Seite vom Mittelpunkte, und schliessen jedes andere Paar entweder ein oder aus.

geordnete Strahlen rechts und links von jeder Achse der Involution, und es wechseln die Strahlen jedes Paares mit denen der anderen Paare ab; bei zwei ungleichliegenden dagegen liegen je zwei zugeordnete Strahlen zwischen beiden Achsen, und schliessen jedes andere Paar entweder ein oder aus.

d) Gleichliegende involutorische Gerade haben keinen Hauptpunkt; ungleichliegende aber haben allemal zwei Hauptpunkte, und zwar liegt der Mittelpunkt der Involution in der Mitte zwischen beiden.

d) Gleichliegende involutorische Strahlbüschel haben keinen Hauptstrahl; ungleichliegende aber haben allemal zwei Hauptstrahlen, und zwar werden die von ihnen eingeschlossenen Winkel und Nebenwinkel durch die Achsen der Involution gehälftet.

e) Eine Involution von Punkten ist durch zwei Paar zugeordnete Punkte, und daher auch durch ein solches Paar und einen Hauptpunkt oder den Mittelpunkt, oder durch beide Hauptpunkte, oder durch einen Hauptpunkt und den Mittelpunkt bestimmt. Und man kann auf einer Geraden zwei Paar Punkte, oder auch ein Paar und einen dritten Punkt, oder zwei Punkte allein beliebig auswählen und sodann festsetzen, dass sie in dem angedeuteten Sinne zu einer Involution von Punkten gehören sollen.

e) Eine Involution von Strahlen ist durch zwei Paar zugeordnete Strahlen, und daher auch durch ein solches Paar und einen Hauptstrahl oder eine Achse, oder durch beide Hauptstrahlen, oder durch einen Hauptstrahl und eine Achse bestimmt. Und man kann um einen Punkt zwei Paar Strahlen, oder auch ein Paar und einen dritten Strahl, oder zwei Strahlen allein beliebig auswählen und sodann festsetzen, dass sie in dem angedeuteten Sinne zu einer Involution von Strahlen gehören sollen.

f) Das Rechteck unter den Abständen irgend zweier zugeordneter Punkte vom Mittelpunkte der Involution ist von unveränderlichem Inhalt.

f) Das Product der Tangenten der Winkel, welche irgend zwei zugeordnete Strahlen mit einer Achse der Involution einschliessen, ist von unveränderlichem Werthe.

g) Zwischen den Abschnitten einer Involution von

g) Zwischen den Sinus der Winkel einer Involution

sechs, fünf, vier Punkten finden allemal die obigen sieben, vier eine metrischen Relationen statt.

von sechs, fünf, vier Strahlen finden allemal die obigen sieben, fünf, vier metrischen Relationen statt.

Besondere Fälle.

§. 2.

Sind die auf einander gelegten Geraden A, A_1 projektivisch-ähnlich, so sind beide Durchschnitte der Parallelstrahlen unendlich-entfernt (7); daher muss man in diesem Falle, um sicher zu gehen, die Entscheidung der Frage, ob solche Gerade involutorisch sein können, davon abhängen lassen, ob sie das andere wesentliche Merkmal involutorischer Geraden besitzen, dass nämlich je zwei entsprechende Punkte sich in doppeltem Sinne entsprechen. Fände aber dieses letztere z. B. in Bezug auf die Doppelpunkte $(a\alpha_1)$ und $(a_1\alpha)$ statt, so wäre das Verhältniss der entsprechenden Abschnitte $a\alpha : a_1\alpha_1 = 1$, also die Geraden A, A_1 nicht überhaupt projektivisch-ähnlich, sondern projektivisch-gleich. Es können also nur projektivisch-gleiche Gerade involutorisch sein; aber auch diese sind es offenbar nur dann, wenn sie gleichliegend sind und je zwei entsprechende Punkte sich decken, oder wenn sie ungleichliegend sind, in welchem Falle ein Hauptpunkt in der Mitte zwischen je zwei zugeordneten Punkten, der andere sammt dem Mittelpunkte der Involution unendlich entfernt liegt.

Sollen andererseits zwei projektivisch-gleiche Strahlbüschel B, B_1 dergestalt concentrisch gelegt werden, dass die ungleichnamigen Schenkel der entsprechenden rechten Winkel, deren es in diesem Falle unzählige giebt, sich vereinigen, so kann dies auf doppelte Weise geschehen. Man denke sich beide erst in solcher Lage, dass je zwei entsprechende Strahlen sich decken, so können sie in dieser Lage involutorisch heissen, es ist aber dieses ein durchaus unfruchtbarer Fall und kann daher füglich, so wie auch der ähnliche der Geraden A, A_1, von der Betrachtung ausgeschlossen werden. Denkt man sich aber sofort den einen Strahlbüschel B_1 so lange um den gemeinschaftlichen Mittelpunkt gedreht, bis ein Strahl s_1 zu dem entsprechenden Strahle s rechtwinklig wird, so vereinigt sich s_1 mit einem Strahle t von B, und s mit dem entsprechenden Strahle t_1 von B_1, und so wie s, s_1 oder t, t_1, müssen sich je zwei Strahlen a, a_1 in doppeltem Sinne entsprechen. Die Strahlbüschel sind also involutorisch, und dieser Fall ist schon deshalb, weil ihm kein ähnlicher von Seiten der Geraden A, A_1 entspricht, vor allen anderen ausgezeichnet. Denkt man sich endlich den einen Strahlbüschel B_1, nachdem er die letztere Lage erhalten, um den Strahl (st_1) als Achse herumgewendet, so fallen auch die Strahlen s_1, t wieder auf einander, jedoch kein anderes Paar entsprechender Strahlen bleibt rechtwinklig, und es fällt jetzt der Strahl g_1, welcher den rechten Winkel s_1t_1 hälftete, mit dem entsprechenden Strahle g, und der Strahl h_1, welcher mit g vereinigt den rechten Winkel st hälftete, mit dem entsprechenden h zusammen, so dass also g und h rechtwinklig zu einander sind. Uebrigens versteht es sich, dass zwei projektivisch-gleiche Strahlbüschel, sobald sie ungleichliegend sind, sich allemal in dieser letz-

Digitized by Google

teren Lage befinden müssen, was auch im ähnlichen Falle von den Geraden A, A_1 gilt.

a) Zwei auf einander gelegte projektivisch-ähnliche Gerade können niemals involutorisch sein.

b) Zwei auf einander gelegte gleichliegende projektivisch-gleiche Gerade können, ohne sich zu decken, nicht involutorisch sein. Zwei ungleichliegende dagegen sind allemal involutorisch, und zwar liegt ein Hauptpunkt in der Mitte zwischen je zwei zugeordneten Punkten, und der andere sammt dem Mittelpunkte der Involution unendlich entfernt.

b) Zwei concentrische gleichliegende projektivisch-gleiche Strahlbüschel sind involutorisch, wenn je zwei entsprechende Strahlen zu einander rechtwinklig sind; zwei ungleichliegende dagegen sind allemal involutorisch, und zwar stehen die Hauptstrahlen senkrecht auf einander und ein jeder liegt in der Mitte zwischen je zwei zugeordneten Strahlen.

Hiernach sind die Ausdrücke involutorisch-gleiche Gerade, Involution der rechten Winkel, ungleichliegend involutorisch-gleiche Strahlbüschel zu verstehen.

Endlich sieht man leicht ein, dass

c) zwei ungleichliegend involutorische Gerade involutorisch-gleich sein müssen, wenn ein Hauptpunkt unendlich-entfernt ist.

c) zwei involutorische Strahlbüschel eine Involution der rechten Winkel bilden, wenn irgend zwei Paar zugeordnete Strahlen zu einander rechtwinklig sind, und dass sie ungleichliegend involutorisch-gleich sind, wenn die Hauptstrahlen zu einander rechtwinklig sind.

Noch ein Grenzfall zwischen gleichliegenden und ungleichliegenden involutorischen Gebilden überhaupt ist zu erwähnen, welcher dadurch entsteht, dass die beiden Hauptpunkte oder Hauptstrahlen der letzteren mit dem Mittelpunkte oder einer Achse der Involution sich vereinigen. In diesem Falle nämlich ist jeder beliebige Punkt oder Strahl der vierte harmonische zu den beiden Hauptpunkten oder Hauptstrahlen und zu dem mit den letzteren vereinigten Punkte oder Strahle, also alle Punkte oder Strahlen einem einzigen zugeordnet.

Einiges über Involutionssysteme.

§. 3.

An das Vorige schliesst sich zunächst eine Untersuchung an über die zugeordneten Punkte oder Strahlen, welche zwei, einerlei

Geraden oder Punkte angehörigen Involutionen gemeinschaftlich sind. Ich verschiebe sie aber bis dahin, wo sich Mittel darbieten, dieselbe schneller, als es hier geschehen könnte, zu erledigen.

Denkt man sich eine Reihe beliebiger Doppelgebilde A, A_1; A_2, A_3; B, B_1 u. s. w., d. h. welche immer paarweise auf einander liegen oder concentrisch sind, und nimmt an, dass sowohl einerseits A, A_2, B ... als auch andererseits A_1, A_3, B_1 ... der Reihe nach projektivisch sind, so ist es klar, dass wenn eines dieser Doppelgebilde, z. B. A, A_1, involutorisch ist, auch alle übrigen es sein müssen. Eine solche Reihe involutorischer Doppelgebilde heisst ein Involutionssystem. Solcher Systeme gibt es verschiedene Arten, je nachdem entweder je zwei Doppelgebilde perspektivisch, oder theils schief theils perspektivisch, oder je zwei schief zu einander liegen. Die Betrachtung der Systeme der ersten Art führt zu Construktionen einer Involution von Punkten oder Strahlen, welche sich ohne Kreis ausführen lassen. Von denen der zweiten Art soll hier der einfachste und fruchtbarste Fall näher betrachtet werden.

Hat man zwei beliebige schief liegende projektivische Strahlbüschel B, B_1, wodurch also (11) ein beliebiger Kegelschnitt gegeben ist, und liegt ein mit B concentrischer Strahlbüschel B_2 mit B_1 perspektivisch, so dass also

$$B(a, b, c \ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots) \equiv B_2(a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots),$$

so ist

$$B(a, b, c, d \ldots) = B_2(a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots);$$

und rechnet man jetzt alle Strahlen von B_2 zu B und bezeichnet die denselben in B_1 entsprechenden durch a_2, b_2, c_2, $d_2 \ldots$, und die den letzteren wieder in B_2 entsprechenden durch a'_2, b'_2, c'_2, $d'_2 \ldots$, so ist

$$B(a, b, c, d \ldots a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots)$$
$$\equiv B_2(a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots a'_2, b'_2, c'_2, d'_2 \ldots),$$

folglich

$$B(a, b, c, d \ldots a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots) = B_2(a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots a'_2, b'_2, c'_2, d'_2 \ldots).$$

Denkt man sich nun zunächst nur die vier entsprechenden Strahlen a a_1, a_2, a_3 gezogen und den perspektivischen Durchschnitt von B_1, B_2 durch die beiden Durchschnitte der Strahlenpaare a_1, a_2 und a_3, a gegeben, so fällt der Strahl a'_2 mit a zusammen, so dass sich also a, a_2 in doppeltem Sinne entsprechen. Ein Gleiches gilt also auch von allen übrigen Paaren b, b_2; c, c_2; d, $d_2 \ldots$, und man ist somit zur folgenden Aussage berechtigt, der hier sogleich eine analoge zur Seite gestellt wird:

1) Geht ein Kegelschnitt durch zwei Gegenecken und die Durchschnitte der Gegenseiten eines einfachen	1) Berührt ein Kegelschnitt zwei Gegenseiten und die Diagonalen eines einfachen Vierseits, so gibt es un-

Vierecks, so gibt es unzählige Vierecke, welche dieselben Durchschnitte der Gegenseiten haben, und von deren Gegenecken das eine Paar auf demselben Kegelschnitte, das andere auf derselben Geraden, als die beiden anderen Gegenecken desersteren Vierecks, liegt.

zähligeVierseite, welche der Richtung nach dieselben Diagonalen haben, und von deren Gegenseiten das eine Paar denselben Kegelschnitt berührt, das andere denselben Durchschnittspunkt, als die beiden anderen Gegenseiten des ersteren Vierseits, hat.

Ist P der perspektivische Durchschnitt von B_1, B_2, und sind a, a_1; b, b_1 u. s. w. die jedesmaligen Gegenecken der (links) gedachten Vierecke, welche auf dem Kegelschnitte liegen, so schneiden die Verbindungslinien aa_1, bb_1 u. s. w. der letzteren die Gerade BB_1 allemal in einem Punkte, welcher zu B, B_1 und dem Durchschnitte von BB_1 und P der vierte harmonische ist. Dieser Punkt (p) ist also unveränderlich derselbe, und ist zugleich zu je zwei Punkten a, a_1 und dem zu P gehörigen Punkte der vierte, dem letzteren zugeordnete harmonische Punkt. (Nach dem bekannten Satze über die Diagonalen des vollständigen Vierseits.) Hieraus folgt links, und auf ähnliche Weise rechts:

2) Gehen durch einen Punkt in der Ebene eines Kegelschnittes zwei beliebige Gerade, welche den letzteren in vier Punkten schneiden, und man verbindet diese Punkte durch zwei neue Gerade, so liegt der Durchschnitt dieser letzteren immer auf einer und derselben geraden Linie, deren Durchschnitt mit jeder der ersteren Geraden zu den dem Kegelschnitte angehörigen Punkten und dem anfänglichen Punkte der vierte, dem letzteren zugeordnete Punkt ist.

2) Werden von zwei beliebigen Punkten einer Geraden an einen Kegelschnitt zwei Paar Tangenten gezogen, und zwei Durchschnittspunkte dieser letzteren durch eine Gerade verbunden, so geht dieselbe immer durch einen und denselben Punkt, dessen nach einem der ersteren Punkte gehender Strahl zu den von letzterem ausgehenden Tangenten und zu der anfänglichen Geraden der vierte, der letzteren zugeordnete harmonische Strahl ist.

Dieser Eigenschaft wegen heisst (links und rechts) die Gerade P die harmonische Polare von p, und der Punkt p der harmonische Pol von P, und man sieht sogleich, dass p ausserhalb oder innerhalb des Kegelschnittes liegen muss, je nachdem P ihn durchschneidet oder nicht.

Bedenkt man endlich, dass die Strahlbüschel B, B_2 involutorisch und durch zwei Paar zugeordnete Strahlen a, a_2; b, b_2, so wie der Punkt p durch zwei Sehnen aa_1, bb_1, bestimmt sind; dass die beiden Strahlen, welche nach den Durchschnitten von P mit dem Kegelschnitte gehen, Hauptstrahlen von B, B_2 sein müssen und existiren oder nicht, je nachdem P den Kegelschnitt schneidet oder nicht schneidet, so folgt links, und ähnlicher Weise rechts:

3) Die sämmtlichen Punktenpaare, in denen ein Kegelschnitt von einem beliebigen ebenen Strahlbüschel geschnitten wird, bestimmen, indem sie mit einem beliebigen Punkte seines Umfangs durch Gerade verbunden werden, die zugeordneten Strahlenpaare zweier involutorischer Strahlbüschel, welche gleichliegend oder ungleichliegend sind, je nachdem der Mittelpunkt des ersteren innerhalb oder ausserhalb des Kegelschnittes liegt, und deren Hauptstrahlen im letzteren Falle nach den Punkten gehen, in denen die harmonische Polare dieses Mittelpunktes den Kegelschnitt durchschneidet.

3) Die sämmtlichen Tangentenpaare, welche von den Punkten einer beliebigen Geraden an einen Kegelschnitt gehen, bestimmen auf einer beliebigen Tangente desselben die zugeordneten Punktenpaare zweier involutorischer Geraden, welche gleichliegend oder ungleichliegend sind, je nachdem jene beliebige Gerade den Kegelschnitt in keinem oder in zwei Punkten schneidet, und deren Hauptpunkte im letzteren Falle auf den Tangenten liegen, welche von dem harmonischen Pole dieser Geraden gezogen werden.

Und umgekehrt:

4) Bildet man um einen beliebigen Punkt auf dem Umfang eines Kegelschnittes eine Involution von Strahlen, so gehen sämmtliche Sehnen dieses Kegelschnittes, welche durch die zugeordneten Strahlen der Involution bestimmt werden, durch einen und denselben Punkt, welcher innerhalb oder ausserhalb des Kegelschnittes liegt, je nachdem die Involution aus gleich- oder ungleichliegenden Strahlbüscheln besteht.

4) Bildet man auf einer beliebigen Tangente eines Kegelschnittes eine Involution von Punkten, so liegen die Durchnitte der Tangentenpaare, welche von den zugeordneten Punkten der Involution ausgehen, auf einer und derselben Geraden, welche den Kegelschnitt in keinem oder in zwei Punkten schneidet, je nachdem die Involution aus gleich- oder ungleichliegenden Geraden besteht.

Ich übergehe mehrere interessante Zusätze dieses letzten Satzes, und behandle auch von den hierher gehörigen Aufgaben nur die folgende, welche für die Theorie der gemeinschaftlichen Sekanten- und Tangentendurchschnitte von besonderer Wichtigkeit ist:

5) Wenn von zwei concentrischen Involutionen von Strahlen je zwei Paar zugeordnete Strahlen gegeben sind, mittels des Lineals und eines festen Kreises

5) Wenn von zwei auf einander gelegten Involutionen von Punkten je zwei Paar zugeordnete Punkte gegeben sind, mittels des Lineals und eines festen

Digitized by Google

dasjenige Paar zugeordnete Strahlen zu finden, welches beiden gemeinschaftlich angehört.

Kreises dasjenige Paar zugeordnete Punkte zu finden, welches beiden gemeinschaftlich angehört.

Vermittelst einer beliebigen Geraden, welche beide Involutionen durchschneidet, wird die Aufgabe links auf die andere rechts zurückgeführt.

Sind auf einer Geraden A für die eine Involution die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$, für die andere die Punkte $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}'_1$; $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}'_1$, gegeben, so verbinde man diese Punkte mit einem beliebigen Punkte B auf dem Umfange des Hülfskreises bezüglich durch die Geraden a, a_1; b, b_1; a', a'_1; b', b'_1, welche den Kreis zum zweitenmal in den Punkten α, α_1; β, β_1; α', α'_1; β', β'_1 schneiden; dann ziehe man die Sehnen $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, die sich in p, und die Sehnen $\alpha'\alpha'_1$, $\beta'\beta'_1$, die sich in p' schneiden, sofort wieder die Gerade pp', welche, wo möglich, den Kreis in k, k_1 schneide; endlich die Strahlen Bk, Bk_1, so schneiden diese die Gerade A in den gesuchten zwei Punkten $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}_1$ oder $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{k}'_1$.

Der Beweis erhellt unmittelbar aus 4) links. Sind die beiden Paare involutorischer Gebilde, um die es sich handelt, ungleichliegend, so liegen beide Punkte p, p' ausserhalb des Kreises, also ist es in diesem Falle möglich, dass die Gerade pp' den Kreis nicht schneide, und es folglich keine Punkte $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}_1$ gebe, und zwar tritt dieses letztere nothwendig ein, wenn die Hauptpunkte oder Hauptstrahlen der einen Involution abwechselnd zu denen der anderen liegen. Ist dagegen eines jener Paare, oder sind beide Paare gleichliegend, so liegt einer der Punkte p, p' oder beide zugleich innerhalb des Kreises, und es giebt folglich in diesen beiden Fällen nothwendig ein Paar Punkte $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}_1$. In der Sprache der Analysis würde dieses Resultat so lauten: Ein Punkten- oder Strahlenpaar, welches mit jedem von zwei andern solchen Paaren harmonisch ist, ist allemal reell, wenn eines dieser beiden letzteren, oder wenn beide imaginär sind; es kann aber imaginär werden, wenn die letzteren beide reell sind.

Zugeordnete harmonische Pole und Polaren; zugeordnete Durchmesser und Achsenpunktwinkel; die Brennpunkte.

§. 4.

Bezeichnet man jetzt in der Figur, welche den Betrachtungen des vorigen §. zu Grunde lag, die Punkte, in welchen die Gerade P von den Strahlen a, b, c, d ...; a_2, b_2, c_2, d_2 ... der involutorischen Strahlbüschel B, B_2 geschnitten wird, durch $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$ ... $\mathfrak{a}'_2$, $\mathfrak{b}'_2$, $\mathfrak{c}'_2$, $\mathfrak{d}'_2$ ..., und die Strahlen, welche den Punkt p mit diesen Punkten verbinden, durch a', b', c', d' ...; a'_2, b'_2, c'_2, d'_2 ..., so sieht man zunächst, dass der Punkt $\mathfrak{a}'$ zu dem Strahle a'_2, $\mathfrak{a}'_2$ zu a', $\mathfrak{b}'$ zu b'_2 u. s. f. in derselben Beziehung stehe, als p zu P, dass also die harmonischen Pole aller Geraden, welche durch einen Punkt p gehen, auf der harmonischen Po-

lare P dieses Punktes liegen, und umgekehrt; ferner ergibt sich mittels B, B_2, dass sowohl die Punkte a', b', c', d'...; a'_2, b'_2, c'_2, d'_2... eine Involution von Punkten, als auch die Strahlen a', b', c', d'...; a'_2, b'_2, c'_2, d'_2... eine Involution von Strahlen bilden.

Zwei Punkte a', a'_2, wovon jeder auf der harmonischen Polare des anderen in Bezug auf einen Kegelschnitt liegt, heissen zwei zugeordnete harmonische Pole in Bezug auf diesen Kegelschnitt, und zwei Gerade a', a'_2, wovon jede durch den harmonischen Pol der anderen in Bezug auf einen Kegelschnitt geht, heissen zwei zugeordnete harmonische Polaren in Bezug auf diesen Kegelschnitt. Ferner heissen drei Punkte p, a', a'_2, deren jeder der harmonische Pol der Geraden ist, welche die beiden anderen verbindet, drei zugeordnete harmonische Pole, und diese Geraden P, a'_2, a' drei zugeordnete harmonische Polaren.

1) Die sämmtlichen Paare zugeordneter harmonischer Polaren, in Bezug auf einen Kegelschnitt, welche einem beliebigen Punkte seiner Ebene angehören, bilden eine Involution von Strahlen, deren Gebilde gleichliegend oder ungleichliegend sind, je nachdem dieser Punkt innerhalb oder ausserhalb des Kegelschnittes liegt, und deren Hauptstrahlen im letzteren Falle die beiden Tangenten sind, welche von diesem Punkte ausgehen. Und... (wie rechts)

1) Die sämmtlichen Paare zugeordneter harmonischer Pole, in Bezug auf einen Kegelschnitt, welche einer beliebigen Geraden seiner Ebene angehören, bilden eine Involution von Punkten, deren Gebilde gleichliegend oder ungleichliegend sind, je nachdem diese Gerade den Kegelschnitt in keinem oder in zwei Punkten schneidet, und deren Hauptpunkte im letzteren Falle die Durchschnittspunkte dieser Geraden und des Kegelschnittes sind. Und... (wie links)

2) Zwei Seiten eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecks schneiden eine jede Gerade, deren harmonischer Pol auf der dritten Seite liegt, in zwei zugeordneten harmonischen Polen.

2) Zwei Ecken eines einem Kegelschnitte umschriebenen Dreiecks haben mit einem jeden Punkte, dessen harmonische Polare durch die dritte Ecke geht, zwei zugeordnete harmonische Polaren gemein.

Nach §. 1. f ist das Rechteck $am.a_1m$ unter den Abständen zweier zugeordneter harmonischer Pole a, a_1 vom Mittelpunkte m der Involution, so wie das Product $\mathrm{tng}\,am.\mathrm{tng}.a_1m$ der Tangenten der Winkel, welche zwei zugeordnete harmonische Polaren a, a_1 mit einer Achse m bilden, constant, und zwar jenes, wenn die betreffende Gerade den Kegelschnitt schneidet, dem Quadrate der halben auf ihr enthaltenen Sehne, dieses, wenn der betreffende Punkt ausserhalb des Kegelschnittes liegt, der zweiten Potenz der Tangente des halben Winkels gleich, welche die von ihm ausgehenden

Digitized by Google

Tangenten einschliessen. Findet diese Lage aber nicht statt, so kann offenbar statt der Sehne der eben so grosse Abstand derjenigen zwei zugeordneten harmonischen Pole, welche gleich weit vom Mittelpunkte m entfernt sind, und statt des Tangentenwinkels der eben so grosse Winkel eintreten, welchen die beiden gegen die Achse m gleichgeneigten zugeordneten harmonischen Polaren einschliessen. Jener Abstand soll daher eine ideale Sehne, und dieser Winkel ein idealer Tangentenwinkel des Kegelschnittes heissen.

3) Das Product der Tangenten der Winkel, welche zwei beliebige zugeordnete harmonische Polaren, für einen bestimmten Punkt, mit einer Achse der Involution einschliessen, ist von unveränderlichem Werthe, und zwar der zweiten Potenz der Tangente des halben reellen oder idealen Tangentenwinkels gleich, welcher zu jenem Punkte gehört.

3) Das Rechteck unter den Abständen zweier beliebiger zugeordneter harmonischer Pole, für eine bestimmte Gerade, vom Mittelpunkte der Involution ist von unveränderlichem Inhalt, und zwar dem Quadrate der halben reellen oder idealen Sehne gleich, welche zu dieser Geraden gehört.

Endlich überzeugt man sich leicht, dass:

4) die spitzen Winkel, welche die einzelnen Paare einer Involution zugeordneter harmonischer Polaren einschliessen, von 0° bis 90° oder von der Grösse des idealen Tangentenwinkels bis 90° wachsen, je nachdem der betreffende Punkt ausserhalb oder innerhalb des Kegelschnittes liegt.

4) die Abstände der einzelnen Paare einer Involution zugeordneter harmonischer Pole von einander von Null bis ins Unendliche oder von der Grösse der idealen Sehne bis ins Unendliche wachsen, je nachdem die betreffende Gerade den Kegelschnitt schneidet oder nicht.

Ganz ungesucht bieten sich nunmehr folgende Fragen dar:

1) Gibt es in der Ebene eines beliebigen Kegelschnittes zwei oder mehrere Involutionen zugeordneter harmonischer Pole oder Polaren, welche bezüglich den Mittelpunkt oder eine Achse gemein haben?

2) Welche Eigenschaften haben die einzelnen Paare derjenigen Involution zugeordneter harmonischer Polaren oder Pole gemein, welche einem solchen Mittelpunkte oder einer solchen Achse angehören?

3) Gibt es in der Ebene eines beliebigen Kegelschnittes ungleichliegend involutorisch-gleiche Strahlbüschel, und involutorisch-gleiche Gerade, welche von zugeordneten harmonischen Polaren oder Polen gebildet werden?

4) Gibt es in derselben Involutionen der rechten Winkel, deren Schenkel zugeordnete harmonische Polaren sind?

1) Denkt man sich in der Ebene eines Kegelschnittes eine Gerade in beliebiger Richtung ins Unendliche hinausgerückt, so sind alle Gerade, welche durch ihren harmonischen Pol gehen, die harmonischen Polaren von Punkten, welche in den verschiedenen Richtungen der Ebene unendlich-entfernt liegen, also muss eine jede derselben sämmtliche nach dem entsprechenden unendlich-entfernten Punkte gerichteten parallelen Geraden in den Mittelpunkten der ihnen angehörigen Involutionen zugeordneter harmonischer Pole und insbesondere zwei parallele Tangenten in den Berührungspunkten treffen. Demnach ist der harmonische Pol dieser unendlich-entfernten Geraden Mittelpunkt sämmtlicher Involutionen zugeordneter harmonischer Pole, welche den unzähligen durch ihn gehenden Geraden angehören, und somit auch der Mittelpunkt sämmtlicher reellen oder idealen Sehnen des Kegelschnittes, welche auf diesen Geraden liegen. Er wird deshalb der Mittelpunkt des Kegelschnittes genannt, und zwar besitzt jeder Kegelschnitt nur einen solchen Punkt, weil eine Involution von Punkten nicht zwei Mittelpunkte enthalten kann, und daher gibt es in seiner Ebene auch nur eine unendlich-entfernte Gerade.

Da die letztere mit der Hyperbel zwei, mit der Ellipse keinen und mit der Parabel nur einen Punkt, nämlich den Berührungspunkt, gemein hat, so liegt der Mittelpunkt der ersten ausserhalb, der zweiten innerhalb, der dritten unendlich-entfernt auf dem Umfange der Curve.

Jede reelle oder ideale Sehne eines Kegelschnittes, die durch seinen Mittelpunkt geht, heisst sowohl der Richtung als der Grösse nach ein Durchmesser desselben. Die Hyperbel hat also reelle und ideale, die Ellipse und die Parabel nur reelle, und zwar die letztere lauter parallele Durchmesser. Je zwei zugeordnete harmonische Polaren, welche durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes gehen, heissen zwei zugeordnete Durchmesser, die Achsen der Involution dieser letzteren heissen die Achsen des Kegelschnittes, und die Hauptstrahlen derselben die Asymptoten der Hyperbel. — Bei dieser ist jedem idealen Durchmesser ein reeller zugeordnet, und umgekehrt. Bei der Ellipse kann man den Winkel, welchen die gegen jede Achse gleichgeneigten zugeordneten Durchmesser bilden, und welcher der kleinste unter allen ist, den idealen Asymptotenwinkel nennen.

Betrachtet man irgend einen Punkt einer Achse des Kegelschnittes als Mittelpunkt einer Involution zugeordneter harmonischer Polaren, so läuft der der Achse zugeordnete Strahl mit der anderen Achse des Kegelschnittes parallel, steht also auf der ersteren senkrecht. Jede dieser beiden Achsen ist also die gemeinschaftliche Achse aller dieser Involutionen, und hat analoge Eigenschaften als der Mittelpunkt des Kegelschnittes. Je zwei zugeordnete harmonische Pole, welche auf einer Achse des Kegelschnittes liegen, sollen zwei zugeordnete Achsenpunkte, und die reellen oder idealen Tangentenwinkel, deren Scheitel sie sind, zwei zugeordnete Achsenpunktwinkel heissen. Von diesen Punkten und Winkeln ist, meines Wissens, noch nirgends wo gehandelt worden. Endlich heissen die

Digitized by Google

Hauptpunkte der von den zugeordneten Achsenpunkten gebildeten Involution oder, in ihrer Ermangelung, die beiden vom Mittelpunkte des Kegelschnittes gleich weit entfernten zugeordneten Achsenpunkte die Scheitel des Kegelschnittes. Die Hyperbel hat zwei reelle und zwei ideale, die Ellipse zwei Paar reelle, die Parabel zwei reelle aber einen unendlich-entfernten Scheitel.

2) Ich übergehe mehrere längst bekannte Sätze, welche fast nur Wiederholungen der allgemeineren 1), 3) und 4) sein würden, um sofort einige metrische Relationen zu entwickeln, deren Interesse besonders darin besteht, dass in ihnen das Princip der Dualität sich erhält.

Es sei M der Mittelpunkt einer Ellipse oder Hyperbel, m ein reeller Scheitel derselben und A die Tangente in m, welche mit der anderen Achse parallel und daher auf Mm senkrecht sein muss. Es seien α, α_1 zwei beliebige zugeordnete Durchmesser, welche die A in a, a_1 und zwei mit α_1, α parallele Linien, die durch m gehen, in α, α_1 schneiden. Dies vorausgesetzt, so sind sowohl a, α als a_1, α_1 zwei zugeordnete harmonische Pole, indem z. B. die harmonische Polare von a sowohl durch m als den harmonischen Pol von α gehen, also mit α_1 parallel sein muss; folglich sind die Rechtecke $Ma \,.\, M\alpha$, $Ma_1 \,.\, M\alpha_1$ den Quadraten der halben Durchmesserlängen α, α_1 gleich. Nun ist aber

$$Ma : M\alpha = aa_1 : ma_1$$

und

$$Ma_1 : M\alpha_1 = aa_1 : ma,$$

also

$$Ma \,.\, M\alpha = Ma^2 \,.\, \frac{ma_1}{aa_1};\quad Ma_1 \,.\, M\alpha_1 = Ma_1{}^2 \,.\, \frac{ma}{aa_1},$$

und nach dem pythagorischen Satze ist

$$Ma^2 = Mm^2 + ma^2;\quad Ma_1{}^2 = Mm^2 + ma_1{}^2;$$

also

$$Ma \,.\, M\alpha \pm Ma_1 \,.\, M\alpha_1 = (Mm^2 + ma^2)\frac{ma_1}{aa_1} \pm (Mm^2 + ma_1{}^2)\frac{ma}{aa_1}$$

$$= Mm^2 \,.\, \frac{ma_1 \pm ma}{aa_1} \pm ma \,.\, ma_1 \,.\, \frac{ma_1 \pm ma}{aa_1} = Mm^2 \pm ma \,.\, ma_1,$$

wo die oberen Zeichen für die Ellipse, die unteren für die Hyperbel gelten, weil dort die Involution der zugeordneten Durchmesser gleichliegende, hier ungleichliegende Gebilde enthält, also dort die Punkte a, a_1 auf verschiedenen, hier auf einerlei Seite von m liegen müssen, und zwar gehört hier dem idealen Durchmesser der grössere ma_1 von beiden Abschnitten ma, ma_1 an.

Aber m ist der Mittelpunkt einer Involution von Punkten, welche auf A durch den zugeordneten Durchmesser bestimmt werden; also ist das Rechteck $ma \,.\, ma_1$, folglich auch die Summe oder Differenz $Ma \,.\, M\alpha \pm Ma_1 \,.\, M\alpha_1$ constant.

Zu demselben Resultate gelangt man auch auf folgende Weise: Es seien O, O_1 die Endpunkte eines beliebigen reellen Durch-

messers, m, m_1 die Endpunkte einer reellen Achse, durch O sei eine Tangente gelegt, welche diese Achse in a_1 schneide, und von O eine Senkrechte Oa auf die Achse gefällt, deren Fusspunkt a sei; ausserdem seien die Geraden Om, Om_1, O_1m und durch M eine Parallele mit Oa_1, d. h. der dem OO_1 zugeordnete Durchmesser gezogen, welcher von Om in c, von O_1m in c_1, von Om_1 in b geschnitten werde. Endlich werde die andere Achse von Om in b, von Om_1 in b_1 geschnitten.

Da die Seite OO_1 des Dreiecks OO_1m durch den harmonischen Pol der Geraden Mc, und die Seite mm_1 des Dreiecks Omm_1 durch den harmonischen Pol der Geraden Mb geht, so sind (nach 2) links) sowohl c, c_1 als b, b_1 zug. harm. Pole, also das Rechteck $Mc \cdot Mc_1$ dem Quadrate des halben Durchmessers, der dem OO_1 zugeordnet ist, und das Rechteck $Mb \cdot Mb_1$ dem Quadrate der halben anderen Achse gleich. Es sei diese halbe Achse $= B$, so wie $Mm = Mm_1 = A$; ferner $MO = A_1$, $Mc \cdot Mc_1 = B_1^2$.

Der Punkt a_1 ist der harmonische Pol der Senkrechten Oa, also $Ma \cdot Ma_1 = Mm^2 = A^2$; und aus den Proportionen

$$Mb : Oa_1 = Mm_1 : a_1m_1; \qquad Oa : Mb_1 = am_1 : Mm_1;$$
$$Mc : Oa_1 = Mm : a_1m; \qquad Oa : Mb = am : Mm$$

ergibt sich

$$Mb \cdot Mc \text{ oder } Mc \cdot Mc_1 = B_1^2 = \frac{Oa_1^2 \cdot A^2}{a_1m \cdot a_1m_1}. \qquad Oa^2 = \frac{Mb \cdot Mb_1 \cdot am \cdot am_1}{A^2} = \frac{B^2}{A^2} \cdot am \cdot am_1.$$

Aber

$$Oa_1^2 = Oa^2 + aa_1^2 \text{ und } MO^2 = A_1^2 = Oa^2 + Ma^2;$$

$$am \cdot am_1 = (A - Ma)(A + Ma) = A^2 - Ma^2 = Ma \cdot Ma_1 - Ma^2 = Ma \cdot aa_1.$$

$$a_1m \cdot a_1m_1 = (Ma_1 - A)(Ma_1 + A) = Ma_1^2 - A^2 = Ma_1^2 - Ma \cdot Ma_1 = Ma_1 \cdot aa_1.$$

Demnach ist

$$A_1^2 = \frac{B^2}{A^2} \cdot am \cdot am_1 + Ma^2 = B^2 \cdot \frac{Ma \cdot aa_1}{Ma \cdot Ma_1} + Ma^2 = \frac{B^2 \cdot aa_1 + Ma^2 \cdot Ma_1}{Ma_1} = \frac{B^2 \cdot aa_1 + A^2 \cdot Ma}{Ma_1};$$

$$B_1^2 = \frac{A^2 \cdot Oa^2 + A^2 \cdot aa_1^2}{a_1m \cdot a_1m_1} = \frac{B^2 \cdot am \cdot am_1 + A^2 \cdot aa_1^2}{a_1m \cdot a_1m_1} = \frac{B^2 \cdot Ma + A^2 \cdot aa_1}{Ma_1};$$

also

$$A_1^2 \pm B_1^2 = \frac{A^2(Ma \pm aa_1) \pm B^2(Ma \pm aa_1)}{Ma_1} = A^2 \pm B^2,$$

indem bei der Ellipse, wo a zwischen M und a_1 fällt, die oberen, bei der Hyperbel, wo a_1 zwischen M und a fällt, die unteren Zeichen zu nehmen sind.

Gehen wir jetzt zur Figur des ersten Beweises zurück, so ist

$$A_1^2 . B_1^2 = Ma^2 . Ma_1^2 \frac{ma . ma_1}{aa_1^2} = Ma^2 . Ma_1^2 . \frac{B^2}{aa_1^2},$$

wei dort

$$Ma . Ma \pm Ma_1 . Ma_1 = A_1^2 \pm B_1^2 = A^2 \pm ma . ma_1$$

war; also ist

$$A_1 . B_1 = Ma . Ma_1 . \frac{B}{aa_1}, \text{ oder } A_1 . B_1 : Ma . Ma_1 = B : aa_1.$$

Ist aber P der Inhalt des Parallelogramms, welches durch die Endpunkte zweier reellen oder idealen zugeordneten Durchmesser bestimmt wird, so verhält sich:

$P : 4Maa_1 = A_1 . B_1 : Ma . Ma_1$, also, da $Maa_1 = \frac{1}{2}Mm . aa_1$ ist,
$P : 2A . aa_1 = B : aa_1$, folglich $P = 2A . B$.

Nennen wir α den von A_1, B_1 eingeschlossenen Winkel, so ist $P = 2A_1 . B_1 . \sin\alpha = 2A . B$, also $(A_1 + B_1)^2 = A^2 + B^2 + \frac{2A . B}{\sin\alpha}$, d. h. für die Ellipse ist $A_1 + B_1$, und für die Ellipse und Hyperbel ist $A_1 . B_1$ ein Maximum oder Minimum, je nachdem α ein Minimum oder Maximum ist; und da für erstere

$$(A_1 + B_1)^2 + (A_1 - B_1)^2 = 2(A^2 + B^2),$$

für die letztere

$$(A_1 + B_1)(A_1 - B_1) = A^2 - B^2,$$

so ist für beide $A_1 - B_1$ ein Maximum oder Minimum, je nachdem $A_1 + B_1$ ein Minimum oder Maximum ist.

Seien andererseits a, a_1 zwei beliebige zugeordn. Achsenpunkte, welche *a*) entweder einer von zwei reellen, oder *b*) einer idealen Achse angehören; durch a_1, den äusseren Punkt in beiden Fällen, seien zwei Tangenten gezogen, und ausserdem die beiden Tangenten in den Scheiteln m, m_1 der anderen Achse, deren eine von jenen beiden in n, q, die andere in n_1, q_1 geschnitten werde. Die Tangente nn_1 berühre den Kegelschnitt in r und schneide die andere Achse in f. Man ziehe noch die Geraden nq_1, n_1q_1, ra, welche auf aa_1 senkrecht stehen und dieselbe in b, b_1, a schneiden.

Da die harmonische Polare des Punktes a durch die Ecke a_1 des dem Kegelschnitte umschriebenen Dreiecks a_1nq geht, so sind (nach 2) rechts) die Geraden an, aq zwei zugeordnete harmonische Polaren. Ist also Winkel $na_1b = \alpha$, und $tng . nab . tng . qab_1 = tng^2 . \alpha$, so sind α, α_1 die Hälften zweier zugeordneten Achsenpunktwinkel.

Da die Punkte f, n, r, n_1 harmonisch sind, so sind es auch

die Punkte M (der Mittelpunkt des Kegelschnitts), $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1$; aber $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$., also auch $\mathfrak{a}_1M \cdot \mathfrak{a}_1\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1{}^2$. Demnach ist

$$\operatorname{tng}^2\alpha_1 = \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}^2} = \frac{M\mathfrak{m}^2}{\mathfrak{a}_1M \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1} = \frac{A^2}{\mathfrak{a}_1M \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1},$$

$$\operatorname{tng}^2\alpha = \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \cdot \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1} = \frac{A^2}{\mathfrak{a}\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1};$$

aber

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1 = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b} - \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1{}^2 = \mathfrak{a}_1M \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1{}^2$$
$$= \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}M;$$

also

$$\operatorname{tng}^2\alpha = \frac{A^2}{\mathfrak{a}M \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1} \text{ und } \operatorname{tng}^2\alpha \pm \operatorname{tng}^2\alpha_1 = \frac{A^2}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1} \cdot \frac{\mathfrak{a}_1M \pm \mathfrak{a}M}{\mathfrak{a}_1M \cdot \mathfrak{a}M}.$$

Im Fall einer idealen Achse ist $\mathfrak{a}_1M + \mathfrak{a}M = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, und im Fall zweier reellen ist $\mathfrak{a}_1M - \mathfrak{a}M = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$; und da $M\mathfrak{a} \cdot M\mathfrak{a}_1 =$ dem Quadrate dieser halben Achse $= B^2$, so ist $\operatorname{tng}^2\alpha \pm \operatorname{tng}^2\alpha_1 = \frac{A^2}{B^2}$.

Ferner ist

$$\operatorname{tng}^2\alpha \cdot \operatorname{tng}^2\alpha_1 = \frac{A^2}{\mathfrak{a}M \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1} \cdot \frac{A^2}{\mathfrak{a}_1M \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1} = \frac{A^2 \cdot A^2}{B^2 \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1{}^2},$$

also

$$\operatorname{tng}\alpha \cdot \operatorname{tng}\alpha_1 = \frac{A^2}{B \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}.$$

Endlich im Falle *b*), wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ auf der reellen Achse einer Hyperbel liegen, seien $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1$ die Scheitel dieser Achse, A, A_1 die Tangenten in $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1$, und von dem äusseren Punkte $\mathfrak{a}$ seien zwei Tangenten gezogen, welche den Kegelschnitt in $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ berühren und die A, A_1 in $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{q}$; $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{q}_1$ schneiden. Zieht man jetzt die Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{n}$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{q}$, so müssen dieselben (nach 2) rechts) zug. harmonische Polaren sein, und eben deshalb muss $\mathfrak{a}_1\mathfrak{n}$ durch $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{q}$ durch $\mathfrak{n}_1$ gehen. Die Winkel $\mathfrak{n}\mathfrak{a}\mathfrak{q} = 2\alpha$ und $\mathfrak{n}\mathfrak{a}_1\mathfrak{q} = 2\alpha_1$ sind zugeordnete Achsenpunktwinkel und man hat

$$\operatorname{tng}^2\alpha = \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}\mathfrak{m}} \cdot \frac{\mathfrak{n}_1\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{a}\mathfrak{m}_1}, \quad \operatorname{tng}^2\alpha_1 = \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}} \cdot \frac{\mathfrak{n}_1\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}_1}.$$

Aber

$$\mathfrak{a}\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{m}_1 = (M\mathfrak{m} - \mathfrak{m}\mathfrak{a})(M\mathfrak{m} + M\mathfrak{a}) = A^2 - M\mathfrak{a}^2$$
$$= M\mathfrak{a} \cdot M\mathfrak{a}_1 - M\mathfrak{a}^2 = M\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1,$$
$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{a}_1\mathfrak{m}_1 = (M\mathfrak{a}_1 - M\mathfrak{m})(M\mathfrak{a}_1 + M\mathfrak{m}) = M\mathfrak{a}_1{}^2 - A^2$$
$$= M\mathfrak{a}_1{}^2 - M\mathfrak{a} \cdot M\mathfrak{a}_1 = M\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1.$$

Also ist

$$\operatorname{tng}^2\alpha - \operatorname{tng}^2\alpha_1 = \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}_1\mathfrak{m}_1}{M\mathfrak{a}_1 \cdot M\mathfrak{a}} \cdot \frac{M\mathfrak{a}_1 - M\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1} = \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}_1\mathfrak{m}_1}{A^2}.$$

Die Tangenten A, A_1 werden von allen übrigen projektivisch ge-

Digitized by Google

schnitten, und ihr Durchschnitt, dem die wechselseitigen Berührungspunkte entsprechen, ist hier unendlich entfernt; also sind m, m_1 ihre Durchschnitte der Parallelstrahlen, und es ist folglich das Rechteck $nm \cdot n_1m_1$ constant (Einleit. 11, *b*). Das nämliche gilt also auch von der Differenz $tng^2\alpha - tng^2\alpha_1$, und da, wenn α mit *M* zusammenfällt und zur idealen Achse gerechnet wird, die Tangente des Complementes von $\alpha = \frac{A}{B}$, also $tng\,\alpha = \frac{B}{A}$, weil $\alpha_1 = 0$, so ist $nm \cdot n_1m_1$ oder das Quadrat des halben Segmentes, das die Asymptoten auf jeder Scheiteltangente abschneiden, $= B^2$, und $tng^2\alpha - tng^2\alpha_1 = \frac{B^2}{A^2}$.

Im Falle der Parabel ist $am = a_1m$, also $tng\,\alpha = tng\,\alpha_1$.

5. In jeder Ellipse ist die Summe der Quadrate zweier beliebigen zugeordneten Durchmesser der Summe der Quadrate beider Achsen, und in jeder Hyperbel ist der Unterschied der Quadrate eines beliebigen reellen und des ihm zugeordneten idealen Durchmessers dem Unterschiede der Quadrate der reellen und der idealen Achse gleich.

5. In jedem Kegelschnitte ist die Summe oder Differenz der zweiten Potenzen der Tangenten zweier zugeordneten halben Achsenpunktwinkel der zweiten Potenz der Tangente des entsprechenden reellen oder Asymptotenwinkels gleich, und zwar die Summe, wenn die Achsenpunkte einer idealen Achse, die Differenz, wenn sie einer reellen Achse angehören, und es ist in diesem letzteren Falle bei der Ellipse der ideale, bei der Hyperbel der reelle Achsenpunktwinkel der grössere von beiden.

6. In jeder Ellipse oder Hyperbel verhalten sich die Rechtecke unter je zwei zugeordneten Durchmessern umgekehrt wie die Sinus der von ihnen eingeschlossenen Winkel.

6. In jedem Kegelschnitte verhalten sich die Producte der Tangenten je zweier zugeordneten halben Achsenpunktwinkel umgekehrt wie die Abstände ihrer Scheitel von einander.

7. In jeder Ellipse oder Hyperbel sind alle durch die Endpunkte oder Richtungen der zugeordneten Durchmesser bestimmten eingeschriebenen oder umschriebenen Parallelogramme einander und den durch die Achsen bestimmten Parallelogrammen gleich.

8. In jeder Ellipse ist die Summe zweier zugeordneter Durchmesser um so grösser, und ihr Unterschied um so kleiner, je kleiner der Winkel ist, den sie ein-

8. Die Summe zweier zugeordneten Achsenpunktwinkel, deren Scheitel auf der idealen Achse einer Hyperbel liegen, ist um so grösser, und ihr Unter-

Digitized by Google

schliessen; daher bilden die idealen Asymptoten die grösste Summe und sind einander gleich, und die beiden Achsen bilden die kleinste Summe, und die eine ist der grösste, die andere der kleinste aller Durchmesser.

schied um so kleiner, je kleiner der Abstand ihrer Scheitel von einander ist; daher bilden diejenigen, deren Scheitel die idealen Scheitel des Kegelschnittes sind, die grösste Summe und sind einander gleich, und der entsprechende Asymptotenwinkel, welcher der grösste unter allen ist, bildet mit dem ihm zugeordneten Achsenpunktwinkel, welcher gleich Null ist, die kleinste Summe.

3) Gehen wir noch einmal zur Figur des ersten Beweises der vorigen Sätze (links) zurück; doch sei jetzt Mm ein Durchmesser, dessen zugeordneter den Nebenwinkel von aa_1 hälftet, so ist $Ma = Ma_1$ und $Ma_1 = ma = a\alpha$, also

$$Ma \,.\, Ma \pm Ma_1 \,.\, Ma_1 = Ma \,.\, Ma \pm Ma \,.\, a\alpha = Ma(Ma \pm a\alpha)$$
$$= Ma^2 = A^2 \pm B^2.$$

Wiederholt man diese Betrachtung in Ansehung der übrigen drei, von α, α_1 gebildeten Winkel, so erhält man ein dem Kegelschnitte umschriebenes Rechteck, dessen Diagonalen die constante Grösse $2Ma$ haben; also darf man schliessen:

9. Die Scheitel aller rechten Winkel, welche einer Ellipse oder Hyperbel umschrieben sind, liegen auf dem Umfange eines mit dem Kegelschnitte concentrischen Kreises, und je zwei Sehnen dieses Kreises, welche durch die Schenkel dieser rechten Winkel bestimmt werden, haben die Länge zweier zugeordneten Durchmesser der Ellipse.

Da nun zwei involutorische Strahlbüschel ungleichliegend involutorisch-gleich sind, wenn ihre Hauptstrahlen rechte Winkel bilden, und da zwei involutorische Gerade involutorisch-gleich sind, wenn einer ihrer Hauptpunkte unendlich-entfernt ist, so folgt:

10. In der Ebene einer jeden Ellipse oder Hyperbel liegen die Mittelpunkte aller ungleichliegend involutorisch-gleichen Strahlbüschel, welche von zugeordneten harmonischen Polaren gebildet werden, auf dem Umfange eines mit dem Kegelschnitte concentrischen Kreises, dessen Durchmesser die Diagonale des von den Achsen gebildeten Rechtecks ist.

10. Die Ellipse besitzt in ihrer ganzen Ebene keine Gerade, deren zugeordnete harmonische Pole involutorisch-gleiche Gerade bilden; dagegen hat in der Ebene der Hyperbel jede mit den Asymptoten parallele Gerade, und in der Ebene der Parabel jeder Durchmesser diese Eigenschaft.

Bei der gleichseitigen Hyperbel, welche rechtwinklige Asymptoten hat, schwindet der Kreis (links) in den Mittelpunkt der Curve zusammen, und bei der Parabel, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, artet er in eine Gerade aus.

4) Wenn es einen Punkt F gibt, dessen Strahlen als zugeordnete harmonische Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt, eine Involution der rechten Winkel bilden, so muss derselbe, da eine solche Involution gleichliegende Gebilde enthält, innerhalb des Kegelschnittes liegen; und er muss zu einer Achse gehören, weil sonst eine mit der Achse parallele Gerade auf der ihr zugeordneten harmonischen Polare nicht senkrecht stehen könnte.

a) Man denke sich von dem fraglichen Punkte F nach den Berührungspunkten zweier beliebigen Tangenten die Strahlen p, q, nach dem Durchschnitte beider Tangenten den Strahl a und ausserdem die dem a zugeordnete, auf ihm senkrechte harmonische Polare a_1 gezogen, so geht die Berührungssehne dieser Tangenten, als harmonische Polare eines auf a liegenden Punktes, durch den auf a_1 liegenden harmonischen Pol von a, schneidet also die vier Strahlen a, p, a_1, q in vier harmonischen Punkten, und da nun diese Strahlen selber harmonisch sind und a zu a_1 rechtwinklig ist, so hälften die Strahlen a, a_1 die von p, q eingeschlossenen Winkel und Nebenwinkel.

b) Es seien sofort A, A_1 zwei feste, und A_2 eine beliebige dritte Tangente, aus F seien nach ihren Berührungspunkten die Strahlen p, q, r, und nach den Durchschnitten von A_2 mit A, A_1 die Strahlen a, a_1 gezogen, so ist

$$\mathfrak{W}.\ ap = \mathfrak{W}.\ ar$$

$$\mathfrak{W}.\ a_1q = \mathfrak{W}.\ a_1r;\ \text{also}$$

$$\mathfrak{W}.\ ap \pm \mathfrak{W}.\ a_1q = \mathfrak{W}.\ ar \pm \mathfrak{W}.\ a_1r = \mathfrak{W}.\ aa_1,$$

wo die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem r zwischen oder ausserhalb p. q liegt. Es ist aber $\mathfrak{W}.\ pq = \mathfrak{W}\ aa_1 + \mathfrak{W}.\ ap \pm \mathfrak{W}.\ a_1q = 2\ \mathfrak{W}.\ aa_1$; also ist $\mathfrak{W}.\ aa_1$ von unveränderlicher Grösse.

c) Insbesondere seien jetzt A, A_1 die Tangenten in den Scheiteln einer reellen Achse, welche den Punkt F enthalten würde — denn auf einer idealen, deren sämmtliche Punkte ausserhalb des Kegelschnittes liegen, kann F nicht sein — so ist jetzt der so eben mit pq bezeichnete Winkel $= 2R$, also der Winkel aa_1 für eine beliebige dritte Tangente $A_2 = R$. Beschreibt man also über dem von A, A_1 interceptirten Segmente der A_2, als Durchmesser, einen Kreis, so schneidet er, wo möglich, die Achse in zwei Punkten, deren jeder ein solcher Punkt F ist.

In der That, da die harmonische Polare des Punktes F nach dem unendlich entfernten Durchschnitte von A, A_1 gehen muss, welche mit A_2 ein dem Kegelschnitte umschriebenes Dreieck bilden, so sind die rechtwinkligen Strahlen a, a_1, welche F mit den beiden anderen Ecken dieses Dreiecks verbinden, zugeordnete harmonische Polaren; und da bereits die Achse und der in F auf ihr senkrechte Strahl ein anderes Paar dieser Art bilden, so müssen (nach §. 2, *c*.) alle Paare zugeordneter harmonischer Polaren,

welche durch diesen so bestimmten Punkt F gehen, zu einander rechtwinklig sein.

Sind m, m_1 die Berührungspunkte von A, A_1 und a, a_1 ihre Durchschnitte mit A_2, so sind die Dreiecke Fma und Fm_1a_1 ähnlich, also $Fm : ma = m_1a_1 : Fm_1$ und $Fm \cdot Fm_1 = ma \cdot ma_1$, aber $ma \cdot ma_1$ ist constant und dem Quadrate der halben anderen Achse gleich, also findet man auch die beiden Punkte F, F_1, wenn man bei der Ellipse die eine Achse selber, bei der Hyperbel deren Verlängerungen so theilt, dass jene Bedingung erfüllt wird. Zugleich folgt hieraus, dass nur die grosse Achse der Ellipse solche Punkte F, F_1 enthält.

Für die Parabel findet man den Punkt F, indem man, wenn A die vorhandene Scheiteltangente ist, in a auf A_2 eine Senkrechte errichtet, welche die Achse in F schneidet. Denn die dieser Senkrechten zugeordnete harmonische Polare für F ist mit A_2 parallel u. s. w.

d) Noch einfacher und direkt überzeugt man sich von der Existenz des Punktes F mittels des ihm zugeordneten Achsenpunktes. Denn setzt man in der Relation $\operatorname{tng}^2\alpha - \operatorname{tng}^2\alpha_1 = \frac{B^2}{A^2}$ den Winkel α für die Ellipse und α_1 für die Hyperbel $= \frac{1}{2}R$, so ist bezüglich $\operatorname{tang}^2\alpha_1 = \frac{A^2 - B^2}{A^2}$ und $\operatorname{tng}^2\alpha = \frac{A^2 + B^2}{A^2}$, und für die Parabel $\alpha = \alpha_1 = \frac{1}{2}R$. Also ist der Punkt F allemal auf einer reellen Achse vorhanden, welche grösser als die andere ist; und man erhält hiermit zugleich eine neue Construction von F, welche darauf hinausläuft, an den Kegelschnitt eine Tangente von gegebener Richtung zu legen.

Jeder Punkt in der Ebene eines Kegelschnittes, dessen sämmtliche Paare zugeordneter harmonischer Polaren zu einander rechtwinklig sind, heisst ein Brennpunkt des Kegelschnittes, jeder Strahl desselben eine Zuglinie und jeder Winkel, dessen Scheitel er ist und dessen Schenkel nach den Durchschnitten zweier Tangenten A, A_1 mit einer beliebigen dritten gehen, der zu A, A_1 gehörige Zugwinkel dieses Brennpunktes.

11. Ein jeder Kegelschnitt hat zwei Brennpunkte, welche bei der Ellipse auf der grossen Achse, und bei der Hyperbel auf den Verlängerungen der reellen Achse liegen und dieselbe in je zwei Segmente theilen, deren Rechteck dem Quadrate der halben kleinen oder idealen Achse gleich ist.

12. Gehen von einem Brennpunkte nach den Berührungspunkten irgend zweier Tangenten zwei Strahlen, so wird der von ihnen eingeschlossene Winkel durch den nach dem Durchschnitte der Tangenten gehenden Strahl gehälftet.

13. Der zu zwei festen Tangenten gehörige Zugwinkel ist von unveränderlicher Grösse und zwar dem halben Winkel gleich, welchen die nach den Berührungspunkten gehenden Zuglinien einschliessen.

14. Der zu zwei Tangenten gehörige Zugwinkel, deren Berührungssehne eine Zuglinie ist oder deren

Digitized by Google

Durchschnitt auf der harmonischen Polare des Brennpunktes liegt, ist ein rechter.

Geht im Falle der Parabel die veränderliche Tangente A_2 in die unendlich entfernte Tangente über, so werden die Zuglinien Fa, Fa_1 den Tangenten A, A_1 parallel, so dass $\mathfrak{W}.\ aFa_1$ dem von A, A_1 gebildeten und zwar von der Parabel abgewendeten Winkel gleich wird:

15. Die Durchschnittspunkte dreier beliebiger Tangenten einer Parabel liegen auf dem Umfange eines Kreises, welcher durch den Brennpunkt geht.

Ist S der Durchschnitt der Tangenten A, A_1 einer Parabel, so ist kraft des vorigen Satzes auch noch $\mathfrak{W}.\ aa_1F = \mathfrak{W}.\ aSF$; variirt man also die Tangenten A und A_2, so folgt:

16. Die Fusspunkte aller Zuglinien, welche mit den verschiedenen Tangenten einer Parabel einerlei Winkel bilden, liegen auf einer und derselben Tangente, und zwar auf der Tangente im Scheitel, wenn dieser Winkel ein rechter ist.

Es sei jetzt m der Berührungspunkt einer beliebigen Tangente eines Kegelschnittes, und a, b seien die Durchschnitte derselben mit der grossen oder reellen Achse, welche die beiden Brennpunkte F, F_1 enthält, und mit der Tangente in dem einen ihrer Scheitel; man ziehe die Zuglinien Fm, Fb, F_1m, F_1b; so ist (nach 12) sowohl $\mathfrak{W}.\ mFb = \mathfrak{W}.\ aFb$, als $\mathfrak{W}.\ mF_1b = \mathfrak{W}.\ aF_1b$, also hat man nach einem bekannten Elementarsatze die Proportionen:

$$Fm : Fa = bm : ba;\ F_1m : F_1a = bm : ba,$$

folglich ist $Fm : Fa = F_1m : F_1a$, woraus durch Umkehrung des gedachten Satzes sich ergiebt, dass der $\mathfrak{W}.\ FmF_1$ bei der Hyperbel, und sein Nebenwinkel bei der Ellipse durch die Tangente in m gehälftet wird.

17. Gehen nach einem Punkte auf dem Umfange eines Kegelschnittes von beiden Brennpunkten desselben zwei Zuglinien, so wird der von ihnen eingeschlossene Winkel oder Nebenwinkel durch die Tangente in jenem Punkte gehälftet.

Sind m, n die Berührungspunkte zweier beliebigen Tangenten eines Kegelschnittes und r ihr Durchschnitt, und zieht man die Zuglinien Fm, Fn, Fr, F_1m, F_1n, F_1r, und sind s, s_1 zwei beliebige Punkte auf den Verlängerungen von rm, rn, so hat man folgende Winkelbeziehungen:

$$mFr = smF - srF$$
$$mF_1r = smF_1 - srF_1;\ \text{also}$$

a) für die Ellipse:

$$mFr + mF_1r = (smF + smF_1) - (srF + srF_1)$$

und eben so

$$nFr + nF_1r = (s_1nF + s_1nF_1) - (s_1rF + s_1rF_1).$$

Aber nach 17. ist

$$smF + smF_1 = 2R = s_1nF + s_1nF_1,$$

und zugleich ist

$$\mathfrak{s}\mathfrak{r}F + \mathfrak{s}\mathfrak{r}F_1 = F\mathfrak{r}F_1 + 2\,.\,\mathfrak{s}\mathfrak{r}F,$$
$$\mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F + \mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F_1 = F\mathfrak{r}F_1 + 2\,.\,\mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F_1;$$ also hat man

$$\mathfrak{m}F\mathfrak{r} + \mathfrak{m}F_1\mathfrak{r} = 2R - (F\mathfrak{r}F_1 + 2\,.\,\mathfrak{s}\mathfrak{r}F),$$
$$\mathfrak{n}F\mathfrak{r} + \mathfrak{n}F_1\mathfrak{r} = 2R - (F\mathfrak{r}F_1 + 2\,.\,\mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F_1).$$

b) Für die Hyperbel ist

$$\mathfrak{m}F\mathfrak{r} - \mathfrak{m}F_1\mathfrak{r} = (\mathfrak{s}\mathfrak{m}F - \mathfrak{s}\mathfrak{m}F_1) - (\mathfrak{s}\mathfrak{r}F - \mathfrak{s}\mathfrak{r}F_1),$$
$$\mathfrak{n}F\mathfrak{r} - \mathfrak{n}F_1\mathfrak{r} = (\mathfrak{s}_1\mathfrak{n}F - \mathfrak{s}_1\mathfrak{n}F_1) - (\mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F - \mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F_1);$$

aber

$$\mathfrak{s}\mathfrak{m}F = \mathfrak{s}\mathfrak{m}F_1,\ \mathfrak{s}_1\mathfrak{n}F = \mathfrak{s}_1\mathfrak{n}F_1$$

und

$$\mathfrak{s}\mathfrak{r}F - \mathfrak{s}\mathfrak{r}F_1 = F\mathfrak{r}F_1 - 2\,.\,\mathfrak{s}\mathfrak{r}F,$$
$$\mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F - \mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F_1 = F\mathfrak{r}F_1 - 2\,.\,\mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F_1;$$ also hat man

$$\mathfrak{m}F\mathfrak{r} - \mathfrak{m}F_1\mathfrak{r} = F\mathfrak{r}F_1 - 2\,.\,\mathfrak{s}\mathfrak{r}F,$$
$$\mathfrak{n}F\mathfrak{r} - \mathfrak{n}F_1\mathfrak{r} = F\mathfrak{r}F_1 - 2\,.\,\mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F_1.$$

c) Endlich ist (nach 12) für die Ellipse

$$\mathfrak{m}F\mathfrak{r} = \mathfrak{n}F\mathfrak{r},\ \mathfrak{m}F_1\mathfrak{r} = \mathfrak{n}F_1\mathfrak{r};$$

und für die Hyperbel

$$\mathfrak{m}F\mathfrak{r} = 2R - \mathfrak{n}F\mathfrak{r},\ \mathfrak{m}F_1\mathfrak{r} = 2R - \mathfrak{n}F_1\mathfrak{r};$$

also zunächst für beide

$$\mathfrak{s}\mathfrak{r}F = \mathfrak{s}_1\mathfrak{r}F_1$$

und deshalb für die Ellipse

$$\mathfrak{m}F\mathfrak{r} + \mathfrak{m}F_1\mathfrak{r} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{m}F\mathfrak{n} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{m}F_1\mathfrak{n} = 2R - \mathfrak{m}\mathfrak{r}\mathfrak{n},$$

für die Hyperbel

$$\mathfrak{m}F\mathfrak{r} - \mathfrak{m}F_1\mathfrak{r} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{m}F\mathfrak{n} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{m}F_1\mathfrak{n} = \mathfrak{m}\mathfrak{r}\mathfrak{n}.$$

18. Die Zuglinien, welche den Durchschnitt zweier Tangenten mit den beiden Brennpunkten verbinden, bilden mit diesen Tangenten gleiche Winkel.

19. In der Ellipse oder Hyperbel ist bezüglich die Summe oder Differenz der zu zwei festen Tangenten gehörigen Zugwinkel beider Brennpunkte dem einen von diesen Tangenten eingeschlossenen Winkel gleich.

Ich schliesse diesen §. mit der Entwickelung einiger Eigenschaften der Brennpunkte, von denen die sogenannte Geometrie der Grösse oft die übrigen Eigenschaften der Kegelschnitte überhaupt herleitet, und um derentwillen, wie es scheint, Herr Poncelet zur Theorie der doppelten Berührung seine Zuflucht nimmt.

Eine beliebige Tangente berühre einen Kegelschnitt in $\mathfrak{q}$ und schneide eine Haupt-Scheiteltangente in $\mathfrak{a}$; von $\mathfrak{a}$ sei auf die Zuglinie $F\mathfrak{q}$ oder $F_1\mathfrak{q}$ eine Senkrechte $\mathfrak{a}\mathfrak{m}_1$ gefällt, deren Fusspunkt

Digitized by Google

m_1, und es sei m der Scheitel des Kegelschnittes, von dem geredet wird: so ist (nach 12)

$$\mathfrak{W}.\, mFa = \mathfrak{W}.\, m_1 Fa,\ \mathfrak{W}.\, amF = \mathfrak{W}.\, a_1 m_1 F,\ aF = a_1 F,$$

also

$$Fm = Fm_1.$$

20. Zieht man von einem beliebigen Punkte der Tangente im Scheitel der grossen oder reellen Achse eines Kegelschnittes die zweite Tangente an denselben, und fällt auf die Zuglinie, welche den Berührungspunkt der letzteren mit einem Brennpunkte verbindet, von jenem Punkte eine Senkrechte, so liegen die Fusspunkte aller dieser Senkrechten auf dem Umfange eines Kreises, der jenen Brennpunkt zum Mittelpunkt und die Entfernung desselben von jenem Scheitel zum Halbmesser hat, und zwar gibt es vier solche, paarweise concentrische Kreise.

Aehnliche Sätze gelten unter Modificationen von den beiden anderen Scheiteltangenten, ja von vier beliebigen festen Tangenten.

Es werde in der vorigen Figur die Tangente aq von der harmonischen Polare des Brennpunktes F in Z geschnitten; von q, a seien auf dieselbe Polare die Senkrechten qq, aa gefällt, deren Fusspunkte q, a sind, und Z mit F verbunden, so verhält sich

$$qq : aa = Zq : Za = Fq : Fm_1,$$

indem Fq und FZ zugeordnete harmonische Polaren, also rechtwinklig zu einander sind; und da nun $qq : Fq = aa : Fm_1$, aber aa und Fm_1 constant sind, so ist auch das Verhältniss $qq : Fq$ für alle Punkte q constant. Bei der Parabel ist $aa = Fm_1$, also $qq = Fq$. und im allgemeinen Falle, wenn n der Gegenscheitel von m, und wenn f der zugeordnete Achsenpunkt von F ist, hat man:

$$aa : Fm = fm : Fm = fn : Fn = fn - fm : Fn - Fm = mn : FF_1,$$

d. h. dem Verhältniss der grossen oder reellen Achse zur Excentricität gleich.

21. Das Verhältniss der Abstände eines beliebigen Punktes auf dem Umfange eines Kegelschnittes von einem seiner Brennpunkte und von der harmonischen Polare des letzteren ist constant, und zwar im Falle der Ellipse und Hyperbel dem der Excentricität zur grossen oder reellen Achse, und im Falle der Parabel dem der Einheit gleich.

Verlängert man die mit mn Parallele qq über q hinaus, bis sie die harmonische Polare des zweiten Brennpunktes F_1 in q_1 schneidet, und ist f_1 der zugeordnete Achsenpunkt von F_1, M der Mittelpunkt des Kegelschnittes, so ist für die Ellipse

$$qq + qq_1 = qq_1 = ff_1 = 2Mf,$$

und für die Hyperbel

$$qq - qq_1 = qq_1 = ff_1 = 2Mf,$$

und für beide

$$Fq : qq = F_1q : q_1q = FF_1 : mn,$$

also auch für die erstere

$$Fq + F_1q : qq + q_1q = Fq + F_1q : 2Mf = FF_1 : mn,$$

und für die letztere

$$Fq - F_1q : qq - q_1q = Fq - F_1q : 2Mf = FF_1 : mn.$$

Aber es ist $Mm^2 = MF . Mf$, also $Mm : Mf = MF : Mm$ oder $mn : 2Mf = FF_1 : mn$. Folglich ist bezüglich $Fq \pm F_1q = mn$.

22. In jeder Ellipse ist die Summe und in jeder Hyperbel ist der Unterschied der Abstände der beiden Brennpunkte von einem beliebigen Punkte des Umfanges bezüglich der grossen oder der reellen Achse gleich

Dieser Satz ergiebt sich übrigens sehr leicht auch aus dem 17ten Satze.

Verlängert man F_1q über q hinaus und fällt von F auf die Tangente in q eine Senkrechte, welche sie in a und die F_1q in f schneidet, so ist $\mathfrak{W}. Fqa = \mathfrak{W}. fqa$ (17), also $Fa = fa$, und da auch $MF = MF_1$, so ist die Gerade Ma parallel F_1f, also $FF_1 : FM = F_1f : Ma = 2 : 1$, und da $F_1f = F_1q \pm Fq = mn$, so ist $Ma = Mm$.

23. Die Fusspunkte aller Senkrechten, welche aus den Brennpunkten auf die Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel gefällt werden, liegen auf dem Umfange eines Kreises, dessen Durchmesser die grosse oder reelle Achse des Kegelschnittes ist.

(Wird fortgesetzt.)

XXXI.

Ueber die Transformation der Figuren in andere derselben Gattung.

Von

Herrn Professor C. T. Anger

zu Danzig.

Die allgemeinste Lösung des Problems: Figuren in andere derselben Gattung zu transformiren, wird, wie es scheint, durch die Perspective, und zwar, wo es sich um die Transformation körperlicher Gebilde handelt, durch die Basrelief-Perspective geboten, ja wir werden uns sogar überzeugen, dass diese, auf gewisse Weise specialisirt, auch geeignet ist, für ebene Figuren eine allgemeine Transformation darzubieten. Wir beginnen mit einer hierher gehörigen Aufgabe, welche Newton im ersten Buche der Principia, Lemma XXII, vorträgt, von der sich zeigen lässt, dass sie ein besonderer Fall der Perspective ist. Da eine genaue Einsicht in das Wesen der Newtonschen Methode wünschenswerth ist, so mag eine Uebersetzung jener Auflösung der folgenden Betrachtung hier vorangehen.

Figuren in andere Figuren derselben Gattung umzuwandeln.

Es sei (Taf. V. Fig. 1.) irgend eine Figur HGI umzuwandeln. Man ziehe beliebig die beiden parallelen Geraden AO, BL, welche irgend eine dritte, ihrer Lage nach gegebene AB in A und B schneiden, und von irgend einem Punkte G der Figur nach der Geraden AB eine Gerade GD parallel mit OA. Ferner ziehe man von einem beliebigen in der Linie OA gegebenen Punkte O nach dem Punkte D die Gerade OD, welche die BL in d trifft, und vom Durchschnittspunkte die Gerade dg, welche einen beliebigen gegebenen Winkel mit der Geraden BL bildet, und zu Od dasselbe Verhältniss hat, wie DG zu OD; dann wird g in der neuen Figur bgi ein Punkt sein, welcher dem Punkte G entspricht. Auf dieselbe Weise werden die einzelnen Punkte der ersten Figur eben so viele Punkte der neuen Figur geben. Nimmt man daher an, dass der Punkt G mit stetiger Bewegung alle Punkte der ersten Figur durchlaufe, so wird der Punkt g mit ebenfalls stetiger Bewegung alle Punkte der neuen Figur durchlaufen, und dieselbe beschreiben. Der Unterscheidung wegen heisse DG die erste und dg die neue Ordinate; AD die erste und ad die neue Abscisse;

Digitized by Google

O der Pol, OD der Schneidestrahl (radius abscindens), OA der erste Ordinatenstrahl und Oa (durch welche das Parallelogramm $OABa$ vollendet wird) der neue Ordinatenstrahl.

Ich behaupte nun, dass wenn den Punkt G eine ihrer Lage nach gegebene Gerade trifft, auch der Punkt g durch eine ihrer Lage nach gegebene Gerade getroffen wird. Wenn der Punkt G durch einen Kegelschnitt getroffen wird, so findet dasselbe auch im Punkte g Statt. Der Kreis wird hier den Kegelschnitten zugezählt. Wenn ferner den Punkt G eine Linie der dritten Ordnung trifft, so ist dasselbe auch im Punkte g der Fall, und eben so bei den Linien der höhern Ordnungen. Die beiden Linien, welche die Punkte G und g treffen, werden immer von einer und derselben Ordnung sein. Wie sich nämlich ad zu OA verhält, so verhält sich Od zu OD, dg zu DG und AB zu AD; demnach ist AD gleich $\frac{OA \times AB}{ad}$ und DG gleich $\frac{OA \times dg}{ad}$. Wenn nun den Punkt G eine Gerade trifft, und daher in irgend einer Gleichung, welche die Relation zwischen der Abscisse AD und der Ordinate DG ausdrückt, jene Unbestimmten AD und DG nur bis zu einer Dimension aufsteigen, so wird, indem man in dieser Gleichung $\frac{OA \times AB}{ad}$ für AD und $\frac{OA \times dg}{ad}$ für DG schreibt, eine neue Gleichung entstehen, in welcher die neue Abscisse ad und die neue Ordinate dg nur eine Dimension erreichen, also eine Gleichung, welche eine gerade Linie ausdrückt. Wenn aber AD und DG (oder eine von beiden) in der ersten Gleichung auf die zweite Dimension steigen, so werden auch ad und dg in der neuen Gleichung dieselbe Dimension erreichen. Dasselbe gilt von drei und mehrern Dimensionen. Die Unbestimmten ad und dg in der zweiten Gleichung, und AD und DG in der ersten, erreichen immer dieselbe Anzahl von Dimensionen, weshalb auch die Linien, welche durch die Punkte G und g gehen, von einer und derselben Ordnung sind.

Ich behaupte ferner, dass wenn irgend eine Gerade die krumme Linie in der ersten Figur berührt, diese Gerade, auf dieselbe Weise mit der krummen Linie in die neue Figur übertragen, jene krumme Linie in der neuen Figur berühren wird, und umgekehrt. Wenn nämlich zwei Punkte einer krummen Linie sich gegenseitig nähern, und in der ersten Figur mit einander zusammenfallen, so werden auch dieselben Punkte, wenn sie übertragen sind, sich einander nähern, und in der neuen Figur zusammenfallen, weshalb denn auch die Geraden, welche diese Punkte verbinden, zugleich Tangenten der krummen Linien in beiden Figuren sein werden. Es liessen sich für diese Behauptungen auch Beweise mehr nach geometrischer Art geben, ich will mich aber kurz ausdrücken.

Wenn also eine geradlinige Figur in eine andere umzuwandeln ist, so reicht es hin, die Durchschnittspunkte der Geraden, durch welche sie gebildet wird, zu übertragen, und dieselbe in der neuen Figur durch Gerade zu verbinden. Wenn aber eine krummlinige Figur umgewandelt werden soll, so sind die Punkte, Tangenten und andere gerade Linien, durch welche die krumme Linie bestimmt wird, zu übertragen. Dieses Lemma dient zur Auflösung sehr schwieriger Aufgaben, indem man dadurch gegebene Figuren in einfachere umwandelt. Denn irgend welche zusammentreffende

Digitized by Google

Gerade werden in parallele Gerade umgewandelt, indem man für den ersten Ordinatenstrahl eine beliebige, durch den Durchschnittspunkt der beiden Geraden gehende Gerade annimmt: und zwar deshalb, weil jenes Zusammentreffen unter dieser Annahme ins Unendliche fällt, Linien aber, welche nach einem unendlich entfernten Punkte ihre Richtung haben, mit einander parallel sind. Die Aufgabe wird alsdann in der neuen Figur gelöst, wenn man durch die umgekehrten Operationen diese Figur in die erste umwandelt.

Dieses Lemma ist auch nützlich bei der Auflösung körperlicher Aufgaben. So oft nämlich zwei Kegelschnitte vorkommen, durch deren Durchschnitt die Aufgabe gelöst werden kann, so lässt sich eine von ihnen, sie sei nun Hyperbel oder Parabel, in eine Ellipse, und darauf diese Ellipse leicht in einen Kreis umwandeln. Eben so lassen sich eine Gerade und ein Kegelschnitt, bei Aufgaben der ebenen Geometrie, in eine Gerade und einen Kreis umwandeln.

Diese Methode Newton's für die Umwandelung von Figuren in andere derselben Gattung ist eine Anwendung der gewöhnlichen Perspective. Denkt man sich nämlich die ebene Figur HGI um AI als Achse gedreht, so dass ihre Ebene mit der des Papiers einen gewissen Winkel bildet, so kommt auch BH aus der Ebene des Papiers heraus und tritt in den Raum ein. Nimmt man nun die Ebene, in welcher AI und BH alsdann liegen, als Bildfläche (Projectionsebene), den Punkt O aber als das Auge an, so ist klar, dass, da die Geraden BI und Ba mit dem Punkte O in einer Ebene liegen, die perspectivischen Projectionen aller Punkte der Geraden BI in die Linie Ba fallen müssen, also z. B. d die perspectivische Projection von D ist. Es sind aber alle Geraden wie GD, welche mit Ba parallel in der Ebene des Papiers liegen, nach erfolgter Drehung, noch parallel mit der als Bildfläche angenommenen Ebene, und müssen daher in der perspectivischen Projection ebenfalls als parallele Gerade erscheinen, auch muss wegen Aehnlichkeit der Dreiecke sich DG zu ihrer perspectivischen Projection wie DO zu dO verhalten. Der Winkel, welchen die perspectivische Projection von GD mit da bildet, ist endlich offenbar gleich dem constanten Winkel, um welchen GD gedreht wurde, nämlich gleich dem Winkel, welchen das GD in der Ebene des Papiers und das GD im Raume mit einander bilden. Denkt man sich nun die Bildfläche um Ba gedreht, bis sie in die Ebene des Papiers fällt, so erhält man die Newton'sche Figur, mittelst welcher die im Raume anzustellenden Operationen in der Ebene ausgeführt werden. — Was die Eigenschaften eines perspectivischen Bildes in Beziehung auf die projicirte Figur betrifft, so lassen sich diese im Allgemeinen am einfachsten erkennen, wenn man die geometrische Operation analytisch auffasst. Bezeichnet man nämlich die rechtwinkligen Coordinaten eines zu projicirenden Punktes durch x, y und z, die des Auges durch X, Y, Z, und nimmt man, der Einfachheit wegen, die Bildfläche der Coordinaten-Ebene der xz parallel an, so dass ihre Gleichung $y = a$ wird, durch welche Annahme die mathematische Allgemeinheit nicht beeinträchtigt wird, so erhält man, wenn x', y', z' die Coordinaten des perspectivischen Bildes bedeuten:

$$x' = \frac{(a-Y)x + Xy - aX}{y-Y},$$

$$y' = a,$$

$$z' = \frac{(a-Y)z + Zy - aZ}{y-Y},$$

welche Ausdrücke in Beziehung auf x, y und z nur von der ersten Dimension sind. Daraus geht aber hervor, dass die Projection einer Curve von keinem höheren Grade als diese selbst sein kann, auch ergiebt sich aus diesen Ausdrücken, dass, wenn irgend eine Gerade die zu projicirende Curve berührt, auch in der Projection eine Berührung Statt findet u. s. w.

Chasles sagt von der obigen Methode Newton's in seiner Geschichte der Geometrie unter dem Artikel Newton:*) „Dieser ausgezeichnete Geometer gab eine sehr einfache geometrische Construction und einen eben so einfachen analytischen Ausdruck für die transformirten Figuren, ohne jedoch den Weg erkennen zu lassen, auf welchem er zu dieser Transformationsart der Figuren gekommen war, und in diesem Umstande liegt vielleicht auch der Grund, weshalb sie seit jener Zeit wenig bearbeitet ist; denn der Geist hat immer einige Bedenklichkeit und einigen Widerwillen gegen das, was zwar die augenscheinliche Gewissheit für sich hat, wobei man aber Nichts findet, wodurch das eigentliche Verhältniss der Sache erklärt und dargethan wird. Wir haben uns sorgfältig bemüht, diese Methode mit der des De La Hire zu vergleichen, um die Unterschiede aufzusuchen, welche sie characterisiren und vielleicht der einen vor der andern einen Vorzug geben könnten, indem wir dadurch den Faden aufzufinden hofften, an welchem Newton geleitet wurde; und wir haben dabei erkannt, dass seine Figuren keine andern als die des De La Hire waren, nur in einer andern gegenseitigen Lage, und dass man sie auch durch die Perspective erlangen kann, wenn man sie hernach in eine und dieselbe Ebene legt, nur in anderer Weise, als es De La Hire gethan hat. Diese Art ist es wahrscheinlich, auf welche Newton seine Methode erdacht hat.“ Chasles deutet darauf in Note XIX. die Ableitung an. Wenn der berühmte Geometer in dem Umstande, dass Newton für seine Transformation der Figuren keinen Beweis gegeben hat, den Grund zu finden glaubt, weshalb sie wenig bearbeitet worden sei, so erregt dies Befremden. Wie viele mathematische Wahrheiten sind und werden nicht noch heute bloss als Sätze hingestellt, deren Beweis dem Leser überlassen bleibt! — Nicht Widerwille gegen solche Sätze stellt sich ein, sondern diese Form der Mittheilung ist für den Leser gerade anregend, indem er genöthigt wird, in das Wesen der Sache selbstständig einzudringen. Ungleich wahrscheinlicher ist wohl der Grund einer Nichtbeachtung der Newton'schen Transformation der, dass diejenigen Mathematiker, welche sich mit solchen geometrischen Betrachtungen beschäftigten, in jenem, der mathematischen Physik gewidmeten Werke des unsterblichen Newton dergleichen nicht suchten.

Was die Methode des De La Hire für die Transformation der Figuren betrifft, so werde ich zeigen, dass sie als ein ganz spe-

*) Sohncke's Uebersetzung S. 132.

Digitized by Google

cieller Fall der Basrelief-Perspective zu betrachten ist, welche letztere in der That die allgemeinste Quelle verschiedener in der neuern Geometrie gebräuchlichen Methoden zu sein scheint. Da die gewöhnliche Perspective, welche in diesem Theile der Geometrie mit so glücklichem Erfolge angewandt wird, nur ein besonderer Theil oder vielmehr ein specieller Fall der Basrelief-Perspective ist, so geht schon daraus die grosse Allgemeinheit dieser hervor. Ich habe im Jahre 1834 eine kleine Schrift unter dem Titel: „Analytische Darstellung der Basrelief-Perspective" herausgegeben, in welcher ich die von Breysig in seinem „Versuch einer Erläuterung der Reliefsperspective, Magdeburg bei Keil 1798" zur Construction der Basreliefs gegebenen Regeln in die analytische Sprache übertragen und darauf fernere Untersuchungen gegründet habe. Dieses Werk von Breysig war mir längst bekannt, als ich Herrn Poncelet's „Traité des proprietés projectives des figures, Paris 1822" kennen lernte. Ich überzeugte mich bald, dass die Methode zur Construction der Basreliefs, welche der berühmte Verfasser in dem Supplément jenes classischen Werkes mittheilt, mit den von Breysig gegebenen Vorschriften, wenn gleich nur im Wesentlichen, vollkommen übereinstimmt, während die Darstellung, wie sich erwarten lässt, verschieden ist. Ich nahm darauf Gelegenheit, Herrn Professor C. G. J. Jacobi die Mittheilung zu machen, dass die Methode des Herrn Poncelet schon früher von Breysig erfunden sei, und derselbe hatte die grosse Güte, bei seiner ersten Anwesenheit in Paris, 1829, Herrn Poncelet davon mündlich in Kenntniss zu setzen, welcher letztere denn auch im Jahre 1832 die Priorität der Erfindung Breysig's öffentlich anerkannte, indem er in seiner Abhandlung: „Analyse des transversales", welche im Crelleschen Journal, Band VIII, enthalten ist, S. 397 sich wörtlich wie folgt darüber ausspricht: „Je profiterai en même tems de cette occasion, pour prévenir qu'en rédigeant la matière des No. 584 et suivans du supplément du même ouvrage, concernant la perspective des bas-reliefs, j'ignorait complétement qu'il existât en Allemagne, sur cet objet, un écrit très bien fait ayant pour titre: Essai d'une théorie de la perspective des reliefs, disposée de manière à servir en même tems aux peintres, par J. A. Breysig, professeur des beaux arts à l'école royale et provinciale de Magdeburg, imprimé dans cette même ville, chez Georg Christian Keil (année 1798)."

„Ce petit ouvrage qui mériterait d'être traduit dans notre langue, forme un vol. in 8vo de 134 pages, accompagné de 11 planches, et qui contient, sur le tracé des bas-reliefs, des préceptes qui, pour le fond, se trouvent d'accord avec ceux que j'ai moi même établis à l'endroit cité. Je dois la connaissance de ce livre à l'amitié du célèbre Docteur Jacobi de Koenigsberg, qui, lors de son voyage en France dans l'année 1829, m'en toucha quelques mots, et daigna m'en adresser un exemplaire au commencement de l'année suivante, ce dont je le prie de vouloir bien agréer ici l'expression de ma vive et sincère reconnoissance."

Mit dieser Erklärung steht eine, ungefähr 11 Jahre spätere Erklärung des berühmten französischen Geometers, welche sich im Compte rendu des seances de l'academie des sciences, vom 8. Mai 1843, S. 952 befindet, im Widerspruche; sie lautet wörtlich so: „Voyez les endroits déjà cités du Supplément du Traité des

Digitized by Google

propriétés projectives, notamment ceux qui concernent la perspective ou projection centrale des reliefs, que nous avons généralement nommée homologie des figures. Je saisirai cette occasion pour présenter, au sujet de la théorie de la perspective des reliefs donnée dans ce même endroit, une remarque concernant la prétendue conformité qui existerait entre cette théorie et les méthodes pratiques exposées dans la Perspective des reliefs publiée à Magdebourg, en 1798, par J. A. Breysig, conformité que je me suis trop empressé de reconnaître dans une Note insérée à la page 397 du Tome VIII du Journal mathématique de M. Crelle (1832). Une traduction exacte de cet ouvrage diffus, entreprise à ma recommandation, par M. Polke, sous la direction de M. Bardin, ancien professeur aux Écoles d'artillerie, a convaincu cet estimable professeur que l'analogie des méthodes n'existe absolument que dans le titre. J'ai d'autant plus de regret d'avoir commis à mon préjudice cette erreur, qu'elle a été depuis reproduit dans l'Aperçu historique sur l'origine des méthodes en Géométrie, publié par M. Chasles, lequel, je dois le reconnaître, se trouvait, moins que moi, à même d'en constater l'existence."

Wir können nur bedauern, dass die Herren Polke und Bardin nicht tief genug in die beiden Methoden von Breysig und Poncelet eingedrungen sind, um sich zu überzeugen, dass dieselben in der That identisch sind. Die analytische Auffassung der Breysigschen Construction lässt dies leicht genug erkennen. Herr Poncelet hat sich nicht im Irrthume befunden, als er im Jahre 1832 die Uebereinstimmung beider Methoden anerkannte. — Da meine im Jahre 1834 erschienene analytische Darstellung nur in einer kleinen Auflage vorhanden war, und wahrscheinlich kein grosses Publicum gefunden hat, so erlaube ich mir eine Stelle daraus hier mitzutheilen.

Der Raum, in welchem das Bild (das Basrelief) dargestellt werden soll, ist zwar nach drei Dimensionen ausgedehnt, jedoch nach einer hin beschränkt; wir wollen ihn daher ansehen, als zwischen zwei parallelen unbegrenzten Ebenen enthalten. Ferner wird angenommen, dass man das Relief für einen bestimmten Gesichtspunkt, dessen rechtwinklige Coordinaten X, Y, Z sein mögen, construiren will. Diejenige von jenen beiden parallelen Ebenen, welche dem Auge am nächsten liegt, wollen wir die Bildfläche, die andere, aus einem sich später ergebenden Grunde, die Verschwindungsfläche nennen; der Kürze wegen seien diese Ebenen einer Coordinaten-Ebene parallel.

Alle in der Bildfläche befindliche abzubildende Punkte erleiden durch die Projection keine Ortsveränderung, indem hier Gegenstand und Bild zusammenfallen.

Der Raum in welchem das Basrelief dargestellt werden soll, ist durch die Bildfläche und die Verschwindungsfläche begrenzt, demnach werden alle in unendlicher Entfernung von der Bildfläche befindliche Punkte in der Verschwindungsfläche abzubilden sein; die Bilder aller endlich entfernten Punkte fallen in den zwischen jenen beiden Ebenen enthaltenen Raum.

Das basrelief-perspectivische Bild liegt in der geraden Linie, welche das Auge mit dem abzubildenden Punkte verbindet.

Bezeichnet man die rechtwinkligen Coordinaten des zu projicirenden Punktes durch x, y, z, seiner basrelief-perspectivischen

Projection durch x', y', z', und nimmt man die Bildfläche und die Verschwindungsfläche der Coordinaten-Ebene der xz parallel an, so hat man, wenn $y = \alpha$, $y = \beta$ respective die Gleichungen jener Flächen sind, für die Coordinaten des gesuchten Basreliefs folgende Ausdrücke:

$$x' = \frac{(\beta - Y)x + Xy - \alpha X}{\beta - \alpha - Y + y},$$

$$y' = \frac{\beta y - \alpha Y}{\beta - \alpha - Y + y},$$

$$z' = \frac{(\beta - Y)z + Zy - \alpha Z}{\beta - \alpha - Y + y};$$

und umgekehrt:

$$x = \frac{(\beta - \alpha)x' - Xy' + \alpha X}{\beta - y'},$$

$$y = \frac{(\beta - \alpha - X)y' + \alpha Y}{\beta - y'},$$

$$z = \frac{(\beta - \alpha)z' - Zy' + \alpha Z}{\beta - y'}.$$

Setzt man α unendlich gross, so ergiebt sich:

$$x' = x,$$

$$y' = y,$$

$$z' = z;$$

d. h. das basrelief-perspectivische Bild hört in diesem Falle auf, ein solches zu sein, und wird mit dem abzubildenden Gegenstande identisch.

Aus jenen Gleichungen habe ich in der angeführten Schrift unter andern folgende Sätze abgeleitet:

„Die basrelief-perspectivischen Bilder aller parallelen Linien treffen in der Verschwindungsfläche in einem Punkte zusammen, und zwar da, wo eine aus dem Auge mit jener Linie parallel gezogene die Verschwindungsfläche trifft."

„Ein jedes System von geraden Linien im Raume, welche einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, kann als die basrelief-perspectivische Projection eben so vieler unter einander *pargleler* Linien betrachtet werden."

„Die Form der Gleichung lässt ohne Weiteres erkennen: dass die basrelief-perspectivische Projection einer Ebene wieder eine Ebene ist, und überhaupt, dass die basrelief-perspectivische Projection einer Oberfläche der $n$ten Ordnung eine Oberfläche derselben Ordnung ist, und dass, wenn zwei Linien oder Oberflächen einander berühren, auch ihre basrelief-perspectivische Projectionen einander berühren müssen."

„Die Projectionen aller parallelen Ebenen haben in

Digitized by Google

der Verschwindungsfläche eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie."

„Ein jedes System von Ebenen, welche eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie haben, kann als die basrelief-perspectivische Projection eben so vieler unter einander parallelen Ebenen betrachtet werden."

„Die Kugel ist für das Basrelief dasselbe, was der Kreis für das gewöhnliche perspectivische Bild auf einer Ebene ist. So wie nämlich die perspectivische Projection eines *Kreises* im Allgemeinen eine *Linie* der zweiten Ordnung ist, so ist die basrelief-perspectivische Projection einer *Kugel* eine *Oberfläche* der zweiten Ordnung u. s. w.

Von diesem letzten Satze habe ich sowohl in der angeführten, als in einer spätern, im Jahre 1836 erschienenen Schrift, welche den Titel: „Beiträge zur analytischen Basrelief-Perspective" führt, auf die Oberflächen der zweiten Ordnung verschiedene Anwendungen gemacht.

Was die geometrische Construction des Basreliefs betrifft, aus welcher jene analytischen Ausdrücke abgeleitet sind, so ist sie in der Form vorgetragen, dass der Künstler, welcher ein solches Werk auszuführen beabsichtigen sollte, dazu vollständige Anleitung erhält, nämlich nach der in der beschreibenden Geometrie (mittelst des sogenannten Grund- und Aufrisses) üblichen Methode. Sie wird aus dem Folgenden deutlich hervorgehen:

Es sei (Taf. V. Fig. 2.) im Grundrisse A der zu projicirende Punkt, O das Auge, im Aufrisse A' und O'; TQ der Grundriss der Bildfläche, TP deren Aufriss und US und UR seien dasselbe für die Verschwindungsfläche.

Um den Grundriss des gesuchten basrelief-perspectivischen Bildes zu finden, ziehe man OA, in welcher er liegen muss, alsdann AB beliebig, OC mit ihr parallel, und BC, so ist der Punkt a, in welchem AO und BC einander schneiden, der gesuchte Grundriss. Für den Aufriss könnte man den Punkt a', wie die Figur zeigt, auf dieselbe Weise bestimmen, es ist aber einfacher, ihn aus dem Grundrisse auf die in der beschreibenden Geometrie gewöhnliche Weise zu übertragen, da man weiss, dass er in der Linie $A'O'$ vorkommen muss. Für die Praxis ist es einfacher AB senkrecht auf TQ zu ziehen.

Nach dieser Abschweifung kommen wir auf die Methode für die Erzeugung der Kegelschnitte in der Ebene durch den Kreis zurück, welche De La Hire in seiner Schrift: „Nouvelles methode en Géométrie, pour les sections des superficies coniques et cylindriques, 1673," und zwar im zweiten Theile, welcher den Titel führt: „Planiconiques", angegeben hat. Es ist mir nicht gelungen, dieses Werk hier am Orte aufzutreiben, obgleich das grössere desselben Verfassers, die Sectiones conicae, 1685, in zwei Exemplaren hier vorhanden ist; ich beziehe mich daher auf die betreffenden Mittheilungen von Chasles in seiner Geschichte der neuern Geometrie.

Man denke sich in einer Ebene (Taf. V. Fig. 3.) zwei parallele Gerade RS, PQ und einen Punkt O. Durch einen beliebigen

Digitized by Google

Punkt α einer gegebenen zu transformirenden Curve ziehe man die Gerade $O\alpha$ und eine beliebige Gerade BC, welche die PQ in B und die RS in C schneidet. Darauf ziehe man CO und durch B mit dieser eine Parallele, welche die $O\alpha$ in A schneidet, so ist A der Punkt, welcher durch den Punkt α gebildet wird, d. h. der, dem Punkte α in der ersten Curve entsprechende der neuen. Die Curven selbst in der Figur zu ziehen, schien überflüssig. De La Hire nennt die Gerade RS die Directrix und PQ die Formatrix.

Um die Uebereinstimmung dieser Construction mit einem ganz speciellen Falle der Basrelief-Perspective einzusehen, überlege man, dass wenn ein Kreis basrelief-perspectivisch gezeichnet werden soll, dessen Ebene durch das Auge geht, die basrelief-perspectivische Projection desselben auch in diesem Falle ein Kegelschnitt werden müsse. Die Geraden, in welchen jene verlängerte Ebene des Kreises die beiden Ebenen, welche wir Bildfläche und Verschwindungsfläche nennen, schneidet, sind keine andern, als die Directrix RS und die Formatrix PQ, während bei De La Hire das Basrelief α als gegeben, und der zu projicirende Punkt A als der zu suchende Punkt erscheint, wodurch im Wesentlichen nichts geändert wird.

Die analytischen Ausdrücke, welche ich in meiner Schrift: „Beiträge zur analytischen Basreliefperspective. 1836“ für die Aufgabe: diejenige Kugel zu finden, von welcher eine gegebene Oberfläche der zweiten Ordnung die basrelief-perspectivische Projection ist, führen unmittelbar zur Auflösung der Aufgabe: denjenigen Kreis zu finden, von welchem eine gegebene Linie der zweiten Ordnung die basrelief-perspectivische Projection ist, indem man nur dort eine Coordinate, das x, gleich Null zu setzen hat. Setzt man nämlich das Auge in den Anfangspunkt der Coordinaten, und zieht mit der Axe der x zwei parallele Gerade, von denen die eine um a von jener Axe entfernt ist, und welche von einander um b abstehen, und ist die Gleichung des gesuchten Kreises

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2,$$

so handelt es sich nur um eine solche Bestimmung der Grössen a, b, α, β und r, dass die gegebene Linie der zweiten Ordnung als basrelief-perspectivische Projection jenes Kreises erscheine.

Wenn nun erstens eine Ellipse durch die Gleichung:

$$k^2x^2+g^2y^2=g^2k^2$$

gegeben ist, wo g die halbe grosse und k die halbe kleine Axe bedeuten, so findet sich (Taf. V. Fig. 4.) $b=k=UT$; $a=\frac{kg}{\sqrt{g^2-k^2}}=OT$; $u=0$; $\beta=\frac{(g+k)(g-k)}{k}=OM$; $r=\frac{g}{k}\sqrt{g^2-k^2}=MN$.

Ist zweitens eine Hyperbel durch die Gleichung:

$$k^2x^2-g^2y^2=-g^2k^2$$

gegeben, so findet sich (Taf. V. Fig. 5.) $b=k=UT$; $a=\frac{kg}{\sqrt{g^2+k^2}}$

$= OT$; $\alpha = 0$; $\beta = -\frac{k^2+g^2}{k} = OM$; $r = \frac{g\sqrt{g^2+k^2}}{k} = MN$,

wo das negative Zeichen von β leicht seine Erklärung findet.

Ist endlich drittens die gegebene Linie eine Parabel, deren Gleichung

$$x^2 = py,$$

so kann (Taf. V. Fig. 6.) $b = UT$ willkührlich angenommen werden, und man erhält $a = -p = OT$; $\alpha = 0$; $\beta = -\frac{b}{2} = OM$; $r = \frac{b}{2} = MN$.

Man sieht demnach, wie die Erzeugung der Kegelschnitte in der Ebene, mittelst eines Kreises, als eine specielle Aufgabe der Basrelief-Perspective hervorgeht.

Bei dem grossen Reichthum der neuern Geometrie scheint es nicht überflüssig, verwandte Methoden unter einen Gesichtspunkt zu bringen, welcher einen möglichst grossen Ueberblick gewährt. Möchte dieser Aufsatz als ein, wenn auch nur kleiner, Beitrag zu jener Aufgabe betrachtet werden dürfen!

XXXII.

In integrationem aequationis Derivatarum partialium superficiei, cujus in puncto unoquoque principales ambo radii curvedinis aequales sunt signoque contrario.

Auct.

Dr. E. G. Björling,

ad Acad. Upsaliens. Docens matheseos.

Prooemium.

Ineunte vix anno 1842 praecedente opusculum quoddam „Calculi Variationum Integralium duplicium exercitationes“ intitulatum typis Upsaliensibus exscribendum curaveram, in quo propositum (inter alia) mihi fuerat aequationem (formae finitae) su-

perficiei minimae tali quâdam viâ consequi, ut arbitrarias quas secum fert functiones determinari unquam liceret. Scilicet, ut constat, Integrale aequationis derivatarum partialium superficiei illius — a Cel. Monge primo (et quidem duobus modis) *) nec non a Cel. Legendre **) inventum — arbitrarias continet duas functiones singularum quantitatum (si vis) indeterminatarum, quas determinatis (dum fieri potest) formis functionum eliminari ex systemate trium Integralis aequationum oportebit, quo optata proveniat relatio coordinatarum x, y et z. At in eo ipso cardo rei vertitur, ut inveniatur modus quidam determinandi functiones arbitrarias. Quem quidem antea non fuisse inventum, in caussâ (ut mihi videtur) ipsae sunt methodi Integralis deducendi adhibitae. — Contigit mihi ex sententia rem gerere, ita ut posthaec liceat arbitrarias illas functiones in casu admodum generali determinari.

At praeterquam quod rem in genere, quae circa inveniendum aptiori quâdam viâ integrale hocce versatur, tractare conatus fueram, singularia aliquot genera „superficierum minimarum“ examinare adgressus responsum tuli quaestioni, quaenam sint in numero superficierum revolutionis earumque, quae rectâ ad planum quoddam parallele motâ generantur, eae quibus contingat idioma superficiei minimae; quam quidem rem comparatâ aequatione illâ derivatarum partialium superficiei minimae successive cum aequationibus superficierum modo commemoratarum perduxi.

Nuper admodum ex ephemeride illâ „l'Institut“, eâdem fere de re in Societate illa Parisiensi „Société Philomatique“ (et quidem non solum priori sed hoc etiam ipso anno) agi coeptum fuisse, cognovi. Scilicet, ut ex verbis infra citatis ***) apparet, M. Catalan et M. Wantzel suâ uterque viâ (alter priori alter hoc ipso anno) responsum quaestioni, quaenam sit superficierum in genere rectâ generatarum ea cui contingat idioma superficiei minimae, dederunt.

Quae cum ita sint, tempori me ut par est cedere duxi, si ex opere in primis lineis hujus prooemii cituto ea, quae problema illud

---

*) Monge, Appl. de l'Anal. à la Géom. (Paris, 1809), pag. 192; Lacroix, Traité du Calc. Diff. et du Calc. Int. 2. édit. T. II. pag. 627.

**) Hist. de l'Acad. Roy. des Sciences (Paris, 1789), pag. 313.

***) L'Institut, No. 448 (an. 1842). — Verba formalia haec sunt: „M. Catalan communique le résultat d'une recherche qu'il vient de faire „sur les surfaces minimum.“.... „Le résultat de son travail peut „s'énoncer ainsi: De toutes les surfaces reglées l'héliçoïde „à plan directeur est la seule qui soit une surface minimum.“

L'Institut, No. 479 (an. 1843). — „Il est donné communication „d'une note de Mr. Wantzel sur la surface dont l'aire est un minimum pour certains cas particuliers. Mr. Catalan a cherché la surface dont l'aire est un minimum pour le cas où cette surface devrait „être reglée.“.... „Dans le cas traité par Catalan on combine „cette équation différentielle“ (scil. aequationum derivatarum partialium superficiei minimae) „avec les équations de la droite variable que „la surface doit renfermer. On retrouve ainsi presque immédiatement „la surface heliçoïdale qu'il (Mr. Catalan) a obtenue par un calcul „assez long.“.... „Pour les surfaces de revolution on combine l'équ. „aux diff. partielles de ces surfaces avec celle de la surface en question, „et le calcul s'achève sans difficulté.“

superficiei minimae spectant, excerpta eademque retractata paullulum atque aucta prodire jam in celebritatem hominum Matheseos studiis eruditorum curarem.

Eorum, quae in sequentibus ex calculo Variationum (et quidem non nisi in notulis) citavi, demonstrationem — si placet — ex opere supra allato „Calculi Variationum Integralium etc.“ *) recognoscere licet.

Upsaliae, mense Jul. 1843.

---

1. Uti omnibus constat — p et q denotantibus partiales ipsius z derivatas 1^i ordinis resp. ad x et y (coordinatas independentes) atque r, s et t derivatas 2^i ordinis — aequatio, de quâ quaeritur, est:

$$(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r=0 \ldots . \quad (1)$$

Nec minus constat **) simplicissimam, quam integrali illius (a Cel. Monge primum invento) reddi liceat, formam esse

$$(2) \ldots . \begin{cases} x=a+b, \\ y=\varphi(a)+\chi(b), \\ z=\int da\sqrt{-1}\sqrt{1+\varphi'^2}+\int db\sqrt{-1}\sqrt{1+\chi'^2}, \end{cases}$$

quo ex systemate, determinatis demum φ et χ, eliminando indeterminatas a et b habebitur relatio ipsarum z, x et y. ***)

Attamen non tanti refert formam utique simplicissimam integralis expetere, quanti eandem — si fieri possit — tali quâdam viâ consequi, qua arbitrarias illas functiones determinari umquam liceat. Forsitan ea, quae sequuntur, ad hunc finem apta quodammodo dijudicabuntur.

2. Loco variabilium x et y aliae duae u et v independentes inferantur, nimirum

$$(3) \ldots . \begin{cases} u=x+y\sqrt{-1}, \\ v=x-y\sqrt{-1}. \end{cases}$$

---

*) Paucorum, quae medio anno priori bibliopolae cuidam Lipsiae tradenda curabam, exemplarium fortasse aliquot usque supersunt.

**) Lacroix, Traité du Calc. Diff. et du Calc. Int. 2. édit. Paris. 1814. T. II. pag. 630.

***) In opere „Appl. de l'Anal. à la Géom.“ (Paris, 1809), p. 192, hâc formulâ idem exhibuit integrale:

$$\begin{cases} x=-\varphi'(a)+\psi'(b), \\ y=-\varphi+a\varphi'+\psi-b\psi', \\ z=\int\varphi''.da\sqrt{-1-a^2}+\int\psi''.db\sqrt{-1-b^2}, \end{cases}$$

quam utique eandem aliâ suâ viâ Cel. Legendre in Mém. sur l'intégr. de quelques équ. aux diff. partielles (Hist. de l'Acad. Roy. des sciences. An. 1787. Paris. 1789. p. 313.) invenit.

Digitized by Google

Solitis ex formulis *) partiales functionis z derivatas resp. ad x et y transformandi in derivatas resp. ad u et v heic erunt:

$$p = \frac{dz}{du} + \frac{dz}{dv},$$
$$-q\sqrt{-1} = \frac{dz}{du} - \frac{dz}{dv},$$

*) Quas tamen, ut in promtu sint, breviter heic attulisse juvabit. Scilicet positis

$$du = u'dx + u_1 dy,$$
$$dv = v'dx + v_1 dy,$$

erit

$$dz(= \frac{dz}{du}du + \frac{dz}{dv}dv) = [\frac{dz}{du}u' + \frac{dz}{dv}v']dx + [\frac{dz}{du}u_1 + \frac{dz}{dv}v_1]dy,$$

ideoque

$$(a) \ldots \begin{cases} p = \frac{dz}{du}u' + \frac{dz}{dv}v', \\ q = \frac{dz}{du}u_1 + \frac{dz}{dv}v_1. \end{cases}$$

Tunc positis

$$du' = u''dx + u'_1 dy,$$
$$du_1 = u'_1 dx + u_{11}dy,$$
$$dv' = v''dx + v'_1 dy,$$
$$dv_1 = v'_1 dx + v''dy;$$

erit differentiatione prioris (a)

$$r = \frac{d(\frac{dz}{du})}{dx}u' + \frac{d(\frac{dz}{dv})}{dx}v' + \frac{dz}{du}u'' + \frac{dz}{dv}v'',$$

i. e. — quoniam aquationi huic (a) convenienter

$$\frac{d(\frac{dz}{du})}{dx} = \frac{d^2z}{du^2}u' + \frac{d^2z}{dudv}v', \quad \frac{d(\frac{dz}{dv})}{dx} = \frac{d^2z}{dudv}u' + \frac{d^2z}{dv^2}v',$$
$$r = \frac{d^2z}{du^2}u'^2 + 2\frac{d^2z}{dudv}u'v' + \frac{d^2z}{dv^2}v'^2 + \frac{dz}{du}u'' + \frac{dz}{dv}v''; \ldots . (b)$$

consimilique ratione

$$s = \frac{d^2z}{du^2}u'u_1 + \frac{d^2z}{dudv}(u'v_1 + u_1v') + \frac{d^2z}{dv^2}v'v_1 + \frac{dz}{du}u'_1 + \frac{dz}{dv}v'_1, \ldots . (c)$$
$$t = \frac{d^2z}{du^2}u_1^2 + 2\frac{d^2z}{dudv}u_1v_1 + \frac{d^2z}{dv^2}v_1^2 + \frac{dz}{du}U_{11} + \frac{dz}{dv}V_{11} \ldots . (d)$$

$$r = \frac{d^2z}{du^2} + 2\frac{d^2z}{dudv} + \frac{d^2z}{dv^2},$$

$$-t = \frac{d^2z}{du^2} - 2\frac{d^2z}{dudv} + \frac{d^2z}{dv^2},$$

$$-s\sqrt{-1} = \frac{d^2z}{du^2} - \frac{d^2z}{dv^2}.$$

Quibus impositis aequatio illa (1) abit in

$$\left(\frac{dz}{dv}\right)^2\frac{d^2z}{du^2} - \left(1 + 2\frac{dz}{du}\frac{dz}{dv}\right)\frac{d^2z}{dudv} + \left(\frac{dz}{du}\right)^2\frac{d^2z}{dv^2} = 0,$$

seu breviter

$$q_1^2 r_1 - (1 + 2p_1q_1)s_1 + p_1^2 t_1 = 0 \ldots\ldots (4)$$

Si heic p_1 et q_1 ipsae essent variabiles independentes, — quoniam tunc ista aequatio formae esset cognitae linearis $Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Nz = M$. denotantibus $R, S, \ldots\ldots M$ functiones solarum variabilium independentium —; transformari eam liceret in aliam formae illius

$$\frac{d^2z}{d\alpha d\beta} + \mathfrak{A}\frac{dz}{d\alpha} + \mathfrak{B}\frac{dz}{d\beta} + \mathfrak{C}z = \mathfrak{D} \ldots\ldots (5)$$

($\mathfrak{A} \ldots\ldots \mathfrak{D}$ denot. functiones solarum α et β), cujus in integrali formae finitae (siquidem inveniri tale liceat) functionum arbitrariarum altera α solam altera β solam, earumque autem modo alterutram sub signo $\int$, contineret.*) Et quidem tunc viâ, quam in dissertatione infra citatâ munivit Laplace, functiones istas arbitrarias determinari in casu admodum generali liceret.

---

*) Sufficit heic verba attulisse Illustr. Laplace sub finem (pag. 395) dissertationis Recherches sur le Calc. Int. aux Diff. partielles (Hist. de l'Acad. Roy. des Sciences, An. 1773. Paris, 1777) sequentia: „..... on doit en conclure généralement, que toutes les fois que l'in„tégrale complète de l'équ." $Rr + Ss +$ etc. (vid. supra) „est possible „en termes finis, elle est nécessairement débarrassée du signe $\int$ par „rapport à l'une ou à l'autre des fonctions arbitr. $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$, et „dans ce cas on peut toujours obtenir cette intégrale par la méthode „de l'art. VII." — transformatione aequationis in formam $\frac{d^2z}{d\alpha d\beta} + \mathfrak{A}\frac{dz}{d\alpha} +$ etc. tum integratione hujus secundum methodum in art. illo VII praeced. expositam —; „on voit ainsi que cette méthode donne géné„ralement les intégrales complètes des équations linéaires aux diff. par„tielles, lorsqu'elles sont possibles en termes finis; ayant une fois ces „intégrales, il ne peut rester de difficulté que dans la détermination „des fonctions arbitraires; or la méthode de l'art. VII a encore l'avan„tage de donner un moyen très simple pour cet objet, dans un cas „très-général, et qui paraît être celui de presque tous les problèmes „physico-mathématiques."

Digitized by Google

3. Quae cum ita sint, primo transformetur aequ. (4), ex methodo Cel. Legendre*), in aliam cujus variabiles independentes ipsae sint p_1 et q_1. Scilicet est

$$z = p_1 u + q_1 v - \int (u dp_1 + v dq_1)$$
$$= p_1 u + q_1 v - w, \ldots . \quad (6)$$

positâ

$$dw = u dp_1 + v dq_1,$$

seu

$$u = \frac{dw}{dp_1}, \; v = \frac{dw}{dq_1}, \ldots . \quad (7)$$

(ideoque cognita erit z, si modo w innotuerit.

Secundum locum cit. habebitur transformata haecce:

$$q_1^2 \frac{d^2w}{dq_1^2} + (1 + 2p_1 q_1) \frac{d^2w}{dp_1 dq_1} + p_1^2 \frac{d^2w}{dp_1^2} = 0 \ldots . \quad (8)$$

Quo facto jam istam, ut modo monuimus, transformari decet in aliam formae (5) et quidem formulis sub No. 2 allatis (*b*), (*c*), (*d*). Ponendo in iis

w, p_1 et q_1 loco z, x et y,

α et β loco u et v,

α', α_1, α'', α'_1, $\alpha_{,,}$ loco u', u_1, u'', u'_1, $u_{,,}$,

β', β_1, β'', β'_1, $\beta_{,,}$ loco v', v_1, v'', v'_1, $v_{,,}$,

[scil. α', α_1, α'', α'_1, $\alpha_{,,}$ denot. $\frac{d\alpha}{dp_1}$, $\frac{d\alpha}{dq_1}$, $\frac{d^2\alpha}{dp_1^2}$, $\frac{d^2\alpha}{dp_1 dq_1}$, $\frac{d^2\alpha}{dq_1^2}$,

atque β', β_1 etc. denot. $\frac{d\beta}{dp_1}$, $\frac{d\beta}{dq_1}$ etc.]

aequatio (8) primo abit in

$$[p_1^2 \alpha'^2 + (1 + 2p_1 q_1)\alpha' \alpha_1 + q_1^2 \alpha_1^2] \frac{d^2w}{d\alpha^2} +$$
$$+ [2p_1^2 \alpha' \beta' + (1 + 2p_1 q_1)(\alpha' \beta_1 + \alpha_1 \beta') + 2q_1^2 \alpha_1 \beta_1] \frac{d^2w}{d\alpha d\beta} +$$
$$+ [p_1^2 \beta'^2 + (1 + 2p_1 q_1)\beta' \beta_1 + q_1^2 \beta_1^2] \frac{d^2w}{d\beta^2} +$$
$$+ [p_1^2 \alpha'' + (1 + 2p_1 q_1)\alpha'_1 + q_1^2 \alpha_{,,}] \frac{dw}{d\alpha} +$$
$$+ [p_1^2 \beta'' + (1 + 2p_1 q_1)\beta'_1 + q_1^2 \beta_{,,}] \frac{dw}{d\beta} = 0 \ldots . \quad (9)$$

---

*) Vid. Lacroix, in opere cit. T. II. p. 622; conf. Legendre, Mém. sur l'intégr. de quelques équations aux diff. partielles, sub No. 1. cit.

Digitized by Google

Jamque α et β sumtis talibus ut satisfiat qualitercumque conditionibus

$$\left.\begin{aligned} p_1^2\alpha'^2 + (1+2p_1q_1)\alpha'\alpha_1 + q_1^2\alpha_1^2 &= 0 \\ p_1^2\beta'^2 + (1+2p_1q_1)\beta'\beta_1 + q_1^2\beta_1^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (10)$$

aequationi transformatae optata continget forma: id quod fiet ponendo

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{p_1}{1+\sqrt{1+4p_1q_1}}, \\ \beta &= \frac{p_1}{1-\sqrt{1+4p_1q_1}}.^{*}) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (11)$$

Quibus in aequ. (9) adhibitis ista comparatur loco aequationis (8) transformata **):

$$\frac{1}{4q_1^2}\cdot\frac{d^2w}{d\alpha d\beta} - \frac{2p_1}{\sqrt{1+4p_1q_1}(1+\sqrt{1+4p_1q_1})}\cdot\frac{dw}{d\alpha} + \frac{2p_1}{\sqrt{1+4p_1q_1}(1-\sqrt{1+4p_1q_1})}\cdot\frac{dw}{d\beta} = 0,$$

*) Scil. positis $\left.\begin{aligned} \alpha' &= m\alpha_1 \\ \beta' &= m\beta_1 \end{aligned}\right\}$ satisfiet aequationibus (10) satisfaciendo huic

$$p_1^2m^2 + (1+2p_1q_1)m + q_1^2 = 0,$$

unde

$$m = -\frac{1+2p_1q_1 \pm \sqrt{1+4p_1q_1}}{2p_1^2} = -\frac{(1\pm\sqrt{1+4p_1q_1})^2}{4p_1^2}.$$

Ideoque aequationibus (10) fiet satis sumendo α et β tales ut fiat satis qualitercumque bisce:

$$\alpha' + \left(\frac{1+\sqrt{1+4p_1q_1}}{2p_1}\right)^2\cdot\alpha_1 = 0,$$

$$\beta' + \left(\frac{1-\sqrt{1+4p_1q_1}}{2p_1}\right)^2\cdot\beta_1 = 0;$$

quod (ut jam facile est probatu) fit positione illâ (11).

**) Scilicet habentur ex (11):

$$e.... \left\{\begin{aligned} \alpha' &= \frac{1}{2\sqrt{1+4p_1q_1}} = -\beta'; \\ \alpha_1 &= \frac{-2p_1^2}{\sqrt{1+4p_1q_1}(1+\sqrt{1+4p_1q_1})^2};\ \beta_1 = \frac{2p_1^2}{\sqrt{1+4p_1q_1}\cdot(1-\sqrt{1+4p_1q_1})^2}; \end{aligned}\right.$$

$$\alpha'' = \frac{-q_1}{(1+4p_1q_1)^{\frac{3}{2}}} = -\beta''; \quad \alpha'_1 = \frac{-p_1}{(1+4p_1q_1)^{\frac{3}{2}}} = -\beta'_1;$$

$$\alpha_{11} = \frac{4p_1^3(1+3\sqrt{1+4p_1q_1})}{(1+4p_1q_1)^{\frac{3}{2}}\cdot[1+\sqrt{1+4p_1q_1}]^3};\ \beta_{11} = \frac{-4p_1^3(1-3\sqrt{1+4p_1q_1})}{(1+4p_1q_1)^3\cdot[1-\sqrt{1+4p_1q_1}]^3}.$$

seu

$$\frac{d^2w}{d\alpha d\beta}\sqrt{1+4p_1q_1}+2q_1(1-\sqrt{1+4p_1q_1})\frac{dw}{d\alpha}$$
$$-2q_1(1+\sqrt{1+4p_1q_1})\frac{dw}{d\beta}=0;$$

i. e. — quoniam secund. (11)

$$\left.\begin{aligned} p_1&=\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta},\\ q_1&=\frac{-1}{2(\alpha+\beta)},\\ \sqrt{1+4p_1q_1}&=-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}, \end{aligned}\right\}\ \ldots\ (12)$$

$$(13)\ \ldots\ \frac{d^2w}{d\alpha d\beta}+\frac{2\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\cdot\frac{dw}{d\alpha}-\frac{2\beta}{\alpha^2-\beta^2}\cdot\frac{dw}{d\beta}=0$$

4. Et quidem formae finitae integrale hujus aequationis secundum methodum Ill. Laplace invenire licet, ut jam erit probandum:

Etenim positâ

$$\frac{dw}{d\beta}+\frac{2\alpha}{\alpha^2-\beta^2}w=w_1,\ \ldots\ (14)$$

(13) redigitur in

$$\frac{2w}{(\alpha-\beta)^2}=\frac{2\beta}{\alpha^2-\beta^2}w_1-\frac{dw_1}{d\alpha};\ \ldots\ (15)$$

quae ipsam w dabit cognitâ modo w_1. — At sumtis ex novissima valoribus τῶν w et $\frac{dw}{d\beta}$ tum substitutis in (14), ista abit in novam hanc:

$$\frac{d^2w_1}{d\alpha d\beta}-\frac{2\beta}{\alpha^2-\beta^2}\cdot\frac{dw_1}{d\alpha}-\frac{2\beta}{\alpha^2-\beta^2}\cdot\frac{dw_1}{d\beta}+\frac{4\beta w_1}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2}=0.\ \ldots\ (16)$$

Jamque positâ

$$\frac{dw_1}{d\beta}-\frac{2\beta}{\alpha^2-\beta^2}w_1=w_{11},\ \ldots\ (17)$$

w_{11} tandem quaeri licebit ex hac 1ⁱ ordinis aequatione lineari:

$$\frac{dw_{11}}{d\alpha}-\frac{2\beta}{\alpha^2-\beta^2}w_{11}=0.\ \ldots\ (18)$$

Ex hac concluditur (ψ''' denot. functionem arbitr.)

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}w_{11}=\psi'''(\beta);\ \ldots\ (19)$$

tum secundum (17)

$$(20) \ldots\ldots (\alpha^2 - \beta^2)w_1 = \varphi(\alpha) + \int (\alpha - \beta)^2 \psi'''(\beta) d\beta,$$

[const. arbitr. in $\varphi(\alpha)$ inclusâ], atque secundum (15) tandem

$$(21) \ldots\ldots (\alpha + \beta)w = \varphi(\alpha) + \int (\alpha - \beta)^2 \psi'''(\beta) d\beta - \frac{\alpha - \beta}{2}\left(\varphi'(\alpha) + 2\int (\alpha - \beta\psi'''(\beta) d\beta\right);$$

quod igitur quaesitum est integrale aequationis (8) datis α et β ex (11).

Huic, si placet, simpliciorem reddi licet formam integrando p. p. terminos signo $\int$ affectos. Scilicet positis

$$(22) \ldots\ldots \begin{cases} \int \psi'''(\beta) d\beta = \psi''(\beta), \\ \int \psi'' d\beta = \psi', \\ \int \psi' d\beta = \psi, \end{cases}$$

habebitur

$$(23) \ldots\ldots (\alpha + \beta)w = \varphi(\alpha) + 2\psi(\beta) - \frac{\alpha - \beta}{2}[\varphi'(\alpha) - 2\psi'(\beta)].$$

5. Determinatis in singulari quodam problemate functionibus φ et ψ, ex aequatione (21) aut (23) ope aequationum (6) et (7) exprimi licebit ipsas u, v et z functionibus ipsarum p_1 et q_1 (vel etiam, si ita conveniet, ipsarum α et β). Tum p_1 et q_1 (vel etiam α et β) eliminatis ex hisce — dum fieri potest — relatio proveniet ipsarum u, v et z; ac denique z exprimetur functione ipsarum x et y ope aequationum (3) seu

$$(24) \ldots\ldots \begin{cases} 2x = u + v, \\ 2y = (v - u)\sqrt{-1} \end{cases}$$

6. Antequam viam, quâ in genere ad determinationem functionum arbitrariarum perveniri liceat, indicamus; juvabit — quo accuratius de hac re quodammodo sit disputatum — systema illud finale integralis (u, v, z) seu (x, y, z) deduxisse et quidem ex formulis (23), (6), (7) et (24).

Est quidem

$$u = \frac{dw}{dp_1} = \frac{dw}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dp_1} + \frac{dw}{d\beta}\frac{d\beta}{dp_1} = \frac{\alpha + \beta}{2(\alpha - \beta)} \cdot \left(\frac{dw}{d\beta} - \frac{dw}{d\alpha}\right) \text{ sec. (11) et (12)},$$

$$v = \frac{dw}{dq_1} = \frac{dw}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dq_1} + \frac{dw}{d\beta}\frac{d\beta}{dq_1} = \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha - \beta} \cdot \left(\alpha^2 \frac{dw}{d\alpha} - \beta^2 \frac{dw}{d\beta}\right);$$

Digitized by Google

at secundum (23)

$$(\alpha+\beta)^2\frac{dw}{d\alpha}=-(\varphi+2\psi)+\alpha\varphi'+2\beta\psi'-\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}\varphi'',$$

$$(\alpha+\beta)^2\frac{dw}{d\beta}=-(\varphi+2\psi)+\alpha\varphi'+2\beta\psi'+(\alpha^2-\beta^2)\psi'';$$

unde concluditur integrale hocce:

$$(25)\ \ldots\ \begin{cases} 4u=\varphi''+2\psi'', \\ v=-2(\varphi+2\psi)+2(\alpha\varphi'+2\beta\psi')-(\alpha^2\varphi''+2\beta^2\psi''), \\ 2z=-(\varphi'+2\psi')+\alpha\varphi''+2\beta\psi''; \end{cases}$$

seu, secundum (24):

$$(26)\ \ldots\ \begin{cases} 2x=-2(\varphi+2\psi)+2(\alpha\varphi'+2\beta\psi') \\ \qquad\qquad +\frac{1}{4}\{1-4\alpha^2)\varphi''+(1-4\beta^2)2\psi''\}, \\ 2y\sqrt{-1}=2(\varphi+2\psi)-2(\alpha\varphi'+2\beta\psi') \\ \qquad\qquad +\frac{1}{4}\{1+4\alpha^2)\varphi''+(1+4\beta^2)2\psi''\}, \\ 2z=-(\varphi'+2\psi')+\alpha\varphi''+2\beta\psi''. \end{cases}$$

De caetero licere (si placet) huic systemati formam reddi simplicem illam (2), perfacili equidem negotio patebit:

Nimirum positis

$$\left.\begin{aligned} -2\varphi+2\alpha\varphi'+\tfrac{1}{4}(1-4\alpha^2)\varphi''&=2a, \\ -2\psi+2\beta\psi'+\tfrac{1}{4}(1-4\beta^2)\psi''&=b; \end{aligned}\right\}\ \ldots\ (f)$$

habebitur: $x=a+b$;

tum positis

$$(g)\ \ldots\ \begin{cases} 2\varphi-2\alpha\varphi'+\frac{1}{4}(1+4\alpha^2)\varphi''=2\Phi(a).\sqrt{-1}, \\ 2\psi-2\beta\psi'+\frac{1}{4}(1+4\beta^2)\psi''=2\Psi(b).\sqrt{-1}; \end{cases}$$

habebitur: $y=\Phi(a)+\Psi(b)$;

porro ex (26) sequitur

$$2dz=\alpha.\varphi'''.d\alpha+2\beta.\psi'''.d\beta;$$

at differentiando (f) habetur

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(1-4\alpha^2)\varphi'''.d\alpha=2da, \\ \frac{1}{4}(1-4\beta^2)\psi'''.d\beta=db; \end{cases}$$

atque differentiando (g):

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(1+4\alpha^2)\varphi'''.d\alpha=2\sqrt{-1}.\Phi'da, \\ \frac{1}{4}(1+4\beta^2)\psi'''.d\beta=\sqrt{-1}.\Psi'db; \end{cases}$$

unde

$$\alpha \cdot \varphi''' d\alpha = 2d\alpha \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{1 + \Phi'^2},$$
$$2\beta \cdot \psi''' d\beta = 2db \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{1 + \Psi'^2};$$

atque habebitur

$$s = \int d\alpha \sqrt{-1} \cdot \sqrt{1 + \Phi'^2(\alpha)} + \int db \sqrt{-1} \cdot \sqrt{1 + \Psi'^2(b)}.$$

Denique systemate (26) satisfieri propositae (1), facili usque negotio licet probari. — Etenim α', α_1, β', β_1 denotantibus partiales ipsarum α et β derivatas resp. ad x et y, tertia systematis aequatio praestat

$$(h) \ldots \begin{cases} 2p = \alpha\alpha' \varphi''' + \beta\beta' \cdot 2\psi''', \\ 2q = \alpha\alpha_1 \varphi''' + \beta\beta_1 \cdot 2\psi; \end{cases}$$

at priores ambae

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \tfrac{1}{4}(1 - 4\alpha^2)\alpha' \varphi''' + \tfrac{1}{4}(1 - 4\beta^2)\beta' \cdot 2\psi''', \\ 0 &= (1 - 4\alpha^2)\alpha_1 \varphi''' + (1 - 4\beta^2)\beta_1 \cdot 2\psi''', \\ 0 &= (1 + 4\alpha^2)\alpha' \varphi''' + (1 + 4\beta^2)\beta' \cdot 2\psi''', \\ \sqrt{-1} &= \tfrac{1}{4}(1 + 4\alpha^2)\alpha_1 \varphi''' + \tfrac{1}{4}(1 + 4\beta^2)\beta_1 \cdot 2\psi''' ; \end{aligned}\right\}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= -\frac{1 + 4\beta^2}{(\alpha^2 - \beta^2)^2 \varphi'''}, & \beta' &= \frac{1 + 4\alpha^2}{(\alpha^2 - \beta^2) 2\psi'''}, \\ \alpha_1 &= \frac{1 - 4\beta^2}{(\alpha^2 - \beta^2)\varphi'''} \sqrt{-1}, & \beta_1 &= -\frac{1 - 4\alpha^2}{(\alpha^2 - \beta^2) 2\psi'''} \sqrt{-1}; \end{aligned}\right\} \ldots . (i)$$

atque (h) abeunt in

$$\left.\begin{aligned} 2p &= -\frac{1 - 4\alpha\beta}{\alpha + \beta}, \\ 2q\sqrt{-1} &= -\frac{1 + 4\alpha\beta}{\alpha + \beta} \end{aligned}\right\}$$

tum harum differentiatione adhibitisque (i) comparantur

$$\left.\begin{aligned} 2r &= \frac{(1 + 4\alpha^2)^2 \cdot \varphi''' - (1 + 4\beta^2)^2 \cdot 2\psi'''}{2\varphi'''\psi'''(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha + \beta)^2}, \\ 2t &= -\frac{(1 - 4\alpha^2)^2 \varphi''' - (1 - 4\beta^2)^2 \cdot 2\psi'''}{2\varphi'''\psi'''(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha + \beta)^2}, \\ 2s\sqrt{-1} &= \frac{(1 - 4\alpha^2)(1 + 4\alpha^2)\varphi''' - (1 - 4\beta^2)(1 + 4\beta^2) \cdot 2\psi'''}{2\varphi'''\psi'''(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha + \beta)^2}; \end{aligned}\right\}$$

per quas aequationi (1) fieri satis, facillimum est probatu.

Digitized by Google

7. In determinationem functionum arbitrariarum. Determinentur istae ex eo quod transeat superficies per curvam $\left\{\begin{matrix} y = f(x) \\ z = f_1(x) \end{matrix}\right\}$, per ambitum cujus sit superficiei $p = f_2(x)$.

Conditiones istas in u et v transformari licet secundum (24), sintque

$$\left.\begin{matrix} u = \mathrm{f}(v), \\ x = \mathrm{f}_1(v), \\ p = \mathrm{f}_2(v), \end{matrix}\right\} \quad .. \quad (2\ 7)$$

Patet equidem $\psi'''(\beta)$ determinari licere ex (19), si modo cognitum sit, α superficiei quaenam sit functio ipsius β in ambitu curvae (27) nec non $w_{,,}$.

Prius quaeratur. Est quidem

$$\left.\begin{matrix} \alpha = \dfrac{p_1}{1 + \sqrt{1 + 4p_1q_1}} \\ \beta = \dfrac{p_1}{1 - \sqrt{1 + 4p_1q_1}} \end{matrix}\right\} \text{ secundum (11)}$$

p_1 et q_1 denot. $\frac{dz}{du}$ et $\frac{dz}{dv}$ — Quaerantur p_1 et q_1 in ambitu (27).

Quoniam superficiei $dz = p_1 du + q_1 dv$, at in ambitu $\left.\begin{matrix} du = \mathrm{f}'(v) \,.\, dv \\ dz = \mathrm{f}'_1(v) \,.\, dv \end{matrix}\right\}$; erit ipsarum p_1 et q_1 superficiei in ambitu altera haecce relatio:

$$\mathrm{f}'_1(v) = p_1 \,.\, \mathrm{f}'(v) + q_1.$$

Tum quoniam superficiei $p = \frac{dz}{du} u' + \frac{dz}{dv} v' = p_1 + q_1$ secund. (3), altera erit

$$\mathrm{f}_2(v) = p_1 + q_1;$$

ex quibus sequitur esse in ambitu (27)

$$(28) \ldots \left\{\begin{matrix} p_1 = \dfrac{\mathrm{f}_2 - \mathrm{f}'_1}{1 - \mathrm{f}'} = \Gamma(v) \\ q_1 = \dfrac{\mathrm{f}'_1 \quad \mathrm{f}'\mathrm{f}_2}{1 - \mathrm{f}'} = \Gamma_1(v). \end{matrix}\right.$$

Jam α et β in ambitu exprimi licet in v ope aequat. (11) vel (12), eliminatâque v habebitur ibidem

$$(29) \ldots . \alpha = F(\beta).$$

Porro $w_{,,}$ superficiei quaenam sit functio ipsius β in ambitu quaeratur. — Est quidem sec. (17) et (14) supferficiei

$$(30) \ldots . w_{,,} = \frac{2}{\alpha + \beta} \cdot \frac{dw}{d\beta} + \frac{d^2w}{d\beta^2},$$

Digitized by Google

ideoque $w_{,,}$ in ambitu cognita erit in β, si modo $\frac{dw}{d\beta}$ atque $\frac{d^2w}{d\beta^2}$ ibidem innotuerint.

At $\frac{dw}{d\beta}$ facile invenietur cognitâ modo w in ambitu. Est autem secund. (6) superficiei

$$w = p_1 u + q_1 v - z,$$

cujus membri posterioris omnes termini, quales sunt in ambitu curvae, cognitae sunt in β ex antecedentibus; sitque in ambitu

$$(31) \ldots . \quad w = F_1(\beta).$$

Jam quoniam superficiei $dw = \frac{dw}{d\alpha} d\alpha + \frac{dw}{d\beta} d\beta$, at in ambitu $\left.\begin{matrix} d\alpha = F'(\beta) d\beta \\ dw = F'_1(\beta) d\beta \end{matrix}\right\}$; erit ibidem una relatio ipsarum $\frac{dw}{d\alpha}$ et $\frac{dw}{d\beta}$ ista:

$$F'_1(\beta) = \frac{dw}{d\alpha} F'(\beta) + \frac{dw}{d\beta}.$$

Et quoniam $\frac{dw}{dp_1}$ seu $u = \frac{dw}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dp_1} + \frac{dw}{d\beta}\frac{d\beta}{dp_1}$,

$$\text{i. e} = \left(\frac{dw}{d\alpha} - \frac{dw}{d\beta}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 + 4p_1 q_1}} \text{ secund. } (e);$$

alteram haec dat relationem ipsarum $\frac{dw}{d\alpha}$ et $\frac{dw}{d\beta}$ in ambitu; unde concluditur

$$\frac{dw}{d\alpha} \text{ et } \frac{dw}{d\beta} \text{ in ambitu} = \text{cognitis funct. } \beta. \ldots . \quad (32)$$

Restat $\frac{d^2w}{d\beta^2}$. — Est autem superficiei $d\left(\frac{dw}{d\beta}\right) = \frac{d^2w}{d\alpha d\beta} d\alpha + \frac{d^2w}{d\beta^2} d\beta$; ideoque cognita erit $\frac{d^2w}{d\beta^2}$ in ambitu secund. (29) et (32), si modo $\frac{d^2w}{d\alpha d\beta}$: quam vero dat. (13)

Itaque jam $w_{,,}$ in ambitu cognita est in β; ideoque etiam constitutio functionis $\psi'''(\beta)$.

Qua deinde substitutâ in (20) tum perfectâ integratione illâ $\int (\alpha - \beta)^2 \psi'''(\beta) d\beta$, perfacili negotio determinari $\varphi(\alpha)$ licebit.

8. Quibus peractis habebitur (modo, quem in No. 5. indicavimus) superficierum, quarum in puncto unoquoque principales ambo radii curvedinis aequales sint signoque contrario, ea quae per datam curvam datàque p transeat *).

---

*) Haec quoque — ut ex Calculo illo Variationum innotescit — est omnium, quas per datam curvam perimetrum duci liceat, superficierum ea cui minima sit area interclusa perimetro

Nota.

Licebit etiam (ut facile patet) functiones arbitrarias ex eo determinari quodammodo, ut in ambitu intersectionis superficiei quaesitae atque cylindri $y = f(x)$ sint

$$p = f_1(x),$$
$$\text{et } q = f_2(x);$$

quae quidem conditiones, eliminatis x et y, abeunt in

$$(33) \ldots \begin{cases} u = \mathrm{f}(v), \\ p = \mathrm{f}_1(v), \\ q = \mathrm{f}_2(v). \end{cases}$$

Scilicet, ut supra, primo quaeratur α quaenam sit functio ipsius β in ambitu intersectionis. Quoniam superficiei

$$p = \frac{dz}{du} u' + \frac{dz}{dv} v',$$
$$q = \frac{dz}{du} u_1 + \frac{dz}{dv} v_1$$

erunt in ambitu

$$\mathrm{f}_1(v) = p_1 + q_1,$$
$$\mathrm{f}_2(v) = (p_1 - q_1)\sqrt{-1};$$

ideoque

$$(34) \ldots \begin{cases} 2p_1 = \mathrm{f}_1 - \mathrm{f}_2 . \sqrt{-1}, \\ 2q_1 = \mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2 . \sqrt{-1}; \end{cases}$$

ex quibus, ut in casu praecedenti, α licet exprimi in β.

Tum w in ambitu cognita erit in β secund. (6), si modo z superficiei ibidem innotuerit. Est autem $dz = p_1 du + q_1 dv$; ideoque secund. (34) et (33) erit per totum ambitum

$$(35) \ldots \begin{cases} dz = E'(v) . dv, \\ z = E(v) + c, \\ w = E_1(\beta) - c, \end{cases}$$

manente c const. arbitrariâ.

---

datâ aliâque in eadem superficie ductâ, perimetris certe quarum in xyplano projectionum altera alteri sit circumscripta: scilicet iis solis in comparationem vocatis superficiebus, quarum aream perimetris hisce definitam formulâ illâ $\int\int dx dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ (communibus integrationis limitibus) exprimi liceat.

Digitized by Google

Caetera sequuntur, ut in casu praecedenti; attamen, uti — justum, arbitraria heic remanebit constans c, nisi praeterea editum sit punctum per quod transire superficiem lubeat.

Porro ex eo determinari licebit functiones arbitrarias, ut in ambitu intersectionis superficiei quaesitae cum superficie $z = f(x, y)$ sint

$$p = f_1(x, y)$$
$$\text{et } q = f_2(x, y).$$

Scilicet tunc erit in ambitu

$$(dz =) \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy = f_1 dx + f_2 dy,$$

quae tunc aequatio est differentialis ambitûs, cui igitur licet concludi

$$f_3(x, y, c) = v,$$

(denot. c const. arbitr.). — Caetera patent.

Jamque ut (corroborandi quodammodo calculi causâ) paucorum, in quibus calculum ad finem usque sine maximis tricis perduci liceat, unicum offeratur exemplum et quidem (uti videtur) admodum simplex; postuletur ut in ambitu perimetri sint

$$\left.\begin{aligned} z &= 1, \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= A, \\ p &= 2Bx, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (k)$$

(A et B const. reales).

Eliminatis x et y habetur definitio ista perimetri:

$$\left.\begin{aligned} z &= 1, \\ \sqrt{uv} &= A, \\ p &= B \cdot (v + \tfrac{A^2}{v}). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (l)$$

Erunt igitur in ambitu secundum (28)

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= Bv, \\ q_1 &= \frac{A^2 B}{v}; \end{aligned}\right\}$$

atque aequationes (11) dant

$$\alpha = \frac{Bv}{1 + \sqrt{1 + 4A^2B^2}} = (\text{breviter}) \frac{B}{2C} v,$$

$$\beta = \frac{Bv}{1 - \sqrt{1 + 4A^2B^2}} = \ldots\ldots\ldots \frac{B}{2D} v.$$

Ideoque erit in ambitu

$$\alpha = \frac{D}{C} \cdot \beta, \quad \ldots\ldots \quad (m)$$

$$v = \frac{2D}{B} \cdot \beta,$$

$$u = \frac{A^2 B}{2D\beta},$$

$$p_1 = 2D\beta,$$

$$q_1 = \frac{A^2 B^2}{2D\beta},$$

$$\sqrt{1 + 4p_1 q_1} = \sqrt{1 + 4A^2 B^2} = C - D;$$

$$w = 2A^2 B - 1,$$

$$\frac{dw}{d\alpha} = \frac{A^2 BC(C-D)}{D\beta},$$

$$\frac{dw}{d\beta} = -\frac{A^2 B(C-D}{\beta};$$ *)

$$\frac{d^2 w}{d\alpha d\beta} = \frac{4A^2 BC^2}{\beta^2},$$

$$\frac{d^2 w}{d\beta^2} = \frac{A^2 B}{\beta^2}(C - D - 4CD);$$

$$w_{,,} = \frac{A^2 B}{\beta^2}(C - D - 2C[C + D]),$$

$$= -\frac{A^2 B}{\beta^2}.$$

Unde

$$\psi'''(\beta) = \frac{A^2 B}{C-D} \cdot \frac{1}{\beta^2}; \quad \ldots\ldots \quad (n)$$

atque

$$\int (\alpha - \beta)^2 \cdot \psi'''(\beta) \cdot d\beta = -\frac{A^2 B}{C-D}\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta} + 2\alpha \log \beta\right),$$

(log denot. logarithm. naturalem);

unde (20) abit in

$$(\alpha^2 - \beta^2) w_1 = \varphi(\alpha) - \frac{A^2 B}{C-D}\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta} + 2\alpha \log \beta\right),$$

ex qua jam $\varphi(\alpha)$ est determinanda.

In ambitu est

$$\beta = \frac{C}{D}\alpha,$$

---

*) Quoniam ex positis

$$2C = 1 + \sqrt{1 + 4A^2 B^2},$$

$$2D = 1 - \sqrt{1 + 4A^2 B^2}$$ sequitur $C + D = 1$.

atque secund. (14)

$$(\alpha^2 - \beta^2) w_1 = \alpha \left(\frac{A^2 B}{CD} - 2\right);$$

unde

$$(o) \ldots . \ \varphi(\alpha) = -2\alpha \left(1 - \frac{A^2 B}{C - D} \log \frac{C}{D} \alpha\right).$$

Quae quum ita sint, integrale (21) abit in

$$w = \frac{A^2 B}{C - D} \left\{ \frac{2(\alpha - \beta)}{\alpha + \beta} - \log \frac{C\alpha}{D\beta} \right\} - 1,$$

seu, repositis jam valoribus (11) ipsarum α et β,

$$(p) \ldots w = \frac{A^2 B}{C - D} \left\{ 2\sqrt{1 + 4p_1 q_1} + \log \frac{C}{D} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 + 4p_1 q_1}}{1 + \sqrt{1 + 4p_1 q_1}} \right\} - 1.$$

Ex quo consequuntur

$$(q) \ldots . \begin{cases} u = \dfrac{A^2 B}{C - D} \cdot \dfrac{\sqrt{1 + 4p_1 q_1}}{p_1}, \\ v = \dfrac{A^2 B}{C - D} \cdot \dfrac{\sqrt{1 + 4p_1 q_1}}{q_1}, \\ x = 1 - \dfrac{A^2 B}{C - D} \log \dfrac{C}{D} \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4p_1 q_1}}{1 + \sqrt{1 + 4p_1 q_1}}; \end{cases}$$

ex qua novissimâ eliminari licet $4p_1 q_1$ ope duarum praecedentium, quae quidem dant multiplicando

$$4p_1 q_1 = \frac{4A^4 B^2}{(C - D)^2 . uv - 4A^4 B^2} = \frac{4A^4 B^2}{(1 + 4A^2 B^2) . uv - 4A^4 B^2}.$$

Ideoque quoniam nunc

$$e^{\frac{C - D}{A^2 B}(x - 1)} = \frac{D}{C} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + 4p_1 q_1}}{1 - \sqrt{1 + 4p_1 q_1}},$$

seu repositis valoribus *τῶν* C et D,

$$e^{\frac{\sqrt{1 + 4A^2 B^2}}{A^2 B}(x - 1)} = -\frac{1 - \sqrt{1 + 4A^2 B^2}}{1 + \sqrt{1 + 4A^2 B^2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{4p_1 q_1}} + \sqrt{\frac{1}{4p_1 q_1} + 1}\right)^2;$$

tandem erit superficiei quaesitae aequatio finita haecce:

$$e^{z\cdot\frac{\sqrt{1+4A^2B^2}}{A^2B}} = \frac{e^{\frac{\sqrt{1+4A^2B^2}}{A^2B}}}{4A^2B^2}(1-\sqrt{1+4A^2B^2})^2\cdot[\sqrt{\frac{1+4A^2B^2}{4A^4B^2}uv}+\sqrt{\frac{1+4A^2B^2}{4A^4B^2}uv-1}]^2,$$

$$= \frac{e^{\frac{\sqrt{1+4A^2B^2}}{A^2B}}}{4A^2B^2}(1-\sqrt{1+4A^2B^2})^2\cdot[\sqrt{\frac{1+4A^2B^2}{4A^4B^2}(x^2+y^2)}+\sqrt{\frac{1+4A^2B^2}{4A^4B^2}(x^2+y^2)-1}]^2, \ldots . (r)$$

h. e. superficies quaedam erit revolutionis circa x-axim.

Et si ponantur ex. gr. A et B tales ut

$$\sqrt{1+4A^2B^2} = 2A^2B,$$

$$2A = e+\frac{1}{e};$$

cui fit satis ponendo

$$\tfrac{1}{2}B = \frac{1}{(e+\frac{1}{e})(e-\frac{1}{e})};$$

habebitur superficies cognita

$$e^z = \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2-1},$$

seu

$$(s) \ldots . \frac{e^z+e^{-z}}{2} = \sqrt{x^2+y^2};$$

cui quidem superficiei revolutionis circa z-axim Meridianus est Catenaria, cujus vertex (punctum axi revol. proximum), in xy-plano situs, ab axi distat unitate longitudinis.

9. Ex eo tandem determinari licet functiones illas arbitrarias, quod transeat superficies per curvam $\left\{\begin{matrix} y = f(x) \\ z = f_1(x) \end{matrix}\right\}$ datâ insuper relatione quâdam ipsarum p et q superficiei, in genere

$$(36) \quad \ldots . \quad f_2(x, y, z, p, q) = 0.$$

Quâ quidem, ut patet, perfectâ determinatione responsum erit ad quaestionem, an per datam curvam duci liceat superficiem quamdam illius generis, quod in aequatione (36) derivatarum 1^{i} ordinis partialium comprehenditur, eandemque talem cujus in puncto unoquoque principales ambo etc. *)

Scilicet loco conditionum (27) heic postulatur, ut per ambitum curvae sit

$$\left.\begin{matrix} u = \mathrm{f}(v), \\ z = \mathrm{f}_1(v), \\ \mathrm{f}_2(v, p, q) = 0. \end{matrix}\right\}$$

In determinationem ipsarum p_1 et q_1 superficiei in ambitu habetur, ut in casu priori, altera haecce relatio:

$$\mathrm{f}'_1(v) = p_1 \,.\, \mathrm{f}'(v) + q_1.$$

Et quoniam superficiei

$$p = \frac{dz}{du}\, u' + \frac{dz}{dv}\, v' = p_1 + q_1 \text{ secund. (3)},$$

$$q = \frac{dz}{du}\, u_1 + \frac{dz}{dv}\, v_1 = (p_1 - q_1)\sqrt{-1} \ldots .;$$

habebitur, conjunctâ his quidem relatione illa

$$\mathrm{f}_2(v, p, q_1) = 0,$$

altera relatio ipsarum p_1, q_1 et v.

Quo facto comparabitur in genere, ut in casu priori,

$$\alpha = F(\beta).$$

Caetera, ut in casu priori, sequuntur.

---

*) Ideoque etiam hoc modo responsum erit ad quaestionem, an per datam curvam duci liceat superficiem generis (36), cui contingat esse omnium, quas per datam curvam duci liceat, superficierum eam cui minima sit area interclusa perimetro datâ aliâque in eadem superficie ductâ, perimetris certe quarum in xyplano projectionum altera alteri sit circumscripta; — adhibitâ equidem reservatione in notula sub No. 8. indicatâ.

Digitized by Google

At quaestio, quonam demum modo liceat arbitrarias illas functiones ex eo determinari, quod per datas duas curvas transeat superficies, — quaestio (inquam) quae fere omnium prima in superficiebus tractandis, quarum natura aequatione derivatarum 2^i ordinis partialium definita est, sub sensum cadere solet — hucusque in medio est relicta. Nec in sequentibus responsum illi conciliare conabimur. Scilicet per se patet, quaevis olim in genere methodus hujusce rei explicandae forsan fuerit inventa, perraro tamen fore ut reverâ usui sit ista methodus: et quidem eam ipsam ob caussam quod tantum abest ut per datas duas curvas quascumque duci liceat superficiem generis hoic considerati, ut maximâ sane opus sit circumspectione, quo inveniantur umquam duae curvae, quarum et naturae et positioni inter se conveniat hocce idioma. — Quae cum ita sint, re istâ in praesenti relictâ unam vel alteram quaestionem latius patentem magisque delectabilem propositaeque nobis materiei intime conjunctam in sequentibus pagellis tractabimus.

10. Quaeratur, an et quaenam sint superficies revolutionis tales, quarum in puncto unoquoque principales ambo radii curvedinis etc.

Tali superficiei (si exsistat) erit

aequatio (1),

denotantibus tunc (si axis revol. sumatur z - axis) p, q, r, s, t partiales ipsius z derivatas eas, quae aequationi superficierum revolutionis circa z - axim contingunt. Quae autem cum sit

$$z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}) = \varphi(\varrho),$$

ideoque commonstret z puncti superficiei haud pendere ab Θ (angulo radii vectoris puncti ejusdem, in xy-plano projecti, cum ipso x - axi); transformetur hac suppositione aequatio (1) secundum formulas notissimas

$$x = \varrho \cos \Theta, \quad y = \varrho \sin \Theta.$$

Quoniam z hoic functio solius ϱ putetur, ideoque

$$\frac{dz}{d\varrho} = p \cos \Theta + q \sin \Theta,$$

$$\frac{dz}{d\Theta} = 0 = q\varrho \cos \Theta - p\varrho \sin \Theta;$$

erunt

$$(t) \ldots . \quad p = \frac{dz}{d\varrho} \cos \Theta, \quad q = \frac{dz}{d\varrho} \sin \Theta.$$

Tum quoniam

$$\frac{dp}{d\varrho} = r \cos \Theta + s \sin \Theta, \quad \frac{dp}{d\Theta} = s\varrho \cos \Theta - r\varrho \sin \Theta,$$

ideoque

$$r = \frac{dp}{d\varrho}\cos\Theta - \frac{dp}{d\Theta}\frac{\sin\Theta}{\varrho},\quad s = \frac{dp}{d\varrho}\sin\Theta + \frac{dp}{d\Theta}\frac{\cos\Theta}{\varrho};$$

erunt secund. (t):

$$r = \frac{d^2z}{d\varrho^2}\cos^2\Theta + \frac{dz}{d\varrho}\frac{\sin^2\Theta}{\varrho},$$
$$s = \frac{d^2z}{d\varrho^2}\sin\Theta\cos\Theta - \frac{dz}{d\varrho}\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\varrho};$$

eodemque modo habebitur

$$t = \frac{d^2z}{d\varrho^2}\sin^2\Theta + \frac{dz}{d\varrho}\frac{\cos^2\Theta}{\varrho}.$$

Quibus impositis (1) abit in

$$\frac{d^2z}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dz}{d\varrho}\left(1 + \frac{dz^2}{d\varrho^2}\right) = 0, \quad \ldots\ldots (37)$$

seu, ζ denotante breviter ipsam $\frac{dz}{d\varrho}$,

$$\varrho d\zeta + \zeta(1+\zeta^2)d\varrho = 0;$$

unde integrale

$$(\varrho^2 - a^2)\zeta^2 = a^2,$$

seu

$$\frac{dz}{d\varrho} = \pm\frac{a}{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}, \quad \ldots\ldots (38)$$

denotante igitur const. arbitr. a ipsum ϱ punctorum, in quibus planum tangens superficiei (seu linea tangens Meridiani ipsius) normale sit ad planum projectionis ($z = 0$); tum

$$z = a\log b\,(\varrho \pm \sqrt{\varrho^2 - a^2}),$$

seu, quod idem valet,

$$z = c + a\log\left(\frac{\varrho \pm \sqrt{\varrho^2 - a^2}}{a}\right) \ldots, \quad (39)$$

denotantibus heic a et c in genere ϱ et z punctorum modo commemoratorum.

Est quidem Catenariae — y - axi horizontali atque per punctum curvae infimum ducto, x - axi positivo sursum verticale — aequatio notissima

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{m}{\sqrt{2mx + x^2}},$$

ideoque, posità origine alicubi in rectâ ($x = -m$) seu mutatâ x in $x - m$,

Digitized by Google

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{m}{\sqrt{x^2 - m^2}},$$

atque

$$y = n + m \log \left(\frac{x \pm \sqrt{x^2 - m^2}}{m}\right), \quad \ldots \ldots \ (u)$$

n et m denotantibus ipsas y et x puncti ordinatae x minimae.

Itaque collatis ex aequationibus (39) et (u) facillimo utique negotio perspicitur propositae quaestioni, an superficiem revolutionis (circa datum axim) talem, cujus in puncto unoquoque principales ambo etc., duci liceat per data duo puncta seu (quod heic idem valet) per datos duos circulos

$$(40) \ldots \ldots \begin{pmatrix} z = h \\ \varrho = R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z = \mathfrak{H} \\ \varrho = \mathfrak{R} \end{pmatrix}$$

(axi revol. sumto z - axi), hoc modo esse respondendum: Quo ducatur meridianus illius, Catenariam construi oportet, cujus constantibus a et c — i. e. ϱ et z punctorum axi revol. proximorum — fiat satis conditonibus

$$(41) \ldots \ldots \begin{cases} h = c + a \log \left(\frac{R \pm \sqrt{R^2 - a^2}}{a}\right) \\ \mathfrak{H} = c + a \log \left(\frac{\mathfrak{R} \pm \sqrt{\mathfrak{R}^2 - a^2}}{a}\right). \end{cases}$$

Quod si quando fieri nequeat; ex eo indicatur, nullum per datos illos circulos duci licere hujusce generis superficiem revolutionis circa datum axim. *)

Si ex. gr. perimetri datae forent

$$\begin{pmatrix} z = 0 \\ \varrho = 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z = 1 \\ 2\varrho = e + \frac{1}{e} \end{pmatrix},$$

aequationum (41) prior daret

$$0 = c + a \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}\right) **)$$

---

*) In doctrina illa maximorum minimorumque idem Theorema hoc fere modo exprimi decet: Quo ducatur meridianus superficiei revol. circa datum axim, quae in omnibus [nec solis — uti antea fuit pronuntiatum hoc Theorema — superficiebus revol.], quas per datas duas perimetros (40) duci liceat, superficiebus minimam habeat aream hisce limitibus definitam; Catenariam construi oportet etc. (ut supra). Quod si quando fieri nequeat; ex eo indicatur, minimam quam per datas perimetros duci liceat superficiem non esse revolutionis circa datum axim. — Scil. apponatur praeterea necesse est reservatio in notula sub No. 8. exposita. —

**) Scilicet, ut patet, solo signo superiori hoc loco opus erit.

unde aequatio (39) superficiei abit in

$$\left.\begin{aligned} z &= a\log\left(\frac{\varrho+\sqrt{\varrho^2-a^2}}{1+\sqrt{1-a^2}}\right) \\ \text{seu} \\ 2\varrho &= (1+\sqrt{1-a^2})e^{\frac{z}{a}}+(1-\sqrt{1-a^2})e^{-\frac{z}{a}}, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (v)$$

determinandâ a ex

$$e+\frac{1}{e}=(1+\sqrt{1-a^2})e^{\frac{1}{a}}+(1-\sqrt{1-a^2})e^{-\frac{1}{a}};$$

cui cum fiat satis assumendo $a=1$, concludi licet conditioni, de qua heic quaeritur, satisfieri superficie illâ

$$\frac{e^z+e^{-z}}{2}=\varrho\,; \ldots\ldots (w)$$

quod equidem exemplo eodem aliter tractando in Nr. 8. supra fuit inventum *).

De caetero ex antecedentibus patet, in superficiebus revolutionis in genere unicam, cujus in puncto unoquoque principales ambo radii curvedinis aequales sint signo-

---

*) Quam sit necessaria reservatio illa in notulis praecedentibus indicata, vel ex hoc solo exemplo (si placet) satis liquet. Scilicet si supervacanea esset; pronuntiari liceret ex gr. aream superficiei (w) perimetris

$$\left(\begin{matrix} z=1 \\ 2\varrho=e+\frac{1}{e} \end{matrix}\right)\left(\begin{matrix} z=-1 \\ 2\varrho=e+\frac{1}{e} \end{matrix}\right)$$

determinatam minorem esse areâ convexâ cylindri recti, cujus axis (et qua situm et qua longitudinem) est recta per centra circulorum modo commemoratorum ducta atque radius baseos r pars quaelibet radii ϱ, additis areis annulorum circulariorum extra bases cylindri ambas restantium; quod quidem evidenter absurdum.

Altera equidem est

$$2\,.\,2\pi\int_1^{\frac{1}{2}(e+\frac{1}{e})}\varrho d\varrho\sqrt{1+(\frac{dz}{d\varrho})^2}=4\pi\int_1^{\frac{1}{2}(e+\frac{1}{e})}\frac{\varrho^2 d\varrho}{\sqrt{\varrho^2-1}}=2\pi.[1+\tfrac{1}{4}(e^2-\frac{1}{e^2})]\,;$$

altera autem est

$$2\pi\,.\,[2r-r^2+\tfrac{1}{4}(e+\frac{1}{e})^2]\,;$$

quae ut ex. gr. quantitate $\pi(\frac{1}{4}-\frac{1}{e^2})$ minor sit priori, sufficit sumi $r=0{,}2$ circiter.

que contrario, eam esse qua fiat satis aequationi (39), ad axim revol. ut z - axim relatae *).

11. Quaeratur denique, an et quaenam sint superficies, quae rectâ ad planum quoddam parallele motâ generantur, tales quarum in puncto unoquoque principales ambo etc. — Tali superficiei (si existat) erit

aequatio (1),

denotantibus — si planum dirigens sumatur xy planum — p, q, r, s, t partiales ipsius z derivatas eas, quae in aequatione hujus generis superficierum generali occurrunt. Quae autem cum sit **)

$$q^2r - 2pqs + p^2t = 0; \quad \ldots . \quad (42)$$

erit, eliminatâ t, aequatio quaesitae superficiei ista:

$$2pqs - (q^2 - p^2)r = 0,$$

seu (positâ y const.)

$$2pqdq - (q^2 - p^2)dp = 0,$$

cujus equidem homogeneae aequationis integrale hoc est:

$$p^2 + q^2 = p \,.\, \psi(y). \quad \ldots . \quad (43)$$

At perfecte non est arbitraria ista ψ. Eliminatâ enim r ex (44) et (1) quaesitae erit superficiei

$$2pqs + (q^2 - p\ )t = 0,$$

seu (positâ x const.)

$$2pqdp + (q^2 - p^2)dq = 0,$$

cujus integrale

$$p^2 + q^2 = q \,.\, \varphi(x). \quad \ldots . \quad (44)$$

Quae jam (43) et (44), quoniam eandem repraesentabunt superficiem, combinatae dant illi

$$p = \frac{\psi\varphi^2}{\varphi^2 + \psi^2},\ q = \frac{\varphi\psi^2}{\varphi^2 + \psi^2};$$

---

*) Et quidem manifestum est, si — valoribus ex arbitrio datis ipsis a et c — constructa fuerit superficies (39), hanc esse omnium, quas per duas in eâdem ex arbitrio ductas perimetros duci liceat, superficierum eam cui minima sit area hisce perimetris determinata, — perimetris certe, quarum in plano ad axim revol. normali projectionum altera alteri sit circumscripta: — debitâ ratione habitâ reservationis jam pluries commemoratae.

**) Vid. ex. gr. Leç. du Calc. Diff. p. Moigno p. 446; conf. Monge appl. de l'Anal. à la Géom. (1809) pag. 64. —

Digitized by Google

ideoque, ut sit $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$, erit

$$\frac{\varphi'}{\varphi^2} = -\frac{\psi'}{\psi^2},$$

quae tamen, nullâ exsistente relatione ipsarum x et y, his indefinitis aliter obtineri nequit, nisi sit

$$\frac{\varphi'}{\varphi^2} = \text{const. arbitr.} \frac{1}{a} = -\frac{\psi'}{\psi^2}.$$

Integrando habebitur

$$\varphi = \frac{-a}{x-b}, \ \psi = \frac{a}{y-c};$$

unde superficiei

$$p = \frac{a(y-c)}{(x-b)^2+(y-c)^2}, \ q = \frac{-a(x-b)}{(x-b)^2+(y-c)^2},$$
$$dz = \frac{a(y-c)dx - a(x-b)dy}{(x-b)^2+(y-c)^2}$$

atque integrando, quoniam

$$\int \frac{a(y-c)}{(x-b)^2+(y-c)^2}\,dx = \varpi(y) + a\,.\,\text{Arc}\left(\text{Tang} = \frac{x-b}{y-c}\right),$$

habetur

$$z - d = a\,.\,\text{Arc}\left(\text{Tang} = \frac{x-b}{y-c}\right); \quad \ldots\ldots \quad (45)$$

quae quidem, ut liquet, superficiem denotat generis heic considerati, quippe cujus aequationem generalem (ut constat) ita licet describi

$$x = y\varphi(z) + \psi(z);$$

nostra vero dat

$$x = (y-c)\,\text{Tang}\left(\frac{z-d}{a}\right) + b. \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

Ex aequ. novissima, quoniam quattuor continet constantes arbitrarias, patet in genere inveniri licere superficiem generis heic considerati, quae per data quattuor puncta transeat. — Cujus ut breviter investigetur natura, haec fere notentur.

Comparatis inter se intersectionibus superficiei cum xy plano atque plano $(y = 2c)$, nimirum

$$\left.\begin{aligned} z - d &= a\,.\,\text{Arc}\left(\text{Tang} = \frac{b-x}{c}\right) \\ z - d &= a\,.\,\text{Arc}\left(\text{Tang} = \frac{x-b}{c}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (47)$$

invenitur esse z alterius, pro x quacumque ξ, aequalem ipsi z alterius pro $x = 2b - \xi$. Ejusdem igitur sunt naturae hae intersectiones at (ut ita dicam) directionis reciprocae. Itaque invento — determinatis in problemate quodam singulari punctis, per quae transire lubeat superficiem — valore constantium a, b, c, d atque constructâ in xz plano curva illâ Helice*) $\left(\begin{smallmatrix}47\\ \text{prior.}\end{smallmatrix}\right)$; curvam $\left(\begin{smallmatrix}47\\ \text{poster.}\end{smallmatrix}\right)$ in plano $(y = 2c)$ facillimo negotio construi licebit; quo facto superficies generabitur motâ generatrici super has ambas, ita ut assidue ad xy planum parallela maneat: atque habebitur superficies illa „Heliçoide (gauche) à plan directeur“**): quae igitur superficierum, rectâ ad planum quoddam parallele motâ generatarum, unica est cui contingant in puncto unoquoque principales ambo radii curvedinis aequales signoque contrario***). — Observes tandem, si quando $a = 0$, superficiem in planum $(z = d)$ abire.

At — numne ista in omnibus superficiebus rectâ generatis (surfaces reglées) sola est, cui in puncto unoquoque contingant aequales signique contrarii principales ambo radii curvedinis? — Mr. Catalan primus et deinde Mr. Wantzel (ut in prooemio ex Ephemerida illa „l'Institut“ citavimus) suâ uterque viâ responsum huic quaestioni dederunt: quod ut quamprimum promulgatum facere iis placeat, est quod vehementer optamus.

---

*) Vid. ex. gr. Moigno Calc. Diff. pag. 294.

**) Vid. ex. gr. Moigno ibid., Leroy Géom. déscript. No. 616 etc. — Patet, axem directricis $\left(\begin{smallmatrix}47\\ \text{prioris}\end{smallmatrix}\right)$ esse $\left\{\begin{smallmatrix}y=c\\ x=b\end{smallmatrix}\right\}$, scil. intersectionem superficiei cum plano $(y = c)$ aut plano $(x = b)$.

***) Atque sumtis ita 4 punctis, ut per ea duci liceat superficiem hujusce generis; pars illius quaelibet perimetro circumscripta omnium per eandem perimetrum transeuntium superficierum minimam ista praebebit aream, nimirum

$$\int\int dxdy \sqrt{1 + \frac{a^2}{(x-b)^2 + (y-c)^2}},$$

limitibus a perimetro modo dicta datis: — (debita ratione reservationis nostrae habitâ). — Denique superficierum generis nunc considerati aliam non esse, cui contingat esse „superficiem minimam,“ patet.

XXXIII.

Ueber die Zerlegung der bestimmten Integrale in andere von kleineren Integrationsintervallen.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

---

§. 1.

Es seien a und b die Grenzen eines bestimmten Integrales, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda, \mu$ eine Reihe von Grössen, welche sämmtlich zwischen a und b liegen und von denen jede folgende grösser als die vorhergehende ist, dann hat man

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \ldots + \int_\lambda^\mu f(x)dx + \int_\mu^b f(x)dx.$$

Von der Richtigkeit dieses sehr bekannten Satzes überzeugt man sich sogleich durch die Bemerkung, dass ein bestimmtes Integral, wie

$$\int_a^b f(x)dx,$$

nichts anderes ist, als die Fläche, welche von den zu den Abscissen $x = a$, $x = b$ gehörenden rechtwinkligen Ordinaten, dem Stücke $b - a$ der Abscissenachse und der Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, begränzt wird.

Der oben ausgesprochene Satz kann oft dazu benutzt werden, die Werthe bestimmter Integrale aufzufinden, sobald die Mittelgrössen $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu$ auf eine zweckmässige, der Natur der Function $f(x)$ entsprechende Weise gewählt werden. Einige sehr gefügige Integrale dieser Art mögen dies darthun.

§. 2.

Es sei folgendes Integral gegeben:

$$\int_0^\infty f(x) \operatorname{Arctan} x \cdot \frac{dx}{x}.$$

Digitized by Google

Theilen wir das Intervall 0 bis ∞ in zwei andere von 0 bis 1 und von da bis ∞, so ist unser Integral auch

$$= \int_0^1 f(x) \frac{\text{Arctan } x}{x} dx + \int_1^\infty f(x) \frac{\text{Arctan } x}{x} dx.$$

Setzen wir im ersten Integrale $x = z$, im zweiten $x = \frac{1}{z}$, so ändert jenes seinen Werth nicht, für dieses aber wird $\frac{dx}{x} = -\frac{dz}{z}$, und wenn x die Werthe 1 und ∞ angenommen hat, ist $z = 1$ und $z = 0$ geworden (weil aus $x = \frac{1}{z}$ folgt $z = \frac{1}{x}$). Wollen wir aber die Gränzen 1 und 0 vertauschen, also 1 zur oberen Gränze machen, so haben wir dem Integral das entgegengesetzte Zeichen zu geben, wodurch es wieder positiv wird. Es ist also:

$$\int_0^\infty f(x) \frac{\text{Arctan } x}{x} dx$$

$$= \int_0^1 f(z) \frac{\text{Arctan } z}{z} dz + \int_0^1 f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{\text{Arctan } \frac{1}{z}}{z} dz.$$

Beide Integrale auf der rechten Seite können jetzt wegen der gleichen Gränzen in eines zusammengezogen werden, und dies gäbe eine sehr gute Reduction, wenn noch $f(\frac{1}{z}) = f(z)$ wäre, weil man dann $f(z)\frac{dz}{z}$ als gemeinschaftlichen Factor der beiden Kreisbogen absondern könnte.

Der Bedingung $f(\frac{1}{z}) = f(z)$ kann aber sehr leicht genügt werden, wenn man $f(z) = \varphi(z + \frac{1}{z})$ setzt, wo φ eine beliebige Function bedeutet; es ist dann durch Vereinigung der beiden Integrale

$$\int_0^\infty \varphi\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{\text{Arctan } x}{x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[\text{Arctan } z + \text{Arctan } \frac{1}{z}\right] \varphi\left(z + \frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z}.$$

Nun gilt aber für jedes z die Formel:

$$\text{Arctan } z + \text{Arctan } \frac{1}{z} = \text{Arctan } \infty = \frac{\pi}{2}.$$

Dadurch verwandelt sich die obige Gleichung in die folgende, in welcher wieder x für z gesetzt worden ist:

$$\int_0^\infty \text{Arctan } x \cdot \varphi\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \varphi\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x} \ldots . (1)$$

Durch eine ganz analoge Betrachtung wird man auch folgende Gleichung finden:

$$\int_0^\infty \varphi(x+\tfrac{1}{x})\frac{lx}{x}\,dx = \int_0^1 [lz + l\tfrac{1}{z}]\,\varphi(z+\tfrac{1}{z})\frac{dz}{z},$$

d. h.

$$\int_0^\infty lx \,.\, \varphi(x+\tfrac{1}{x})\frac{dx}{x} = 0 \ldots . (2)$$

weil $lz + l\frac{1}{z} = 0$ ist.

Jede der beiden Gleichungen (1) und (2) kann zur Auffindung bestimmter Integrale von angebbaren Werthen dienen, die erste, wenn man die Function φ so wählt, dass sich die Integration auf der rechten Seite durch die gewöhnlichen Mittel bewerkstelligen lässt, die zweite dadurch, dass man in ihr eine neue Veränderliche für x einführt.

§. 3.

Nimmt man für die Anwendung der Formel (1)

$$\varphi(x+\tfrac{1}{x}) = (\frac{1}{x+\frac{1}{x}})^\mu = \frac{x^\mu}{(x^2+1)^\mu},$$

so wird

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{(1+x^2)^\mu}\,\text{Arctan}\,x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{x^{\mu-1}dx}{(1+x^2)^\mu} \ldots . (3)$$

wobei das Integral ein rein algebraisches für jedes rationale μ ausführbares ist. Z. B. für $\mu = 1$, $\mu = 2$:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Arctan}\,x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi^2}{8} \ldots . (4)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,\text{Arctan}\,x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{8} \ldots . (5)$$

Setzt man

$$\varphi(x+\tfrac{1}{x}) = \frac{1}{x^\mu+\frac{1}{x^\mu}} = \frac{x^\mu}{1+x^{2\mu}},$$

so ergiebt sich

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{1+x^{2\mu}}\,\text{Artan}\,x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{x^{\mu-1}\,dx}{1+x^{2\mu}} \ldots . (6)$$

wobei es ebenfalls nicht schwer ist, den Werth des Integrales rechts

Digitized by Google

nach den gewöhnlichen Regeln zu bestimmen. Man findet z. B. für die Fälle $\mu = \frac{1}{2}$ und $\mu = \frac{1}{3}$:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Arctan } x}{1+x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \ldots (7)$$

$$\int_0^\infty \frac{\text{Arctan } x\, dx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^4}} = \frac{3\pi^2}{8} \ldots (8)$$

Nehmen wir für die Anwendung des Theoremes (2)

$$\varphi\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x + \frac{1}{x}}\right)^{2\mu},$$

so ist wieder

$$\int_0^\infty \frac{lx}{x} \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^{2\mu+1} dx = 0.$$

Von diesem Integrale können wir uns zu einem allgemeineren von ähnlicher Form erheben, wenn wir für x eine neue Veränderliche $\frac{x}{\alpha}$ einführen, wodurch sich die Gränzen nicht ändern; es muss dann auch sein:

$$\alpha^{2\mu+1} \int_0^\infty \frac{l\frac{x}{\alpha}}{x} \left(\frac{x}{\alpha^2+x^2}\right)^{2\mu+1} dx = 0$$

oder, wenn wir den Factor $\alpha^{2\mu+1}$ weglassen und $lx - l\alpha$ für $l\frac{x}{\alpha}$ schreiben,

$$\int_0^\infty \frac{lx}{x} \left(\frac{x}{\alpha^2+x^2}\right)^{2\mu+1} dx = l\alpha \int_0^\infty \frac{1}{x} \left(\frac{x}{\alpha^2+x^2}\right)^{2\mu+1} dx \ldots (9)$$

Es handelt sich jetzt noch um die Ausführung des Integrales auf der rechten Seite. Es wird aber für $x = \alpha\sqrt{z}$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} \left(\frac{x}{\alpha^2+x^2}\right)^{2\mu+1} dx = \frac{1}{2\alpha^{2\mu+1}} \int_0^\infty \frac{z^{\mu+\frac{1}{2}-1}}{(1+z)^{2\mu+1}}\, dz$$

und unter dieser Form kann man den Werth des Integrales nach der bekannten Formel:

$$\int_0^\infty \frac{z^{p-1} dz}{(1+z)^{p+q}} = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

für $p = q = \mu + \frac{1}{2}$ leicht bestimmen. Führt man diesen in die Gleichung (9) ein, so ergiebt sich:

$$\int_0^\infty \frac{lx}{x} \left(\frac{x}{\alpha^2+x^2}\right)^{2\mu+1} dx = \frac{l\alpha}{2\alpha^{2\mu+1}} \cdot \frac{[\Gamma(\mu+\frac{1}{2})]^2}{\Gamma(2\mu+1)} \ldots (10)$$

Digitized by Google

Ein Paar bemerkenswerthe spezielle Fälle dieser Formel liefern die Annahmen $\mu = n - \frac{1}{2}$ und $\mu = n$, wobei n eine positive ganze Zahl bedeutet. Vermöge der Gleichungen

$$\Gamma(m) = 1.2.3....(m-1),$$

$$\Gamma(m+\tfrac{1}{2}) = \frac{1.3.5.....(2m-1)}{2^m}\sqrt{\pi},$$

welche für jedes ganze positive m gelten, erhält man nämlich

$$\int_0^\infty \frac{lx}{x}\left(\frac{x}{\alpha^2+x^2}\right)^{2n} dx = \frac{1.2.3....(n-1)}{n(n+1)....(2n-1)} \cdot \frac{l\alpha}{2\alpha^{2n}} ....(11)$$

$$\int_0^\infty \frac{lx}{x}\left(\frac{x}{\alpha^2+x^2}\right)^{2n+1} dx = \frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....(2n)} \cdot \frac{\pi l\alpha}{2\alpha^{2n+1}} ....(12)$$

Für $\mu = 0$ erhält man unmittelbar aus (10)

$$\int_0^\infty \frac{lx}{x} \cdot \frac{x}{\alpha^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{l\alpha}{\alpha} ....(13)$$

Zu bemerken ist noch, dass die Formeln (10) bis (13) bloss für positive α, welche weder $= 0$ noch unendlich gross genommen werden dürfen, Gültigkeit besitzen. Denn die Herleitung dieser Integrale beruht auf der Voraussetzung, dass die Gränzen des früher betrachteten Integrales

$$\int_0^\infty \frac{lx}{x}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^{2\mu+1} dx$$

sich nicht ändern, wenn man $\frac{x}{\alpha}$ für x setzt. Dies würde aber der Fall sein, wenn $\alpha = 0$, ∞ oder negativ genommen würde.

§. 4.

Bevor wir weiter gehen, mögen noch ein Paar Anwendungen der Formeln (12) und (13) Platz finden.

Man setze in (12) $n = 0, 1, 2, 3$ etc., multiplicire die entstehenden Glieder mit β, $\frac{1}{3}\beta^3$, $\frac{1}{5}\beta^5$ etc. und addire Alles, so kommt:

$$\int_0^\infty \frac{lx}{x}\left[\frac{\beta\alpha}{\alpha^2+x^2} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\beta x}{\alpha^2+x^2}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{\beta x}{\alpha^2+x^2}\right)^5 + ...\right] dx$$

$$= x l\alpha\left[\frac{\beta}{2\alpha} + \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{3}\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^3 + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5}\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^5 + ...\right].$$

Bevor von einer Summirung dieser Reihen die Rede sein kann, müssen wir wissen, in welchen Fällen dieselben convergiren. Dies ist auf der rechten Seite der Fall, wenn der absolute Werth des Quotienten $\frac{\beta}{2\alpha}$ die Einheit nicht übersteigt, oder wenn $2\alpha \geqq \beta$ ist. In diesem Falle ist die Summe der Reihe $=$ Arcsin $\frac{\beta}{2\alpha}$. Ferner

Digitized by Google

haben wir für jedes α und x, $\alpha^2+x^2>2\alpha x$, weil $\alpha^2-2\alpha x+x^2$, als Quadrat von $\alpha-x$, immer eine positive Grösse sein muss. Da wir nun schon die Bedingung $2\alpha \geqq \beta$ gefunden haben, so ist um so mehr $\alpha^2+x^2>\beta x$, folglich $\frac{\beta x}{\alpha^2+x^2}$ ein ächter Bruch, für jeden beliebigen Werth von x. In diesem Falle convergirt die Reihe unter dem Integralzeichen für alle Werthe, welche x innerhalb des Intervalles 0 bis ∞ annehmen kann, und hat zur Summe den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2} l \frac{1+\frac{\beta x}{\alpha^2+x^2}}{1-\frac{\beta x}{\alpha^2+x^2}} = \tfrac{1}{2} l \frac{\alpha^2+x^2+\beta x}{\alpha^2+x^2-\beta x}.$$

Führen wir diese Summe nebst der vorhergehenden in die Gleichung (14) ein, so ergiebt sich:

$$\int_0^\infty \frac{lx}{x}\, l \frac{\alpha^2+\beta x+x^2}{\alpha^2-\beta x+x^2}\, dx = 2\pi l\alpha \,.\, \text{Arcsin}\frac{\beta}{2\alpha},\ 2\alpha \geqq \beta.$$

Setzen wir noch 2β für β, wo nun $\alpha \geqq \beta$ sein muss, so ist auch

$$\int_0^\infty \frac{lx}{x}\, l \frac{\alpha^2+2\beta x+x^2}{\alpha^2-2\beta x+x^2}\, dx = 2\pi l\alpha \,.\, \text{Arctan}\frac{\beta}{\alpha},\ \alpha \geqq \beta. \quad (15)$$

Ein ähnliches Resultat ergiebt sich aus Formel (13) auf folgende Weise. Man nehme α veränderlich $= u$, multiplicire beiderseits mit $2u\,du$ und integrire zwischen den Gränzen $u=b$, $u=a$, so ist

$$\int_a^b 2u\,du \int_0^\infty \frac{lx}{u^2+x^2}\, dx = \pi \int_a^b lu\, du. \quad (16)$$

Hier kann man auf der linken Seite die Ordnung der Integrationen umkehren und zuerst nach u integriren, wodurch man erhält:

$$\int_0^\infty lx\,dx \int_a^b \frac{2u\,du}{x^2+u^2} = \int_0^\infty lx\,dx \,.\, l\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}.$$

Auf der rechten Seite von (16) ist

$$\int lu\,du = u\,lu - u = l(u^u) - u,$$

folglich

$$\int_a^b lu\,du = l\frac{b^b}{a^a} - b + a.$$

Führen wir diese Ausdrücke in die Gleichung (16) ein, so erscheint das Resultat:

$$\int_0^\infty lx \,.\, l\frac{b^2+x^2}{a^2+x^2}\, dx = \pi(a-b) + \pi l\frac{b^b}{a^a}. \quad (17)$$

Die Grössen a und b sind nur in so weit beliebig, als sie weder $=0$, ∞ noch negativ genommen werden dürfen. Denn a und b waren die Gränzwerthe für α, d. h. für das frühere α; daher gelten die Determinationen für α auch für a und b.

§. 5.

Die Zerlegung eines bestimmten Integrals in andere von kleineren Intervallen ist auch mit grossem Vortheil auf Integrale von der Form

$$\int_0^\infty f(\sin x,\ \cos x)\frac{dx}{x}$$

anwendbar. Man denke sich nämlich die obere Gränze als ein unendlich hohes Vielfache von π, und zerlege demgemäss das Integral in eine unendliche Reihe anderer, welche sämmtlich nach dem Intervall $\frac{\pi}{2}$ fortschreiten. Es wird dann, $f(\sin x,\ \cos x)$ kurz mit $f(x)$ bezeichnet,

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty f(x)\frac{dx}{x}\\ =&\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\frac{dx}{x}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\frac{dx}{x}+\int_{\pi}^{(1+\frac{1}{2})\pi} f(x)\frac{dx}{x}+\int_{(1+\frac{1}{2})\pi}^{2\pi} f(x)\frac{dx}{x}\\ &+\ldots.\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

Ein Paar auf einander folgende Glieder dieser Reihe mit dem allgemeinen Index r würden sein:

$$\int_{(r-1+\frac{1}{2})\pi}^{r\pi} f(x)\frac{dx}{x}\ \text{und}\int_{r\pi}^{(r+\frac{1}{2})\pi} f(x)\frac{dx}{x}.$$

Im ersten setze man $x=r\pi-z$, im zweiten $x=r\pi+z$, so werden dieselben

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(r\pi-z)\frac{dz}{r\pi-z},\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\pi+z)\frac{dz}{r\pi+z}.$$

Will man im ersten dieser Integrale die Gränzen vertauschen, so hat man demselben das entgegengesetzte Vorzeichen zu geben; dadurch wird es wieder positiv und stellt sich mit dem zweiten unter die gemeinschaftliche Form

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(r\pi\pm z)}{r\pi\pm z}\,dz.$$

Wenden wir diese Transformation auf die Gleichung (18) an, indem wir r der Reihe nach $=1, 2, 3$, u. s. w. nehmen und im ersten Inte-

Digitized by Google

grale z für x setzen, so erhalten sämmtliche Integrale auf der rechten Seite die gleichen Gränzen 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und können daher in ein einziges zusammengezogen werden, nämlich in das folgende:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\infty} f(x)\frac{dx}{x}\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{f(z)}{z}+\frac{f(\pi-z)}{\pi-z}+\frac{f(\pi+z)}{\pi+z}+\frac{f(2\pi-z)}{2\pi-z}+\ldots.\right]dz.\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

Es kommt jetzt auf die besondere Beschaffenheit der Funktion $f(x)$ an, wenn die unter dem Integralzeichen eingeklammerte Reihe summirbar sein soll. Dass hierbei die Funktion immer noch ziemlich allgemein bleiben kann, wird man sogleich sehen.

§. 6.

Man nehme erstlich $f(x)=\sin x\,.\,\varphi(\sin^2 x,\ \cos^2 x)$, wobei φ eine neue beliebige Funktion bedeutet. Da dieselbe nur die Quadrate von sin. und cos. enthält, so ändert sie ihren Werth nicht, wenn man $\pi-z$, $\pi+z$, $2\pi+z$ u. s. w. für x setzt. Die Zeichenfolge in der Reihe (19) hängt jetzt bloss noch von $\sin x$ ab, und da dieser positiv von 0 bis π, negativ von π bis 2π und so abwechselnd ist, so wird das erste Paar Glieder jener Reihe positiv, das zweite Paar negativ, und so paarweis weiter. Wir haben daher

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\sin x\,\varphi(\sin^2 x,\ \cos^2 x)\frac{dx}{x}\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{z}+\frac{1}{\pi-z}-\frac{1}{\pi+z}-\frac{1}{2\pi-z}+\ldots..\right]\sin z\,\varphi(\sin^2 z,\ \cos^2 z)dz.\end{aligned}$$

Die Summe der eingeklammerten Reihe ist aber nach einem bekannten Satze $=\frac{1}{\sin z}$, folglich wird

$$\int_0^{\infty}\sin x\,.\,\varphi(\sin^2 x,\ \cos^2 x)\frac{dx}{x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(\sin^2 z,\ \cos^2 z)dz.\quad(20)$$

Da das Integral auf der rechten Seite viel einfacher als jenes auf der linken ist, so wird es leicht sein, die Funktion φ so zu wählen, dass man den Werth des Integrales rechts angeben kann.

Es sei z. B.

$$\varphi(\sin^2 x,\ \cos^2 x)=(\sin^2 x)^m\,.\,(\cos^2 x)^n,$$

so ist die rechte Seite

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m} z\,.\,\cos^{2n} z\,dz.$$

Für $\sin z = x$ geht dieses Integral in das folgende über:

$$\int_0^1 x^{2m}(1-x^2)^{\frac{2n-1}{2}}\,dx$$

und dieses verwandelt sich für $x^2 = y$ in

$$\tfrac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{2m-1}{2}}\,(1-y)^{\frac{2n-1}{2}}\,dy,$$

dessen Werth sich nach der bekannten Formel

$$\int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}\,dy = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

leicht angeben lässt, wenn man $p = m + \frac{1}{2}$, $q = n + \frac{1}{2}$ nimmt. Wir haben daher

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}z \,.\, \cos^{2n}z\,dz = \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+n+1)},$$

und

$$\int_0^{\infty} \sin^{2m+1}x \,.\, \cos^{2n}x \,.\, \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+n+1)}. \quad (21)$$

Für ganze positive m und n erhält man hieraus

$$\int_0^{\infty} \sin^{2m+1}x.\cos^{2n}x.\frac{dx}{x} = \frac{1.3.5....(2m-1).1.3.5....(2n-1)}{2.4.6.....(2m+2n)}.\frac{\pi}{2}. \quad (22)$$

Für $n = 0$ scheint die Formel unbrauchbar zu sein. Man erhält für diesen Fall unmittelbar aus (21):

$$\int_0^{\infty} \sin^{2m+1}x \,.\, \frac{dx}{x} = \frac{1.3.5....(2m-1)}{2.4.6....(2m)}\,.\,\frac{\pi}{2}. \quad (23)$$

Man darf die Formel (21) auch für gebrochene m und n benutzen, sobald die Nenner dieser Brüche ungerade Zahlen sind. Denn wäre im Gegentheil z. B. $m = \frac{p}{2q}$, $n = \frac{p'}{2q'}$, so würde

$$\varphi(\sin^2x,\ \cos^2x) = \sin^{\frac{p}{q}}x \,.\, \cos^{\frac{p'}{q'}}x$$

sein, und diese Funktion hat im Allgemeinen nicht mehr die Eigenschaft, ihren Werth zu behalten, wenn man $r\pi \pm z$ für x setzt, wie dies zur Aufstellung des Theoremes (20) nöthig war.

Ein anderes bemerkenswerthes Beispiel für die Anwendung des Satzes (20) liefert die Annahme:

$$\varphi(\sin^2x,\ \cos^2x) = \frac{1}{(1+k)^2 - 4k\sin^2x} = \frac{1}{1+2k\cos 2x + k^2}.$$

Digitized by Google

Auf der rechten Seite steht dann das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{1+2k\cos 2z+k^2},$$

welches für $z=\frac{x}{2}$ in das folgende übergeht:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+2k\cos x+k^2},$$

dessen Werth nach der bekannten Formel

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{Arctan} \frac{(a-b)\tan\frac{1}{2}x}{\sqrt{a^2-b^2}},\ a>b$$

gefunden werden kann. Für jedes beliebige k ist hier $1+k^2 > 2k$, folglich $a>b$, ferner $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{1-2k^2+k^4}$, wofür man $1-k^2$ oder k^2-1 setzen wird, jenachdem $k<$ oder >1 ist.

Wir erhalten zuletzt

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{1+2k\cos 2x+k^2}\cdot\frac{dx}{x} = \pm\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1-k^2} \qquad (24)$$

wobei das obere Zeichen für den Fall $k<1$ und das untere für den Fall $k>1$ gilt.

§. 7.

In dem allgemeinen Theorem (19) nehmen wir jetzt

$$f(x)=\tan x\,.\,\varphi(\sin^2 x,\ \cos^2 x).$$

Die Zeichenfolge in der dortigen Reihe richtet sich jetzt nach der tan., und da diese in jedem Quadranten ihr Vorzeichen wechselt, so ergiebt sich:

$$\int_0^{\infty} \tan x\,.\,\varphi(\sin^2 x,\ \cos^2 x)\frac{dx}{x}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{\pi-z}+\frac{1}{\pi+z}-\frac{1}{2\pi-z}+\ldots\ldots\right]\tan z\,.\,\varphi(\sin^2 z,\cos^2 z)\,dz.$$

Die Summe der eingeklammerten Reihe ist aber $=\cot z=\frac{1}{\tan z}$, folglich haben wir:

$$\int_0^{\infty} \tan x\,.\,\varphi(\sin^2 x,\ \cos^2 x)\frac{dx}{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin^2 z,\ \cos^2 z)\,dz. \qquad (25)$$

Vergleichen wir dies mit dem früher gewonnenen Resultate (20), so ergiebt sich:

$$\int_0^{\infty} \tan x\,.\,\varphi(\sin^2 x,\cos^2 x)\frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} \sin x\,.\,\varphi(\sin^2 x,\cos^2 x)\frac{dx}{x} \qquad (26)$$

so dass man also in den Gleichungen des vorigen Paragraphen, ohne sie zu stören, den Faktor $\tan x$ für $\sin x$ substituiren darf. Z. B. aus (22):

$$\int_0^\infty \sin^{2n+1}x.\cos^{2n-1}x\frac{dx}{x}=\frac{1.3.5\ldots(2m-1).1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots..(2m+2n)}.\frac{\pi}{2}. \quad (27)$$

Ebenso folgt aus

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

auch

$$\int_0^\infty \frac{\tan x}{x}dx=\frac{\pi}{2} \quad (28)$$

und aus dem Integral (24):

$$\int_0^\infty \frac{\tan x}{1+2k\cos 2x+k^2}\cdot\frac{dx}{x}=\pm\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1-k^2}. \quad (29)$$

§. 8.

Während wir bisher in der allgemeinen Reduktionsformel für f die Funktion φ einmal mit dem Faktor $\sin x$, das andere Mal mit dem Faktor $\tan x$ multiplicirt gesetzt haben, können wir auch

$$f(\sin x,\cos x)=\frac{1}{\sin x}\varphi(\sin^2x,\cos^2x) \text{ und}=\frac{1}{\tan x}\varphi(\sin^2x,\cos^2x)$$

nehmen. Die Zeichenfolgen in der Reihe (19) sind dann die nämlichen wie in den Beispielen der Paragraphen 5. und 6.; man erhält leicht

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(\sin^2x,\cos^2x)}{\sin x}.\frac{dx}{x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi(\sin^2z,\cos^2z)}{\sin^2z}dz \quad (30)$$

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(\sin^2x,\cos^2x)}{\tan x}.\frac{dx}{x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi(\sin^2z,\cos^2z)}{\tan^2z}dz$$

oder, weil $\frac{1}{\tan^2z}=\frac{1}{\sin^2z}-1$ ist,

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \cot x.\varphi(\sin^2x,\cos^2x)\frac{dx}{x}\\ =&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi(\sin^2z,\cos^2z)}{\sin^2z}dz-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(\sin^2z,\cos^2z)\,dz\end{aligned}\right\}. \quad (31)$$

Zu diesen Sätzen (30) und (31) wird man eben so leicht passende Beispiele finden, wie sie sich für das Theorem (20) früher darboten.

§. 9.

Ein anderes bemerkenswerthes Beispiel für die Anwendung der Gleichung (19) liefert die Annahme:

$$f(x) = l(\frac{1+\tan x}{1-\tan x})^2.$$

Man findet nämlich

$$f(z) = f(\pi+z) = f(2\pi+z) = f(3\pi+z),$$

$$f(\pi-z) = f(2\pi-z) = f(3\pi-z) \ldots = l(\frac{1-\tan z}{1+\tan z})^2 = -f(z),$$

mithin

$$\int_0^\infty l(\frac{1+\tan x}{1-\tan x})^2 \frac{dx}{x}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{1}{z} - \frac{1}{\pi-z} + \frac{1}{\pi+z} - \frac{1}{2\pi-z} + \ldots\ldots] \, l(\frac{1+\tan z}{1-\tan z})^2 dz$$

oder, weil die Summe der eingeklammerten Reihe $= \frac{1}{\tan z}$ ist,

$$\int_0^\infty l(\frac{1+\tan x}{1-\tan x})^2 \frac{dx}{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l(\frac{1+\tan z}{1-\tan z})^2 \frac{dz}{\tan z}. \quad (32)$$

Setzt man in dem Integrale rechts $\tan z = u$, also $z = \text{Arctan } u$, so wird $dz = \frac{du}{1+u^2}$, und wenn $z = 0$, $z = \frac{\pi}{2}$ geworden ist, hat u die Werthe 0 und ∞ angenommen. Also:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l(\frac{1+\tan z}{1-\tan z})^2 \frac{dz}{\tan z} = \int_0^\infty l(\frac{1+u}{1-u})^2 \frac{du}{u(1+u^2)}. \quad (33)$$

Wollen wir jetzt den Logarithmus in eine Reihe verwandeln, so müssen wir dieselbe so einrichten, dass sie für alle Werthe von $u = 0$ bis $u = \infty$ convergirt. Dies geschieht leicht durch die Bemerkung, dass

$$l(\frac{1+u}{1-u})^2 = l\frac{1+\frac{2u}{1+u^2}}{1-\frac{2u}{1+u^2}}$$

$$= 2[\frac{2u}{1+u^2} + \tfrac{1}{3}(\frac{2u}{1+u^2})^3 + \tfrac{1}{5}(\frac{2u}{1+u^2})^5 + \ldots]$$

ist. Denn die vorstehende Reihe convergirt immer, wenn $\frac{2u}{1+u^2}$ ein ächter Bruch, d. h. $1+u^2 > 2u$ ist, was aber für jedes belie-

bige u stattfindet. Substituiren wir diese Reihe in das Integral (33) und integriren jedes einzelne Glied, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty l\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^2 \frac{du}{u(1+u^2)}\\ =&\frac{2^2}{1}\int_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)^2}+\frac{2^4}{3}\int_0^\infty \frac{u^2du}{(1+u^2)^4}+\frac{2^6}{5}\int_0^\infty \frac{u^4du}{(1+u^2)^6}+\ldots\end{aligned}\right\}. \quad (34)$$

Ein allgemeines Glied dieser Reihe wäre, abgesehen vom Coeffizienten,

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n}du}{(1+u^2)^{2n+2}},$$

welches für $u=\sqrt{z}$ in das folgende übergeht:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{z^{n+\frac{1}{2}-1}dz}{(1+z)^{2n+2}},$$

dessen Werth sich nach der in §. 2. angeführten Formel von den Gammafunktionen angeben lässt. Derselbe ist nämlich für $p=n+\frac{1}{2}$, $p+q=2n+2$, also $q=n+\frac{3}{2}$:

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{3}{2})}{\Gamma(2n+2)}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1.3.5....(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1.3.5....(2n+1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}}{1.2.3.....(2n+1)}$$

$$=\frac{\pi}{2^{2n+2}}\cdot\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....(2n)}.$$

Für $n=0$ hat man unmittelbar

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{1}=\frac{\pi}{2^3}.$$

Substituiren wir diese Werthe für $n=0, 1, 2, 3\ldots$ in die Gleichung (34), so ergiebt sich

$$\int_0^\infty l\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^2\frac{du}{u(1+u^2)}=\pi\left\{\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{1}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\tfrac{1}{7}+\ldots\right|$$

$$=\pi\cdot\frac{\pi}{2},$$

folglich vermöge der Gleichungen (33) und (32):

$$\int_0^\infty l\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^2\frac{dx}{x}=\frac{\pi^2}{2}. \quad (35)$$

Nimmt man ähnlich

$$f(x)=l\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^2,$$

so findet sich

$$\int_0^\infty l\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^2 \frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{2}, \quad (36)$$

wie man auch mit Hülfe der Formel (23) ableiten kann, wenn man den Logarithmus in eine Reihe verwandelt und jedes einzelne Glied integrirt. Man darf hier eine solche Reihenentwickelung annehmen, weil die Reihe

$$l\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^2 = 4\{\sin x + \tfrac{1}{3}\sin^3 x + \tfrac{1}{5}\sin^5 x + \ldots\}$$

convergirt, indem sin x ein ächter Bruch ist. Wollte man dagegen in der Formel (35) für den Logarithmus die Reihe

$$4\{\tan x + \tfrac{1}{3}\tan^3 x + \tfrac{1}{5}\tan^5 x + \ldots.\}$$

setzen, so würde ein ganz falsches Resultat erscheinen, weil die Reihe nicht für alle Werthe, welche x in dem Intervalle 0 bis ∞ erhalten kann, convergirt.

Ebenso unrichtig würde es sein, den Werth des Integrales

$$\int_0^\infty \frac{\tan x}{x}\, dx$$

dadurch finden zu wollen, dass man für tan x die Reihe

$$\frac{2^2(2^2-1)}{1.2} B_1 x + \frac{2^4(2^4-1)}{1.2.3.4} B_2 x^3 + \ldots..$$

setzte und jedes einzelne Glied integrirte. Man würde finden

$$\int_0^\infty \frac{\tan x}{x}\, dx = \frac{2^2(2^2-1)}{1.2} B_1 \frac{\infty}{1} + \frac{2^4(2^4-1)}{1.2.3.4} B_2 \frac{\infty^3}{3} + \ldots.$$

d. h. $=\infty$, weil alle Glieder positiv sind. Das Resultat erweist sich, mit Formel (28) verglichen, als falsch; was daher rührt, dass jene Reihe nur dann tan x zur Summe hat, wenn x nicht $> \frac{\pi}{2}$ ist. Für $x = \frac{\pi}{2}$ divergirt sie, darüber hinaus um so mehr, während tan $(\frac{\pi}{2} + x) = -\cot x$ ist. — Wieder ein Beispiel, wie vorsichtig man beim Gebrauch unendlicher Reihen sein muss!

XXXIV.

Geometrischer Lehrsatz.

Von

Herrn L. Mossbrugger,

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

In dem Dreieck BAC (Taf. IV. Fig. 6.) halbiren die Linien BE und CD die Winkel ABC und ACB, überdies ist $BE = CD$; man soll beweisen, dass $AB = AC$, also das Dreieck BAC gleichschenklich ist *).

Setzen wir $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $DC = \beta$, $BE = \gamma$, so ist nach einem bekannten geometrischen Satze:

$$\beta^2 = \frac{ac\{a+b+c\}\{a+(c-b)\}}{(a+c)^2},$$

$$\gamma^2 = \frac{ab\{a+b+c\}\{a-(c-b)\}}{(a+b)^2}.$$

Weil nach der Voraussetzung $\beta = \gamma$, so ist, wenn wir $c-b$ mit x bezeichnen, $a+(c-b) = a+x$, $a-(c-b) = a-x$, $c = b+x$; $a+c = a+b+x$, und daher:

$$\frac{(b+x)(a+x)}{(a+b+x)^2} = \frac{b(a-x)}{(a+b)^2},$$

woraus wir die Gleichung

$$\{(a+b)^2(a+2b)+(a+b)(a+3b)x+bx^2\}x = 0 \ldots (1)$$

erhalten.

Dieser Gleichung wird Genüge geleistet

a) wenn : $x = 0$, oder $c-b = 0$;

b) „ „ $(a+b)^2(a+2b)+(a+b)(a+3b)x+bx^2 = 0$

ist. Aus a) folgt $c = b$, was zu beweisen war. Aus b) folgt, dass auch

$$bx^3+(a+b)(a+3b)x+(a+b)^2(a+2b) = 0.$$

---

*) Der Herr Verfasser des vorliegenden Aufsatzes schreibt mir bei dessen Uebersendung, dass ihm der obige Lehrsatz von Herrn Prof. Steiner zu Berlin, als derselbe ihn auf seiner letzten Schweizerreise besuchte, mit der Bemerkung mitgetheilt worden sei, dass der Beweis dieses Lehrsatzes, ungeachtet dessen scheinbarer Geringfügigkeit, doch mit einigen Schwierigkeiten verbunden sei. Herrn Professor Steiner sei aber der Lehrsatz vor zwei Jahren von Herrn Prof. Lehmus in Berlin vorgelegt worden. G.

Digitized by Google

Sind x' und x'' die Wurzeln dieser Gleichung, so ist nach einigen Reductionen:

$$x' = -(a+b) \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$x'' = -\frac{(a+b)(a+2b)}{b} \quad \ldots\ldots (3)$$

Es folgt also aus (2) nach den obigen Annahmen, dass

$$c-b = -(a+b) \text{ oder } c = -a \quad \ldots\ldots (4)$$

sei, und aus (3), dass

$$c-b = -\frac{(a+b)(a+2b)}{b} \text{ also } c = -\frac{\{(a+b)^2+ab\}}{b} \quad \ldots (5)$$

Aus (4) geht aber hervor, dass, wenn wir $AB' = BC$ machen und B' mit C verbinden, alsdann die Winkel $B'BC$ und $B'CB$ durch die Linien BE' und CD' halbiren, endlich diese bis zu ihren respectiven Durchschnittspunkten E' und D' mit CB' und BB' verlängern, auch in diesem Fall

$$BE' = CD'$$

sei.

Endlich folgt noch aus (5), dass, wenn wir zu b u. $\sqrt{(a+b)^2+ab}$ die dritte Proportionale suchen, und diese auf die Verlängerung der Linie BA von A nach B'' tragen, so dass also $AB'' = \frac{\{(a+b)^2+ab\}}{b}$ ist, alsdann B'' mit C verbinden, und die Winkel $B''BC$, $B''CB$ durch die Linien BE'' und CD'', welche AB und AC in D'' und E'' treffen, halbiren, auch in diesem Fall $BE'' = CD''$ sei.

Eine zweite mehr elementare, aber nur den einzigen verlangten Fall beweisende Deduction des Satzes ist folgende:

Wir setzen folgende geometrische Sätze als bekannt voraus:

$$BC : AB = EC : AE \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$BC : AC = BD : AD \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\text{und } BE^2 = BC \times AC - BD \times AD \quad \ldots\ldots (3)$$

$$CD^2 = BC \times AB - EC \times AE \quad \ldots\ldots (4)$$

Da nun $BE = CD$, so folgt aus (3) und (4)

$$BC \times AC - BD \times AD = BC \times AB - EC \times AE \quad \ldots (5)$$

Weil aber $AB = BD + AD$, und $AC = EC + AE$ ist, so erhalten wir leicht aus (1), (2) und (5)

$$BC \times EC + BC \times AE - BD \times AD = BC \times BD + BC \times AD - EC \times AE \quad \ldots\ldots (6)$$

$$BC \times AE = EC\,(BD + AD),$$

$$BC \times AD = BD\,(CE + AE);$$

folglich wird auch No. 6 zu:

$$BC \times EC + AD \times EC + AE \times EC = BC \times BD + AE \times BD + AD \times BD \text{ oder}$$

$$EC \times \{BC + AD + AE\} = BD \times \{BC + AD + AE\} \text{ oder}$$

$$EC = BD.$$

In den Dreiecken BEC und BDC sind daher alle Seiten gleich, mithin diese congruent, und daher $\angle ECB = \angle DBC$, folglich auch $AB = AC$, was zu beweisen war.

Digitized by Google

XXXV.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Ein geometrischer und ein arithmetischer Satz.

Von dem Herrn Professor Pross an der polytechnischen Schule zu Stuttgart.

Satz 1.

Kennt man von einem geradlinigen Dreieck den Halbmesser r des einbeschriebenen, den R des umschriebenen Kreises und den ϱ eines der äussern Berührungskreise, und setzt der Kürze wegen $\sqrt{\frac{r+4R-\varrho}{\varrho-r}}=m$, so findet man die drei Seiten des Dreiecks durch die Gleichung:

$$x^3-2m\varrho x^2+(m^2\varrho^2+r^2+4Rr)x-4m\varrho Rr=0.$$

Satz 2.

Eine decadische Zahl ist durch $10.n+a$ theilbar, wenn der Unterschied zwischen dem $n$fachen der letzten und dem $a$fachen der übrigen Ziffern durch $10.n+a$ theilbar ist; oder sie ist durch $10n-a$ theilbar, wenn die Summe aus dem $n$fachen der letzten und dem $a$fachen der übrigen Ziffern durch $10.n-a$ theilbar ist. (In beiden Fällen bezeichnet n jede beliebige ganze Zahl von 0 an und a die einfachen Ziffern von 0 bis 9.)

So ist z. B.

301 theilbar durch $43=40+3=10.4+3$, weil
$30.3-4.1=86$ durch 43 theilbar ist.

261 theilbar durch $29=30-1=3.10-1$, weil
$3.1+26.1=29$ durch 29 theilbar ist.

1157 theilbar durch $89=90-1=9.10-1$, weil
$7.9+1.115=178$ durch 89 theilbar ist.

816 theilbar durch $68=70-2=7.10-2$, weil
$7.6+2.81=204$ durch 68 theilbar ist.

Lehrsatz von den Binomialkoeffizienten.

Von dem Herrn Doctor O. Schlömilch zu Weimar.

Bezeichnet μ eine beliebige Grösse, n eine ganze positive Zahl, so ist die Summe der $(n+1)$gliedrigen Reihe

$$\frac{\mu_0 n_0}{(\mu-n)_0} - \frac{\mu_1 n_1}{(\mu-n+1)_1} + \frac{\mu_2 n_2}{(\mu-n+2)_2} - \ldots\ldots$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n}\mu_{\frac{1}{2}n}}{\mu_n} \text{ für ein gerades } n$$

und $= 0$ für ein ungerades n.

Wie lässt sich dieser Satz, der gelegentlich gefunden wurde, auf elementarem Wege beweisen?

XXXVI.

Miscellen.

Auszug aus einem Briefe des Herrn Professor Steichen an der École militaire de Belgique zu Brüssel an den Herausgeber.

J'ai lu dans le dernier No. de votre estimable Journal *) l'énoncé d'un principe général de mécanique, qui ne me paraît guères nouveau (si toutes fois j'en ai bien compris le sens), et que j'établis de la manière suivante dans mon cours de mécanique, que je professe à l'École militaire. Quand des forces appliquées à un Système quelconque de corps ne se font pas équilibre, il y aura mouvement après un temps quelconque t, et pendant l'instant suivant dt, ces forces modifieront infiniment peu les vitesses des différentes masses du système; mais ces accroissements de vitesse instantanés donneront lieu à des réactions, et l'équilibre subsiste entre les forces sollicitantes et ces forces de reaction dues à l'inertie de la matière: En effet les forces modificatrices transmettent par leur action immédiate ou par le moyen des lois de liaison des efforts, les quels, s'ils étaient pris en sens contraire, feraient équilibre aux forces proposées, puisqu'ils empêcheraient ces modifications de vitesse: mais

*) Literarischer Bericht. Nr. XII. S. 184. G.

Digitized by Google

ces efforts ainsi envisagés, sont précisement la mesure des réactions d'inertie. Donc il y a équilibre entre les forces sollicitantes et les réactions d'inertie. On voit que le principe est la généralisation naturelle d'un principe qui date de Newton, et qui est connu sous le nom d'égalité de l'action et de la réaction; l'idée de cette généralisation, je me hâte de le dire, ne m'appartient même pas; je l'ai puisée dans le cours de mécanique malheureusement trop peu répandu encore de Monsieur Poncelet; mais je pars de là pour établir ensuite toutes les autres notions de dynamique et pour montrer le moyen de mettre en équations tous les problèmes possibles; ce qui dispense du fameux principe de D'Alembert qui me paraît moins clair, moins direct, et surtout plus embarrassant dans les applications. Traduisons maintenant l'enoncé en formule. Soient P, P', P''.... les forces appliquées à de certains points A, A', A'', ... d'un système de masses m, m', m'', m'''....; v, v', v'', v'''.... les vitesses de celles-ci après le temps t, et dv, dv', dv'', dv'''.... les accroissements de vitesse instantanés engendrés par les forces données; la masse m éprouve donc de la part de ces forces un effort de pression dans le sens de v donné par l'équation $\varphi = m\frac{dv}{dt}$. En admettant une notation analogue pour les autres masses, on voit évidemment que l'équilibre doit subsister entre les forces P, P', P''.... et entre les forces $-\varphi$, $-\varphi'$, $-\varphi''$, $-\varphi'''$...., qui seraient appliquées à m, m', m'', m'''...., puisqu'ainsi les impressions éprouvées par ces masses seraient détruites par des forces égales, et opposées: donc en nommant de, de', de'', de'''.... les chemins décrits en vertu des vitesses acquises v, v'...., pendant le temps dt, on aura par le principe des vitesses virtuelles effectives:

$$Pdp+P'dp'+P''dp''+\ldots-\varphi.de-\varphi'.de'-\varphi''.de''-\varphi'''de'''\ldots\text{etc.}=0$$

ou abréviativement, et à cause de $de=vdt$, $de'=v'dt$...,

$$\Sigma.Pdp-\Sigma.m.\frac{dv}{dt}.vdt=\Sigma.Pdp-\Sigma.m.\frac{dv}{dt}.de=0,$$

équation qui exprime le principe des forces vives instantanées; qui conduit aussi par l'intégration à celui des forces vives finies, et qui se trouve aussi démontrée dejà dans le cours de Mr. Poncelet. Comme on a, en nommant Q, Q', Q''.... les poids des masses m, m', m''...., amenées à la surface terrestre, on évaluera ces dernières par les équations: $m=\frac{Q}{g}$, $m'=\frac{Q'}{g}$...., g exprimant la vitesse acquise par un grave pendant une seconde: ce qui permet d'écrire aussi:

$$0=\Sigma.Pdp-\Sigma\frac{Q}{gdt}.de.dv=\Sigma.Pdp-\frac{1}{gdt}.\Sigma.Q.dv.de,\ldots.$$

équation qui exprime sans doute l'énoncé même du principe en question: mais supposons maintenant qu'après le temps t on puisse anéantir tout-à-coup les vitesses des masses m, m', m''.... sans troubler toutefois la figure du système; dès lors on pourra lui imprimer un déplacement arbitraire, dans lequel les points d'application A, A', A''.... décrivent les chemins δp, $\delta p'$, $\delta p''$.... suivant les

lignes d'action des forces P, P', P'', P''' ...., et ceux des points d'application m, m', m'' .... des forces $-\varphi$, $-\varphi'$, $-\varphi''$, $-\varphi'''$ .... decriront aussi des chemins arbitraires δe, $\delta e'$, $\delta e''$, $\delta e'''$ .... et l'on aura encore:

$$\Sigma . P\delta p - \Sigma . \varphi . \delta e = 0, \text{ ou } \Sigma P\delta p - \frac{1}{gdt} . \Sigma . Q . dv . \delta e = 0$$

et cette équation est plus générale que celle donnée d'abord. Au reste ce-ci ne saurait en rien porter atteinte au mérite de l'ouvrage annoncé, et il n'y a sans doute pas d'inconvénient, Monsieur, de voir présenté quelques observations à cet égard.

Si à l'avenir les remarques de ma part, sur la mécanique rationnelle et appliquée, ayant quelque mérite de nouveauté peuvent faire plaisir à vos lecteurs, je prendrai la liberté de vous en communiquer plusieurs; pour le moment je me bornerai à ce qui suit. Depuis long-temps je m'étais apperçu de la faute commise par Poisson aux sujet des axes principaux et qui a été signalée dans votre journal. En effet dans la théorie générale que j'établis sur les axes principaux des corps, et qui comprend dans les consequences tous les résultats, trouvés anterieurement par Poisson, Binet et Ampère, se démontre la propriété suivante: Toutes les fois qu'un solide est pourvu d'un point fixe, situé dans l'un de ses trois plans principaux du centre; l'un des trois axes permanents de rotation en ce point est normal au plan, et les deux autres se trouvent dans ce même plan ou ils occupent une position qu'on peut calculer. Ce théorème conduit à une conclusion en effet opposée à celle de Poisson, comme on l'a remarqué. Voici un autre théorème sur cette matière, qui paraît également nouveau: Les trois axes permanents de rotation, relatifs à un point fixe quelconque d'un solide de révolution, sont l'un perpendiculaire au plan, déterminé par ce point et par l'axe de révolution, et les deux autres occupent dans ce plan une position que notre théorie permet de calculer. Dans un solide homogène de 1ère classe un point fixe quelconque (O), intérieur ou extérieur, et différent du centre d'inertie (I) est ce que je nomme un centre de radiation plane normale d'axes principaux: c'est-à-dire que tous les axes en ce point situés dans un plan normal à la ligne centrale OI sont des axes permanents de rotation du solide, et ils correspondent tous à des moments d'inertie du corps, égaux entr'eux.

Pour le moment je ne pousserai pas plus loin cette énumération. Mais si des resultats de ce genre pourront vous faire plaisir, Monsieur, et être utiles à vos lecteurs, je vous prierai de bien vouloir m'en donner avis, et dès lors je mettrai tout mon travail en ordre, et m'empresserai de vous le communiquer *). Je termine par une dernière remarque; elle se rapporte à la 3ème loi de Kepler. En admettant cette loi comme un résultat d'observation, les auteurs

*) Ich sehe mit Vergnügen diesen Mittheilungen entgegen und werde sie sehr gern in das Archiv aufnehmen, so weit es irgend der Raum gestattet. Gr.

de mécanique en concluent que la force attractive du soleil sur deux planètes de même masse et à même distance, est la même, partant que l'attraction inhérente à la matière inerte est indépendante de la nature chimique des corps attirés. Pour notre part, nous pensons qu'il vaudrait mieux renverser la thèse, et raisonner de la manière suivante: Dans la manière de mesurer les forces on peut et l'on doit déjà admettre tacitement que l'intensité d'une force évaluée en nombre, est proportionnelle à la quantité de mouvement qu'elle engendre en l'unité de temps, et qu'on a en général $\varphi = m\frac{dv}{dt}$; équation où l'on fait abstraction de la nature chimique de la masse, puisque celle-ci n'entre dans la formule que par sa quantité. Pour prouver maintenant qu'il en doit être ainsi, on a à faire voir que toutes les forces sont comparables à des poids; car l'expérience prouve que l'accélération terrestre est la même pour tous les corps que nous manions ici bas, et que par suite elle est indépendante de la nature chimique de ces corps. Donc puisque l'induction nous porte à considérer la pesanteur terrestre comme un cas particulier de la gravitation universelle, il faut qu'en général celle-ci soit indépendante de la nature des corps attirés; donc il devient évident ainsi qu'à distances égales et sur des masses égales l'action du centre attractif est la même. Mais en nommant P_1 l'accélération d'une planète placée à une distance initiale r_1, T la durée de sa revolution sydérale, a le demi-grand axe de son orbite, on a par la théorie connûe: $P_1 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{a^3}{r_1^2}$: pour une autre planète, placée à une distance initiale r'_1, on aura encore $P'_1 = \left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2 \frac{a'^3}{r_1'^2}$; partant:

$$T^2 : T'^2 = \frac{a^3}{P_1 r_1^2} : \frac{a'^3}{P'_1 . r'^2_1}.$$

Mais puisque les accélérations P_1, P'_1 sont indépendantes de la nature des masses planétaires, la loi des forces inversement proportionnelles aux quarrés des distances s'observe, et l'on aura parsuite $P'_1 . r'^2_1 = P_1 r_1^2$: partant: $T^2 : T'^2 = a^3 : a'^3$, ce qui démontre rigoureusement la troisième loi de Kepler.

Berichtigung.

Seite 240 ganz am Ende setze man kömmt statt könnte. — Auf Seite 266, Zeile 17 und 35, und auf Seite 267, Zeile 10 und 25, setze man statt der Nummern 1), 2), 3), 4) die Nummern 1., 2., 3., 4.

XXXVII.

Mittheilungen über die Construction von Tangenten, Krümmungshalbmessern und Normalen an Curven, deren Natur völlig unbekannt ist. Rectification und Quadratur der Kreisevolvente und der entwickelbaren Schraubenfläche.

Von

Herrn Wilhelm Pressel,

Ingenieur-Eleven auf der polytechnischen Schule zu Stuttgart.

Ehe ich auf die Sache selbst eingehe, glaube ich Folgendes über die allgemeinen Eigenschaften der Curven vorausschicken zu müssen.

Ich denke mir eine jede Curve zusammengesetzt aus einer Reihe von unendlich kleinen, gleich langen geradlinigen Elementen; alsdann wird bei jedem Punkte die Verlängerung des zunächstliegenden Elements die Richtung der Curve in besagtem Punkte angeben und diese Verlängerung heisst alsdann die Tangente. Man kann zur Tangente auch auf folgende Art gelangen: man zieht durch den auf der Curve angenommenen Punkt eine Anzahl Secanten, so werden auf denselben Sehnen von verschiedener Länge abgeschnitten, und man kann alsdann diejenige Secante die Tangente für den gegebenen Punkt nennen, auf welcher eine unendlich kleine Sehne abgeschnitten wird.

Denkt man sich nun eine Curve als zusammengesetzt aus unendlich vielen gleich grossen geradlinigen Elementen, so werden diese Elemente Winkel mit einander bilden, die man Contingenzwinkel nennt, und welche dazu dienen, die Krümmung der Curve in jedem beliebigen Punkte zu messen. Da nämlich die Elemente der Curve gleich lang sind, so werden im Allgemeinen die Contingenzwinkel verschieden sein, und man kann die Krümmung einer Curve in einem gegebenen Punkte dem zugehörigen Contingenz-

winkel proportional setzen; denn man sieht, dass die Curve sich desto mehr biegt, je grösser der Contingenzwinkel ist.

Die Krümmung einer Curve in einem beliebigen Punkte wird aber gewöhnlich durch den Halbmesser eines Kreises gemessen, welcher in dem angenommenen Punkte die zwei zunächstliegenden Elemente mit der Curve gemeinschaftlich hat, oder zwischen welchem Kreise und der gegebenen Curve eine Osculation der zweiten Ordnung Statt findet. Diesen Kreis nennt man den Krümmungskreis, seinen Halbmesser den Krümmungshalbmesser und seinen Mittelpunkt den Krümmungsmittelpunkt für den angenommenen Punkt auf der gegebenen Curve.

Es seien nun AB und AC (Taf. VI. Fig. 1.) die Elemente einer Curve, welche sich in dem Punkte A begegnen, der Contingenzwinkel $BAD = \varphi$, so muss man also, um den Krümmungshalbmesser zu erhalten, den Mittelpunkt eines Kreises bestimmen, von welchem AB und AC zwei Elemente, d. h. zwei unendlich kleine Sehnen sind. Man halbire beide Elemente in F und G und errichte in diesen Punkten auf denselben Perpendikel, so wird der Punkt E, in welchem sich dieselben schneiden, der Mittelpunkt des Krümmungskreises und also EA der Krümmungshalbmesser sein. Man sieht nun leicht, dass der Winkel FEG dem Contingenzwinkel φ gleich ist, und man hat demnach

$$FA = EA \sin \frac{\varphi}{2},\ AB = 2FA = 2EA \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Da aber $\frac{\varphi}{2}$ ein unendlich kleiner Winkel ist, so kann man statt seines Sinus den Bogen selbst setzen, also:

$$AB = 2EA \,.\, \frac{\varphi}{2} = EA \,.\, \varphi.$$

Bezeichnet man nun die Länge der Elemente AC und AB mit ds, den Krümmungshalbmesser mit β, so hat man nach dem Obigen

$$1)\ ds = \beta \,.\, \varphi,$$

$$2)\ \beta = \frac{ds}{\varphi}.$$

Da aber nach der Annahme die Krümmung einer Curve dem Contingenzwinkel proportionirt ist, so sieht man aus No. 2, dass dieselbe auch umgekehrt proportionirt ist dem Krümmungshalbmesser.

Erste Aufgabe.

Es ist eine Curve UV (Taf. VI. Fig. 2.) gegeben (verzeichnet), deren geometrische Eigenschaften unbekannt sind, es soll für einen beliebigen Punkt M derselben die Tangente und der Krümmungshalbmesser construirt werden.

(Leroy, Géometrie descriptive. §. 572, 676.)

Digitized by Google

Erste Auflösung.

Man ziehe durch den Punkt M verschiedene Sehnen MA, MB, $MC \ldots$. MD, $ME \ldots$, verlängere dieselben und mache $Aa = Bb = Cc = \ldots = Dd = Ee = \ldots$ alle gleich einer beliebig angenommenen Länge l, und verbinde die Punkte a, b, $c \ldots$. d, $e \ldots$ durch eine stetige Curve $U'V'$. Bezeichnet nun (Taf. VI. Fig. 3. und Fig. 4.) P einen beliebig auf der Curve UV angenommenen Punkt und p seinen entsprechenden Punkt auf $U'V'$, s die Länge der Sehne MP, so hat man:

$$Mp = l + s \text{ (Taf. VI. Fig. 3.)}, \quad Mp = l - s \text{ (Taf. VI. Fig. 4.)}$$

Nimmt man nun den Punkt p unendlich nahe bei M, so wird s im Verhältniss zu l unendlich klein und kann also vernachlässigt werden. Bezeichnet nun (Taf. VI. Fig. 2.) m den dem Punkt M entsprechenden Punkt auf $U'V'$, so hat man $Mm = l + ds$ oder $= l$. Man erhält also den Punkt m, indem man von M aus mit dem Halbmesser l einen Kreis beschreibt; alsdann wird der Punkt, in welchem dieser $U'V'$ schneidet, der gesuchte Punkt m sein, und verbindet man diesen Punkt mit M, so ist diess die Tangente für letzteren Punkt.

Es seien nun $MA = MB = ds$ (Taf. VI. Fig. 5.) die Elemente der Curve UV, welche sich in dem Punkte M begegnen, so erhält man die entsprechenden Punkte a und b der Curve $U'V'$, indem man $Aa = Bb = l$ macht, so dass also die Linie ab die Richtung der Tangente des Punktes m der Curve $U'V'$ angibt. Fällt man von b aus das Perpendikel bb' auf Aa, so hat man:

$$bb' = Mb \sin \varphi, \quad Mb' = Mb \cos \varphi.$$

Da aber φ ein unendlich kleiner Winkel ist, so kann man statt seines Sinus den Bogen selbst und statt seines Cosinus den Werth 1 setzen, so dass also:

$$\left.\begin{aligned} bb' &= Mb \,.\, \varphi \\ Mb' &= Mb \end{aligned}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{aligned} bb' &= (l - ds)\,\varphi \\ Mb' &= l - ds. \end{aligned}\right.$$

Ferner ist $ab' = Ma - Mb' = (l + ds) - (l - ds) = 2ds$ und:

$$\text{tang } \alpha = \frac{bb'}{ab'} = \frac{(l-ds)\varphi}{2ds} = \frac{l\varphi}{2ds} - \frac{\varphi\, ds}{2ds} = \frac{l\varphi}{2ds} - \frac{\varphi}{2}.$$

Da aber der Krümmungshalbmesser β des Punktes $M = \frac{ds}{\varphi}$, so ist $\frac{\varphi}{ds} = \frac{1}{\beta}$ und also, wenn man diess substituirt:

$$\text{tang } \alpha = \frac{l}{2\beta} - \frac{\varphi}{2} \text{ oder (da } \frac{\varphi}{2} \text{ unendlich klein ist)}$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{l}{2\beta} \text{ und } \beta = \frac{l}{2 \text{ tang } \alpha}.$$

Diese Formel kann dazu dienen, den Krümmungshalbmesser des Punktes M der Curve UV zu bestimmen (Taf. VI. Fig. 6.).

Construirt man nämlich die Tangente mT der Curve $U'V'$ (ganz auf dieselbe Art, wie diess bei der Construction der Tangente Mm geschehen ist), halbirt Mm in E, fällt von E aus ein Perpendikel EF auf die Tangente mT und verlängert dieses, bis es die Normale des Punktes M in O trifft, so ist dieser Punkt O der Krümmungsmittelpunkt für den Punkt M der Curve UV, denn es ist:

$$MO = \frac{ME}{\text{tang}\,\alpha} = \frac{l}{2\,\text{tang}\,\alpha}.$$

Anmerkung. Da die Länge l ganz beliebig ist, so kann man sich dieselbe ändern lassen, und man wird auf diese Art ein System von Curven $U'V'$ erhalten, welche sich alle in dem Punkt M schneiden. Ebenso erhält man alsdann auf jeder dieser Curven einen Punkt, welcher dem Punkte m entspricht. Construirt man nun für alle Curven $U'V'$ in den Punkten m die Tangenten, so werden diese eine neue Curve einhüllen. Ich habe die Gleichung derselben gesucht und gefunden, dass es eine apollonische Parabel ist, deren Axe die Normale des Punktes M, deren Scheitel dieser Punkt M selbst ist, und deren Brennpunkt die Entfernung 2β von dem Scheitel M hat, so dass also der Krümmungshalbmesser dieser Parabel für ihren Scheitel M 4mal so gross ist, als der der Curve UV für denselben Punkt.

Zweite Auflösung.

Man ziehe Sehnen durch den Punkt M (Taf. VI. Fig. 7.) und verlängere dieselben, bis sie eine beliebig angenommene gerade oder krumme Linie XY schneiden; alsdann mache man:

$$\begin{array}{lll} A''a = A'a = MA & & D''d = D'd = MD \\ B''b = B'b = MB & & E''e = E'e = ME \\ C''c = C'c = MC & \text{und} & \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot & & \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot & & \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot & & \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot & & \cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{array}$$

verbinde die Punkte

$$A', B', C' \ldots D', E' \ldots$$
$$A'', B'', C'' \ldots D'', E'' \ldots$$

durch zwei stetige Curven $U'V'$ und $U''V''$, so werden sich diese in einem Punkte m der Curve XY schneiden und dieser Punkt, mit M verbunden, gibt alsdann die Tangente dieses letzteren Punkts.

Dritte Auflösung.

Durch die Punkte a, b, c .... d, e .... (Taf. VI. Fig. 8.), in

Digitized by Google

welchen die willkürlich angenommene XY durch die Sehnen des Punkts M geschnitten wird, ziehe man Linien parallel unter sich, jedoch in einer ganz beliebigen Richtung, und mache:

$$A'a = A''a = MA \qquad D'd = D''d = MD$$
$$B'b = B''b = MB \qquad E'e = E''e = ME$$
$$C'c = C''c = MC \quad \text{und} \quad . \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . \qquad . \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . \qquad . \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . \qquad . \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . \qquad . \quad . \quad .$$

verbinde alsdann die Punkte

$$A', B', C' \ldots . \; D', E' \ldots .$$
$$A'', B'', C'' \ldots . \; D'', E'' \ldots .$$

durch zwei stetige Curven $U'V'$ und $U''V''$, so werden sich diese in einem Punkte m der XY schneiden und Mm ist alsdann die gesuchte Tangente. (Diese beiden Auflösungsarten geben wieder Mittel, den Krümmungshalbmesser des Punktes M zu bestimmen, welche jedoch etwas verwickelter sind, als die erste.)

Zweite Aufgabe.

Es ist eine ebene Curve UV (Taf. VI. Fig. 9.) gegeben und ausserhalb derselben ein Punkt P, man soll von diesem Punkte aus eine Normale an die Curve UV ziehen.

(Leroy, Géometrie descr. §. 324, 325, 326.)

Auflösung.

Man beschreibe von dem Punkte P aus Kreise, welche die gegebene Curve in den Punkten $A, B, C \ldots . \; a, b, c \ldots .$ schneiden. Durch diese Punkte ziehe man Linien nach P und mache:

$$A'A = A''A = aa' = aa'' = \text{der Sehne } Aa$$
$$BB' = BB'' = bb' = bb'' = \text{der Sehne } Bb$$
$$CC' = CC'' = cc' = cc'' = \text{der Sehne } Cc$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Verbindet man nun die Punkte

$$A', B', C' \ldots . \; a', b', c' \ldots .$$
$$A'', B'', C'' \ldots . \; a'', b'', c'' \ldots .$$

Digitized by Google

durch zwei stetige Curven $U'V'$ und $U''V''$, so werden sich diese in einem Punkte M der gegebenen Curve schneiden, und diess ist alsdann der Fusspunkt der verlangten Normale.

Anmerkung. Man könnte auch auf den nach P gezogenen Geraden Stücke auftragen, welche so gross sind als die halben entsprechenden Sehnen. Auf diese Art würde man wieder zwei Curven erhalten, welche sich in dem verlangten Fusspunkte M schneiden, und zwar so, dass jede dieser neuen Curven die gegebene Curve unter einem Winkel von 45° und dieselben einander selbst unter einem Winkel von 90° schneiden; ferner haben die beiden Hilfscurven in dem Punkte M gleiche Krümmungshalbmesser, und zwar erhält man die Länge β dieser Krümmungshalbmesser als die Diagonale eines Quadrats, dessen Seite gleich dem doppelten Krümmungshalbmesser r der Curve UV für den Punkt M ist, d. h. $\beta = 2r\sqrt{2}$.

Dritte Aufgabe.

Es sei eine Curve UV von doppelter Krümmung gegeben, deren geometrische Eigenschaften unbekannt sind; es soll für einen beliebigen Punkt M derselben die Tangente und die Osculationsebene bestimmt werden.

(Leroy, Géom. descr. §. 572, 654.)

(Da die gegebene Curve windschief ist, so denke ich mir dieselbe auf zwei Projectionsebenen bezogen und sämmtliche Constructionen nach den Lehren der beschreibenden Geometrie ausgeführt.)

Erste Auflösung.

Man ziehe durch den Punkt M (Taf. VI. Fig. 10.) verschiedene Sehnen MA, MB, MC .... MD, ME ...., verlängere dieselben, und mache

$$Aa = Bb = Cc = \ldots = Dd = Ee \ldots .$$

alle gleich einer beliebig angenommenen Länge l; alsdann werden die Punkte a, b, c .... d, e .... mit einander verbunden eine neue windschiefe Curve $U'V'$ bilden. Um nun den Punkt der Curve $U'V'$ zu erhalten, welcher einem unendlich nahe bei M gelegenen der Curve UV entspricht, beschreibe man von M aus mit dem Halbmesser l eine Kugel und bestimme den Punkt m, in welchem dieselbe von der Curve $U'V'$ durchbohrt wird, alsdann wird diess der gesuchte Punkt und also Mm die verlangte Tangente sein, woraus sich leicht die Normalebene des Punktes M ergibt. Bestimmt man nun auf dieselbe Art die Tangente mT des Punktes m der Curve $U'V'$ und legt durch diese Tangente mT und die Mm eine Ebene, so sieht man leicht, dass dieses die Osculationsebene der Curve UV für den Punkt M ist. (Projicirt man nun die gegebene Curve UV auf diese Osculationsebene und bestimmt den Krümmungshalbmesser für den Punkt M dieser Projection, so ist diess zugleich auch der Krümmungshalbmesser für den Punkt M der gegebenen Curve.)

Digitized by Google

Zweite Auflösung.

Man nehme ganz beliebig eine Ebene FF' (Taf. VII. Fig. 1.) an, ziehe Sehnen durch den Punkt M der gegebenen Curve, und verlängere dieselben, bis sie die Ebene F durchbohren; es geschehe diess in den Punkten $a, b, c \ldots d, e \ldots$. Nun verbinde man diese Punkte durch eine stetige Curve XY; ferner ziehe man in der Ebene FF' durch die Punkte $a, b, c \ldots d, e \ldots$ Linien parallel unter sich, jedoch in einer ganz beliebigen Richtung, und mache alsdann

$$ee' = ee'' = ME$$
$$dd' = dd'' = MD$$
$$\cdots$$
$$aa' = aa'' = MA$$
$$bb' = bb'' = MB$$
$$cc' = cc'' = MC$$
$$\cdots$$

verbinde alsdann die Punkte

$$e', d' \ldots a', b', c' \ldots$$
$$e'', d'' \ldots a'', b'', c'' \ldots$$

durch zwei stetige Curven $U'V'$ und $U''V''$, so werden sich diese in einem Punkte m der XY schneiden, und dieser Punkt gibt alsdann, mit M verbunden, die Tangente des Punktes M der Curve UV. Die Sehnen, welche man durch den Punkt M gezogen hat, bilden eine Kegelfläche, deren Spitze der Punkt M und deren Leitlinie die Curve UV ist, und welche die Ebene FF' in der Curve XY durchdringt. Man sieht nun, dass eine Ebene, welche die Kegelfläche längs der Seite Mm berührt, zugleich die Osculationsebene der Curve für den Punkt M ist. Construirt man also die Tangente mT der Curve XY und legt durch dieselbe und die Tangente Mm eine Ebene, so wird dieses die Berührungsebene der Kegelfläche längs der Seite Mm und also auch die Osculationsebene der Curve UV für den Punkt M sein.

Vierte Aufgabe.

Die Länge der Kreisevolvente zu bestimmen.

Auflösung.

Der Kreisbogen $AM = s = r\alpha$ (Taf. VII. Fig. 2.) sei in eine

unendlich grosse Anzahl m gleich langer Elemente von der Länge ds getheilt. Die Contingenzwinkel dieser Elemente werden einander gleich sein; man setze jeden derselben $= \varphi$. Man hat demnach $\frac{ds}{\varphi} = r$; $\varphi = \frac{ds}{r}$; $mds = r\alpha = AM$. Man findet nun die Längen der Evolventenelemente Ab, bc, cd .... als die Längen von kleinen Kreisbögen, deren Halbmesser die Linien AB, bC, cD, dB.... $= ds$, $2ds$, $3ds$, $4ds$ .... mds sind, und deren Centriwinkel immer $= \varphi$ ist. Man hat also Bogen

$$\begin{aligned} AN &= ds \,.\, \varphi + 2ds \,.\, \varphi + 3ds \,.\, \varphi + \ldots . + mds \,.\, \varphi \\ &= ds \,.\, \varphi \,(1 + 2 + 3 + \ldots . + m) \\ &= ds \,.\, \varphi \,(1 + m)\, \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

Da aber m unendlich gross ist, so verschwindet in der Parenthese die Zahl 1 gegen m, und man hat also:

$AN = ds \,.\, \varphi \frac{m^2}{2}$; es ist $\varphi = \frac{ds}{r}$, also diess substituirt:

$AN = \frac{m^2 ds^2}{2r}$; da aber $mds = MA = r\alpha$, so ist auch

$$AN = l = \frac{r^2\alpha^2}{2r} = \frac{r\alpha^2}{2}.$$

Die Länge eines Umlaufs der Evolvente findet man, indem man in dem Werthe für l $\alpha = 2\pi$ setzt, alsdann ist

$$L = \frac{r \,.\, 4 \,.\, \pi^2}{2} = 2r\pi^2$$

oder gleich dem Umfange eines Kreises, dessen Durchmesser gleich dem Umfange des gegebenen Kreises ist.

Fünfte Aufgabe.

Den Inhalt des Stücks zwischen dem Kreise und seiner Evolvente zu bestimmen.

Auflösung.

Dieser Inhalt wird erhalten durch die Summation der Kreisausschnitte ABb, bCc, cDd....

Es sei dEe der n^{te} Ausschnitt, so ist sein Inhalt:

$$q = \tfrac{1}{2} de \,.\, dE = \tfrac{1}{2} nds \,.\, \varphi \,.\, nds = \tfrac{1}{2} n^2 ds^2 \,.\, \varphi.$$

Setzt man in dieser Gleichung $n = 1$, $n = 2$ .... bis $n = m$ und summirt die hiedurch entstandenen Werthe, so erhält man den Inhalt Q des Stücks zwischen dem Kreise und der Evolvente, so dass also:

Digitized by Google

$Q = \frac{1}{2}ds^2 . \varphi + \frac{1}{2} . 2^2 ds^2 \varphi + \frac{1}{2} . 3^2 ds^2 . \varphi + \ldots . + \frac{1}{2} m^2 ds^2 \varphi$ oder
$Q = \frac{1}{2} ds^2 \varphi \, (1 + 2^2 + 3^2 + \ldots . + m^2)$.

Es ist aber die Summe dieser Reihe $= \frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6}$, also:

$$Q = \tfrac{1}{2} ds^2 . \varphi \, (\frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6}).$$

Setzt man für φ seinen Werth $\frac{ds}{r}$ und dividirt sämmtliche Glieder in der Parenthese durch m^3, während man die Grösse ausserhalb derselben mit m^3 multiplicirt, so hat man:

$$Q = \frac{m^3 ds^3}{2r} \, (\frac{m^3}{3m^3} + \frac{m^2}{2m^3} + \frac{m}{6m^3})$$
$$= \frac{m^3 ds^3}{2r} \, (\frac{1}{3} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{6m^2}).$$

Da aber m unendlich gross ist, so kann man in der Parenthese die Brüche $\frac{1}{2m}$ und $\frac{1}{6m^2}$ vernachlässigen, und ferner kann man statt $m^3 ds^3$ die Länge AM^3 oder $r^3 \alpha^3$ setzen, so dass also:

$$Q = \frac{r^3 \alpha^3}{6r} \text{ oder } Q = \frac{r^2 \alpha^3}{6}.$$

Sechste Aufgabe.

Den Inhalt der entwickelbaren Schraubenfläche zu finden. (Leroy §. 456.)

Auflösung.

Diese Fläche entsteht durch die Verlängerung der Elemente einer Schraubenlinie und ist also eine entwickelbare Fläche. Nimmt man die Axe der Schraubenlinie senkrecht an und schneidet die Fläche durch zwei Horizontalebenen, welche um eine Ganghöhe von einander entfernt sind, so wird hiedurch die Fläche nach zwei Kreisevolventen geschnitten, zwischen welchen beiden Grenzen die Fläche nun berechnet werden soll. Wickelt man die Fläche ab, so bleiben hiebei die Contingenzwinkel der Wendecurve unveränderlich, weil die Drehung um die Verlängerungen der Elemente vor sich geht. Die Wendecurve wird sich also nach einer Curve abwickeln, welche bei gleich grossen Elementen gleich grosse Contingenzwinkel hat, das heisst nach einem Kreisstück, dessen Länge gleich der Länge der gegebenen Wendecurve und dessen Halbmesser gleich dem Krümmungshalbmesser derselben ist. Die Kreisevolventen, durch welche unsere Fläche begrenzt ist, wickeln sich nach Kreisevolventen an der abgewickelten Wendecurve ab, so dass man also den Inhalt des einen Mantels der gegebenen Fläche als den

Digitized by Google

Inhalt des Stücks zwischen der verwandelten Wendecurve und ihrer Evolvente berechnen kann. Man bezeichne den Halbmesser des Grundkreises mit r und den des Krümmungskreises der Schraubenlinie mit β.

Es seien nun $AB = BC = ds'$ (Taf. VII. Fig. 3.) zwei Elemente der Schraubenlinie, welche den Winkel α mit der Grundfläche bilden; ihre Projectionen $ab = bc = ds$ sind alsdann zwei Elemente des Grundkreises. Der Contingenzwinkel $B'BC$ werde mit φ' und der Contingenzwinkel $B'bC$ mit φ bezeichnet, alsdann ist $r = \frac{ds}{\varphi}$ und $\beta = \frac{ds'}{\varphi'}$. In den gleichschenkligen Dreiecken $B'BC$ und $B'bC$ hat man nun:

$$B'C = 2BB' \sin \frac{\varphi'}{2} = 2ds' \cdot \sin \frac{\varphi'}{2}$$

$$B'C = 2B'b \sin \frac{\varphi}{2} = 2ds \cdot \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Da aber $\frac{\varphi'}{2}$ und $\frac{\varphi}{2}$ unendlich kleine Winkel sind, so kann man statt ihrer Sinus die Bögen selbst setzen, so dass

$$B'C = ds \cdot \varphi' \text{ und}$$
$$B'C = ds \cdot \varphi, \text{ also auch}$$

$ds' \cdot \varphi' = ds \cdot \varphi$, oder da $ds' = \frac{ds}{\cos \alpha}$, so ist auch $\frac{ds \cdot \varphi'}{\cos \alpha} = ds \cdot \varphi$,

hieraus $\varphi' = \varphi \cos \alpha$ (1)

Nun ist weiter $\beta = \frac{ds'}{\varphi'}$, substituirt man für ds' und φ' ihre Werthe, so hat man:

$$\beta = \frac{\frac{ds}{\cos \alpha}}{\varphi \cos \alpha} = \frac{ds}{\varphi \cos^2 \alpha}.$$

Es ist aber $\frac{ds}{\varphi} = r$, also

$$2) \quad \beta = \frac{r}{\cos^2 \alpha}.$$

Bezeichnet man nun mit L die Länge eines Gangs der Schraubenlinie, so dass also $L = \frac{2r\pi}{\cos \alpha}$, so hat man (nach der Formel für Inhalt des Stücks zwischen dem Kreis und seiner Evolvente) für die Oberfläche Q eines Mantels

$$Q = \frac{L^2}{6\beta} = \frac{L^2 \cos^2 \alpha}{6r} = \frac{8r^2\pi^2 \cos^2 \alpha}{6r \cos^3 \alpha} = \frac{4r^2\pi^2}{3 \cos \alpha},$$

und also die Oberfläche beider Mäntel $= \frac{8r^2\pi^2}{3 \cos \alpha}$.

Digitized by Google

Anmerkung. Aus der Formel 2) geht hervor, dass (da $\cos 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$) der Krümmungshalbmesser einer Schraubenlinie bei einer Steigung von 45° das Doppelte und bei einer Steigung von 60° das Vierfache von dem Halbmesser der Grundfläche beträgt.

Andere Auflösungsart.

Sämmtliche Elemente unserer Fläche haben dieselbe Neigung gegen die Grundfläche, wie man leicht sieht, wenn man die Berührungsebenen construirt, und zwar ist dieser Neigungswinkel gleich dem Winkel α, den die Schraubenlinie selbst mit der Grundfläche bildet. Man findet aber den Inhalt einer ebenen Figur, wenn man den Inhalt ihrer Projection mit dem Cosinus ihres Neigungswinkels dividirt. Da aber alle Elemente unserer Fläche dieselbe Neigung haben, so findet man den Inhalt derselben, indem man den Inhalt der Projection durch $\cos\alpha$ dividirt. Es ist aber die Projection des unteren Mantels der Fläche das Stück zwischen dem Grundkreise und eines Umgangs seiner Evolvente, so dass also der Inhalt dieses Mantels $= \frac{2^3 r^2 \pi^3}{6\cos\alpha} = \frac{8r^2\pi^3}{6\cos\alpha}$, und man erhält folglich den ganzen Inhalt unserer Fläche:

$$Q = \frac{8r^2\pi^3}{3\cos\alpha}.$$

XXXVIII.

Einige Bemerkungen über fehlerzeigende Dreiecke.

Von dem

dem Herausgeber.

Wenn man durch drei Punkte in **einer** Ebene mit denselben, die wir im Folgenden als Ebene der xy annehmen werden, drei beliebige gerade Linien legt, so werden diese drei geraden Linien im Allgemeinen ein Dreieck mit einander einschliessen, welches wir im Folgenden nach einem in der Geodäsie gebräuchlichen Ausdrucke ein **fehlerzeigendes Dreieck** nennen wollen; und über solche Dreiecke sollen die folgenden Blätter einige Betrachtungen enthalten.

Die Coordinaten der drei in Rede stehenden Punkte sollen

$$x_1,\ y_1;\ x_2,\ y_2;\ x_3,\ y_3$$

und die Gleichungen der drei durch diese Punkte gelegten geraden Linien sollen

$$1)\quad \begin{cases} y-y_1=A_1\,(x-x_1), \\ y-y_2=A_2\,(x-x_2), \\ y-y_3=A_3\,(x-x_3) \end{cases}$$

sein; die Coordinaten der Durchschnittspunkte der 1sten und 2ten, 2ten und 3ten, 3ten und 1sten Linie wollen wir aber respective durch

$$\xi_1,\ \eta_1;\ \xi_2,\ \eta_2;\ \xi_3,\ \eta_3$$

bezeichnen. Bestimmt man nun diese Coordinaten auf bekannte Weise, so erhält man

$$2)\quad \begin{cases} \xi_1=\dfrac{A_1x_1-A_2x_2-(y_1-y_2)}{A_1-A_2}, \\[2ex] \eta_1=\dfrac{A_1A_2\,(x_1-x_2)+A_1y_2-A_2y_1}{A_1-A_2}; \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} \xi_2=\dfrac{A_2x_2-A_3x_3-(y_2-y_3)}{A_2-A_3}, \\[2ex] \eta_2=\dfrac{A_2A_3\,(x_2-x_3)+A_2y_3-A_3y_2}{A_2-A_3}; \end{cases}$$

$$4)\quad \begin{cases} \xi_3=\dfrac{A_3x_3-A_1x_1-(y_3-y_1)}{A_3-A_1}, \\[2ex] \eta_3=\dfrac{A_3A_1\,(x_3-x_1)+A_3y_1-A_1y_3}{A_3-A_1}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Setzen wir jetzt der Kürze wegen

$$5)\quad R = A_1A_2(x_1 - x_2) + A_2A_3(x_2 - x_3) + A_3A_1(x_3 - x_1) + A_3(y_1 - y_2) + A_1(y_2 - y_3) + A_2(y_3 - y_1),$$

so erhalten wir ohne alle Schwierigkeit

$$6)\quad \begin{cases} \xi_1 - \xi_2 = \dfrac{R}{(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}, \\ \eta_1 - \eta_2 = \dfrac{A_2 R}{(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}; \end{cases}$$

$$7)\quad \begin{cases} \xi_2 - \xi_3 = \dfrac{R}{(A_2 - A_3)(A_3 - A_1)}, \\ \eta_2 - \eta_3 = \dfrac{A_3 R}{(A_2 - A_3)(A_3 - A_1)}; \end{cases}$$

$$8)\quad \begin{cases} \xi_3 - \xi_1 = \dfrac{R}{(A_3 - A_1)(A_1 - A_2)}, \\ \eta_3 - \eta_1 = \dfrac{A_1 R}{(A_3 - A_1)(A_1 - A_2)}. \end{cases}$$

Bezeichnet Δ den Flächeninhalt des fehlerzeigenden Dreiecks, so ist nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie *)

$$9)\quad \mp 2\Delta = (\xi_2 - \xi_3)\eta_1 + (\xi_3 - \xi_1)\eta_2 + (\xi_1 - \xi_2)\eta_3,$$

wenn man nur in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem man sich, um von dem Punkte $(\xi_1\eta_1)$ durch den Punkt $(\xi_2\eta_2)$ zu dem Punkte $(\xi_3\eta_3)$ zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den Coordinatenwinkel hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss. Also ist nach dem Vorhergehenden, wie man leicht findet, wenn man immer dieselbe Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher festhält:

$$10)\quad 2\Delta = \mp \frac{R^2}{(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)(A_3 - A_1)}.$$

Setzt man

$$11)\quad \begin{cases} A_1 = \operatorname{tang}\alpha_1, \\ A_2 = \operatorname{tang}\alpha_2, \\ A_3 = \operatorname{tang}\alpha_3; \end{cases}$$

so ist

$$12)\quad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{(x_1\sin\alpha_1 - y_1\cos\alpha_1)\cos\alpha_2 - (x_2\sin\alpha_2 - y_2\cos\alpha_2)\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}, \\ \eta_1 = \dfrac{(x_1\sin\alpha_1 - y_1\cos\alpha_1)\sin\alpha_2 - (x_2\sin\alpha_2 - y_2\cos\alpha_2)\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}; \end{cases}$$

*) Archiv. Thl. III. S. 263.

Digitized by Google

$$13)\quad \begin{cases} \xi_2 = \dfrac{(x_2\sin\alpha_2 - y_2\cos\alpha_2)\cos\alpha_3 - (x_3\sin\alpha_3 - y_3\cos\alpha_3)\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_2-\alpha_3)}, \\ \eta_2 = \dfrac{(x_2\sin\alpha_2 - y_2\cos\alpha_2)\sin\alpha_3 - (x_3\sin\alpha_3 - y_3\cos\alpha_3)\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_2-\alpha_3)}; \end{cases}$$

$$14)\quad \begin{cases} \xi_3 = \dfrac{(x_3\sin\alpha_3 - y_3\cos\alpha_3)\cos\alpha_1 - (x_1\sin\alpha_1 - y_1\cos\alpha_1)\cos\alpha_3}{\sin(\alpha_3-\alpha_1)}, \\ \eta_3 = \dfrac{(x_3\sin\alpha_3 - y_3\cos\alpha_3)\sin\alpha_1 - (x_1\sin\alpha_1 - y_1\cos\alpha_1)\sin\alpha_3}{\sin(\alpha_3-\alpha_1)}; \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} 15)\quad R = {} & (x_1 - x_2)\operatorname{tang}\alpha_1\operatorname{tang}\alpha_2 \\ & + (x_2 - x_3)\operatorname{tang}\alpha_2\operatorname{tang}\alpha_3 \\ & + (x_3 - x_1)\operatorname{tang}\alpha_3\operatorname{tang}\alpha_1 \\ & + (y_1 - y_2)\operatorname{tang}\alpha_3 \\ & + (y_3 - y_2)\operatorname{tang}\alpha_1 \\ & + (y_3 - y_1)\operatorname{tang}\alpha_2 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 16)\quad & \cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3 \,.\, R \\ & = (x_1\sin\alpha_1 - y_1\cos\alpha_1)\sin(\alpha_2-\alpha_3) \\ & + (x_2\sin\alpha_2 - y_2\cos\alpha_2)\sin(\alpha_3-\alpha_1) \\ & + (x_3\sin\alpha_3 - y_3\cos\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_2). \end{aligned}$$

Setzt man nun der Kürze wegen

$$\begin{aligned} 17)\quad \Theta = {} & (x_1\sin\alpha_1 - y_1\cos\alpha_1)\sin(\alpha_2-\alpha_3) \\ & + (x_2\sin\alpha_2 - y_2\cos\alpha_2)\sin(\alpha_3-\alpha_1) \\ & + (x_3\sin\alpha_3 - y_3\cos\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_2), \end{aligned}$$

so ist nach dem Obigen

$$18)\quad \begin{cases} \xi_1 - \xi_2 = \dfrac{\Theta\cos\alpha_3}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_2-\alpha_3)}, \\ \eta_1 - \eta_2 = \dfrac{\Theta\sin\alpha_3}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_2-\alpha_3)}; \end{cases}$$

$$19)\quad \begin{cases} \xi_2 - \xi_3 = \dfrac{\Theta\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_1)}, \\ \eta_2 - \eta_3 = \dfrac{\Theta\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_1)}; \end{cases}$$

$$20)\quad \begin{cases} \xi_3 - \xi_1 = \dfrac{\Theta\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin(\alpha_1-\alpha_2)}, \\ \eta_3 - \eta_1 = \dfrac{\Theta\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin(\alpha_1-\alpha_2)}; \end{cases}$$

Digitized by Google

und

$$21)\quad 2\Delta = \mp \frac{\Theta^2}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_1)},$$

immer mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie oben. Bezeichnet man die Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks, so wie dieselben in der ersten, zweiten und dritten der drei durch die Gleichungen 1) charakterisirten Linien liegen, durch s_1, s_2, s_3; so ist

$$22)\quad \left\{\begin{aligned} s_1^2 &= (\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2,\\ s_2^2 &= (\xi_1-\xi_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2,\\ s_3^2 &= (\xi_2-\xi_3)^2+(\eta_2-\eta_3)^2; \end{aligned}\right.$$

und folglich nach dem Obigen

$$23)\quad \left\{\begin{aligned} s_1^2 &= \frac{\Theta^2}{\{\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_3-\alpha_1)\}^2},\\ s_2^2 &= \frac{\Theta^2}{\{\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\}^2},\\ s_3^2 &= \frac{\Theta^2}{\{\sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\}^2}; \end{aligned}\right.$$

oder ohne Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$24)\quad \left\{\begin{aligned} s_1 &= \pm\frac{\Theta}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_3-\alpha_1)},\\ s_2 &= \pm\frac{\Theta}{\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_2)},\\ s_3 &= \pm\frac{\Theta}{\sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin(\alpha_2-\alpha_3)}. \end{aligned}\right.$$

Man braucht die Winkel α_1, α_2, α_3 nicht grösser als 180° zu nehmen. Dann sind auch die absoluten Werthe der Differenzen

$$\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_3-\alpha_1$$

nicht grösser als 180°, wobei natürlich vorausgesetzt wird, dass α, α_1, α_2 positiv sind; und weil nun

$$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=0$$

ist, so haben

$$\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_3-\alpha_1$$

nicht sämmtlich einerlei Vorzeichen. Also haben auch

$$\sin(\alpha_1-\alpha_2),\ \sin(\alpha_2-\alpha_3),\ \sin(\alpha_3-\alpha_1)$$

nicht sämmtlich einerlei Vorzeichen, und es ist folglich, wenn man die obern oder untern Zeichen nimmt, jenachdem Θ positiv oder negativ ist, immer entweder

Digitized by Google

$$\varepsilon_1 = \pm \frac{\Theta}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_1)},$$
$$\varepsilon_2 = \mp \frac{\Theta}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_1 - \alpha_2)},$$
$$\varepsilon_3 = \mp \frac{\Theta}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)};$$

oder

$$\varepsilon_1 = \mp \frac{\Theta}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_1)},$$
$$\varepsilon_2 = \pm \frac{\Theta}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_1 - \alpha_2)},$$
$$\varepsilon_3 = \mp \frac{\Theta}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)};$$

oder

$$\varepsilon_1 = \mp \frac{\Theta}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_1)},$$
$$\varepsilon_2 = \mp \frac{\Theta}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_1 - \alpha_2)},$$
$$\varepsilon_3 = \pm \frac{\Theta}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}.$$

Daher ist jederzeit

$$25)\quad \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = \pm \frac{\Theta_3}{\{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_3 - \alpha_1)\}^3},$$

wenn man immer das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem Θ positiv oder negativ ist.

Denkt man sich, was offenbar verstattet ist, die Winkel α_1, α_2, α_3 nach ihrer Grösse aufsteigend geordnet, so ist

$\sin(\alpha_1 - \alpha_2)$ negativ,
$\sin(\alpha_2 - \alpha_3)$ negativ,
$\sin(\alpha_3 - \alpha_1)$ positiv;

also unter dieser Voraussetzung, wenn man die obern oder untern Zeichen nimmt, jenachdem Θ positiv oder negativ ist:

$$26)\quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \mp \dfrac{\Theta}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}, \\ \varepsilon_2 = \pm \dfrac{\Theta}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_1 - \alpha_1)}, \\ \varepsilon_3 = \mp \dfrac{\Theta}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Also ist

$$27)\ s_1 : s_2 : s_3 = \sin(\alpha_2 - \alpha_3) : \sin(\alpha_1 - \alpha_3) : \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = \sin(\alpha_3 - \alpha_2) : \sin(\alpha_3 - \alpha_1) : \sin(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Weil unter der gemachten Voraussetzung das Product

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_3 - \alpha_1)$$

positiv ist, so ist nach 21) unter dieser Voraussetzung

$$28)\ 2\Delta = \frac{\Theta^2}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}.$$

Bezeichnet man die den Seiten s_1, s_2, s_3 entsprechenden Höhen des fehlerzeigenden Dreiecks respective durch h_1, h_2, h_3, so ist

$$h_1 = \frac{2\Delta}{s_1},\ h_2 = \frac{2\Delta}{s_2},\ h_3 = \frac{2\Delta}{s_3};$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$29)\ \begin{cases} h_1 = \mp \dfrac{\Theta}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}, \\ h_2 = \pm \dfrac{\Theta}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}, \\ h_3 = \mp \dfrac{\Theta}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}; \end{cases}$$

also

$$30)\ h_1 h_2 h_3 = \pm \frac{\Theta^3}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_3 - \alpha_1)},$$

d. i.

$$31)\ h_1 h_2 h_3 = \pm 2\Delta\Theta,$$

oder

$$32)\ \Theta = \pm \frac{h_1 h_2 h_3}{2\Delta}.$$

Auch ist

$$33)\ \frac{h_1 h_2 h_3}{s_1 s_2 s_3} = \sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_3 - \alpha_1).$$

Leicht überzeugt man sich auch von der Richtigkeit der beiden folgenden Relationen:

$$34)\ \begin{cases} s_1 \sin\alpha_1 - s_2 \sin\alpha_2 + s_3 \sin\alpha_3 = 0, \\ s_1 \cos\alpha_1 - s_2 \cos\alpha_2 + s_3 \cos\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Ist r der Halbmesser des um das fehlerzeigende Dreieck beschriebenen Kreises, so ist bekanntlich

Digitized by Google

$$r = \frac{s_1 s_2 s_3}{4\Delta},$$

also nach dem Obigen

$$35)\quad r = \pm \frac{\Theta}{2\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}.$$

Bezeichnet ferner ϱ den Halbmesser des in das fehlerzeigende Dreieck beschriebenen Kreises, so ist bekanntlich

$$\varrho = \frac{2\Delta}{s_1 + s_2 + s_3},$$

und folglich, wie sich hieraus mittelst des Obigen mit Hülfe einiger goniometrischen Relationen leicht ergiebt:

$$36)\quad \varrho = \mp \frac{\Theta}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \sin(\alpha_2 - \alpha_3) - \sin(\alpha_3 - \alpha_1)}$$

oder

$$37)\quad \varrho = \pm \frac{\Theta}{4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_3)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_1)}.$$

Wenn sich die drei durch die Gleichungen 1) charakterisirten geraden Linien in einem Punkte schneiden sollen, so muss $\Delta = 0$, also nach 21) die Grösse $\Theta = 0$, d. i. nach 17)

$$38)\quad \left.\begin{aligned} &(x_1 \sin\alpha_1 - y_1 \cos\alpha_1)\sin(\alpha_2 - \alpha_3) \\ &+ (x_2 \sin\alpha_2 - y_2 \cos\alpha_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_1) \\ &+ (x_3 \sin\alpha_3 - y_3 \cos\alpha_3)\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \end{aligned}\right\} = 0$$

sein, wobei auf der Stelle erhellen wird, dass diese Gleichung eigentlich die Grundgleichung des gewöhnlich nach Pothenot benannten Problems ist. Leicht bringt man die vorhergehende Gleichung auf die Form

$$\left.\begin{aligned} &(x_2 - x_1)\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_1) \\ &+ (x_3 - x_1)\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\cos(\alpha_3 - \alpha_1) \\ &+ (y_3 - y_2)\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_1) \end{aligned}\right\} \sin\alpha_1$$

$$= \left\{\begin{aligned} &(y_2 - y_1)\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_1) \\ &+ (y_3 - y_1)\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\cos(\alpha_3 - \alpha_1) \\ &- (x_3 - x_2)\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_1) \end{aligned}\right\} \cos\alpha_1$$

woraus sich sogleich

$$39)\quad \operatorname{tang}\alpha_1 = -\frac{x_3 - x_2 - (y_2 - y_1)\cot(\alpha_1 - \alpha_2) - (y_3 - y_1)\cot(\alpha_3 - \alpha_1)}{y_3 - y_2 + (x_2 - x_1)\cot(\alpha_1 - \alpha_2) + (x_3 - x_1)\cot(\alpha_3 - \alpha_1)}$$

Digitized by Google

ergiebt, und also erhellet, dass der Winkel α_1 bloss aus den Coordinaten $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ und den Differenzen $\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_3 - \alpha_1$ bestimmt werden kann, welches das vorzüglich dem Pothenot'schen Problem zum Grunde liegende Princip ist. Weitere Entwickelungen über diesen Gegenstand halten wir aber nach den in dem Aufsatze No. XIV. im ersten Theile des Archivs angestellten Betrachtungen an diesem Orte für überflüssig, und können dieselben füglich dem Leser überlassen.

XXXIX.

Verschiedene mathematische Bemerkungen und Aufsätze.

Von

Herrn Dr. Wilhelm Matzka,

k. k. Professor der Mathematik an der k. k. philosophischen Lehranstalt zu Tarnow in Galizien.

I.

Bemerkungen zu dem Aufsatze auf Seite 57 im ersten Theile des Archivs.

Der in diesem Aufsatze auf combinatorischem Wege erwiesene Lehrsatz:

„Alle ganzen Zahlen kann man aus den Gliedern der nach den Potenzen von 2 fortgehenden geometrischen Progression, so dass jedes Glied nur einmal vorkommt, durch Addition bilden und zwar nur auf eine einzige Weise;"

lässt sich als eine höchst einfache Folgerung aus dem leicht nachzuweisenden Satze entnehmen, „dass jede Zahl nach dem dyadischen Ziffersysteme, in welchem man sich nur der Ziffern 0 und 1 bedient, geschrieben werden kann, und zwar auf nicht mehr als Eine Weise."

Uebrigens kann man, bloss auf die Lehre vom Theilen gestützt, den allgemeinen Satz erweisen:

„Jede Anzahl lässt sich als algebraische Summe von Vielfachen der natürlichen Potenzen jeder die 1 übersteigenden Anzahl so darstellen, dass die theils posi-

Digitized by Google

tiven, theils negativen Multiplicatoren möglichst klein, d. i. nicht grösser als die Hälfte der potenzirten Anzahl, sind, und zwar nur auf Eine Weise."

Denn ist a die potenzirte und n die darzustellende Anzahl, und sind $m_0, m_1, m_2, \ldots . m_r$ die algebraischen Multiplicatoren für die Potenzen $a^0, a^1, a^2, \ldots . a^r$; so soll der Forderung gemäss sein:

$$n = m_0 + m_1 a + m_2 a^2 + \ldots . + m_r a^r,$$

oder

$$n = m_0 + (m_1 + m_2 a + \ldots . + m_r a^{r-1})\, a,$$

oder auch, wenn man

$$n_1 = m_1 + m_2 a + \ldots . + m_r a^{r-1}$$

setzt,

$$n = m_0 + n_1 a.$$

Die Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, dass man die Anzahl n vorerst nur aus den beiden niedrigsten Potenzen von a, der nullten und ersten, nämlich aus einem Vielfachen, dem $n_1$fachen, von a und aus einer möglichst kleinen, positiven oder negativen, Anzahl m_0 zusammenzusetzen hat; folglich dass man die darzustellende Anzahl n durch die zu potenzirende a dergestalt theilen solle, dass der Rest möglichst klein, mithin der Quotus nächst zustimmig ausfalle. Dann ist der Multiplicator m_0 von a^0 jener möglich kleinste Rest und der Multiplicator n_1 von a^1 dieser nächst zustimmige Quotus; nämlich, wenn man nicht erst noch neue Zeichen einführen will:

$m_0 =$ möglich kleinster Rest von $n : a$,

$n_1 =$ nächst zustimmiger Quotus von $n : a$.

Weil nun eine solche Theilung jederzeit, aber auch nur auf eine einzige Art, ausführbar ist, so kann auch jede Anzahl n immer, und zwar nur auf Eine Weise, aus den möglich kleinsten Vielfachen der Potenzen a^0 und a^1 algebraisch zusammengesetzt werden.

So wie aber n zusammengesetzt wird, eben so wird sich der Quotus

$$n_1 = m_1 + m_2 a + \ldots . + m_r a^{r-1}$$

neuerdings zusammensetzen lassen; es wird nämlich sein:

$m_1 =$ möglich kleinster Rest von $n_1 : a$, und

$n_1 = m_2 + m_3 a + \ldots . + m_r a^{r-2}$

$=$ nächst zustimmiger Quotus von $n_1 : a$.

Wenn man demnach die zusammenzusetzende Anzahl n durch die zu potenzirende a so theilt, dass der Rest möglichst klein ausfällt; und wenn man den Quotus, und auf gleiche Weise jeden nachfolgenden Quotus, wieder so theilt, dass der Rest immer so klein als

Digitized by Google

möglich ausfällt: so sind die der Ordnung nach sich ergebenden Reste die gewünschten Multiplicatoren $m_0, m_1, m_2, \ldots m_r$; wegen $a > 1$ wird jeder nachfolgende Quotus wenigstens auf die Hälfte des vorhergehenden, mithin endlich einmal einer unter a selbst, herabsinken und bei ihm die Rechnung abbrechen.

Ist insbesondere $a = 2$, so sind die möglich kleinsten Reste, daher auch die Multiplicatoren 0 und 1; und darin liegt der obige Satz. Ist aber $a = 3$, so werden die möglich kleinsten Reste, folglich auch die Multiplicatoren, $-1, 0, 1$; und somit ist der, in dem citirten Aufsatze auch angeführte Satz erwiesen, „dass man jede Anzahl aus den natürlichen Potenzen von 3 durch Addition und Subtraction, und zwar nur auf Eine Weise, bilden kann".

II.

Feststellung und Würdigung des in dem Archive, Theil 1. S. 204, über eine Stelle in Cauchy's Begründung der Differential-Rechnung ausgesprochenen Tadels.

Der Herr Herausgeber des Archivs leitet die citirte Abhandlung mit folgenden Worten ein:

„Cauchy hat bekanntlich die Entwickelung der wichtigen Differentialquotienten der Functionen $\log x$ und a^x auf den Satz gegründet, dass sich die Grösse $(1 + \Theta)^{\frac{1}{\Theta}}$, wenn Θ sich der Null nähert, der Summe der convergirenden Reihe $1, \frac{1}{1}, \frac{1}{1.2}, \frac{1}{1.2.3}, \ldots$, welche wir wie gewöhnlich durch e bezeichnen wollen, als ihrer Gränze nähert, ..."

Auf der nächsten Seite fährt er fort:

„Gegen den von Cauchy gegebenen Beweis des .... erwähnten Satzes hat aber Herr Liouville in seinem Journal (Août. 1840. p. 280) die sehr gegründete Einwendung gemacht, dass demselben die Annahme zum Grunde liege, dass das Product $(1 - \frac{1}{m})(1 - \frac{2}{m}) \ldots (1 - \frac{n-1}{m})$ für $m = \infty$ der Einheit gleich werde, welches zwar dann seine Richtigkeit habe, wenn n eine bestimmte von m unabhängige Zahl sei, sich aber dann offenbar nicht mehr behaupten lasse, wenn n von m abhängig, z. B. $n = m$ oder $n = m - 1$ sei, ..."

Allein Cauchy stützt sowohl in seinem Résumé des Leçons .... sur le calcul infinitésimal. 4. Paris. 1823. pag. 2, als auch in der verbesserten Ausgabe eines Theils dieses Werkes, nämlich in seinen Leçons sur le calcul différentiel. 4. Paris. 1829. p. 2, die Herleitung der in Rede stehenden Differentialquotienten, in letzter Instanz, auf folgende, wörtlich also lautende Stelle:

„Si l'on suppose d'abord la quantité α positive et de la forme $\frac{1}{m}$, m désignant un nombre entier variable et susceptible d'un accroissement indéfini, on aura

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = (1+\tfrac{1}{m})^{m}$$

$$= 1 + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{1.2}(1-\tfrac{1}{m}) + \tfrac{1}{1.2.3}(1-\tfrac{1}{m})(1-\tfrac{2}{m}) + \ldots.$$

$$\ldots. + \tfrac{1}{1.2.3\ldots m}(1-\tfrac{1}{m})(1-\tfrac{2}{m})\ldots.(1-\tfrac{m-1}{m}).$$

Comme, dans le second membre de cette dernière formule, les termes qui renferment la quantité m sont tous positifs, et croissent en valeurs et en nombre en même temps que cette quantité, il est clair que l'expression $(1+\frac{1}{m})^{m}$ croîtra elle-même avec le nombre entier m, en demeurant toujours comprise entre les deux sommes

$$1 + \tfrac{1}{1} = 2$$

$$\text{et } 1 + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2.2} + \tfrac{1}{2.2.2} + \text{etc.} = 1+1+1 = 3;$$

donc elle s'approchera indéfiniment, pour des valeurs croissantes de m, d'une certaine limite comprise entre 2 et 3. Cette limite est un nombre qui joue un grand rôle dans le calcul infinitésimal, est qu'on est convenu de désigner par la lettre e."

Cauchy lässt sich demnach gar nicht darauf ein, die Grenzen der einzelnen Glieder der entwickelten Binomial-Potenz für eine unendlich wachsende Anzahl m aufzusuchen, sondern benutzt diese Entwicklung bloss, um das stete Wachsen dieser Potenz zwischen den Anzahlen 2 und 3, also die Annäherung der Potenz selbst an eine fixe Grenzzahl, die er e nennt, zu erweisen. Darum erwähnt er keineswegs, dass die Grenze dieser entwickelten Potenz die Summe $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots.$ sei, noch weniger bezeichnet er diese Summe durch e, sondern er versteht unter e die Grenze, der sich die Binomial-Potenz $(1+\frac{1}{m})^{m}$, bei dem unendlichen Steigen der Anzahl m, unbestimmt nähert, wie auch immer die successiven Werthe dieser Potenz berechnet werden mögen und jene Grenze derselben gefunden werden mag. Ihm genügt, für seine Herleitung der Differentialquotienten, die blosse Nachweisung der Existenz einer solchen Grenze; da er die Grösse derselben für diesen Zweck gar nicht zu kennen braucht.

Jedoch in den Préliminaires der oben angeführten jüngeren Leçons, pag. 10, nicht aber in dem älteren Résumé, führt Cauchy, zur Erläuterung der Convergenz der Reihen, folgendes Beispiel an:

Une série digne de remarque est celle, qu'on obtient, lorsque, dans le développement de l'expression

$$(1+\tfrac{x}{m})^{m} = 1 + \tfrac{x}{m} + \tfrac{x^2}{1.2}(1-\tfrac{1}{m}) + \tfrac{x^3}{1.2.3}(1-\tfrac{1}{m})(1-\tfrac{2}{m}) + \ldots.$$

Digitized by Google

on fait converger le nombre entier m vers la limite ∞. Cette série, dont les différents termes sont respectivement

$$1, \frac{x}{1}, \frac{x^2}{1.2}, \frac{x^3}{1.2.3} \cdots \frac{x^n}{1.2.3 \ldots n} \text{ etc.} \ldots,$$

reste convergente ....“

Hier schliesst Cauchy allerdings aus der Grenzform der Anfangsglieder der Reihe, in einer nicht genugsam begründeten Induction, auf die Grenzform ihres allgemeinen Gliedes, indem er stillschweigend

$$\lim \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\left(1 - \frac{3}{m}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{m}\right) = 1, \text{ für } \lim m = \infty$$

gelten lässt.

Diese Stelle ist es demnach, welche von Liouville's Tadel mit Recht getroffen werden könnte; ob er sich aber wirklich auf sie beziehe, vermag ich nicht zu entscheiden, da ich den Jahrgang 1840 seines Journals nicht mehr besitze. Mit dieser Stelle hängt jedoch die später, pag. 19, folgende Entwickelung der Differentialquotienten logarithmischer und exponentieller Functionen durchaus nicht zusammen; was auch schon daraus einleuchtet, dass dieselbe in dem Resumé gar nicht vorkommt. Mithin ist diese Entwickelung über die ihm zugemuthete Unrichtigkeit völlig erhaben; was diese Zeilen zu beweisen einzig beabsichtigten.

III.

Bemerkungen zur Bestimmung des Schwerpunktes im sphärischen Dreiecke, auf Seite 6 bis 9 im dritten Theile des Archivs.

1) Die hier vom Herrn Director Eschweiler aufgestellte elegante Bestimmung des Schwerpunktes eines sphärischen Dreieckes hatte ich bereits im Jahre 1836 selbst gefunden; ich hoffe, er werde mir gern gestatten, seinem Aufsatze Folgendes von meinem damaligen Funde anzuschliessen.

I. Nach seiner Ableitung (S. 7 und Taf. VII. Fig. 4.) ist das statische Moment eines sphärischen Dreieckes ABC in Bezug auf die Ebene des zu dem Kugelhalbmesser OA einer Dreiecksspitze A senkrechten grössten Kreises, d. h. das Product aus dem Flächeninhalte e des sphärischen Dreieckes in den Abstand $\frac{a \sin b \sin \gamma}{2e}$ seines Schwerpunktes von jener Kreisebene $= \frac{1}{2} a . \sin b \sin \gamma$. Der erste Factor $\frac{1}{2}a$ dieses Productes giebt den Flächeninhalt des Kreisausschnittes BOC an, welcher der jener Dreiecksspitze A gegenüber liegenden Dreiecksseite BC zugehört. Der zweite Factor $\sin b \sin \gamma = \sin c \sin \beta$ drückt den Abstand derselben Dreiecksspitze A von der Ebene dieser Dreiecksseite BC aus. Mithin ist das statische Moment der Fläche eines sphärischen Dreieckes ABC in Bezug auf die Ebene des, zu dem Kugelhalbmesser OA einer Dreiecksspitze A senkrechten oder zu dieser Spitze als einem Pole gehörigen, grössten Kreises

Digitized by Google

gleich dem Producte aus dem Abstande der Dreiecksspitze von der Ebene der ihr entgegen liegenden Seite BC in den Flächeninhalt des dieser Seite angehörigen Kreisausschnittes BOC.

2. Es dürfte wohl nicht ohne Interesse sein, diesen Ausdruck des statischen Momentes eines sphärischen Dreieckes auch mittels einer elementaren Betrachtung aufzustellen. In dieser Absicht theilen wir die Seite BC (Taf. VII. Fig. 4.) des Dreieckes ABC in beliebig viele und beliebig grosse Stücke, und führen durch alle Theilungspunkte nach der gegenüber liegenden Spitze A Bogen grösster Kreise, und zwischen jeden zwei benachbarten solchen Kreisbogen, wie AD und AE, um dieselbe Spitze A als Pol, Bogen kleinerer Kreise, wie DF und EG. So wird dem Kugeldreiecke ADE nicht bloss ein kleineres Dreieck ADF eingeschrieben, sondern auch ein grösseres AEG umgeschrieben, von denen jedes ein Ausschnitt der Seitenfläche eines Kugelabschnittes ist. Sind HD und HF Halbmesser der Grundebene des ersteren Kugelabschnittes, so ist AH seine Höhe und der Inhalt seiner Seitenfläche $= 2\pi . AH$. Zu ihm verhält sich der Inhalt des Dreieckes ADF, wie zur vollen Umdrehung 2π der Winkel DAE, den wir durch φ bezeichnen wollen; mithin ist $\Delta ADF = (2\pi . AH : 2\pi) . \varphi = \varphi . AH$, oder wenn wir den Bogen $AD = u$ setzen, $= \varphi(1 - \cos u)$. Aehnlich muss, wenn wir $AB = u'$ annehmen, $\Delta AEG = \varphi(1 - \cos u')$ sein.

Der Schwerpunkt der Seitenfläche eines Kugelabschnittes, so wie jedes Ausschnittes derselben, steht um die halbe Höhe des Abschnittes von seiner Grundebene ab. Beziehen wir demnach die statischen Momente auf die Ebene des zur Dreiecksspitze A als einem Pole gehörigen grössten Kreises, so hat von ihr der Schwerpunkt des Dreieckes ADF den Abstand $OH + \frac{1}{2}HA = \frac{1}{2}(OA + OH) = \frac{1}{2}(1 + \cos u)$, mithin analog jener des Dreieckes AEG den Abstand $\frac{1}{2}(1 + \cos u')$; und der erstere Abstand ist offenbar grösser, der letztere aber kleiner als der Abstand des Schwerpunktes des Dreieckes ADE selbst von der Momentenebene.

Daraus folgt nun, dass das Moment des Dreieckes ADE, d. i. das Product aus seinem Inhalte und aus dem Abstande seines Schwerpunktes von der Momentenebene, wenn man dessen Factoren einmal durch kleinere, ein andermal durch grössere ersetzt,

$$> \varphi(1-\cos u) . \tfrac{1}{2}(1+\cos u') \text{ und } < \varphi(1-\cos u') . \tfrac{1}{2}(1+\cos u)$$

sein muss.

Zur ferneren Umgestaltung dieser einschränkenden Grenzen setzen wir $DE = v$, $ADB = \omega$, $AEB = \omega'$; dann ist im Dreiecke ADE

$$\sin \varphi \sin u = \sin v \sin \omega'$$

und im Dreiecke ABE

$$\sin \omega' \sin u' = \sin c \sin \beta$$

folglich, wenn wir multipliciren und abkürzen,

$$\sin \varphi . \sin u \sin u' = \sin c \sin \beta . \sin v.$$

Digitized by Google

Hieraus ergiebt sich

$$\sin\varphi = \frac{\sin c \sin\beta}{\sin u \sin u'} \sin v,$$

und sonach

$$\varphi = \frac{\varphi}{\sin\varphi} \sin\varphi = \frac{\varphi}{\sin\varphi} \cdot \frac{\sin c \sin\beta}{\sin u \sin u'} \cdot \frac{\sin v}{v} \cdot v.$$

Setzen wir diese Ausdrücke für φ, so finden wir des Dreieckes ADE Moment

$$> \tfrac{1}{2} \sin c \sin\beta \cdot \left(\frac{\varphi}{\sin\varphi} : \frac{v}{\sin v}\right) \frac{(1-\cos u)(1+\cos u')}{\sin u \sin u'} \cdot v$$

$$\text{und} < \tfrac{1}{2} \sin c \sin\beta \cdot \left(\frac{\varphi}{\sin\varphi} : \frac{v}{\sin v}\right) \frac{(1-\cos u')(1+\cos u)}{\sin u' \sin u} \cdot v.$$

Für den Winkel φ lässt sich auch noch folgender Ausdruck vortheilhaft verwenden. Es ist

$$\varphi = DAE = DHF = DF : DH = DF : \sin u,$$

daher, wenn man durch $\sin\omega' \sin u'$ theilt und mit dem, nach dem Obigen, ihm gleichen $\sin c \sin\beta$ multiplicirt,

$$\varphi = \frac{\sin c \sin\beta}{\sin u \sin u'} \cdot \frac{DF}{v \sin\omega'} \cdot v \text{ und analog} = \frac{\sin c \sin\beta}{\sin u' \sin u} \cdot \frac{EG}{v \sin\omega} \cdot v.$$

Mithin zeigt sich das Moment des Dreieckes ADE

$$> \tfrac{1}{2} \sin c \sin\beta \cdot \frac{(1-\cos u)(1+\cos u')}{\sin u \sin u'} \cdot \frac{DF}{v \sin\omega'} \cdot v$$

$$\text{und} < \tfrac{1}{2} \sin c \sin\beta \cdot \frac{(1-\cos u')(1+\cos u)}{\sin u' \sin u} \cdot \frac{EG}{v \sin\omega} \cdot v.$$

Nun ist das Moment des Dreieckes ABC gleich der Summe der Momente aller dasselbe constituirenden Dreiecke, wie ADE, folglich grösser als die Summe aller unteren und kleiner als die Summe aller oberen Grenzen der Momente der Dreiecke ADE für sämmtliche Theile $v = DE$ der Seite $BC = a$.

Lassen wir demnach alle Theile v der Seite BC unendlich abnehmen, so nimmt auch der Winkel φ unendlich ab, und die Kreisbogen u und u' nähern sich unendlich ihrer Gleichheit; daher streben die Quotienten $\frac{\varphi}{\sin\varphi}$ und $\frac{v}{\sin v}$ ihrer bekannten gemeinschaftlichen Grenze 1, die Producte $(1-\cos u)(1+\cos u')$, $(1-\cos u')(1+\cos u)$ und $\sin u \sin u'$ ihrer gemeinsamen Grenze $1-\cos u^2 = \sin u^2$ zu; die Kugeldreiecke DEF und DEG, welche an F und G rechtwinklig sind, nähern sich unendlich ihrer Ausebnung, folglich dem Zustande, in welchem $DF = v \sin\omega'$ und $EG = v \sin\omega$ ist; kurz, das Product der in den Ausdrücken der einschränkenden Grenzen als Factoren vorkommenden Quotienten strebt seiner Grenze 1 ohne Ende zu.

Bei der Summirung sämmtlicher Werthe der gleichnamigen

Digitized by Google

Grenzen der Momente aller constitutiven Dreiecke kommt ihr gemeinschaftlicher Factor $\frac{1}{2} \sin c \sin \beta$ mit der Summe von lauter Producten zu multipliciren, in denen die einen Factoren einer gemeinsamen Grenze zustreben; daher ist letztere Summe gleich dem Producte dieser gemeinsamen Grenze, — hier 1 — in die Summe aller zweiten Factoren *) — hier in die Summe aller Bestandstücke v der Seite $BC = a$, d. i. in die Seite a selbst. Mithin strebt sowohl die untere als auch die obere Grenze des Moments vom Dreiecke ABC derselben Grenze $\frac{1}{2} \sin c \sin \beta . a$ ohne Ende zu; folglich muss dieses Moment eben dieser Grenze $\frac{1}{2} a \sin c \sin \beta$ gleich sein, welche man auch durch $\frac{1}{2} a \sin b \sin \gamma$ ausdrücken kann.

IV.

Neuer Beweis der Gleichheit von Parallelepipeden.

Der Satz: Parallelepipede von gleichen Grundebenen und Höhen sind gleich, wird in allen mir bekannten Lehrbüchern der Stereometrie bloss für den sehr eingeschränkten Fall erwiesen, wo die Grundebenen congruent sind; auch drängen sich in den zum Beweise dienenden Figuren die Linien in einen so engen Raum zusammen, dass besonders in öffentlichen Vorlesungen das Sichten und Uebersehen derselben den Zuhörern sehr beschwerlich fällt. Der folgende Beweis, den ich im Jahre 1838 fand, ist von beiden Mängeln frei.

I. Zuvörderst betrachten wir den Fall, wo die gleichen Grundebenen der Parallelepipede je eine Grundkante und den Kantenwinkel an ihr gleich haben.

Hier gehören daher zu den gleichen Grundkanten, als Grundlinien der parallelogrammischen Grundebenen, auch gleiche Höhen, d. h. gleiche Entfernungen von den parallelen Seiten.

In dem einen Parallelepipede $ACEG$ (Taf. VII. Fig. 5.) erweitern wir nun die Grundebene AC und die parallelen Grundkanten AB und CD, welche den Grundkanten ab und cd des anderen Parallelepipeds $aceg$ gleich sein sollen. Zwischen diesen verlängerten Grundkanten und mit dem ersteren Parallelepipede auf die nämliche Seite der Grundebene stellen wir das zweite Parallelepiped $aceg$ dergestalt auf, dass die gleichen Grundkanten paarweise in einerlei Gerade zu liegen kommen, die Oeffnungen der gleichen Kantenwinkel an ihnen nach einerlei Gegend gerichtet sind und die Parallelepipede selbst nirgends zusammentreffen. In dieser Stellung fallen die erweiterten zweiten Schenkel der gleichen Kantenwinkel, so wie auch die erweiterten zweiten Grundebenen der gleichhohen Parallelepipede, in eine Ebene zusammen; und die Parallelepipede machen mit einem zwischen ihnen stehenden schief abgeschnittenen Prisma $BdFh$ ein eben solches Prisma $AcEg$ aus.

---

*) Denn bekanntlich ist, nach Cauchy (vergl. auch Archiv. Theil I. S. 293), $\alpha a + \alpha' a' + \alpha'' a'' + \ldots = (\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots) . \text{Med.}(a, a', a'', \ldots)$; folglich, wenn $\lim a = \lim a' = \lim a'' = \ldots = A$ ist,

$$\lim (\alpha a + \alpha' a' + \alpha'' a'' + \ldots) = \lim (\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots) \times \text{Med.}(\lim a, \lim a', \lim a'', \ldots) = A . \lim (\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots).$$

Digitized by Google

Nunmehr lässt sich leicht nachweisen, dass die schief abgeschnittenen Prismen $AdEh$ und $BcFg$ congruent sind. Denn 1) sind alle parallele Kanten, als Seiten desselben Parallelepipeds, gleich, wie $AE = BF$, $ae = bf$ ....; 2) sind jede zwei in einer Geraden gelegene Kanten gleich, wie $Aa = Bb$, $Ee = Ff$ u. dgl., weil sie aus gleichen Stücken bestehen, da $AB = ab$, also auch $AB + Ba = Ba + ab$, d. i. $Aa = Bb$ ist; daher sind 3) nicht nur die Winkel der gleichgerichteten Kanten gleich, wie $DAa = CBb$, $EAa = FBb$ ...., sondern auch 4) die Winkel der gleichgestreckten Ebenen gleich, wie die der Ebenen AH und BG mit den sie schneidenden Ebenen Ae oder Bf, u. dgl. Denkt man sich daher ein solches Prisma, $BcFg$, zu dem andern $AdEh$ dergestalt gebracht, dass eine Kante Bb mit der ihr gleichen Aa, und an ihr die gleichen Kantenwinkel überein fallen; so fällt die Seitenebene BG auf die congruente AH und die Seitenebene bg auf die congruente ah, mithin auch jede Ecke des ersteren Prisma in eine des letzteren; das Prisma $BcFg$ wird gleichsam zwischen der es einhüllenden parallelepipedischen Fläche $AfHcA$ um das Stück AB von B gegen A geschoben und erfüllt so ganz das andere Prisma $AdEh$. Da nun in dieser Stellung beider Prismen jeder Unterschied zwischen ihnen aufgehoben erscheint, so sind sie congruent.

Zieht man demnach von diesen congruenten Prismen $AdEh$ und $BcFg$ das ihnen gemeinschaftliche $BdFh$, oder sie selbst von dem ganzen Prisma $AcEg$ ab, so müssen die Reste, welche gerade die mit einander zu vergleichenden $ACEG$ und $aceg$ sind, gleich gross sein.

II. In jedem anderen Falle muss, weil die Grundebenen der Parallelepipede Parellelogramme und einander gleich sind, in jeder Grundebene wenigstens Eine Höhe kleiner oder nur höchstens so gross als eine Seite der anderen Grundebene sein. Denn der Flächeninhalt eines Parallelogramms gleicht dem Producte aus einer Seite (der Grundlinie) in ihre Höhe, und jede Seite desselben ist wenigstens so gross, wenn nicht grösser, als die der anstossenden Seite zukommende Höhe; folglich ist der Flächeninhalt des Parallelogramms nie kleiner als das Product seiner beiden Höhen und nie grösser als das Product zweier zusammenstossenden Seiten. Bei zwei gleichen Parallelogrammen, wie hier die Grundebenen sind, ist demnach das Product der Höhen des einen sicher nie grösser als das Product zweier zusammenstossenden Seiten des anderen. Daraus folgt sogleich, dass nie beide Höhen des einen Parellelogramms zugleich grösser sein können als jede der Seiten des gleichen anderen Parellelogramms.

Sei nun die zur Seite AB (Taf. VII. Fig. 6.) der Grundebene AC gehörige Höhe, d. i. der Abstand der zwei parallelen Seiten AB und CD von einander, nicht grösser als die Seite ab der Grundebene des zweiten Parallelepipeds $aceg$. Dann kann man zwischen jenen Parallelen und ihren Verlängerungen durch jeden Punkt a wenigstens Eine der Seite ab gleiche Gerade ab führen. Zieht man zu dieser in demselben Abstande, wie die Parallelen ab und cd, die cd parallel, so ist das entstehende Parellelogramm ac dem andern ac gleich, weil sie die Grundlinien ab und ab sammt den zugehörigen Höhen gleich haben. Nach der Annahme ist aber auch $AC = ac$, daher auch noch $AC = ac$. Beide Parellelogramme

Digitized by Google

liegen überdiess zwischen einerlei Parallelen, mithin haben sie auch ihre Grundlinien gleich, $AB = ab$. Kurz das Parallelogramm ac hat mit jedem der zwei einander und ihm gleichen Parellelogramme AC und ac eine Grundlinie und ihre Höhe gleich.

Verlängern wir endlich die Parallelen ab und cb, und stellen wir auf sie die ihnen gleichen Grundkanten ab und cd des Parallelepipeds $aceg$; erweitern wir dann die durch AB und CD, so wie die durch ab und cd gehenden Seitenebenen, und die von der Grundebene $ACac$ gleichweit abstehenden, also in Eine Ebene zusammenfallenden Grundebenen EG und eg; so begrenzt dies Paar Grundebenen mit jenen zwei Paaren parelleler Seitenebenen ein neues Parallelepiped aceg. — Für die Darstellung bleibt es hierbei vortheilhaft, die Gerade ab so weit von der Grundebene AC und von ihr die Grundebene ac so weit entfernt zu halten, dass keine zwei Parallelepipede irgend wo zusammentreffen. — Mit diesem dritten Parallelepipede aceg hat nun, vermöge seiner Entstehung, jedes der zwei Parallelepipede $ACEG$ und $aceg$, ausser der Grundebene und Höhe, auch noch eine Grundkante und an ihr den Kantenwinkel gleich; mithin sind sie, dem vorigen Falle gemäss, ihm einzeln gleich, daher auch einander selbst gleich.

Der behauptete Satz gilt demnach ganz allgemein.

XL.

Ueber die höheren Differentialquotienten einiger Functionen.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

---

1. Wir wollen uns zunächst mit den höheren Differenzialquotienten der häufig vorkommenden Function

$$y = e^{-z^2} \quad (1)$$

beschäftigen. Durch successive Differenziation derselben, unter beständiger Anwendung der Sätze

Digitized by Google

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x, \quad \frac{d(pq)}{dx} = p\frac{dq}{dx} + q\frac{dp}{dx}$$

findet man folgende Reihe von Gleichungen:

$$\frac{dy}{dz} = -2ze^{-z^2}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = (+4z^2 - 2)e^{-z^2}$$

$$\frac{d^3y}{dz^3} = (-8z^3 + 12z)e^{-z^2}$$

$$\frac{d^4y}{dz^4} = (+16z^4 - 48z^2 + 12)e^{-z^2}$$

$$\frac{d^5y}{dz^5} = (-32z^5 + 160z^3 - 120z)e^{-z^2}$$

$$\frac{d^6y}{dz^6} = (+64z^6 - 480z^4 + 720z^2 - 120)e^{-z^2}$$

u. s. f.

und wir müssen nun in dieselben ein Gesetz zu bringen suchen.

Man bemerkt zunächst, dass die erste Vertikalreihe nach Potenzen von $2z$ fortgeht; wir wollen daher aus den Coeffizienten in den anderen ebenfalls so hohe Potenzen von 2 ausscheiden, als die daneben stehenden Potenzen von z sind, damit sämmtliche Horizontalreihen nach Potenzen von $2z$ fortlaufen. Es wird nun

$$\frac{dy}{dz} = -(2z)e^{-z^2}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = +[(2z)^2 - 2]e^{-z^2}$$

$$\frac{d^3y}{dz^3} = -[(2z)^3 - 6(2z)]e^{-z^2}$$

$$\frac{d^4y}{dz^4} = +[(2z)^4 - 12(2z)^2 + 12]e^{-z^2}$$

$$\frac{d^5y}{dz^5} = -[(2z)^5 - 20(2z)^3 + 60(2z)]e^{-z^2}$$

$$\frac{d^6y}{dz^6} = +[(2z)^6 - 30(2z)^4 + 180(2z)^2 - 120]e^{-z^2}$$

u. s. f.

und es handelt sich jetzt noch um die independente Bestimmung der Coeffizienten der Potenzen von $2z$, nämlich

1
1, 2,
1, 6,
1, 12, 12,
1, 20, 60,
1, 30, 180, 120
. . . . . .

Digitized by Google

Zerlegt man die Zahlen der zweiten Vertikalreihe in Factoren, so bemerkt man leicht das Gesetz: $2=2.1$, $6=3.2$, $12=4.3$, $20=5.4$, $30=6.5$, so dass diese Zahlen unter der Form $n(n-1)=2n_2$ zu stehen scheinen, wenn wir mit n_2 den zweiten Binomialkoeffizienten des Exponenten n bezeichnen. Die Zahlen der vierten Vertikalreihe haben den gemeinschaftlichen Factor $12=3.4$, und lassen sich auf folgende Weise schreiben: $12=3.4.\frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}$, $60=3.4.\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}$, $180=3.4.\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}$, was auf das Gesetz $3.4.n_4$ hinzudeuten scheint. Die Zahlen der vierten Vertikalreihe müssten demnach von der Form $4.5.6.n_6$ sein, auf welche auch die Zahl 120 für $n=6$ passt. Wir wollen nun dieses Gesetz der Coeffizienten annehmen und zusehen, ob es für den $(n+1)$ten Differenzialquotienten richtig bleibt, wenn es für den $n$ten gilt. Sei demnach

$$\frac{d^n y}{dz^n}=(-1)^n[(2z)^n-\overset{n}{A}_{n-2}(2z)^{n-2}+\overset{n}{A}_{n-4}(2z)^{n-4}-\ldots.]e^{-z^2} \quad (2)$$

und irgend ein Coeffizient

$$\overset{n}{A}_{n-2r}=(r+1)(r+2)\ldots.2r.n_{2r} \quad (3)$$

also der folgende

$$\overset{n}{A}_{n-2r-2}=(r+2)(r+3)\ldots.(2r+2)\,n_{2r+2} \quad (4)$$

so müsste gleichförmig für

$$\frac{d^{n+1}y}{dz^{n+1}}=(-1)^{n+1}[(2z)^{n+1}-\overset{n+1}{A}_{n-1}(2z)^{n-1}+\overset{n+1}{A}_{n-3}(2z)^{n-3}-\ldots.]e^{-z^2} \quad (5)$$

auch

$$\overset{n+1}{A}_{n-2r+1}=(r+1)(r+2)\ldots.2r.(n+1)_{2r}$$

und

$$\overset{n+1}{A}_{n-2r-1}=(r+2)(r+3)\ldots.(2r+2).(n+1)_{2r+2} \quad (7)$$

sein, wie man sogleich erkennt, wenn man $n+1$ für n setzt. Man erhält aber die Gleichung (5) aus (2) durch Differenziation der letzteren; diess gibt bei wirklicher Ausführung

$$\frac{d^{n+1}y}{dz^{n+1}}$$

$$=(-1)^{n+1}[(2z)^{n+1}-\overset{n}{A}_{n-2}(2z)^{n-1}+\overset{n}{A}_{n-4}(2z)^{n-3}-\ldots.]e^{-z^2}$$

$$+(-1)^{n+1}[-2n(2z)^{n-1}+2(n-2)\overset{n}{A}_{n-2}(2z)^{n-3}$$

$$-2(n-4)\overset{n}{A}_{n-4}(2z)^{n-5}+\ldots.]e^{-z^2}$$

Digitized by Google

Vergleicht man diess mit der Gleichung (5), so ist

$$\overset{n+1}{A}_{n-1} = 2n + \overset{n}{A}_{n-2}$$

$$\overset{n+1}{A}_{n-3} = 2(n-2)\overset{n}{A}_{n-2} + \overset{n}{A}_{n-4}$$

$$\overset{n+1}{A}_{n-5} = 2(n-4)\overset{n}{A}_{n-4} + \overset{n}{A}_{n-6}$$

u. s. f.

oder allgemein

$$\overset{n+1}{A}_{n-2r-1} = 2(n-2r)\overset{n}{A}_{n-2r} + \overset{n}{A}_{n-2r-2}.$$

Nehmen wir jetzt das oben ausgesprochene Bildungsgesetz für den $n$ten Differentialquotienten als richtig an und substituiren für $\overset{n}{A}_{n-2r}$ und $\overset{n}{A}_{n-2r-2}$ die in (3) und (4) gegebenen Werthe, so ist

$$\begin{aligned}\overset{n+1}{A}_{n-2r-1} &= 2(n-2r)(r+1)(r+2)\ldots.2r\,.\,n_{2r} \\ &\quad + (r+2)(r+3)\ldots.(2r+2)\,n_{2r+2} \\ &= (r+2)(r+3)\ldots.2r\,[2(n-2r)(r+1)n_{2r} + (2r+1)(2r+2)n_{2r+2}].\end{aligned}$$

Es ist aber $(n-2r)\,n_{2r} = (2r+1)\,n_{2r+1}$ und $2(r+1) = 2r+2$, folglich

$$\overset{n+1}{A}_{n-2r-1} = (r+2)(r+3)\ldots.2r(2r+1)(2r+2)\,[n_{2r+1} + n_{2r+2}]$$

oder unter Anwendung eines bekannten Satzes von den Binomialkoeffizienten

$$\overset{n+1}{A}_{n-2r-1} = (r+2)(r+3)\ldots.(2r+2)\,(n+1)_{2r+2}.$$

Dieser Ausdruck ist aber mit dem in (7) identisch, welcher letztere aus (4) dadurch abgeleitet worden war, dass $n+1$ für n gesetzt wurde. Das Bildungsgesetz unserer Coeffizienten gilt daher für den $(n+1)$ten Differenzialquotienten, wenn es für den $n$ten richtig ist, d. h. es gilt allgemein, da es für den ersten Differentialquotienten Gültigkeit besitzt.

Setzen wir nun in der Gleichung (2) die Werthe der A ein, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^n(\bar{e}^{z^2})}{dz^n} \\ = (-1)^n[(2z)^n - 2n_2(2z)^{n-2} + 3\,.\,4n_4(2z)^{n-4} - 4\,.\,5\,.\,6n_6(2z)^{n-6} \\ + \ldots]\bar{e}^{z^2}\end{aligned}\right\} (8)$$

Nimmt man $z = au$, wo a eine Constante ist, so wird $dz^n = a^n du^n$, folglich

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^n(e^{-a^2u^2})}{du^n}\\ &=(-a)^n\left[(2au)^n-2n_2(2au)^{n-2}+3.4n_4(2au)^{n-4}-\ldots.\right]e^{-a^2u^2}\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

womit die gestellte Aufgabe allgemein gelöst ist.

II. Aus dem Vorigen lässt sich auch leicht der Werth des Differenzialquotienten

$$\frac{d^n(ue^{-a^2u^2})}{du^n}$$

ableiten.

Aus dem bekannten Satze

$$\frac{d^n(pq)}{du^n}=p\frac{d^nq}{du^n}+\frac{n}{1}\cdot\frac{dp}{du}\cdot\frac{d^{n-1}q}{du^{n-1}}+\ldots.$$

erhält man nämlich für $p=u$, $q=e^{-a^2u^2}$

$$\frac{d^n(ue^{-a^2u^2})}{du^n}=u\frac{d^n(e^{-a^2u^2})}{du^n}+n\frac{d^{n-1}(e^{-a^2u^2})}{du^{n-1}};$$

folglich, wenn wir für die rechte Seite die gefundenen Werthe aus (9) substituiren und wieder $\overset{n}{A}_{n-2}$, $\overset{n}{A}_{n-4}$ etc. zur Abkürzung brauchen,

$$\frac{d^n(ue^{-a^2u^2})}{du^n}$$

$$=(-a)^nu\left[(2au)^n-\overset{n}{A}_{n-2}(2au)^{n-2}+\overset{n}{A}_{n-4}(2au)^{n-4}-\ldots.\right]e^{-a^2u^2}$$

$$+(-a)^{n-1}n\left[(2au)^{n-1}-\overset{n-1}{A}_{n-3}(2au)^{n-3}+\overset{n-1}{A}_{n-5}(2au)^{n-5}-\ldots.\right]e^{-a^2u^2}$$

$$=\tfrac{1}{2}(-1)^na^{n-1}\left[(2au)^{n+1}-\overset{n}{A}_{n-2}(2au)^{n-1}+\overset{n}{A}_{n-4}(2au)^{n-3}-\ldots.\right]e^{-a^2u^2}$$

$$+\tfrac{1}{2}(-1)^na^{n-1}\left[-2n(2au)^{n-1}+2n\overset{n-1}{A}_{n-3}(2au)^{n-3}-\ldots.\right]e^{-a^2u^2}$$

Nehmen wir die Coeffizienten gleicher Potenzen von $2au$ zusammen und bezeichnen die neuen Coeffizienten mit B_{n+1}, B_{n-1}, B_{n-3} etc., so ist

$$\begin{aligned}B_{n-2r+1}&=\overset{n}{A}_{n-2r}+2n\overset{n-1}{A}_{n-2r+1}\\&=(r+1)(r+2)\ldots.2r\,.\,n_{2r}\\&\qquad+2n\,.\,r(r+1)(r+2)\ldots.(2r-2)\,.\,(n-1)_{2r-2}\\&=(r+1)(r+2)\ldots.(2r-2)\left[(2r-1)2r.n_{2r}+2nr\,.\,(n-1)_{2r-2}\right]\\&=(r+1)(r+2)\ldots.(2r-2)\,.\,2r\left[(2r-1)n_{2r}+n\,.\,(n-1)_{2r-2}\right].\end{aligned}$$

Nun ist aber $n\,.\,(n-1)_{2r-2}=(2r-1)\,.\,n_{2r-1}$, folglich

Digitized by Google

$$B_{n-2r+1} = (r+1)(r+2)\ldots(2r-2)(2r-1)\,2r\,[n_{2r} + n_{2r-1}]$$
$$= (r+1)(r+2)\ldots 2r\,.\,(n+1)_{2r}.$$

Setzen wir nun $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$ so wird

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^n(ue^{-a^2u^2})}{du^n} \\ &= \tfrac{1}{2}(-1)^n a^{n-1}\left[(2au)^{n+1} - 2\,(n+1)_2\,(2au)^{n-1}\right. \\ &\qquad \left. + 3\,.\,4\,(n+1)_4\,(2au)^{n-3} - \ldots.\right]e^{-a^2u^2} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Wir wollen nun einige Anwendungen der gefundenen Formeln (9) und (10) mittheilen.

III. Es sind folgende Integrale bekannt:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.\,\frac{1}{\sqrt{k}} = \int_0^\infty e^{-kx^2}\,dx \quad (11)$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.\,\frac{1.3.5.\ldots.(2m-1)}{k^m}\,.\,\frac{1}{\sqrt{k}} = \int_0^\infty x^{2m} e^{-kx^2}\,dx \quad (12)$$

Setzen wir im ersten Integrale $k = u^2$ und differenziiren $n$mal nach u, wobei x wie früher a constant für die Integration bleibt, so wird

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.\,\frac{d^n(u^{-1})}{du^n} = \int_0^\infty \frac{d^n(e^{-x^2u^2})}{du^n}\,dx.$$

Führt man die Differenziation auf der linken Seite aus, setzt unter dem Integrale rechts für $\frac{d^n(e^{-x^2u^2})}{du^n}$ seinen Werth aus der Gleichung (9) für $a = x$, und integrirt die einzelnen Glieder rechts nach Formel (12), so ergiebt sich folgender arithmetische Satz:

$$\left.\begin{aligned} &1.2.3.\ldots.n \\ &= 1.3.5.\ldots.(2n-1) - 2n_2\,.\,\frac{1.3.5.\ldots.(2n-3)}{2} + 3.4n_4\,.\,\frac{1.3.5.\ldots.(2n-5)}{2^2} - \ldots. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Aehnliche und allgemeinere Sätze lassen sich durch ein ähnliches Verfahren leicht in grösserer Anzahl ableiten. Wichtiger als dieses ist, dass man aus den oben gefundenen Differenzialquotienten die einiger anderen Funktionen ableiten kann, wie man sogleich sehen wird.

IV. Man setze in Formel (11) $k = 1 + u^2$, so ist

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.\,\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \int_0^\infty e^{-u^2x^2} e^{-x^2}\,dx,$$

folglich

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.\,\frac{d^n}{du^n}\left[\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right] = \int_0^\infty \frac{d(e^{-x^2u^2})}{du^n} e^{-x^2}\,dx$$

Digitized by Google

Substituirt man für den Differenzialquotienten unter dem Integralzeichen den Ausdruck (9) für $a = x$, integrirt jedes einzelne Glied nach Formel (12) für $k = 1 + u^2$ und $m = n$, $n-1$, $n-2$, u. s. w., so wird

$$\frac{d^n}{du^n}\left[\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right]$$

$$= (-1)^n \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n} \cdot \frac{(2u)^n}{(\sqrt{1+u^2})^{2n+1}}\right.$$

$$\left. - 2n_2 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)}{2^{n-1}} \cdot \frac{(2u)^{n-2}}{(\sqrt{1+u^2})^{2n-1}} + \ldots\right]$$

und wenn man zur Abkürzung

$$\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = U \qquad (14)$$

setzt, so ergiebt sich

$$\frac{d^n U}{du^n}$$

$$= (-1)^n \, 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1) \left[u^n U^{2n+1} - \frac{2n_2}{4n-2} u^{n-2} U^{2n-1} + \ldots\right]$$

oder

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(-1)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)} \cdot \frac{d^n U}{du^n} \\ &= u^n U^{2n+1} - \frac{2n_2}{4n-2} u^{n-2} U^{2n-1} + \frac{3 \cdot 4n_4}{(4n-2)(4n-6)} u^{n-4} U^{2n-3} - \ldots \end{aligned}\right\} (15)$$

Ein allgemeines Glied der vorliegenden Reihe würde folgendes sein:

$$\pm \frac{(r+1)(r+2)(r+3) \ldots 2r \cdot n_{2r}}{(4n-2)(4n-6)(4n-10) \ldots (4n-4r+2)} u^{n-2r} U^{2n-2r+1}$$

aus welchem das Gesetz des Fortganges leicht zu übersehen ist. Man kann der Gleichung (15) noch eine andere Gestalt geben. Sei nämlich $u = \tan \varphi$, so wird $U = \cos \varphi$, und in dem allgemeinen Gliede

$$u^{n-2r} U^{2n-2r+1} = \cos^{n+1}\varphi \cdot \sin^{n-2r}\varphi,$$

und wir erhalten jetzt

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(-1)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)} \cdot \frac{d^n U}{du^n} \\ &= \cos^{n+1}\varphi \left[\sin^n\varphi - \frac{2n_2}{4n-2} \sin^{n-2}\varphi + \frac{3 \cdot 4n_4}{(4n-2)(4n-6)} \sin^{n-4}\varphi - \ldots\right] \end{aligned}\right\} (16)$$

V. Nimmt man in Formel (11) wieder $k = 1 + u^2$ und multiplizirt beiderseits mit dem constanten u, so ist

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}=\int_0^\infty u e^{-u^2x^2}e^{-k^2}\,dx,$$

folglich

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{d^n}{du^n}\left[\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right]=\int_0^\infty \frac{d^n(ue^{-u^2x^2})}{du^n}e^{-x^2}\,dx.$$

Substituirt man unter dem Integralzeichen den Werth des Differenzialquotienten aus Gleichung (10) für $a=x$ und integrirt die einzelnen Glieder nach Formel (12) für $k=1+u^2$ und $m=n$, $n-1$ u. s. w., so ergiebt sich:

$$\frac{d^n}{du^n}\left[\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right]$$
$$=\frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{1.3.5....(2n-1)}{2^n}\cdot\frac{(2u)^{n+1}}{(\sqrt{1+u^2})^{2n+1}}\right.$$
$$\left.-2(n+1)_2\cdot\frac{1.3.5....(2n-3)}{2^{n-1}}\cdot\frac{(2u)^{n-1}}{(\sqrt{1+u^2})^{2n-1}}+....\right]$$

und wenn man

$$\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}=U \quad (17)$$

setzt,

$$\frac{d^nU}{du^n}$$
$$=\frac{(-1)^n.1.3.5....(2n-1)}{u^n}\left[U^{2n+1}-\frac{(2n+1)_2}{4n-2}U^{2n-1}+....\right]$$

oder

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(-1)^n}{1.3.5....(2n-1)}\cdot\frac{d^nU}{du^n}\\ &=\frac{1}{u^n}\left[U^{2n+1}-\frac{2(n+1)_2}{4n-2}U^{2n-1}+\frac{3.4(n+1)_4}{(4n-2)(4n-6)}U^{2n-3}-....\right]\end{aligned}\right\}(18)$$

wobei das allgemeine Glied der Reihe durch folgende Formel dargestellt wird:

$$\pm\frac{(r+1)(r+2)(r+3)....2r(n+1)_{2r}}{(4n-2)(4n-6)(4n-10)....(4n-4r+2)}U^{2n-2r+1},$$

aus welcher das Bildungsgesetz der Coeffizienten erhellet. Nimmt man noch $u=\tan\varphi$, so wird $U=\sin\varphi$, und man bekommt:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(-1)^n}{1.3.5....(2n-1)}\cdot\frac{d^nU}{du^n}\\ &=\cos^n\varphi\left[\sin^{n+1}\varphi-\frac{2(n+1)_2}{4n-2}\sin^{n-1}\varphi+\frac{3.4(n+1)_4}{(4n-2)(4n-6)}\sin^{n-3}\varphi-....\right]\end{aligned}\right\}(19)$$

Die vorstehende Gleichung enthält die Auflösung der vom Herrn

Digitized by Google

Herausgeber im 1sten Hefte des 4ten Theiles d. Arch. S. 111 gestellten Aufgabe. Die dort gegebenen Ausdrücke stellen sich unter die obige Form, sobald man in ihnen $\cos\varphi\,(1-\sin\varphi^2)$ für $\cos^3\varphi$, $\cos^3\varphi\,(1-\sin^2\varphi)$ für $\cos^5\varphi$ u.s.w. setzt, die noch nöthigen Multiplicationen ausführt und Alles nach Potenzen von $\sin\varphi$ ordnet.

VI. Setzt man in den Gleichungen (14), (15) und (17), (18) $u\sqrt{-1}$ für u, so erhält man die folgenden beiden Sätze:

Für

$$U=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

ist

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{1.3.5....(2n-1)}\cdot\frac{d^nU}{du^n}\\ &=u^nU^{2n+1}\left[1+\frac{2n_2}{4n-2}\left(\frac{1}{uU}\right)^2+\frac{3.4n_4}{(4n-2)(4n-6)}\left(\frac{1}{uU}\right)^4+....\right]\end{aligned}\right\}(20)$$

und für

$$U=\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$$

ist

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{1.3.5....(2n-1)}\cdot\frac{d^nU}{du^n}\\ &=\frac{U^{2n+1}}{u^n}\left[1+\frac{2(n+1)_2}{4n-2}\cdot\frac{1}{U^2}+\frac{3.4(n+1)_4}{(4n-2)(4n-6)}\cdot\frac{1}{U^4}+....\right]\end{aligned}\right\}(21)$$

Nun hat aber Euler folgendes Resultat gefunden:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^n(1-u^2)^{-\frac{1}{2}}}{du^n}\\ &=\frac{n!.u^n}{(1-u^2)^{\frac{2n+1}{2}}}\left[1+\tfrac{1}{2}n_2\cdot\frac{1}{u^2}+\frac{1.3}{2.4}n_4\cdot\frac{1}{u^4}+....\right]\end{aligned}\right\}(22)$$

Vergleichen wir diess für $\sqrt{1-u^2}=U$ mit Formel (20), so ergiebt sich folgender Satz:

Für

$$U=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

ist

$$1+\frac{2n_2}{4n-2}\left(\frac{1}{uU}\right)^2+\frac{3.4n_4}{(4n-2)(4n-6)}\left(\frac{1}{uU}\right)^4+....$$
$$=\frac{1.2.3....n}{1.3.5....(2n-1)}\left[1+\tfrac{1}{2}n_2\frac{1}{u^2}+\frac{1.3}{2.4}n_4\cdot\frac{1}{u^4}+....\right]$$

oder für $u=\frac{1}{\sqrt{x}}$

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} &1+\frac{2n_2}{2n-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)+\frac{3.4n_4}{(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\ldots. \\ &=\frac{1.2.3\ldots.n}{1.3.5\ldots.(2n-1)}\left[1+\tfrac{1}{2}n_2x+\frac{1.3}{2.4}n_4x^2+\ldots.\right] \end{aligned}\right\}(23)$$

Diese Gleichung enthält die Formel (13) als speciellen Fall für $x=0$. Nimmt man $x=1$, so erhält man eine bekannte Eigenschaft der Binomialkoeffizienten.

Könnte man das vorliegende Theorem unabhängig von dem Vorigen beweisen, so liesse sich durch dasselbe umgekehrt die Gleichung (20), so wie die daraus folgende (21) aus dem Eulerschen Resultate ableiten.

XLI.

Aufgaben über Maxima und Minima.

Von

Herrn L. Mossbrugger,

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

I.

Im zweiten Bande dieses Archivs Seite 405 wurde für das grösste, in einem gegebenen rhombischen Octaeder beschriebene Ellipsoid die Gleichung

$$\left\{\frac{x\sqrt{3}}{a}\right\}^2+\left\{\frac{y\sqrt{3}}{b}\right\}^2+\left\{\frac{z\sqrt{3}}{c}\right\}^2=1 \quad (1)$$

gefunden, worin $2a$, $2b$, $2c$ die Grössen der drei Achsen des Octaeders bezeichnen; wir wollen nun umgekehrt dasjenige unter allen Octaedern mit gleichen Achsenrichtungen zu bestimmen suchen, dessen Seitenflächen das Ellipsoid (1) ebenfalls berühren, und das zugleich den kleinsten Inhalt hat.

Es sei $ABCDEF$ (Taf. VII. Fig. 7.) das verlangte Octaeder AC, BD und EF seien die Achsen desselben, und zugleich die der x, y und z; γ, β und α die Winkel, welche die Achsen der x und y, der x und z, der y und z einschliessen; ferner setzen wir $\angle ABC=\varphi$, $\angle CAB=\psi$, und schreiben in der Gleichung (1) der Kürze wegen a_1, b_1 und c_1 statt $\frac{a}{\sqrt{3}}$, $\frac{b}{\sqrt{3}}$ und $\frac{c}{\sqrt{3}}$, so ha-

ben wir, wenn x_1, y_1, z_1; $-x_2, y_2, z_2$; $x_3, -y_3, z_3$; $-x_4, -y_4, z_4$; $x_5, y_5, -z_5$; $-x_6, y_6, -z_6$; $x_7, -y_7, -z_7$; $-x_8, -y_8, -z_8$ die Coordinaten der Berührungspunkte der Seitenflächen ABE, BCE, AED, CED, ABF, CBF, ADF und CDF mit dem Ellipsoid bezeichnen, für dieses und für jene die Gleichungen:

$$\left\{\frac{x}{a_1}\right\}^2 + \left\{\frac{y}{b_1}\right\}^2 + \left\{\frac{z}{c_1}\right\}^2 = 1 \qquad (2)$$

$$\frac{xx_1}{a_1^2} + \frac{yy_1}{b_1^2} + \frac{zz_1}{c_1^2} = 1 \qquad (3)$$

$$-\frac{xx_2}{a_1^2} + \frac{yy_2}{b_1^2} + \frac{zz_2}{c_1^2} = 1 \qquad (4)$$

$$\frac{xx_3}{a_1^2} - \frac{yy_3}{b_1^2} + \frac{zz_3}{c_1^2} = 1 \qquad (5)$$

$$-\frac{xx_4}{a_1^2} - \frac{yy_4}{b_1^2} + \frac{zz_4}{c_1^2} = 1 \qquad (6)$$

$$\frac{xx_5}{a_1^2} + \frac{yy_5}{b_1^2} - \frac{zz_5}{c_1^2} = 1 \qquad (7)$$

$$-\frac{xx_6}{a_1^2} + \frac{yy_6}{b_1^2} - \frac{zz_6}{c_1^2} = 1 \qquad (8)$$

$$\frac{xx_7}{a_1^2} - \frac{yy_7}{b_1^2} - \frac{zz_7}{c_1^2} = 1 \qquad (9)$$

$$-\frac{xx_8}{a_1^2} - \frac{yy_8}{b_1^2} - \frac{zz_8}{c_1^2} = 1 \qquad (10)$$

Setzen wir die senkrechte Höhe von E bis auf die Ebene $ABCD$ gleich h, und den Inhalt des Octaeders gleich K, so ist:

$$K = \tfrac{2}{3} AB \,.\, BC \,.\, h \,.\, \sin\varphi$$

und

$$h = \frac{2EO}{\sin\gamma}\sqrt{\sin\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha+\beta-\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha-\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(-\alpha+\beta+\gamma)}{2}}$$

folglich

$$K = \tfrac{4}{3} AB \,.\, BC \,.\, EO \,.\, \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma} \,.$$

$$\sqrt{\sin\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha+\beta-\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha-\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(-\alpha+\beta+\gamma)}{2}} \qquad (11)$$

Um die Grössen AB, BC, EO zu bestimmen, setzen wir in der Gleichung (3) $z = 0$, so ist die Gleichung von AB folgende:

$$y = \frac{b_1^2}{y_1} - \frac{b_1^2}{a_1^2} \,.\, \frac{x_1}{y_1} \,.\, x \qquad (12)$$

Aus derselben Gleichung erhalten wir aber auch, wenn wir nach einander $z = 0$ und $y = 0$; $z = 0$ und $x = 0$; $x = 0$ und $y = 0$ setzen:

Digitized by Google

$$x = AO = \frac{a_1^2}{x_1},\ y = BO = \frac{b_1^2}{y_1},\ z = EO = \frac{c_1^2}{z_1}.$$

Dadurch erhalten wir aus den Dreiecken OAB und BOC:

$$AB = \frac{1}{x_1 y_1}\sqrt{a_1^4 y_1^2 + b_1^4 x_1^2 - 2a_1^2 b_1^2 x_1 y_1 \cos\gamma},$$

$$BC = \frac{1}{x_1 y_1}\sqrt{a_1^4 y_1^2 + b_1^4 x_1^2 + 2a_1^2 b_1^2 x_1 y_1 \cos\gamma}.$$

Führen wir die gefundenen Werthe von AB, BC und EO in No. 11 ein, und setzen der Kürze wegen:

$$\sqrt[4]{\sin\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha+\beta-\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha-\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(-\alpha+\beta+\gamma)}{2}} = M$$

so ist

$$K = \frac{c_1^2 M}{x_1^2 y_1^2 z_1}\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}\cdot\sqrt{\frac{\{a_1^4 y_1^2 + b_1^4 x_1^2 - 2a_1^2 b_1^2 x_1 y_1\cos\gamma\}}{\{a_1^4 y_1^2 + b_1^4 x_1^2 + 2a_1^2 b_1^2 x_1 y_1\cos\gamma\}}} \quad (13)$$

Wir finden aber auch für die Gleichung von AB:

$$y = \frac{a_1^2}{x_1}\cdot\frac{\sin\psi}{\sin(\gamma+\psi)} - x\cdot\frac{\sin\psi}{\sin(\gamma+\psi)} \quad (14)$$

Aus (12) und (14) folgt:

$$\frac{b_1^2}{a_1^2}\cdot\frac{x_1}{y_1} = \frac{\sin\psi}{\sin(\gamma+\psi)},$$

woraus wir

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{b_1^2 x_1 \sin\gamma}{a_1^2 y_1^2 - b_1^2 x_1\cos\gamma},$$

also

$$\sin\psi = \frac{b_1^2 x_1 \sin\gamma}{\sqrt{a_1^4 y_1^2 + b_1^4 x_1^2 - 2a_1^2 b_1^2 x_1 y_1\cos\gamma}}$$

und

$$\cos\psi = \frac{a_1^2 y_1 - b_1^2 x_1\cos\gamma}{\sqrt{a_1^4 y_1^2 + b_1^4 x_1^2 - 2a_1^2 b_1^2 x_1 y_1\cos\gamma}}.$$

erhalten.

Weil aber auch $AB : BC = \sin(\varphi+\psi) : \sin\psi$, so ist:

$$\sin(\varphi+\psi) = \frac{b_1^2 x_1 \sin\gamma}{\sqrt{a_1^4 y_1^2 + b_1^4 x_1^2 + 2a_1^2 b_1^2 x_1 y_1\cos\gamma}}.$$

Da endlich

$$AC = \frac{2a_1^2}{x_1} \text{ und auch } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB\,.\,BC\,.\cos\varphi},$$

Digitized by Google

so finden wir nach der Substitution der Werthe von AB und BC und der Gleichsetzung beider Werthe von AC

$$\cos\varphi = \frac{b_1^4 x_1^2 - a_1^4 y_1^2}{\sqrt{\{a_1^4 y_1^2 + b_1^4 x_1^2 - 2a_1^2 b_1^2 x_1 y_1 \cos\gamma\}\{a_1^4 y_1^2 + b_1^4 x_1^2 + 2a_1^2 b_1^2 x_1 y_1 \cos\gamma\}}}$$

also auch

$$\sin\varphi = \frac{2a_1^2 b_1^2 x_1 y_1 \sin\gamma}{\sqrt{\{a_1^4 y_1^2 + b_1^4 x_1^2 - 2a_1^2 b_1^2 x_1 y_1 \cos\gamma\}\{a_1^4 y_1^2 + b_1^4 x_1^2 + 2a_1^2 b_1^2 x_1 y_1 \cos\gamma\}}}$$

Führen wir diesen Werth von $\sin\varphi$ in der Gleichung (13) ein, so ist

$$K = \frac{2a_1^2 b_1^2 c_1^2 M}{x_1 y_1 z_1} \quad (15)$$

Um den kleinsten Werth von K zu finden, betrachten wir z_1 als eine Function von x_1 und y_1, und setzen die Werthe von $\frac{dK}{dx_1}$ und $\frac{dK}{dy_1}$ gleich Null, bestimmen alsdann aus den resultirenden Gleichungen die Werthe von x_1 und y_1, so erhalten wir:

$$\frac{dK}{dx_1} = -\frac{2a_1^2 b_1^2 c_1^2 . M}{x_1^2 y_1 z_1^2}\left\{z_1 + x_1 \frac{dz_1}{dx_1}\right\}$$

$$\frac{dK}{dy_1} = -\frac{2a_1^2 b_1^2 c_1^2 . M}{x_1 y_1^2 z_1^2}\left\{z_1 + y_1 \frac{dz_1}{dy_1}\right\}$$

Nach No. 2 ist aber $z_1 = c_1\sqrt{1 - \left\{\frac{x_1}{a_1}\right\}^2 - \left\{\frac{y_1}{b_1}\right\}^2}$, also auch

$$\frac{dz_1}{dx_1} = \frac{-c_1 x_1}{a_1^2\sqrt{1 - \left\{\frac{x_1}{a_1}\right\}^2 - \left\{\frac{y_1}{b_1}\right\}^2}},$$

$$\frac{dz_1}{dy_1} = \frac{-c_1 y_1}{b_1^2\sqrt{1 - \left\{\frac{x_1}{a_1}\right\}^2 - \left\{\frac{y_1}{b_1}\right\}^2}};$$

mithin sind die Bestimmungsgleichungen für x_1, y_1 und z_1:

$$a_1^2 z_1\sqrt{1 - \left\{\frac{x}{a_1}\right\}^2 - \left\{\frac{y_1}{b_1}\right\}^2} = c_1 x_1^2 \quad (16)$$

$$b_1^2 z_1\sqrt{1 - \left\{\frac{x_1}{a_1}\right\}^2 - \left\{\frac{y_1}{b_1}\right\}^2} = c_1 y_1^2 \quad (17)$$

$$z_1 = c_1\sqrt{1 - \left\{\frac{x_1}{a_1}\right\}^2 - \left\{\frac{y_1}{b_1}\right\}^2} \quad (18)$$

woraus wir leicht

Digitized by Google

$$x_1 = \frac{a_1}{\sqrt{3}},\ y_1 = \frac{b_1}{\sqrt{3}},\ z_1 = \frac{c_1}{\sqrt{3}} \ldots . \quad (19)$$

finden; setzen wir statt der Grössen a_1, b_1, c_1 ihre oben angegebenen Werthe, so ist

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{a}{3},\ y_1 = \frac{b}{3},\ z_1 = \frac{c}{3}; \\ \text{Auf gleiche Art finden wir} & \\ x_2 &= -\frac{a}{3},\ y_2 = \frac{b}{3},\ z_2 = \frac{c}{3}; \\ x_3 &= \frac{a}{3}, y_3 = -\frac{b}{3},\ z_3 = \frac{c}{3}; \\ x_4 &= -\frac{a}{3}, y_4 = -\frac{b}{3},\ z_4 = \frac{c}{3}; \\ x_5 &= \frac{a}{3},\ y_5 = \frac{b}{3}, z_5 = -\frac{c}{3}; \\ x_6 &= -\frac{a}{3},\ y_6 = \frac{b}{3}, z_6 = -\frac{c}{3}; \\ x_7 &= \frac{a}{3}, y_7 = -\frac{b}{3}, z_7 = -\frac{c}{3}; \\ x_8 &= -\frac{a}{3}, y_8 = -\frac{b}{3}, z_8 = -\frac{c}{3}. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Für den Inhalt des gesuchten Körpers finden wir daher

$$K = 8\frac{abc}{3}\sqrt{\sin\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha+\beta-\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha-\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(-\alpha+\beta+\gamma)}{2}} \ldots . \quad (21)$$

oder auch

$$K = 8a_1b_1c_1\sqrt{3}\cdot\sqrt{\sin\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha+\beta-\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha-\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(-\alpha+\beta+\gamma)}{2}}$$

$$\ldots . \quad (22)$$

Vergleichen wir die Gleichungen (2), (19) und (22) mit jenen in (1), (20) und (21), so finden wir nach den drei erstern:

Dass, wenn um irgend ein gegebenes dreiaxiges Ellipsoid, von welchem allgemein drei beliebige, jedoch einander zugeordnete Durchmesser die Grössen $2A$, $2B$ und $2C$ haben, das kleinste rhombische Octaeder, dessen Ecken in den Verlängerungen dieser Durchmesser liegen, beschrieben werden soll; alsdann $\frac{A}{\sqrt{3}}$, $\frac{B}{\sqrt{3}}$ und $\frac{C}{\sqrt{3}}$ die absoluten Grössen (ohne Berücksichtigung der Zeichen) der drei Coordinaten der acht Berührungspunkte des Ellipsoids mit den Seitenflächen des Octaeders sind, ferner dass

$$K' = 8ABC\sqrt{3}\sqrt{\sin\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha+\beta-\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha-\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(-\alpha+\beta+\gamma)}{2}}$$

Digitized by Google

der Inhalt dieses kleinsten Octaeders ist (wo α, β und γ wie oben die Winkel bezeichnen, welche die Durchmesser $2B$ und 2C, $2A$ und $2C$, $2A$ und $2B$ einschliessen).

Endlich ergiebt sich aus den drei letzten Gleichungen No. 1, 20 und 21, dass, wenn in ein gegebenes Octaeder, dessen Achsen (Diagonalen) $2a$, $2b$ und $2c$ sind, ein grösstes Ellipsoid einbeschrieben ist, und alsdann um dieses letztere wieder das kleinste Octaeder, dessen Ecken auf den Verlängerungen der Durchmesser $2a$, $2b$, $2c$ liegen, beschrieben werden soll, dieses letztere mit dem gegebenen Octaeder identisch wird; so wie auch die Berührungspunkte der Seitenflächen des erstern gegebenen Octaeders mit dem grössten Ellipsoid, mit jenen der entsprechenden Seitenflächen des gesuchten kleinsten Octaeders mit dem Ellipsoid zusammenfallen.

II.

Es ist ein Parallelogramm $ABCD$ (Taf. VII. Fig. 8.) gegeben; man soll die grösste Ellipse in und die kleinste um dasselbe beschreiben.

Für den ersten Fall seien $AB = a$, $AC = b$ die Seiten, und $CAB = \alpha$ der von diesen eingeschlossene Winkel des Parallelogramms; ferner sei für ein rechtwinkliges Coordinatensystem

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0 \ldots . \quad (1)$$

die allgemeine Gleichung für einen Kegelschnitt.

Nehmen wir aber AB als Achse der x und AC als Achse der y, so ist, wenn x' und y' die neuen Coordinaten bezeichnen:

$$x = x' + y' \cos \alpha, \quad y = y' \sin \alpha.$$

Führen wir diese Werthe von x und y in der Gleichung (1) ein, so erhält sie die Form

$$A'y'^2 + 2B'x'y' + Cx'^2 + 2D'y' + 2Ex' + F = 0 \ldots . \quad (2)$$

wo

$$A' = A \sin \alpha^2 + 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos \alpha^2$$
$$B' = B \sin \alpha + C \cos \alpha$$
$$D' = D \sin \alpha + E \cos \alpha$$

ist.

Für $x' = 0$ erhalten wir aus (2)

$$y' = -\frac{D'}{A'} \pm \sqrt{\frac{D'^2 - A'F}{A'}}.$$

Da aber die Ellipse die Seite AC berühren soll, so kann y' nur einen einzigen Werth haben, folglich muss

$$D'^2 - A'F = 0 \ldots . \quad (3)$$

Digitized by Google

sein. Dadurch wird aber, wenn I der Berührungspunkt der Ellipse mit der Seite AC ist,

$$AI = y' = -\frac{D'}{A'}.$$

Ganz auf gleiche Art erhalten wir, wenn M der Berührungspunkt der Ellipse mit AB ist:

$$E^2 - CF = 0 \ldots . \quad (4)$$

und

$$AM = x' = -\frac{E}{C}.$$

Um die Ordinate BL des Berührungspunktes L der Ellipse mit der Seite BD zu erhalten, setzen wir in der Gleichung (2) $x' = a$, wodurch wir

$$y' = -\frac{B'a + D'}{A'} \pm \frac{\sqrt{\{B'a + D'\}^2 - A'\{Ca^2 + 2Ea + F\}}}{A'}$$

erhalten. Da aber auch in diesem Falle y' nur einen einzigen Werth haben kann, so muss die Gleichung

$$\{B'a + D'\}^2 - A'\{Ca^2 + 2Ea + F\} = 0 \ldots . \quad (5)$$

statt finden; daher wird

$$BL = y' = -\frac{B'a + D'}{A'}.$$

Ebenso bekommen wir für $y' = b$ die Gleichung

$$\{B'b + E\}^2 - C\{A'b^2 + 2D'b + F\} = 0 \ldots . \quad (6)$$

und wenn sich die Ellipse und die Seite CD in K berühren, so ist

$$CK = x' = -\frac{B'b + E}{C}.$$

Aus der Verbindung der Gleichungen (3), (4), (5) und (6) ergeben sich folgende zwei:

$$\frac{1}{2F^2}\{B'^2F^2 - D'^2E^2\}a + \frac{1}{F}\{B'D'F - ED'^2\} = 0 \ldots . \quad (7)$$

$$\frac{1}{2F^2}\{B'^2F^2 - D'^2E^2\}b + \frac{1}{F}\{B'EF - D'E^2\} = 0 \ldots . \quad (8)$$

Vervielfachen wir die erste dieser Gleichungen mit b und die andere mit a, subtrahiren alsdann die Producte, so erhalten wir $D' = \frac{Ea}{b}$. Aus No. 7. ist aber $B' = -\frac{D'}{a} \pm \frac{D'}{aF}\{Ea + F\}$.

Digitized by Google

Führen wir in dieser Gleichung den Werth von D' ein, so haben wir für das Zeichen +

$$B' = \frac{E^2 a}{Fb} \ldots . \quad (9)$$

und für das Zeichen —

$$B' = -\frac{E}{Fb}\{Ea + 2F\} \ldots . \quad (10)$$

Werden die Werthe von A', C, D' und der letzte von B' in No. (2) eingeführt, so ist die Gleichung der Ellipse:

$$\frac{E^2a^2}{Fb^2}y'^2 - \frac{2E}{Fb}\{Ea+2F\}x'y' + \frac{E^2}{F}x'^2 + \frac{2Ea}{b}y' + 2Ex' + F = 0 \ldots . \quad (11)$$

Aus dieser ist

$$y' = \frac{b}{Ea^2}\{(Ea+2F)x' - Fa\} \pm \frac{2b}{Ea^2}\sqrt{F(Ea+F)(x'^2 - ax')} \ldots . \quad (12)$$

Wird diese Gleichung mit $\sin\alpha \, . \, dx'$ multiplicirt, alsdann integrirt, und das Integral von $x' = 0$ bis $x' = a$ genommen, so erhalten wir für das Zeichen + den Flächenraum der Figur $AIKLB$, und für das Zeichen — die Fläche der Figur $AIMBL$. Im ersten Falle erhalten wir:

$$\sin\alpha \int y' dx' = \frac{b\sin\alpha}{2Ea^2}\{(Ea+2F)x'^2 - 2Fax'\}$$

$$+ \frac{b\sin\alpha}{2Ea^2}(2x' - a)\sqrt{F(Ea+F)(x'^2 - ax')}$$

$$- \frac{b\sin\alpha}{4E}\sqrt{F(Ea+F)} \cdot \log\left\{\frac{2x' - a + 2\sqrt{x'^2 - ax'}}{a}\right\} + \text{Const.}$$

Für $x' = 0$ ist $\text{Const} = \frac{b\sin\alpha}{4E}\sqrt{F(Ea+F)}\log(-1)$,

mithin ist

$$\sin\alpha \int_a^0 y' dx' = \frac{ba}{2}\sin\alpha + \frac{b\sin\alpha}{4E}\sqrt{F(Ea+F)} \, . \log(-1),$$

folglich ist

$$\text{die elliptische Fläche } AIKLB = \frac{ba}{2}\sin\alpha + \frac{b\sin\alpha}{4E}\sqrt{F(Ea+F)} \, . \log(-1)$$

Für das Zeichen — finden wir ebenso

$$\text{die elliptische Fläche } AIMLB = \frac{ab}{2}\sin\alpha - \frac{b\sin\alpha}{4E}\sqrt{F(Ea+F)} \, . \log(-1).$$

$$\text{Daher ist die Fläche der Ellipse selbst} = \frac{b\sin\alpha}{2E}\sqrt{F(Ea+F)} \, . \log(-1).$$

Digitized by Google

Setzen wir in diesem Ausdrucke $\frac{F}{E} = z$, differenziiren denselben, und setzen alsdann das Differenzial desselben gleich Null, so erhalten wir:

$$a + 2z = 0, \text{ also } z = -\frac{a}{2};$$

mithin wird der Ausdruck für die Fläche der Ellipse ein Maximum, wenn $\frac{F}{E} = -\frac{a}{2}$ oder $F = -\frac{aE}{2}$ ist. Durch die Einführung dieses Werths von F in den letzten Ausdruck für den Inhalt der Ellipse erhalten wir, wenn wir jenen Ausdruck mit I bezeichnen:

$$I = \frac{ab}{4} \sin\alpha \,.\, \sqrt{-1} \,.\, \log(-1) \ldots. \quad (13)$$

Da aber allgemein $\log\{\cos\varphi \mp \sin\varphi\sqrt{-1}\} = \pm(2k\pi - \varphi)\sqrt{-1}$ ist, was auch k für eine positive ganze Zahl bedeutet, so ist, wenn wir $k = 1$ und $\varphi = \pi$ setzen:

$$\log(-1) = \pm\pi\sqrt{-1}.$$

Nehmen wir das untere Zeichen und substituiren diesen Werth von $\log(-1)$ in der Gleichung (13), so ist

$$I = \frac{ab\pi}{4} \sin\alpha \ldots. \quad (14)$$

Führen wir endlich den obigen Werth von F in der Gleichung (11) ein, so erhalten wir:

$$4a^2y'^2 - 4a^2by' + 4b^2x'^2 - 4ab^2x' + a^2b^2 = 0,$$

oder, wenn wir die Quadrate ergänzen, und $y' - \frac{b}{2} = u$, $x' - \frac{a}{2} = t$ setzen:

$$a^2u^2 + b^2t^2 = \frac{a^2b^2}{4} \ldots. \quad (15)$$

Es sind also die durch den Mittelpunkt des Parallelogramms mit den Seiten desselben parallel gezogenen Linien IL und MK diejenigen zugeordneten Durchmesser der Ellipse, welche ihre Berührungspunkte mit den Seiten des Parallelogramms verbinden.

Endlich ist die Fläche des elliptischen Raumes

$$AIKLB = \frac{ab}{8}\{4 + \pi\}\sin\alpha$$

und die Fläche des elliptischen Raumes

$$AIMBL = \frac{ab}{8}\{4 - \pi\}\sin\alpha.$$

Um die kleinste Ellipse um das Parallelogramm zu beschreiben, nehmen wir AB und AC zu Coordinatenachsen und behalten alle übrigen Annahmen wie im ersten Fall bei; alsdann finden wir leicht, dass

$$F=0,\ D'=-\frac{A'b}{2},\ E=-\frac{Ca}{2},\ B'=0;$$

so dass also die Gleichung der umschriebenen Ellipse

$$A'y'^2+Cx'^2-A'by'-Cax'=0 \ldots. \quad (16)$$

ist. Bestimmen wir aus dieser Gleichung y', vervielfachen alsdann mit $\sin\alpha\,.\,dx'$ und integriren, so ist

$$\sin\alpha\int y'dx'=\frac{bx'}{2}\sin\alpha\pm\frac{\sin\alpha}{2}\left\{\frac{(2x'-a)}{A}\sqrt{b^2+\frac{AaCx'}{A'}-\frac{ACx'^2}{A'}}\right.$$

$$\left.+\left(b^2+\frac{Ca^2}{A'}\right)Arctg\frac{(2x'-a)\sqrt{\frac{C}{A'}}}{\sqrt{b^2+\frac{AaCx'}{A'}-\frac{ACx'^2}{A'}}}\right\}+\text{Const.}\ldots. \quad (17)$$

Um den Inhalt I' der Ellipse mittelst dieses Ausdrucks zu bestimmen, so müssen wir vorerst bemerken, dass die Seiten AC und BD des gegebenen Parallelogramms parallele Sehnen der zu bestimmenden Ellipse sind, und dass daher eine durch die Mitten dieser beiden Seiten gezogene Linie ein Durchmesser derselben ist; verbindet man daher die Gleichung $y'=\frac{b}{2}$ dieses Durchmessers mit der Gleichung

$$y'=\frac{b}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{b^2+Aa\frac{C}{A'}x'-A\frac{C}{A'}x'^2},$$

die wir aus (16) erhalten, so erhalten wir die Abscissen AP und AQ der Durchschnittspunkte dieses Durchmessers mit der Ellipse, nämlich:

$$AP=x'_1=-\tfrac{1}{2}\left\{a-\sqrt{a^2+\frac{A'}{C}b^2}\right\}$$

und

$$AQ=x'_2=+\tfrac{1}{2}\left\{a+\sqrt{a^2+\frac{A'}{C}b^2}\right\}.$$

Das Integral zwischen diesen beiden Grenzen genommen und das obere Zeichen im Ausdruck (17) gebraucht, giebt die Fläche des elliptischen Raums $PNCSDOQ$. Das Integral von $x'=0$ bis $x'_1=-\frac{1}{2}\left\{a-\sqrt{a^2+\frac{A'}{C}b^2}\right\}$ genommen und das untere Zeichen in No. 17. gebraucht, giebt die elliptische Fläche APN. Nehmen wir ferner das Integral von $x'=a$ bis $x'=\frac{1}{2}\left\{a+\sqrt{a^2+\frac{A'}{C}b^2}\right\}$ ebenfalls mit dem untern Zeichen in No. 17, so er-

Digitized by Google

halten wir die Fläche des Raumes BOQ; endlich giebt das Integral von $x' = 0$ bis $x' = a$ mit Beibehaltung des Zeichens — die Fläche ARB.

Führen wir das so eben Angegebene aus und bemerken, dass die Fläche der umschriebenen Ellipse $RNSO$ = Raum $PNCSDOQ$ + Raum ARB — Raum APN — Raum BOQ ist, so erhalten wir für den Inhalt der Ellipse folgenden Ausdruck:

$$I' = \frac{\{b^2 + \frac{C}{A}a^2\}\,\pi \sin\alpha}{4\sqrt{\frac{C}{A}}} \ldots\ldots \quad (18)$$

Setzen wir wieder $\frac{C}{A} = z$, so ist

$$I' = \frac{\{b^2 + a^2 z\}\,\pi \sin\alpha}{4\sqrt{z}} \ldots\ldots \quad (19)$$

mithin

$$\frac{dI'}{dz} = -\tfrac{1}{4}\left\{\frac{b^2 + a^2 z}{2z\sqrt{z}}\,\pi \sin\alpha - \frac{a^2\,\pi \sin\alpha}{\sqrt{z}}\right\} = 0.$$

Aus dieser Gleichung ist $z = \frac{b^2}{a^2} = \frac{C}{A}$, mithin $C = \frac{A b^2}{a^2}$; dadurch wird der Ausdruck für den Inhalt der Ellipse $RNSO$ in No. 18 oder (19) zu

$$I' = \frac{ab\pi}{2} \sin\alpha \ldots\ldots \quad (20)$$

Weil nun die Grösse des Durchmessers $NO = AP + AQ = \sqrt{a^2 + \frac{A}{C}b^2}$, so ist $NO = a\sqrt{2}$.

Setzen wir endlich in (16) $\frac{b^2}{a^2}$ statt $\frac{C}{A}$, und $\frac{a}{2}$ statt x', so erhalten wir für die Grösse des Durchmessers RS, der dem NO zugeordnet ist, den Werth $b\sqrt{2}$. Die Gleichung der gesuchten Ellipse ist daher:

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2by - ab^2x = 0,$$

oder

$$a^2(y - \tfrac{b}{2})^2 + b^2(x - \tfrac{a}{2})^2 = \frac{a^2b^2}{2},$$

und wenn wir u statt $y - \frac{b}{2}$ und t statt $x - \frac{a}{2}$ schreiben:

$$a^2u^2 + b^2t^2 = \frac{a^2b^2}{2} \ldots: \quad (21)$$

Aus (14), (15), (20) und (21) folgt:

a) dass die umschriebene Ellipse zweimal so gross ist als die einbeschriebene;
b) dass beide ähnliche und gleichliegende Ellipsen sind.

Der zweite Theil dieser Aufgabe, nämlich die kleinste Ellipse um das Parallelogramm $ABCD$ (Taf. VII. Fig. 8.) zu beschreiben, lässt sich auf viel kürzerem Wege auflösen. Ziehen wir nämlich durch den Mittelpunkt E des Parallelogramms mit AB und AC die parallelen Linien NO und SR, so geben diese die Lage zweier zugeordneter Durchmesser der zu suchenden Ellipse an. Bezeichnen wir nun NE und RE mit f und g, ferner den Winkel, den SR mit der grossen Achse $2A$ der Ellipse macht, mit ω, und den, welchen NO mit derselben bildet, mit φ; und ist endlich $2B$ die kleine Achse der zu bestimmenden Ellipse, so haben wir, nach den bekannten Sätzen von den Kegelschnitten, folgende Bestimmungsgleichungen:

$$4f^2g^2 = a^2g^2 + b^2f^2 \ldots . \quad (1)$$

$$f^2 = \frac{A^2 \sin\omega}{\cos(\alpha-\omega)\sin\alpha} \ldots . \quad (2)$$

$$g^2 = \frac{B^2 \cos(\alpha-\omega)}{\sin\omega \,.\, \sin\alpha} \ldots . \quad (3)$$

$$A \,.\, B = fg \sin\alpha \ldots . \quad (4)$$

Bezeichnen wir endlich den Flächeninhalt der Ellipse wieder mit I', so ist

$$I' = AB\pi \ldots . \quad (5)$$

Drücken wir I' durch a, b, π und Functionen von α und ω aus, so finden wir:

$$I' = \frac{\pi}{4}\left\{a^2\sqrt{\frac{\sin 2(\alpha-\omega)}{\sin 2\omega}} + b^2\sqrt{\frac{\sin 2\omega}{\sin 2(\alpha-\omega)}}\right\}\sin\alpha \ldots . \quad (6)$$

mithin

$$\frac{dI'}{d\omega} = \frac{\pi}{4}\sin\alpha\left\{\frac{-a^2\sin 2\alpha}{\sin 2\omega^2\sqrt{\sin 2\alpha\,\mathrm{cotg}\,2\omega - \cos 2\alpha}} + \frac{b^2\sin 2\alpha}{\sin 2\omega^2\sqrt{\sin 2\alpha\,\mathrm{cotg}\,2\omega - \cos 2\alpha}}\right\}$$

Setzen wir diesen Ausdruck gleich Null, und bestimmen alsdann den Werth von $\mathrm{cotg}\,2\omega$, so erhalten wir:

$$\mathrm{cotg}\,2\omega = \frac{a^2\cos 2\alpha + b^2}{a^2\sin 2\alpha}.$$

Suchen wir mittelst dieses Werths die Ausdrücke $\sqrt{\frac{\sin 2(\alpha-\omega)}{\sin 2\omega}}$ und $\sqrt{\frac{\sin 2\omega}{\sin 2(\alpha-\omega)}}$, so erhalten wir:

Digitized by Google

$$I' = \frac{abn}{2} \sin \alpha,$$

also dasselbe wie oben.

XLII.

Ueber eine neue geodätische Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Die folgende Aufgabe ist, so viel wir wissen, noch niemals behandelt worden, dürfte aber sowohl in theoretischer als auch in praktischer Beziehung mehrfaches Interesse darbieten:

Aus vier in einer und derselben geraden Linie liegenden Punkten M, M_1, M_2, M_3, deren Entfernungen von einander bekannt sind, werden zwei andere mit jenen vier Punkten in einer Ebene liegende Punkte S und S_1 gesehen, und in den Punkten M, M_1, M_2, M_3 die 180° nicht übersteigenden Winkel SMS_1, SM_1S_1, SM_2S_1, SM_3S_1, welche die von einem jeden der Punkte M, M_1, M_2, M_3 nach S und S_1 gezogenen Gesichtslinien mit einander einschliessen, gemessen. Man soll die Lage der Punkte S und S_1 bestimmen.

Weil diese Aufgabe eigentlich nur ein specieller Fall einer weit allgemeinern Aufgabe ist, welcher wird bald eine besondere Abhandlung zu widmen hoffen, so wollen wir in den drei nächsten Paragraphen von einigen allgemeinern Betrachtungen ausgehen, welche uns späterhin bei der Auflösung des in Rede stehenden allgemeinen Problems von Nutzen sein werden, wenn dieselben auch für unsern nächsten Zweck eigentlich nicht in dieser Allgemeinheit angestellt zu werden brauchen.

§. 2.

Wir denken uns drei beliebige Punkte M und S, S_1 im Raume, und bezeichnen deren Coordinaten in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem respective durch a, b, c und

x, y, z; x_1, y_1, z_1. Ferner wollen wir die Entfernungen MS und MS_1 des Punktes M von den Punkten S und S_1 durch r und r_1, den von den Linien MS und MS_1 an dem Punkte M mit einander eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch α, und die 180° nicht übersteigenden Winkel, unter denen die Linien MS und MS_1 gegen die positiven Theile dreier, durch den Punkt M gelegter, den primitiven Axen paralleler Axen geneigt sind, respective durch φ, ψ, χ und $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$ bezeichnen. Dies vorausgesetzt haben wir nach den Principien der analytischen Geometrie die Relationen

$$1) \quad \begin{cases} x = a + r\cos\varphi, \\ y = b + r\cos\psi, \\ z = c + r\cos\chi; \end{cases}$$

und

$$2) \quad \begin{cases} x_1 = a + r_1\cos\varphi_1, \\ y_1 = b + r_1\cos\psi_1, \\ z_1 = c + r_1\cos\chi_1; \end{cases}$$

so wie ferner die Gleichungen

$$3) \quad \begin{cases} \cos\varphi^2 + \cos\psi^2 + \cos\chi^2 = 1, \\ \cos\varphi_1{}^2 + \cos\psi_1{}^2 + \cos\chi_1{}^2 = 1 \end{cases}$$

und

$$4) \quad \cos\varphi\cos\varphi_1 + \cos\psi\cos\psi_1 + \cos\chi\cos\chi_1 = \cos\alpha.$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) folgt

$$5) \quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x-a}{r}, \ \cos\psi = \dfrac{y-b}{r}, \ \cos\chi = \dfrac{z-c}{r}; \\ \cos\varphi_1 = \dfrac{x_1-a}{r_1}, \ \cos\psi_1 = \dfrac{y_1-b}{r_1}, \ \cos\chi_1 = \dfrac{z_1-c}{r_1}; \end{cases}$$

also mittelst der Gleichungen 3) und 4)

$$6) \quad \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2, \\ (x_1-a)^2 + (y_1-b)^2 + (z_1-c)^2 = r_1{}^2 \end{cases}$$

und

$$7) \quad (x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) + (z-c)(z_1-c) = rr_1\cos\alpha.$$

Bezeichnet nun Δ den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks SMS_1, so ist bekanntlich

$$8) \quad \Delta = rr_1\sin\alpha,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$9) \quad (x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) + (z-c)(z_1-c) = \Delta\cot\alpha$$

Digitized by Google

oder

$$10)\quad xx_1 + yy_1 + zz_1 - a(x + x_1) - b(y + y_1) - c(z + z_1) = \Delta \cot \alpha - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Liegen die drei Punkte M und S, S_1 in der Ebene der xy, so ist, wie sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar ergiebt:

$$11)\quad xx_1 + yy_1 - a(x + x_1) - b(y + y_1) = \Delta \cot \alpha - (a^2 + b^2).$$

§. 3.

Wir wollen uns jetzt vier in der Ebene der xy liegende Punkte

$$M,\ M_1,\ M_2,\ M_3$$

denken, deren Coordinaten in Bezug auf das zum Grunde gelegte rechtwinklige Coordinatensystem respective

$$a,\ b;\ a_1,\ b_1;\ a_2,\ b_2;\ a_3,\ b_3$$

sind; und S, S_1 sollen wieder zwei beliebige Punkte im Raume sein, deren Coordinaten in Bezug auf dasselbe rechtwinklige System

$$x,\ y,\ z \text{ und } x_1,\ y_1,\ z_1$$

sind. Bezeichnen wir nun die 180° nicht übersteigenden Winkel

$$SMS_1,\ SM_1S_1,\ SM_2S_1,\ SM_3S_1$$

respective durch

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3;$$

die doppelten Flächenräume der Dreiecke

$$SMS_1,\ SM_1S_1,\ SM_2S_1,\ SM_3S_1$$

respective durch

$$\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3;$$

und setzen der Kürze wegen

$$12)\quad xx_1 + yy_1 + zz_1 = U,\ x + x_1 = X,\ y + y_1 = Y$$

und

$$13)\quad \begin{cases} \Delta \cot \alpha - (a^2 + b^2) = \Omega, \\ \Delta_1 \cot \alpha_1 - (a_1^2 + b_1^2) = \Omega_1, \\ \Delta_2 \cot \alpha_2 - (a_2^2 + b_2^2) = \Omega_2, \\ \Delta_3 \cot \alpha_3 - (a_3^2 + b_3^2) = \Omega_3; \end{cases}$$

so erhalten wir nach 10) die vier folgenden Gleichungen:

Digitized by Google

$$14)\quad \left\{\begin{aligned} U - aX - bY &= \Omega, \\ U - a_1 X - b_1 Y &= \Omega_1, \\ U - a_2 X - b_2 Y &= \Omega_2, \\ U - a_3 X - b_3 Y &= \Omega_3. \end{aligned}\right.$$

Eliminiren wir nun aus diesen vier Gleichungen die drei Grössen U, X, Y, so erhalten wir die bemerkenswerthe Relation

$$15)\quad \left.\begin{aligned} &\{(a_2 - a_3)(b_1 - b_2) - (a_1 - a_2)(b_2 - b_3)\}\ \Omega \\ &+ \{(a - a_2)(b_2 - b_3) - (a_2 - a_3)(b - b_2)\}\ \Omega_1 \\ &+ \{(a_1 - a_3)(b - b_1) - (a - a_1)(b_1 - b_3)\}\ \Omega_2 \\ &+ \{(a - a_1)(b_1 - b_2) - (a_1 - a_2)(b - b_1)\}\ \Omega_3 \end{aligned}\right\} = 0$$

oder

$$16)\quad \left.\begin{aligned} &\{(a_2 - a_3)\, b_1 + (a_3 - a_1)\, b_2 + (a_1 - a_2)\, b_3\}\ \Omega \\ &- \{(a_2 - a_3)\, b + (a_3 - a)\, b_2 + (a - a_2)\, b_3\}\ \Omega_1 \\ &+ \{(a_1 - a_3)\, b + (a_3 - a)\, b_1 + (a - a_1)\, b_3\}\ \Omega_2 \\ &- \{(a_1 - a_2)\, b + (a_2 - a)\, b_1 + (a - a_1)\, b_2\}\ \Omega_3 \end{aligned}\right\} = 0,$$

und folglich, wenn man für die Grössen Ω, Ω_1, Ω_2, Ω_3 ihre aus dem Obigen bekannten Werthe in diese Gleichung einführt:

$$\begin{aligned} 17)\quad &\{(a_2 - a_3)\, b_1 + (a_3 - a_1)\, b_2 + (a_1 - a_2)\, b_3\}\ \Delta \cot \alpha \\ &- \{(a_2 - a_3)\, b + (a_3 - a)\, b_2 + (a - a_2)\, b_3\}\ \Delta_1 \cot \alpha_1 \\ &+ \{(a_1 - a_3)\, b + (a_3 - a)\, b_1 + (a - a_1)\, b_3\}\ \Delta_2 \cot \alpha_2 \\ &- \{(a_1 - a_2)\, b + (a_2 - a)\, b_1 + (a - a_1)\, b_2\}\ \Delta_3 \cot \alpha_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \quad &\{(a_2 - a_3)\, b_1 + (a_3 - a_1)\, b_2 + (a_1 - a_2)\, b_3\}\ (a^2 + b^2) \\ - \ &\{(a_2 - a_3)\, b + (a_3 - a)\, b_2 + (a - a_2)\, b_3\}\ (a_1^2 + b_1^2) \\ + \ &\{(a_1 - a_3)\, b + (a_3 - a)\, b_1 + (a - a_1)\, b_3\}\ (a_2^2 + b_2^2) \\ - \ &\{(a_1 - a_2)\, b + (a_2 - a)\, b_1 + (a - a_1)\, b_2\}\ (a_3^2 + b_3^2). \end{aligned}$$

Wenn die vier in der Ebene der xy liegenden Punkte M, M_1, M_2, M_3 in einer und derselben geraden Linie liegen, und diese gerade Linie als Axe der x angenommen wird, so erhalten die vorhergehenden Gleichungen die identische Form $0 = 0$. In diesem Falle hat man aber, wenn man bloss drei in derselben geraden Linie, welche als Axe der x angenommen wird, liegende Punkte M, M_1, M_2 in Betrachtung zieht, nach 10) die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} U - aX &= \Delta \cot \alpha - a^2, \\ U - a_1 X &= \Delta_1 \cot \alpha_1 - a_1^2, \\ U - a_2 X &= \Delta_2 \cot \alpha_2 - a_2^2; \end{aligned}$$

aus denen, wenn man sie nach der Reihe mit $a_1 - a_2$, $a_2 - a$, $a - a_1$ multiplicirt und dann zu einander addirt, sogleich die Relation

Digitized by Google

18) $(a_1 - a_2)\,\Delta \cot \alpha + (a_2 - a)\,\Delta_1 \cot \alpha_1 + (a - a_1)\,\Delta_2 \cot \alpha_2$
$= (a_1 - a_2)\,a^2 + (a_2 - a)\,a_1^2 + (a - a_1)\,a_2^2$

oder

19) $(a_1 - a_2)\,\Delta \cot \alpha + (a_2 - a)\,\Delta_1 \cot \alpha_1 + (a - a_1)\,\Delta_2 \cot \alpha_2$
$= (a - a_1)\,aa_1 + (a_1 - a_2)\,a_1a_2 + (a_2 - a)\,a_2a$

erhalten wird. Weil aber, wenn P, Q, R drei beliebige Grössen bezeichnen, wie man leicht findet, immer

20) $(Q - R)\,P^2 + (R - P)\,Q^2 + (P - Q)\,R^2$
$= -(P - Q)\,(Q - R)\,(R - P)$

ist, so kann man die Gleichung 18) auch auf den Ausdruck

21) $(a_1 - a_2)\,\Delta \cot \alpha + (a_2 - a)\,\Delta_1 \cot \alpha_1 + (a - a_1)\,\Delta_2 \cot \alpha_2$
$= -(a - a_1)\,(a_1 - a_2)\,(a_2 - a)$

oder auf den Ausdruck

22) $\dfrac{\Delta \cot \alpha}{(a - a_1)\,(a_2 - a)} + \dfrac{\Delta_1 \cot \alpha_1}{(a_1 - a_2)\,(a - a_1)} + \dfrac{\Delta_2 \cot \alpha_2}{(a_2 - a)(a_1 - a_2)} = -1$

bringen.

§. 4.

Ferner wollen wir jetzt fünf beliebige Punkte

$$M,\ M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4$$

im Raume betrachten, deren rechtwinklige Coordinaten respective

$$a,\ b,\ c;\ a_1,\ b_1,\ c_1;\ a_2,\ b_2,\ c_2;\ a_3,\ b_3,\ c_3;\ a_4,\ b_4,\ c_4$$

sein mögen; und S, S_1 sollen wieder zwei beliebige Punkte im Raume sein, deren Coordinaten in Bezug auf dasselbe System

$$x,\ y,\ z \text{ und } x_1,\ y_1,\ z_1$$

sind. Setzen wir nun der Kürze wegen auf ähnliche Art wie im vorigen Paragraphen

23) $\begin{cases} xx_1 + yy_1 + zz_1 = U \\ x + x_1 = X,\ y + y_1 = Y,\ z + z_1 = Z \end{cases}$

und, indem die 180° nicht übersteigenden Winkel

$$SMS_1.\ SM_1S_1,\ SM_2S_1,\ SM_3S_1,\ SM_4S_1$$

respective durch

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4;$$

Digitized by Google

die doppelten Flächenräume der Dreiecke

$$SMS_1,\ SM_1S_1,\ SM_2S_1,\ SM_3S_1,\ SM_4S_1$$

respective durch

$$\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \Delta_4$$

bezeichnet werden,

$$24)\quad \begin{cases} \Delta \cot \alpha - (a^2+b^2+c^2) = \Omega, \\ \Delta_1 \cot \alpha_1 - (a_1^2+b_1^2+c_1^2) = \Omega_1, \\ \Delta_2 \cot \alpha_2 - (a_2^2+b_2^2+c_2^2) = \Omega_2, \\ \Delta_3 \cot \alpha_3 - (a_3^2+b_3^2+c_3^2) = \Omega_3, \\ \Delta_4 \cot \alpha_4 - (a_4^2+b_4^2+c_4^2) = \Omega_4; \end{cases}$$

so haben wir nach 10) die fünf folgenden Gleichungen:

$$25)\quad \begin{cases} U - aX - bY - cZ = \Omega, \\ U - a_1X - b_1Y - c_1Z = \Omega_1, \\ U - a_2X - b_2Y - c_2Z = \Omega_2, \\ U - a_3X - b_3Y - c_3Z = \Omega_3, \\ U - a_4X - b_4Y - c_4Z = \Omega_4; \end{cases}$$

aus denen sich durch Elimination der vier Grössen U, X, Y, Z ohne Schwierigkeit die folgende bemerkenswerthe Relation ergiebt:

$$26)\quad 0 = \left\{\begin{array}{l} (a_1-a_2)\{(b_3-b_4)(c_3-c_4)-(b_3-b_4)(c_3-c_4)\} \\ +(a_3-a_4)\{(b_1-b_4)(c_1-c_2)-(b_1-b_2)(c_3-c_4)\} \\ +(a_3-a_4)\{(b_1-b_2)(c_2-c_3)-(b_2-b_3)(c_1-c_2)\} \end{array}\right\}\Omega$$

$$-\left\{\begin{array}{l} (a-a_2)\{(b_3-b_4)(c_3-c_4)-(b_3-b_4)(c_3-c_4)\} \\ +(a_3-a_4)\{(b_3-b_4)(c-c_2)-(b-b_2)(c_3-c_4)\} \\ +(a_3-a_4)\{(b-b_2)(c_2-c_3)-(b_2-b_3)(c-c_2)\} \end{array}\right\}\Omega_1$$

$$+\left\{\begin{array}{l} (a-a_1)\{(b_1-b_3)(c_3-c_4)-(b_3-b_4)(c_1-c_3)\} \\ +(a_1-a_3)\{(b_3-b_4)(c-c_1)-(b-b_1)(c_3-c_4)\} \\ +(a_3-a_4)\{(b-b_1)(c_1-c_3)-(b_1-b_3)(c-c_1)\} \end{array}\right\}\Omega_2$$

$$-\left\{\begin{array}{l} (a-a_1)\{(b_1-b_2)(c_2-c_4)-(b_2-b_4)(c_1-c_2)\} \\ +(a_1-a_2)\{(b_2-b_4)(c-c_1)-(b-b_1)(c_2-c_4)\} \\ +(a_2-a_4)\{(b-b_1)(c_1-c_2)-(b_1-b_2)(c-c_1)\} \end{array}\right\}\Omega_3$$

$$+\left\{\begin{array}{l} (a-a_1)\{(b_1-b_3)(c_2-c_3)-(b_2-b_3)(c_1-c_2)\} \\ +(a_1-a_2)\{(b_2-b_3)(c-c_1)-(b-b_1)(c_2-c_3)\} \\ +(a_2-a_3)\{(b-b_1)(c_1-c_2)-(b_1-b_2)(c-c_1)\} \end{array}\right\}\Omega_4$$

in die sich nun auch leicht noch die aus dem Obigen bekannten Werthe von

$$\Omega,\ \Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3,\ \Omega_4$$

einführen lassen würden.

§. 5.

Indem wir der Aufgabe, welche den eigentlichen Gegenstand dieses Aufsatzes ausmachen soll, nun näher treten, wollen wir jetzt annehmen, dass aus vier in der Ebene der xy und in einer und derselben geraden Linie, welche als Axe der x angenommen werden soll, liegenden Punkten

$$M,\ M_1,\ M_2,\ M_3,$$

deren Coordinaten

$$a,\ 0;\ a_1,\ 0;\ a_2,\ 0;\ a_3,\ 0$$

sämmtlich als gegeben betrachtet werden, zwei in der Ebene der xy liegende Punkte S und S_1, deren unbekannte Coordinaten x, y und x_1, y_1 sein sollen, gesehen, und in den Punkten

$$M,\ M_1,\ M_2,\ M_3$$

die 180° nicht übersteigenden Winkel

$$SMS_1,\ SM_1S_1,\ SM_2S_1,\ SM_3S_1,$$

welche durch

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$$

bezeichnet werden mögen, gemessen werden, und wollen nun untersuchen, ob sich aus diesen Datis die Lage der Punkte S und S_1 in der Ebene der xy, d. h. die Grösse der Coordinaten x, y und x_1, y_1 bestimmen lässt, wobei wir wie früher die doppelten Flächenräume der Dreiecke

$$SMS_1,\ SM_1S_1,\ SM_2S_1,\ SM_3S_1$$

respective durch

$$\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$$

bezeichnen werden.

Nach 11) haben wir unter den gemachten Voraussetzungen zuvörderst die folgenden Gleichungen:

$$27)\quad \begin{cases} xx_1 + yy_1 - a(x + x_1) = \Delta \cot \alpha - a^2, \\ xx_1 + yy_1 - a_1(x + x_1) = \Delta_1 \cot \alpha_1 - a_1^2, \\ xx_1 + yy_1 - a_2(x + x_1) = \Delta_2 \cot \alpha_2 - a_2^2, \\ xx_1 + yy_1 - a_3(x + x_1) = \Delta_3 \cot \alpha_3 - a_3^2; \end{cases}$$

Digitized by Google

und ein bekannter Satz der analytischen Geometrie*) liefert uns ferner die folgenden Gleishungen:

$$28)\quad \begin{cases} \Delta = (-1)^{i}\{xy_1 - yx_1 + a(y-y_1)\}, \\ \Delta_1 = (-1)^{i_1}\{xy_1 - yx_1 + a_1(y-y_1)\} \\ \Delta_2 = (-1)^{i_2}\{xy_1 - yx_1 + a_2(y-y_1)\}, \\ \Delta_3 = (-1)^{i_3}\{xy_1 - yx_1 + a_3(y-y_1)\}. \end{cases}$$

in denen für

$$i,\ i_1,\ i_2,\ i_3$$

jede beliebige gerade oder ungerade ganze Zahl gesetzt werden kann, jenachdem man sich, um respective von dem Punkte

$$M,\ M_1,\ M_2,\ M_3$$

durch den Punkt S zu dem Punkte S_1 zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss.

Setzen wir nun

$$29)\quad \begin{cases} x + x_1 = 2u,\ y + y_1 = 2v; \\ x - x_1 = 2u_1,\ y - y_1 = 2v_1; \end{cases}$$

also

$$30)\quad \begin{cases} x = u + u_1,\ y = v + v_1; \\ x_1 = u - u_1,\ y_1 = v - v_1 \end{cases}$$

und

$$31)\quad \begin{cases} xx_1 + yy_1 = u^2 + v^2 - u_1^2 - v_1^2 \\ xy_1 - yx_1 = -2(uv_1 - vu_1); \end{cases}$$

so werden die Gleichungen 27) und 28)

$$32)\quad \begin{cases} u^2 + v^2 - u_1^2 - v_1^2 - 2au = \Delta\cot\alpha - a^2, \\ u^2 + v^2 - u_1^2 - v_1^2 - 2a_1u = \Delta_1\cot\alpha_1 - a_1^2, \\ u^2 + v^2 - u_1^2 - v_1^2 - 2a_2u = \Delta_2\cot\alpha_2 - a_2^2, \\ u^2 + v^2 - u_1^2 - v_1^2 - 2a_3u = \Delta_3\cot\alpha_3 - a_3^2; \end{cases}$$

und

$$33)\quad \begin{cases} \Delta = -(-1)^{i}.2(uv_1 - vu_1 - av_1), \\ \Delta_1 = -(-1)^{i_1}.2(uv_1 - vu_1 - a_1v_1), \\ \Delta_2 = -(-1)^{i_2}.2(uv_1 - vu_1 - a_2v_1), \\ \Delta_3 = -(-1)^{i_3}.2(uv_1 - vu_1 - a_3v_1); \end{cases}$$

und nach gehöriger Substitution dieser Werthe von Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 in die Gleichungen 32) erhält man also die vier folgenden Gleichungen zwischen den Grössen u, v, u_1, v_1:

*) M. s. Archiv. Thl. III. S. 263.

Digitized by Google

$$34)\begin{cases} u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2+(-1)^i\,.\,2\cot\alpha\,.\,(uv_1-vu_1) \\ -2au-(-1)^i\,.\,2a\cot\alpha\,.\,v_1 \end{cases} =-a^2,$$

$$\begin{cases} u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2+(-1)^{i_1}\,.\,2\cot\alpha_1\,.\,(uv_1-vu_1) \\ -2a_1u-(-1)^{i_1}\,.\,2a_1\cot\alpha_1\,.\,v_1 \end{cases} =-a_1{}^2,$$

$$\begin{cases} u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2+(-1)^{i_2}\,.\,2\cot\alpha_2\,.\,(uv_1-vu_1) \\ -2a_2u-(-1)^{i_2}\,.\,2a_2\cot\alpha_2\,.\,v_1 \end{cases} =-a_2{}^2,$$

$$\begin{cases} u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2+(-1)^{i_3}\,.\,2\cot\alpha_3\,.\,(uv_1-vu_1) \\ -2a_3u-(-1)^{i_3}\,.\,2a_3\cot\alpha_3\,.\,v_1 \end{cases} =-a_3{}^2;$$

welche in Bezug auf die vier Grössen

$$u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2,\ uv_1-vu_1,\ u,\ v_1$$

vom ersten Grade sind.

Nach dem Obigen bezeichnen bekanntlich

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$$

die 180° nicht übersteigenden Winkel

$$SMS_1,\ SM_1S_1,\ SM_2S_1,\ SM_3S_1.$$

Lässt man aber von jetzt an, so lange nicht etwas Anderes besonders bemerkt wird,

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$$

die 180° nicht übersteigenden Winkel

$$SMS_1,\ SM_1S_1,\ SM_2S_1,\ SM_3S_1$$

oder deren Ergänzungen zu 180° bezeichnen, jenachdem man sich, um respective von dem Punkte

$$M,\ M_1,\ M_2,\ M_3$$

durch den Punkt S zu dem Punkte S_1 zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss, so kann man die vier obigen Gleichungen offenbar in völliger Allgemeinheit auf folgende Art schreiben:

$$35)\begin{cases} u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2+2\cot\alpha\,.\,(uv_1-vu_1) \\ -2au-2a\cot\alpha\,.\,v_1 \end{cases} =-a^2,$$

$$\begin{cases} u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2+2\cot\alpha_1\,.\,(uv_1-vu_1) \\ -2a_1u-2a_1\cot\alpha_1\,.\,v_1 \end{cases} =-a_1{}^2,$$

$$\begin{cases} u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2+2\cot\alpha_1\,.\,(uv_1-vu_1) \\ -2a_2u-2a_2\cot\alpha_2\,.\,v_1 \end{cases} =-a_2{}^2,$$

$$\begin{cases} u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2+2\cot\alpha_3\,.\,(uv_1-vu_1) \\ -2a_3u-2a_3\cot\alpha_3\,.\,v_1 \end{cases} =-a_3{}^2.$$

Digitized by Google

Mittelst dieser vier Gleichungen kann man die Grössen

$$u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2,\ uv_1-vu_1,\ u,\ v_1$$

bestimmen, und ist also berechtigt:

$$36)\quad \begin{cases} u^2+v^2-u_1{}^2-v_1{}^2=A, \\ uv_1-vu_1=B, \\ u=C, \\ v_1=D, \end{cases}$$

wo A, B, C, D bekannte Grössen bezeichnen, zu setzen. Aus diesen vier Gleichungen erhält man aber durch Elimination von u und v_1 leicht

$$37)\quad \begin{cases} v^2-u_1{}^2=A-(C+D)(C-D), \\ vu_1=CD-B; \end{cases}$$

und hat daher, wie hieraus auf der Stelle folgt, zur Bestimmung von v und u_1 die beiden folgenden Gleichungen:

$$38)\quad \begin{cases} v^4-\{A-(C+D)(C-D)\}v^2-(B-CD)^2=0, \\ u_1=-\dfrac{B-CD}{v}. \end{cases}$$

Da man jetzt die Grössen u, v, u_1, v_1 kennt, so kennt man auch die Coordinaten x, y und x_1, y_1 der beiden Punkte S und S_1, weil nach dem Obigen

$$39)\quad \begin{cases} x=u+u_1,\ y=v+v_1; \\ x_1=u-u_1,\ y_1=v-v_1 \end{cases}$$

ist, und unsere Aufgabe ist daher jetzt als aufgelöst zu betrachten.

Löst man die erste der beiden Gleichungen 38) wie eine quadratische Gleichung auf, so erhält man

$$40)\quad v^2=\tfrac{1}{2}\{A-(C+D)(C-D)\} \pm\sqrt{(B-CD)^2+\tfrac{1}{4}\{A-(C+D)(C-D)\}^2}$$

Weil aber unter der Voraussetzung, dass $B-CD$ nicht verschwindet, offenbar immer

$$\sqrt{(B-CD)^2+\tfrac{1}{4}\{A-(C+D)(C-D)\}^2}$$

grösser als der absolute Werth von

$$\tfrac{1}{2}\{A-(C+D)(C-D)\}$$

ist, so hat man bloss

$$41)\quad v^2=\tfrac{1}{2}\{A-(C+D)(C-D)\} +\sqrt{(B-CD)^2+\tfrac{1}{4}\{A-(C+D)(C-D)\}^2}$$

Digitized by Google

zu setzen, und v hat daher nur zwei reelle, dem Zeichen nach entgegengesetzte, absolut gleiche Werthe.

Verschwindet $B - CD$, so erhalten die Gleichungen 37) die Form

$$42) \quad \begin{cases} v^2 - u_1^2 = A - (C+D)(C-D), \\ vu_1 = 0. \end{cases}$$

Die zweite dieser beiden Gleichungen ist nur dann erfüllt, wenn die eine der beiden Grössen v, u_1 verschwindet.

Ist nun $A - (C+D)(C-D) > 0$, so kann wegen der ersten der beiden vorhergehenden Gleichungen offenbar nicht $v = 0$ sein, und diese beiden Gleichungen werden daher nur durch

$$43) \quad \begin{cases} v^2 = A - (C+D)(C-D), \\ u_1 = 0 \end{cases}$$

erfüllt, so dass also in diesem Falle v zwei reelle, dem Zeichen nach entgegengesetzte, absolut gleiche Werthe hat.

Ist ferner $A - (C+D)(C-D) < 0$, so kann wegen der ersten der beiden Gleichungen offenbar nicht $u_1 = 0$ sein, und diese beiden Gleichungen werden daher nur durch

$$44) \quad \begin{cases} v = 0, \\ u_1^2 = (C+D)(C-D) - A \end{cases}$$

erfüllt, so dass also in diesem Falle u_1 zwei reelle, dem Zeichen nach entgegengesetzte, absolut gleiche Werthe hat.

Ist endlich $A - (C+D)(C-D) = 0$, so werden die Gleichungen 42) nur durch

$$45) \quad \begin{cases} v = 0, \\ u_1 = 0 \end{cases}$$

erfüllt.

Setzt man der Kürze wegen

$$46) \quad \begin{cases} A_1 = A - (C+D)(C-D), \\ B_1 = B - CD; \end{cases}$$

so ist nach 41)

$$47) \quad v^2 = \tfrac{1}{2}A_1 + \sqrt{\tfrac{1}{4}A_1^2 + B_1^2},$$

und folglich

$$v^2 = \tfrac{1}{2}A_1 \pm \tfrac{1}{2}A_1 \sqrt{1 + \frac{4B_1^2}{A_1^2}},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem A_1 eine positive oder eine negative Grösse ist. Berechnet man nun den Hülfswinkel ω mittelst der Formel

$$48) \quad \text{tang } \omega = \frac{2B_1}{A_1},$$

Digitized by Google

und nimmt denselben positiv und negativ, seinen absoluten Werth aber nie grösser als 90^0, was offenbar verstattet ist, so ist nach dem Obigen

$$v^2 = \pm \tfrac{1}{2} A_1 \cdot \frac{1 \pm \cos \omega}{\cos \omega},$$

also, weil

$$1 + \cos \omega = 2 \cos \tfrac{1}{2}\omega^2, \quad 1 - \cos \omega = 2 \sin \tfrac{1}{2}\omega^2$$

ist,

$$49)\ v^2 = \begin{cases} \dfrac{A_1 \cos \frac{1}{2}\omega^2}{\cos \omega} \\ -\dfrac{A_1 \sin \frac{1}{2}\omega^2}{\cos \omega} \end{cases}$$

Weil nun aber nach 48)

$$A_1 = 2B_1 \cot \omega$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$50)\ v^2 = \begin{cases} B_1 \cot \frac{1}{2}\omega \\ -B_1 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega \end{cases}$$

wo immer für v^2 der erste oder zweite Werth genommen werden muss, jenachdem A_1 eine positive oder eine negative Grösse ist. Mittelst der Formeln 48) und 50) kann v^2, und also auch v, sehr leicht berechnet werden.

Bezeichnet man die Entfernungen des Punktes S von den Punkten

$$M,\ M_1,\ M_2,\ M_3$$

respective durch

$$r,\ r_1,\ r_2,\ r_3;$$

die Entfernungen des Punktes S_1 von den Punkten

$$M,\ M_1,\ M_2,\ M_3$$

respective durch

$$r',\ r'_1,\ r'_2,\ r'_3;$$

die von den Linien

$$MS,\ M_1S,\ M_2S,\ M_3S$$

mit der Richtung der positiven x eingeschlossenen Winkel, indem man diese Winkel von der Richtung der positiven x an nach der Seite der positiven y hin von 0 bis 360^0 zählt, respective durch

$$\Theta,\ \Theta_1,\ \Theta_2,\ \Theta_3;$$

und eben so die von den Linien

$$MS_1,\ M_1S_1,\ M_2S_1,\ M_3S_1$$

Digitized by Google

mit der Richtung der positiven x eingeschlossenen, auf dieselbe Art wie vorher genommenen Winkel durch

$$\Theta',\ \Theta'_1,\ \Theta'_2,\ \Theta'_3;$$

so ist in völliger Allgemeinheit

$$51)\quad \begin{cases} x-a=r\cos\Theta,\ y=r\sin\Theta; \\ x-a_1=r_1\cos\Theta_1,\ y=r_1\sin\Theta_1; \\ x-a_2=r_2\cos\Theta_2,\ y=r_2\sin\Theta_2; \\ x-a_3=r_3\cos\Theta_3,\ y=r_3\sin\Theta_3; \end{cases}$$

und

$$52)\quad \begin{cases} x_1-a=r'\cos\Theta',\ y_1=r'\sin\Theta'; \\ x_1-a_1=r'_1\cos\Theta'_1,\ y_1=r'_1\sin\Theta'_1; \\ x_1-a_2=r'_2\cos\Theta'_2,\ y_1=r'_2\sin\Theta'_2; \\ x_1-a_3=r'_3\cos\Theta'_3,\ y_1=r'_3\sin\Theta'_3; \end{cases}$$

also

$$53)\quad \begin{cases} \text{tang}\,\Theta=\frac{y}{x-a},\ \text{tang}\,\Theta'=\frac{y_1}{x_1-a}; \\ \text{tang}\,\Theta_1=\frac{y}{x-a_1},\ \text{tang}\,\Theta'_1=\frac{y_1}{x_1-a_1}; \\ \text{tang}\,\Theta_2=\frac{y}{x-a_2},\ \text{tang}\,\Theta'_2=\frac{y_1}{x_1-a_2}; \\ \text{tang}\,\Theta_3=\frac{y}{x-a_3},\ \text{tang}\,\Theta'_3=\frac{y_1}{x_1-a_3}; \end{cases}$$

Mittelst dieser Formeln lassen sich die Winkel

$$\Theta,\ \Theta_1,\ \Theta_2,\ \Theta_3$$

und

$$\Theta',\ \Theta'_1,\ \Theta'_2,\ \Theta'_3$$

ohne alle Zweideutigkeit berechnen, wenn man nur die Vorzeichen gehörig beachtet, welche in Folge der Gleichungen 51) und 52) die Sinus und Cosinus dieser Winkel haben müssen. Dann findet man aber ferner auch die Entfernungen

$$r,\ r_1,\ r_2,\ r_3$$

und

$$r',\ r'_1,\ r'_2,\ r'_3$$

leicht mittelst der Formeln

Digitized by Google

$$54)\quad \begin{cases} r = \dfrac{x-a}{\cos\Theta} = \dfrac{y}{\sin\Theta}, \\ r_1 = \dfrac{x-a_1}{\cos\Theta_1} = \dfrac{y}{\sin\Theta_1}, \\ r_2 = \dfrac{x-a_2}{\cos\Theta_2} = \dfrac{y}{\sin\Theta_2}, \\ r_3 = \dfrac{x-a_3}{\cos\Theta_3} = \dfrac{y}{\sin\Theta_3} \end{cases}$$

und

$$55)\quad \begin{cases} r' = \dfrac{x_1-a}{\cos\Theta'} = \dfrac{y_1}{\sin\Theta'}, \\ r'_1 = \dfrac{x_1-a_1}{\cos\Theta'_1} = \dfrac{y_1}{\sin\Theta'_1}, \\ r'_2 = \dfrac{x_1-a_2}{\cos\Theta'_2} = \dfrac{y_1}{\sin\Theta'_2}, \\ r'_3 = \dfrac{x_1-a_3}{\cos\Theta'_3} = \dfrac{y_1}{\sin\Theta'_3}, \end{cases}$$

Die doppelten Flächenräume

$$\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$$

findet man mittelst der Formeln 33) oder auch mittelst der Formeln

$$56)\quad \begin{cases} \Delta = \pm rr' \sin(\Theta - \Theta'), \\ \Delta_1 = \pm r_1 r'_1 \sin(\Theta_1 - \Theta'_1), \\ \Delta_2 = \pm r_2 r'_2 \sin(\Theta_2 - \Theta'_2), \\ \Delta_3 = \pm r_3 r'_3 \sin(\Theta_3 - \Theta'_3); \end{cases}$$

in denen man jederzeit die Vorzeichen so zu nehmen hat, dass die Grössen Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 positiv werden.

Bezeichnet man die Entfernung der beiden Punkte S und S_1 von einander durch E, so ist

$$57)\quad E = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}.$$

Berechnet man aber den Hülfswinkel ξ mittelst der Formel

$$58)\quad \text{tang}\,\xi = \frac{y-y_1}{x-x_1}$$

und nimmt, was offenbar verstattet ist, den Winkel ξ so, dass

$$\begin{aligned} 0 &< \xi < 90^\circ, \\ 90^\circ &< \xi < 180^\circ, \\ 180^\circ &< \xi < 270^\circ, \\ 270^\circ &< \xi < 360^\circ \end{aligned}$$

ist, jenachdem

Digitized by Google

$x - x_1$ positiv und $y - y_1$ positiv,
$x - x_1$ negativ und $y - y_1$ positiv,
$x - x_1$ negativ und $y - y_1$ negativ,
$x - x_1$ positiv und $y - y_1$ negativ

ist, so kann in völliger Allgemeinheit

$$59) \quad E = \frac{x - x_1}{\cos \xi}$$

gesetzt werden. Auch kann man auf vier verschiedene Arten E als die dritte Seite eines Dreiecks berechnen, in welchem die beiden andern Seiten und der von denselben eingeschlossene Winkel gegeben sind.

§. 6.

Wir wollen nun wieder zu den vier Gleichungen 35) des ersten Grades, auf deren Auflösung bekanntlich die ganze vorhergehende Auflösung unserer Aufgabe beruhet, zurückkehren.

Zieht man zuvörderst die zweite dieser vier Gleichungen von der ersten, die dritte von der zweiten, die vierte von der dritten ab, so erhält man die drei folgenden bloss noch die unbekannten Grössen $uv_1 - vu_1$, u, v_1 enthaltenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}(\cot \alpha - \cot \alpha_1)(uv_1 - vu_1) \\ \qquad -(a - a_1)u \\ -(a \cot \alpha - a_1 \cot \alpha_1)v_1\end{array}\right\} = -\tfrac{1}{2}(a^2 - a_1^2),$$

$$\left.\begin{array}{l}(\cot \alpha_1 - \cot \alpha_2)(uv_1 - vu_1) \\ \qquad -(a_1 - a_2)u \\ -(a_1 \cot \alpha_1 - a_2 \cot \alpha_2)v_1\end{array}\right\} = -\tfrac{1}{2}(a_1^2 - a_2^2),$$

$$\left.\begin{array}{l}(\cot \alpha_2 - \cot \alpha_3)(uv_1 - vu_1) \\ \qquad -(a_2 - a_3)u \\ -(a_2 \cot \alpha_2 - a_3 \cot \alpha_3)v_1\end{array}\right\} = -\tfrac{1}{2}(a_2^2 - a_3^2).$$

Sind nun überhaupt

$$\mathfrak{A}\mathfrak{X} + \mathfrak{B}\mathfrak{Y} + \mathfrak{C}\mathfrak{Z} = \mathfrak{K},$$
$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{X} + \mathfrak{B}_1\mathfrak{Y} + \mathfrak{C}_1\mathfrak{Z} = \mathfrak{K}_1,$$
$$\mathfrak{A}_2\mathfrak{X} + \mathfrak{B}_2\mathfrak{Y} + \mathfrak{C}_2\mathfrak{Z} = \mathfrak{K}_2$$

drei Gleichungen des ersten Grades zwischen den drei unbekannten Grössen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$; so ist bekanntlich

$$\mathfrak{X} = \frac{\mathfrak{K}(\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1) + \mathfrak{K}_1(\mathfrak{B}_2\mathfrak{C} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}_2) + \mathfrak{K}_2(\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{B}_1\mathfrak{C})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1) + \mathfrak{A}_1(\mathfrak{B}_2\mathfrak{C} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}_2) + \mathfrak{A}_2(\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{B}_1\mathfrak{C})},$$

Digitized by Google

$$\mathfrak{Y}=\frac{\mathfrak{K}(\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_2-\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_1)+\mathfrak{K}_1(\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}-\mathfrak{C}\mathfrak{A}_2)+\mathfrak{K}_2(\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1-\mathfrak{C}_1\mathfrak{A})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2-\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1)+\mathfrak{A}_1(\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}-\mathfrak{B}\mathfrak{C}_2)+\mathfrak{A}_2(\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1-\mathfrak{B}_1\mathfrak{C})}$$

$$3=\frac{\mathfrak{K}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2-\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1)+\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}-\mathfrak{A}\mathfrak{B}_2)+\mathfrak{K}_2(\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1-\mathfrak{A}_1\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2-\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1)+\mathfrak{A}_1(\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}-\mathfrak{B}\mathfrak{C}_2)+\mathfrak{A}_2(\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1-\mathfrak{B}_1\mathfrak{C})}.$$

Mittelst dieser Formeln erhält man, wenn

$$60)\quad \begin{cases} u^2+v^2-u_1^{\,2}-v_1^{\,2}=A=\dfrac{Z}{N}, \\ uv_1-vu_1=B=\dfrac{Z_1}{N}, \\ u=C=\dfrac{Z_2}{N}. \\ v_1=D=\dfrac{Z_3}{N} \end{cases}$$

gesetzt wird, aus den obigen Gleichungen ohne Schwierigkeit

$$\begin{aligned} 61)\quad N=\;& a\cot a\,\{(a_2-a_3)\cot a_1+(a_3-a_1)\cot a_2+(a_1-a_2)\cot a_3\} \\ & -a_1\cot a_1\,\{(a_2-a_3)\cot a+(a_3-a)\cot a_2+(a-a_2)\cot a_3\} \\ & +a_2\cot a_2\,\{(a_1-a_3)\cot a+(a_3-a)\cot a_1+(a-a_1)\cot a_3\} \\ & -a_3\cot a_3\,\{(a_1-a_2)\cot a+(a_2-a)\cot a_1+(a-a_1)\cot a_2\} \end{aligned}$$

oder, wie hieraus ferner leicht folgt:

$$\begin{aligned} 62)\quad N=\;& (a-a_1)(a_2-a_3)\cot a\cot a_1 \\ & +(a-a_2)(a_3-a_1)\cot a\cot a_2 \\ & +(a-a_3)(a_1-a_2)\cot a\cot a_3 \\ & +(a_1-a_2)(a-a_3)\cot a_1\cot a_2 \\ & +(a_1-a_3)(a_2-a)\cot a_1\cot a_3 \\ & +(a_2-a_3)(a-a_1)\cot a_2\cot a_3. \end{aligned}$$

Ferner ergiebt sich leicht

$$\begin{aligned} 63)\quad Z_1=\;& -\tfrac{1}{2}a\cot a\,\{(a_2-a_3)a_1^{\,2}+(a_3-a_1)a_2^{\,2}+(a_1-a_2)a_3^{\,2}\} \\ & +\tfrac{1}{2}a_1\cot a_1\,\{(a_2-a_3)a^2+(a_3-a)a_2^{\,2}+(a-a_2)a_3^{\,2}\} \\ & -\tfrac{1}{2}a_2\cot a_2\,\{(a_1-a_3)a^2+(a_3-a)a_1^{\,2}+(a-a_1)a_3^{\,2}\} \\ & +\tfrac{1}{2}a_3\cot a_3\,\{(a_1-a_2)a^2+(a_2-a)a_1^{\,2}+(a-a_1)a_2^{\,2}\}. \end{aligned}$$

Weil nun aber nach 20)

$$\begin{aligned} &(a_2-a_3)a_1^{\,2}+(a_3-a_1)a_2^{\,2}+(a_1-a_2)a_3^{\,2} \\ &\qquad =-(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1), \\ &(a_2-a_3)a^2+(a_3-a)a_2^{\,2}+(a-a_2)a_3^{\,2} \\ &\qquad =-(a-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a), \\ &(a_1-a_3)a^2+(a_3-a)a_1^{\,2}+(a-a_1)a_3^{\,2} \\ &\qquad =-(a-a_1)(a_1-a_3)(a_3-a), \end{aligned}$$

$$(a_1-a_2)\,a^2+(a_2-a)\,a_1^2+(a-a_1)\,a_2^2$$
$$=-(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)$$

ist, so ist

$$64)\quad Z_1=\tfrac{1}{2}a(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)\cot a$$
$$-\tfrac{1}{2}a_1(a-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a)\cot a_1$$
$$+\tfrac{1}{2}a_2(a-a_1)(a_1-a_3)(a_3-a)\cot a_2$$
$$-\tfrac{1}{2}a_3(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)\cot a_3.$$

Weiter ergiebt sich nach einigen leichten Reductionen

$$65)\quad Z_2=\tfrac{1}{2}(a-a_1)(a_2-a_3)(a_2+a_3)\cot a\cot a_1$$
$$+\tfrac{1}{2}(a-a_2)(a_3-a_1)(a_3+a_1)\cot a\cot a_2$$
$$+\tfrac{1}{2}(a-a_3)(a_1-a_2)(a_1+a_2)\cot a\cot a_3$$
$$+\tfrac{1}{2}(a_1-a_2)(a-a_3)(a+a_3)\cot a_1\cot a_2$$
$$+\tfrac{1}{2}(a_1-a_3)(a_2-a)(a_2+a)\cot a_1\cot a_3$$
$$+\tfrac{1}{2}(a_2-a_3)(a-a_1)(a+a_1)\cot a_2\cot a_3.$$

Eben so leicht erhält man

$$66)\quad Z_3=-\tfrac{1}{2}\cot a\,\{(a_2-a_3)a_1^2+(a_3-a_1)a_2^2+(a_1-a_2)a_3^2\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\cot a_1\,\{(a_2-a_3)a^2+(a_3-a)a_2^2+(a-a_2)a_3^2\}$$
$$-\tfrac{1}{2}\cot a_2\,\{(a_1-a_3)a^2+(a_3-a)a_1^2+(a-a_1)a_3^2\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\cot a_3\,\{(a_1-a_2)a^2+(a_2-a)a_1^2+(a-a_1)a_2^2\},$$

und folglich auf ganz ähnliche Art wie oben

$$67)\quad Z_3=\tfrac{1}{2}(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)\cot a$$
$$-\tfrac{1}{2}(a-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a)\cot a_1$$
$$+\tfrac{1}{2}(a-a_1)(a_1-a_3)(a_3-a)\cot a_2$$
$$-\tfrac{1}{2}(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)\cot a_3.$$

Führt man nun endlich die gefundenen Werthe von uv_1-vu_1, u, v_1 in eine, etwa in die erste der Gleichungen 35) ein, so erhält man nach einigen keine Schwierigkeit darbietenden Reductionen:

$$68)\quad Z=a_2a_3(a-a_1)(a_2-a_3)\cot a\cot a_1$$
$$+a_1a_3(a-a_2)(a_3-a_1)\cot a\cot a_2$$
$$+a_1a_2(a-a_3)(a_1-a_2)\cot a\cot a_3$$
$$+aa_3(a_1-a_2)(a-a_3)\cot a_1\cot a_2$$
$$+aa_2(a_1-a_3)(a_2-a)\cot a_1\cot a_3$$
$$+aa_1(a_2-a_3)(a-a_1)\cot a_2\cot a_3.$$

Uebrigens kann man, wie leicht erhellen wird, auch

Digitized by Google

$$69)\quad N = 2(a-a_1)(a_2-a_3)\cot a \cot a_1 + 2(a-a_2)(a_3-a_1)\cot a \cot a_2 + 2(a-a_3)(a_1-a_2)\cot a \cot a_3 + 2(a_1-a_2)(a-a_3)\cot a_1 \cot a_2 + 2(a_1-a_3)(a_2-a)\cot a_1 \cot a_3 + 2(a_2-a_3)(a-a_1)\cot a_2 \cot a_3,$$

$$70)\quad Z = 2a_2a_3(a-a_1)(a_2-a_3)\cot a \cot a_1 + 2a_1a_3(a-a_2)(a_3-a_1)\cot a \cot a_2 + 2a_1a_2(a-a_3)(a_1-a_2)\cot a \cot a_3 + 2aa_3(a_1-a_2)(a-a_3)\cot a_1 \cot a_2 + 2aa_2(a_1-a_3)(a_3-a)\cot a_1 \cot a_3 + 2aa_1(a_2-a_3)(a-a_1)\cot a_2 \cot a_3,$$

$$71)\quad Z_1 = a(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)\cot a - a_1(a-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a)\cot a_1 + a_2(a-a_1)(a_1-a_3)(a_3-a)\cot a_2 - a_3(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)\cot a_3$$

$$72)\quad Z_2 = (a-a_1)(a_2-a_4)(a_3+a_3)\cot a \cot a_1 + (a-a_2)(a_3-a_1)(a_3+a_1)\cot a \cot a_2 + (a-a_3)(a_1-a_2)(a_1+a_2)\cot a \cot a_3 + (a_1-a_2)(a-a_3)(a+a_3)\cot a_1 \cot a_2 + (a_1-a_3)(a_2-a)(a_2+a)\cot a_1 \cot a_3 + (a_2-a_3)(a-a_1)(a+a_1)\cot a_2 \cot a_3,$$

$$73)\quad Z_3 = (a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)\cot a - (a-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a)\cot a_1 + (a-a_1)(a_1-a_3)(a_3-a)\cot a_2 - (a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)\cot a_3$$

setzen, welche Formeln die leichteste Berechnung der Grössen

$$\frac{Z}{N},\ \frac{Z_1}{N_1},\ \frac{Z_2}{N_2},\ \frac{Z_3}{N_3}$$

oder

$$A,\ B,\ C,\ D$$

gestatten dürften.

§. 7.

Wenn wir jetzt wieder α, α_1, α_2, α_3 die 180° nicht übersteigenden Winkel

Digitized by Google

$$SMS_{,,},\ SM_1S_{,,},\ SM_2S_{,,},\ SM_3S_{,,}$$

bezeichnen lassen, so haben wir nach 21) die vier folgenden Gleichungen:

$$74)\quad \begin{cases} (a_1-a_2)\,\Delta\cot\alpha+(a_2-a)\,\Delta_1\cot\alpha_1+(a-a_1)\,\Delta_2\cot\alpha_2 \\ \qquad =-(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a), \\ (a_1-a_3)\,\Delta\cot\alpha+(a_3-a)\,\Delta_1\cot\alpha_1+(a-a_1)\,\Delta_3\cot\alpha_3 \\ \qquad =-(a-a_1)(a_1-a_3)(a_3-a), \\ (a_2-a_3)\,\Delta\cot\alpha+(a_3-a)\,\Delta_2\cot\alpha_2+(a-a_2)\,\Delta_3\cot\alpha_3 \\ \qquad =-(a-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a), \\ (a_2-a_3)\,\Delta_1\cot\alpha_1+(a_3-a_1)\,\Delta_2\cot\alpha_2+(a_1-a_2)\,\Delta_3\cot\alpha_3 \\ \qquad =-(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1); \end{cases}$$

und können uns in jedem Falle einer jeden dieser vier Gleichungen als einer Prüfungsgleichung für die Richtigkeit der ganzen geführten Rechnung bedienen, was immer von besonderer Wichtigkeit ist.

§. 8.

Wir wollen nun nach den im Vorhergehenden entwickelten Formeln, um deren Anwendung zu zeigen, ein Beispiel berechnen, und wollen dabei annehmen, dass man sich, um von dem Punkte M, M_1, M_2, M_3 durch den Punkt S zu dem Punkte S_1 zu gelangen, immer nach derselben Richtung bewegen müsse, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen.

Sind nun die Abscissen der Punkte

$$M,\ M_1,\ M_2,\ M_3$$

und die an denselben gemessenen, 180° nicht übersteigenden Winkel

$$SMS_1,\ SM_1S_1,\ SM_2S_1,\ SM_3S_1$$

respective

$$+2,\ 3;\ +5,\ 6;\ +9,\ 9,\ +15,\ 7$$

und

$$99°.25',\ 78°.10',\ 60°.54',\ 45°.56';$$

so hat man unter der gemachten Voraussetzung im Folgenden immer

a	$=2,3$	und	$\alpha=99°.25'$
a_1	$=5,6$		$\alpha_1=78\,.\,10$
a_2	$=9,9$		$\alpha_2=60\,.\,54$
a_3	$=15,7$		$\alpha_3=45\,.\,56$

zu setzen.

Digitized by Google

Zuerst berechnet man die folgenden Grössen:

$$\begin{aligned} a_1 - a &= 3{,}3; & a + a_1 &= 7{,}9 \\ a_2 - a &= 7{,}4; & a + a_2 &= 12{,}2 \\ a_3 - a &= 13{,}4; & a + a_3 &= 18{,}0 \\ a_2 - a_1 &= 4{,}3; & a_1 + a_2 &= 15{,}5 \\ a_3 - a_1 &= 10{,}1; & a_1 + a_3 &= 21{,}3 \\ a_3 - a_2 &= 5{,}8; & a_2 + a_3 &= 25{,}6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log a &= 0{,}3617278 \\ \log a_1 &= 0{,}7481880 \\ \log a_2 &= 0{,}9956352 \\ \log a_3 &= 1{,}1958997 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log (a_1 - a) &= 0{,}5185139 \\ \log (a_2 - a) &= 0{,}8808136 \\ \log (a_3 - a) &= 1{,}1271048 \\ \log (a_2 - a_1) &= 0{,}6334685 \\ \log (a_3 - a_1) &= 1{,}0043214 \\ \log (a_3 - a_2) &= 0{,}7634280 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log (a + a_1) &= 0{,}8977271 \\ \log (a + a_2) &= 1{,}0863598 \\ \log (a + a_3) &= 1{,}2552725 \\ \log (a_1 + a_2) &= 1{,}1903317 \\ \log (a_1 + a_3) &= 1{,}3283796 \\ \log (a_2 + a_3) &= 1{,}4082400 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log (-\cot \alpha) &= 0{,}2197097 - 1 \\ \log \cot \alpha_1 &= 0{,}3212216 - 1 \\ \log \cot \alpha_2 &= 0{,}7455376 - 1 \\ \log \cot \alpha_3 &= 0{,}9858484 - 1 \end{aligned}$$

Man erhält nun leicht

$$\begin{aligned} (a - a_1)(a_2 - a_3) \cot \alpha \cot \alpha_1 &= -\ 0{,}665 \\ (a - a_2)(a_3 - a_1) \cot \alpha \cot \alpha_2 &= +\ 7{,}086 \\ (a - a_3)(a_1 - a_2) \cot \alpha \cot \alpha_3 &= -\ 9{,}250 \\ (a_1 - a_2)(a - a_3) \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 &= +\ 6{,}719 \\ (a_1 - a_3)(a_2 - a) \cot \alpha_1 \cot \alpha_3 &= -\ 15{,}567 \\ (a_2 - a_3)(a - a_1) \cot \alpha_2 \cot \alpha_3 &= +\ 10{,}312 \\ \hline N &= -\ 1{,}365\ ^{*)} \end{aligned}$$

---

*) Die Rechnung ist nach den Formeln 62), 68), 64), 65), 67) bis auf drei Decimalen geführt worden.

$$a_2a_3(a-a_1)(a_2-a_3)\cot a\cot a_1 = -103{,}373$$
$$a_1a_3(a-a_2)(a_1-a_2)\cot a\cot a_2 = +622{,}974$$
$$a_1a_2(a-a_3)(a_1-a_2)\cot a\cot a_3 = -512{,}808$$
$$aa_3(a_1-a_3)(a-a_3)\cot a_1\cot a_3 = +242{,}639$$
$$aa_3(a_1-a_3)(a_3-a)\cot a_1\cot a_3 = -354{,}461$$
$$aa_1(a_2-a_3)(a-a_1)\cot a_2\cot a_3 = +132{,}814$$
$$Z = +27{,}785$$

$$\tfrac{1}{2}a(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)\cot a = -48{,}042$$
$$-\tfrac{1}{2}a_1(a-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a)\cot a_1 = -346{,}518$$
$$\tfrac{1}{2}a_2(a-a_1)(a_1-a_3)(a_3-a)\cot a_2 = +1230{,}504$$
$$-\tfrac{1}{2}a_3(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)\cot a_3 = -819{,}434$$
$$Z_1 = +16{,}510$$

$$\tfrac{1}{2}(a-a_1)(a_2-a_3)(a_2+a_3)\cot a\cot a_1 = -8{,}513$$
$$\tfrac{1}{2}(a-a_2)(a_3-a_1)(a_3+a_1)\cot a\cot a_2 = +75{,}463$$
$$\tfrac{1}{2}(a-a_3)(a_1-a_2)(a_1+a_2)\cot a\cot a_3 = -71{,}686$$
$$\tfrac{1}{2}(a_1-a_3)(a-a_3)(a+a_3)\cot a_1\cot a_3 = +60{,}475$$
$$\tfrac{1}{2}(a_1-a_3)(a_3-a)(a_3+a)\cot a_1\cot a_3 = -94{,}959$$
$$\tfrac{1}{2}(a_2-a_3)(a-a_1)(a+a_1)\cot a_2\cot a_3 = +40{,}731$$
$$Z_2 = +1{,}511$$

$$\tfrac{1}{2}(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)\cot a = -20{,}888$$
$$-\tfrac{1}{2}(a-a_3)(a_2-a_3)(a_3-a)\cot a_1 = -61{,}878$$
$$\tfrac{1}{2}(a-a_1)(a_1-a_3)(a_3-a)\cot a_2 = +124{,}293$$
$$-\tfrac{1}{2}(a-a_1)(a_1-a_3)(a_2-a)\cot a_3 = -52{,}193$$
$$Z_3 = -10{,}666$$

$$u^2+v^2-u_1^2-v_1^2 = A = \frac{Z}{N} = -\frac{27{,}785}{1{,}365}$$
$$uv_1-vu_1 = B = \frac{Z_1}{N} = -\frac{16{,}510}{1{,}365}$$
$$u = C = \frac{Z_2}{N} = -\frac{1{,}511}{1{,}365}$$
$$v_1 = D = \frac{Z_3}{N} = +\frac{10{,}666}{1{,}365}$$
$$C+D = +\frac{9{,}155}{1{,}365}$$
$$C-D = -\frac{12{,}177}{1{,}365}$$
$$A = -20{,}355$$
$$B = -12{,}095$$
$$C = -1{,}107$$
$$D = +7{,}814$$

$$(C+D)(C-D) = -\ 59{,}832$$
$$CD = -\ 8{,}650$$
$$A_1 = A-(C+D)(C-D) = +\ 39{,}477$$
$$B_1 = B-CD = -\ 3\ 445$$

Zur Bestimmung von v^2 haben wir in diesem Falle, wo A_1 positiv ist, nach dem Obigen die folgenden Formeln:

$$\text{tang}\ \omega = \frac{2B_1}{A_1},\quad v^2 = B_1\ \cot\tfrac{1}{2}\omega.$$

$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log(-B_1) = \underline{0.5371892}$$
$$0{,}8382192$$
$$\log A_1 = 1{,}5963441$$
$$\log(-\text{tang}\ \omega) = \overline{0{,}2418751} - 1$$
$$\omega = -9^\circ\ .\ 54'\ .\ 0'',813$$
$$\tfrac{1}{2}\omega = -\ 4\ .\ 57\ .\ 0{,}407$$
$$\log(-\cot\tfrac{1}{2}\omega) = \left\{\begin{array}{r} 1{,}0624350 \\ -\ 100 \\ \hline 1{,}0624250 \end{array}\right.$$
$$\log(-B_1) = \underline{0{,}5371892}$$
$$\log . v^2 = 1{,}5996142\ ^*)$$
$$\tfrac{1}{2}\log . v^2 = 0{,}7998071$$
$$v = \pm\ 6{,}307$$
$$u_1 = -\frac{B-CD}{v} = \pm\ 0{,}546.$$

Wir haben also

$$u = -\ 1{,}107 \qquad v = \pm\ 6{,}307$$
$$u_1 = \pm\ 0{,}546 \qquad v_1 = +\ 7{,}814$$

und weil nun bekanntlich

$$x = u+u_1,\ y = v+v_1;$$
$$x_1 = u-u_1,\ y_1 = v-v_1$$

---

*) Um die Richtigkeit der Rechnung zu prüfen, könnte man ausser $B_1 \cot\frac{1}{2}\omega$ auch noch $-B_1\ \text{tang}\ \frac{1}{2}\omega$ berechnen, wo dann immer

$$B_1\ \cot\tfrac{1}{2}\omega + (-B_1\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\omega)$$
$$= B_1\ (\cot\tfrac{1}{2}\omega - \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\omega)$$
$$= B_1\ \frac{\cos\frac{1}{2}\omega^2 - \sin\frac{1}{2}\omega^2}{\sin\frac{1}{2}\omega\ \cos\frac{1}{2}\omega}$$
$$= 2B_1\ \frac{\cos\omega}{\sin\omega} = 2B_1\ \cot\omega = A_1$$

sein muss.

Digitized by Google

ist; so erhalten wir die beiden folgenden Auflösungen unserer Aufgabe:

Erste Auflösung.

$$x = -\ 0{,}561 \qquad y = +\ 14{,}121$$
$$x_1 = -\ 1.653 \qquad y_1 = -\ 1{,}507$$

Zweite Auflösung.

$$x = -\ 1{,}653 \qquad y = +\ 1{,}507$$
$$x_1 = -\ 0{,}561 \qquad y_1 = -\ 14{,}121$$

Um die Richtigkeit der Rechnung zu prüfen, berechne man zuerst mittelst der Gleichungen 33) die Grössen Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$$uv_1 - vu_1 = -\ 12{,}095$$
$$av_1 = +\ 17{,}972$$
$$a_1v_1 = +\ 43{,}758$$
$$a_2v_1 = +\ 77{,}359$$
$$a_3v_1 = +\ 122{,}680$$

$$\Delta = 60{,}134$$
$$\Delta_1 = 111{,}706$$
$$\Delta_2 = 178{,}908$$
$$\Delta_3 = 269{,}550$$

$$\log \Delta = 1{,}7791201$$
$$\log \Delta_1 = 2{,}0480765$$
$$\log \Delta_2 = 2{,}2526297$$
$$\log \Delta_3 = 2{,}4306393$$

$$(a_1 - a_2)\,\Delta \cot \alpha = +\ 42{,}884$$
$$(a_2 - a)\,\Delta_1 \cot \alpha_1 = +\ 177{,}874$$
$$(a - a_1)\,\Delta_2 \cot \alpha_2 = -\ 328{,}610$$
$$(a_1 - a_2)\Delta \cot \alpha + (a_2 - a)\Delta_1 \cot \alpha_1 + (a - a_1)\Delta_2 \cot \alpha_2 = -\ 107{,}852$$
$$-(a - a_1)(a_1 - a_2)(a_2 - a) = -\ 107{,}844$$
$$\text{Differenz} = \mp\ 0{,}008$$

woraus man sieht, wie genau die erste der vier Prüfungsgleichungen 74) erfüllt ist. Auf ähnliche Art könnte man auch jede andere dieser vier Prüfungsgleichungen entwickeln.

Die Berechnung der Grössen

$$\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3; \Theta', \Theta'_1, \Theta'_2, \Theta'_3$$

und

$$r, r_1, r_2, r_3; r', r'_1, r'_2, r'_3$$

so wie der Entfernung E der beiden Punkte S und S_1 von einander nach den im Obigen entwickelten Formeln können wir um so eher füglich dem eigenen Fleisse des Lesers überlassen, weil das vorher berechnete Beispiel nur die beste Form der Rechnung zu zeigen den Zweck hat.

Weitere Entwickelungen über die hier behandelte und ähnliche allgemeinere Aufgaben behalten wir spätern Aufsätzen vor.

Digitized by Google

XLIII.

Geodätische Aufgabe.

Von

Herrn L. Mossbrugger,

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

Es sind die relative Lage und die Meereshöhen der beiden Punkte A und B (Taf. VII. Fig. 9.) gegeben; ferner kennt man den horizontalen Winkel bei N, welchen die Projectionen cN und mN der Linien AN und BN auf der Horizontalebene cNm mit einander bilden; endlich sind auch die Zenithdistanzen von A und B in N, mithin auch ihre Ergänzungen zu 90° gegeben. Man soll die relative Lage des Punktes N in Bezug auf A und B, nebst den Höhendistanzen finden *).

Denken wir uns eine durch N gelegte Horizontalebene cNm; ferner seien Aac und Bm senkrecht auf diese Ebene gezogen; endlich sei $aP \parallel cN$, $BP \parallel mN$, so wird auch PN senkrecht auf cNm und $\angle BPA = \angle mNc$ sein. Ziehen wir noch aus dem Durchschnitt D der Linien aP und AN die Linie $DQ \parallel PN$ und verbinden D mit B und Q mit m, und setzen der Kürze wegen:

$$Ba = a,\ Aa = h,\ \angle aPB = \angle cNm = \gamma;$$
$$\angle BNm = \beta,\ \angle ANc = \alpha;\ ac = y,\ \angle ANB = \varphi;$$

so reducirt sich die Aufgabe dahin: Aus den gegebenen Stücken a, h, α, β, γ die Grössen y und φ zu bestimmen, woraus sich alsdann alles Uebrige ergibt. Diesen Annahmen zufolge ist

$$DN = y \operatorname{cosec} \alpha,\ DP = y \operatorname{cotg} \alpha,\ AN = (h+y) \operatorname{cosec} \alpha,$$
$$cN = (h+y) \operatorname{cotg} \alpha,\ BP = y \operatorname{cotg} \beta,\ BN = y \operatorname{cosec} \beta.$$

---

*) Der Herr Verfasser des vorliegenden Aufsatzes schreibt mir bei der Uebersendung desselben, dass ihm die obige Aufgabe von dem ehemaligen preussischen Ingenieur: Herrn Hauptmann Michaelis bei Gelegenheit der Aufnahme der St. Gotthardsstrasse zur Auflösung vorgelegt worden sei. Uebrigens wünscht der Herr Verfasser, dass die Aufgabe, eben so wie der in No. XXXIV. mitgetheilte Satz, nur als eine Uebungsaufgabe für Schüler angesehen werde. G.

Digitized by Google

Ferner ist im Dreiecke DPB

$$BD^2 = DP^2 + BP^2 - 2DP \,.\, BP \cos \gamma$$

und im Dreiecke BDN

$$BD^2 = DN^2 + BN^2 - 2DN \,.\, BN \cos \varphi$$

oder, wenn wir die obigen Bezeichnungen gebrauchen, so ist

$$BD^2 = y^2 \{\operatorname{cotg} \alpha^2 + \operatorname{cotg} \beta^2 - 2\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \cos \gamma\} \ldots . (1)$$
$$BD^2 = \{\operatorname{cosec} \alpha^2 + \operatorname{cosec} \beta^2 - 2\operatorname{cosec} \alpha \operatorname{cosec} \beta \cos \varphi\} \ldots . (2)$$

Aus (1) und (2) finden wir nach einigen Reductionen:

$$\cos \varphi = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Setzen wir in diesem Ausdrucke $\frac{\cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta} = \operatorname{tg} \delta$, so ist

$$\cos \varphi = \frac{\sin (\alpha + \delta) \sin \beta}{\cos \delta} \ldots . (3)$$

Ferner ist im Dreiecke ABN

$$AB^2 = AN^2 + BN^2 - 2AN \,.\, BN \cos \varphi,$$

oder, wenn wir die oben angegebenen Werthe einführen:

$$a^2 + h^2 = (h + y)^2 \operatorname{cosec} \alpha^2 + y^2 \operatorname{cosec} \beta^2 - 2(h + y) y \operatorname{cosec} \alpha \operatorname{cosec} \beta \cos \varphi$$

oder

$$y^2 \{\sin \beta^2 + \sin \alpha^2 - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \varphi\} + 2hy \sin \beta \,.\, \{\sin \beta - \sin \alpha \cos \varphi\} = (a^2 \sin \alpha^2 - h^2 \cos \alpha^2) \sin \beta^2.$$

Aus dieser Gleichung finden wir, mit Anwendung folgender goniometrischen Relationen:

$$\cos \varphi = 2 \cos \tfrac{1}{2}\varphi^2 - 1,$$
$$\sin \alpha^2 + \sin \beta^2 - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \varphi = 4\{\sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)^2 \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 - \sin \alpha \sin \beta \cos \tfrac{1}{2}\varphi^2\}$$
$$\sin \beta - \sin \alpha \cos \varphi = 2\{\sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) - \sin \alpha \cos \tfrac{1}{2}\varphi^2\}$$

für y folgenden Werth:

$$y = -\frac{h\{\sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) - \sin \alpha \cos \tfrac{1}{2}\varphi^2}{2\{\sin \tfrac{1}{2}((\alpha + \beta)^2 \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 - \sin \alpha \sin \beta \cos \tfrac{1}{2}\varphi^2\}}$$

Digitized by Google

$$\pm \frac{\sqrt{a^2 \sin\alpha^2 \sin\beta^2 \{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2 \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2 - \sin\alpha \sin\beta \cos\frac{3}{4}\varphi^2\} + h^2 \sin\beta^2 \{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) - \sin\alpha \cos\frac{1}{2}\varphi^2\}}}{2\{\sin(\alpha+\beta)^2 \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2 - \sin\alpha \sin\beta \cos\frac{1}{2}\varphi^2\}}$$

Da $\cos\varphi$ nach No. 3. bestimmt ist, so ist auch der Werth von y bestimmt; mithin können auch alle Stücke des Dreiecks ANB mittelst der obigen Annahmen gefunden werden.

XLIV.

Ueber die Auflösung der cubischen Gleichungen.

Von dem

Herrn Professor C. A. Bretschneider

in Gotha.

Die bisher bekannten Auflösungsweisen der cubischen Gleichungen setzen sämmtlich eine ganz bestimmte Form der Gleichung voraus, indem entweder ein Glied fehlen, oder wenigstens eine bestimmte Relation zwischen den verschiedenen Coefficienten der einzelnen Glieder stattfinden muss, wenn die Endformeln sollen angewandt werden können. Es hat dies aber den Nachtheil, dass eine solche Auflösung dem Anfänger in der Algebra immer als eine Art Kunststück erscheint, das durch Zufall aufgefunden worden ist, und deshalb auch vorzugsweise das Gedächtniss in Anspruch nimmt. Ganz besonders gilt dies von der sogenannten Cardanischen Regel, die noch überdies an einer solchen Beschränktheit leidet, dass auch nicht einer der Fälle, in denen eine cubische Gleichung eine unmittelbare Angabe ihrer Wurzeln gestattet, in ihr enthalten ist. Dies hat mich veranlasst, eine Auflösung zu suchen, die gar keine besondere Form der Gleichung verlangt, dabei auf einem möglichst einfachen Wege gefunden werden kann und die bisher angegebenen Lösungen sämmtlich als specielle Fälle enthält. Was ich erhalten habe, scheint wenigstens für den Unterricht nicht unbrauchbar zu sein, weshalb die Mittheilung desselben an diesem Orte sich wohl rechtfertigen dürfte.

Es sei die Gleichung $x^3 + c = 0$ gegeben, so ergiebt sich unmittelbar $x = -\sqrt[3]{c}$, mithin $x + \sqrt[3]{c}$ als einer der zweitheiligen Faktoren der vorgegebenen Gleichung. Die beiden anderen findet man sogleich, wenn man $x^3 + c$ durch $(x + \sqrt[3]{c})$ dividirt. Man erhält dadurch $x^2 - x\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{cc} = 0$ und daraus die beiden anderen zweitheiligen Faktoren $x - \frac{1}{2}\sqrt[3]{c}(1 + i\sqrt{3})$ und $x - \frac{1}{2}\sqrt[3]{c}(1 - i\sqrt{3})$, wo $i = \sqrt{-1}$ gesetzt ist. Ist c negativ, so gehen die Vorzeichen von $\sqrt[3]{c}$ in die entgegengesetzten über, ohne dass sich in den gefundenen Ausdrücken sonst etwas änderte. Eine sogenannte reine cubische Gleichung hat demnach stets eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

Soll nun die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ aufgelöst werden, so übersieht man sofort, dass dies am einfachsten dadurch geschehen kann, dass man sie in eine andere von der Form $y^3 + c' = 0$ umformt und letztere auf die so eben angegebene Weise löst. Es wird demnach für x eine solche Funktion von y gesetzt werden müssen, welche noch zwei von einander und von y völlig unabhängige Grössen u und v enthält, damit es möglich sei, die Werthe der letzteren so anzunehmen, dass dadurch die Coefficienten von y^2 und y gleich Null werden. Die einfachste Funktion dieser Art ist aber $x = \frac{u + vy}{1 + y}$. Wird diese also in obige Gleichung substituirt, so erhält man:

$$\begin{aligned} 0 = {} & y^3(v^3 + av^2 + bv + c) \\ & + y^2(v[3uv + a(u + v) + b] + [auv + b(u + v) + 3c]) \\ & + y(u[3uv + a(u + v) + b] + [auv + b(u + v) + 3c]) \\ & + (u^3 + au^2 + bu + c) \end{aligned}$$

und man hat nun u und v so zu bestimmen, dass die beiden mittelsten Glieder verschwinden. Es geschieht dies am einfachsten dadurch, dass man

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 3uv + a(u + v) + b \\ 0 &= auv + b(u + v) + 3c \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

oder, was dasselbe ist,

$$\left.\begin{aligned} 0 &= (b + au) + v(a + 3u) = (b + av) + u(a + 3v) \\ 0 &= (3c + bu) + v(b + au) = (3c + bv) + u(b + av) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

setzt. Damit erhält man sofort die Werthe:

$$\begin{aligned} 3(v^3 + av^2 + bv + c) &= v^2(a + 3v) + 2v(b + av) + (3c + bv) \\ &= v^2(a + 3v) + (b + av)(2v - u) \\ &= (a + 3v)(v^2 - 2vu + u^2) \\ &= (a + 3v)(v - u)^2 \end{aligned}$$

Digitized by Google

und auf ähnliche Weise

$$3(u^3+au^2+bu+c)=(a+3u)(v-u)^2.$$

Die transformirte Gleichung nimmt daher folgende Gestalt an:

$$0=y^3(a+3v)\frac{(v-u)^2}{3}+(a+3u)\frac{(v-u)^2}{3}$$

oder

$$0=y^3+\frac{a+3u}{a+3v}\ldots. \quad (3)$$

Setzt man nun der Kürze halber $a+3u=g^3$ und $a+3v=h^3$, so ergeben sich die drei Werthe von y folgendermaassen:

$$\left.\begin{aligned} y&=-\frac{g}{h}\\ y&=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{g}{h}(1+i\sqrt{3})\\ y&=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{g}{h}(1-i\sqrt{3}) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Für den Quotienten $\frac{g}{h}$ lassen sich mit Hülfe der Gleichungen (2) noch folgende Werthe aufstellen:

$$\frac{g^3}{h^3}=\frac{a+3u}{a+3v}=\frac{u}{v}\cdot\frac{b+au}{b+av}=\frac{u^2}{v^2}\cdot\frac{3c+bu}{3c+bv}.$$

Werden nun diese Ausdrücke der Reihe nach in die Gleichung $x=\frac{u+vy}{1+y}$ gesetzt, so erhält man die drei Wurzeln der vorgegebenen cubischen Gleichung.

Zuvörderst ist, wenn man den reellen Werth von y nimmt, wegen

$$u=\tfrac{1}{3}(g^3-a) \text{ und } v=\tfrac{1}{3}(h^3-a),$$

$$x=\tfrac{1}{3}\cdot\frac{(g^3-a)+(h^3-a)y}{1+y}=\tfrac{1}{3}\cdot\frac{g+hy}{1+y}-\tfrac{1}{3}a,$$

also auch

$$\begin{aligned} x&=-\tfrac{1}{3}a+\tfrac{1}{3}\frac{g^3h-h^3g}{h-g}\\ &=-\tfrac{1}{3}a-\tfrac{1}{3}gh(g+h)\ldots. \quad (5) \end{aligned}$$

Substituirt man ferner die imaginären Werthe von y, nämlich $\frac{1}{2}\frac{g}{h}(1\pm i\sqrt{3})$, so bekommt man

$$x=-\tfrac{1}{3}a+\tfrac{1}{3}gh\cdot\frac{2g^3+h^3(1\pm i\sqrt{3})}{2h+g(1\pm i\sqrt{3})}.$$

Digitized by Google

Wird der Bruch rechter Hand im Zähler und Nenner mit

$$(g-h)(2h+g(1\mp i\sqrt{3}))$$

multiplicirt, so erhält man nach einigen einfachen Reduktionen:

$$x=-\tfrac{1}{3}a+\tfrac{1}{3}gh\frac{(g+h)\mp(g-h)i\sqrt{3}}{2} \quad \ldots. \quad (6)$$

Es bleibt daher nur noch übrig, die Werthe von u, v, g und h durch die Coefficienten a, b, c auszudrücken. Es folgt aber aus (1), wenn man zur Abkürzung

$$a^2-3b=k,\ 9c-ab=m,\ b^2-3ac=n$$

setzt, sogleich

$$u+v=\frac{m}{k} \text{ und } uv=\frac{n}{k},$$

und daraus auf bekannte Weise:

$$u=\frac{m+\sqrt{m^2-4nk}}{2k},\ v=\frac{m-\sqrt{m^2-4nk}}{2k}$$

mithin:

$$g^3=\frac{2ak+3m+3\sqrt{m^2-4nk}}{2k},$$

$$h^3=\frac{2ak+3m-3\sqrt{m^2-4nk}}{2k}.$$

Es ergeben sich damit endlich die Wurzeln der vorgelegten Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} x&=-\tfrac{1}{3}a-\tfrac{1}{3}p-\tfrac{1}{3}q\\ x&=-\tfrac{1}{3}a+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{(p+q)+(p-q)i\sqrt{3}}{2}\\ x&=-\tfrac{1}{3}a+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{(p+q)-(p-q)i\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

wo die Grössen p und q durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$2p^3=2ak+3m+3\sqrt{m^2-4nk},$$

$$2q^3=2ak+3m-3\sqrt{m^2-4nk}.$$

Setzt man statt k, m, n die entsprechenden Werthe, so verwandelt sich:

$$\left.\begin{aligned} 2ak+3m\pm3\sqrt{m^2-4nk}&=2a^3-9ab+27c\\ &\quad\pm3\sqrt{3}\sqrt{27c^2-18abc+4a^3c-b^2(a^2-4b)}\\ 2c(2ak+3m\pm3\sqrt{m^2-4nk})&\\ =b^2(a^2-4b)+\{3\sqrt{3}.c&\pm\sqrt{27c^2-18abc+4a^3c-b^2(a^2-4b)}\}^2\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Digitized by Google

Ausdrücke, welche in einzelnen Fällen mit Nutzen gebraucht werden können. Man kann aber ausser den in (7) zusammengestellten Werthen der Wurzeln noch eine zweite Reihe solcher Werthe erhalten, wenn man anstatt x den Werth $\frac{1+y}{u_1+v_1y}$ in die vorgegebene Gleichung substituirt, oder, was kürzer ist, nach den Formeln (7) die Wurzeln der Gleichung $x_1^3+\frac{b}{c}x_1^2+\frac{a}{c}x_1+\frac{1}{c}=0$ sucht, in welcher $x_1=\frac{1}{x}$ ist. Man erhält auf diese Weise noch die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} x&=-\frac{3c}{b+p_1+q_1}\\ x&=-\frac{3c}{b-\frac{1}{2}(p_1+q_1)-\frac{1}{2}(p_1-q_1)i\sqrt{3}}\\ x&=-\frac{3c}{b-\frac{1}{2}(p_1+q_1)+\frac{1}{2}(p_1-q_1)i\sqrt{3}} \end{aligned}\right\}\quad(9)$$

wo p_1 und q_1 aus den nachstehenden Gleichungen gefunden werden:

$$\left.\begin{aligned} 2p_1^3&=2bn+3mc+3c\sqrt{m^2-4nk}\\ 2q_1^3&=2bn+3mc-3c\sqrt{m^2-4nk} \end{aligned}\right\}$$

oder auch

$$\left.\begin{aligned} &2(2bn+3mc\mp 3c\sqrt{m^2-4nk}\\ &\quad=a^2(b^2-4ac)+\{3\sqrt{3}c\mp\sqrt{27c^2-18abc+4b^3-a^2(b^2-4ac)}\}^2 \end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Die in (8) und (10) zusammengestellten Werthe von p und q, so wie von p_1 und q_1, sind stets reell, so lange m^2-4nk positiv ist. Haben daher n und k ungleiche Vorzeichen, so hat die Gleichung immer nur eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln. Dasselbe ist der Fall, wenn n und k gleiche Vorzeichen besitzen und überdiess $m^2>4nk$ ist. Wird hingegen in diesem Falle $m^2<4nk$, so erscheinen alle drei Wurzeln unter imaginärer Form, obschon sie dann alle drei reell werden, wovon man sich augenblicklich überzeugt, wenn man die Werthe von p, q, p_1 und q_1 nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt. Denn dann heben sich die mit i behafteten Glieder sämmtlich auf. Im Allgemeinen hat also die Gleichung nur eine reelle Wurzel, wenn

$$27c^2+4a^3c+4b^3>a^2b^2+18abc,$$

und drei reelle Wurzeln, wenn

$$27c^2+4a^3c+4b^3<a^2b^2+18abc$$

ist. — Nachdem auf diese Weise die allgemeinen Werthe der sämmtlichen Wurzeln gefunden worden sind, so ist es nunmehr leicht, eine Reihe specieller Lösungen aus ihnen abzuleiten, von denen ein Theil auch bereits bekannt ist.

Digitized by Google

Fall I. Es sei $a = 0$.

Die Gleichungen (7) bis (10) geben unmittelbar:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{3}(p+q) \\ x &= \tfrac{1}{6}((p+q)+(p-q)i\sqrt{3}) \\ x &= \tfrac{1}{6}((p+q)-(p-q)i\sqrt{3}) \\ p &= \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{3}\sqrt{c^2+\tfrac{4}{27}b^3}} \\ p &= \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c-\tfrac{1}{3}\sqrt{c^2+\tfrac{4}{27}b^3}} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{c}{\tfrac{1}{3}b+p^2+q^2} \\ x &= \frac{c}{\tfrac{1}{3}b-\tfrac{1}{2}(p^2+q^2)-\tfrac{1}{2}(p^2-q^2)i\sqrt{3}} \\ x &= \frac{c}{\tfrac{1}{3}b-\tfrac{1}{2}(p^2+q^2)+\tfrac{1}{2}(p^2-q^2)i\sqrt{3}} \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Die Werthe von p und q sind reell, wenn $c^2+\frac{4}{27}b^3 > 0$, imaginär, wenn $c^2+\frac{4}{27}b^3 < 0$ ist. Die Gleichung $x^3+bx+c=0$ hat also nur eine reelle Wurzel, wenn b positiv, oder wenn b negativ, jedoch $c^2 > \frac{4}{27}b^3$ ist. Dagegen besitzt sie drei reelle Wurzeln, wenn b negativ und zugleich $c^2 < \frac{4}{27}b^3$ ist.

Die Formeln (11) bilden die sogenannte Cardanische Formel. Sie kann zur Auflösung aller cubischen Gleichungen dienen, da $x^3+ax^2+bx+c=0$ sich stets auf die Form $y^3+By+C=0$ bringen lässt, wenn man $x=y-\frac{1}{3}a$ setzt. Es wird dann

$$B = -\tfrac{1}{3}(a^2-3b)$$
$$C = \tfrac{2}{27}a^3-\tfrac{1}{3}ab+c = \tfrac{2}{27}a(a^2-3b)+\tfrac{1}{3}(9c-ab)$$

oder mit den oben gebrauchten Bezeichnungen:

$$B = -\tfrac{1}{3}k$$
$$C = \tfrac{2}{27}ak+\tfrac{1}{3}m = \tfrac{1}{3}\{m-2aB\}$$

Fall 2. Es sei $b = 0$.

Für diesen Fall erhält man die Werthe der Wurzeln:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{3}a-(p^3+q^3) \\ x &= -\tfrac{1}{3}a+\tfrac{1}{2}\{(p^3+q^3)+(p^3-q^3)i\sqrt{3}\} \\ x &= -\tfrac{1}{3}a+\tfrac{1}{2}\{(p^3+q^3)-(p^3-q^3)i\sqrt{3}\} \\ p &= \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{2}\sqrt{c+\tfrac{4}{27}a^3}} \\ q &= \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c-\tfrac{1}{2}\sqrt{c+\tfrac{4}{27}a^3}} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Digitized by Google

ingleichen

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{-\sqrt[3]{c^2}}{p+q} \\ x &= \frac{-2\sqrt[3]{c^2}}{(p+q)+(p-q)i\sqrt{3}} \\ x &= \frac{-2\sqrt[3]{c^2}}{(p+q)-(p-q)i\sqrt{3}} \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Die Werthe von p und q sind reell oder imaginär, je nachdem $c+\frac{4}{27}a^3$ positiv oder negativ ist. Die Gleichung $x^3+ax^2+c=0$ hat daher im ersten Falle nur eine reelle Wurzel, im zweiten dagegen drei.

Die Formeln (13) und (14) bilden gewissermaassen die Umkehrung der Cardanischen Formeln, und können gleichfalls zur Auflösung aller cubischen Gleichungen gebraucht werden, indem die Gleichung $x^3+ax^2+bx+c=0$ sich immer auf die Form $y^3+Ay+C=0$ bringen lässt. Es geschieht dies, wenn man $x=y-\frac{1}{3}(a+\sqrt{a^2-3b})$ setzt, und man erhält:

$$A=-\sqrt{a^2-3b}$$

$$C=c+\frac{2(a^2-3b)(a+\sqrt{a^2-3b})-3ab}{9},$$

Ausdrücke, die denen des ersten Falles an Bequemlichkeit freilich nachstehen, jedenfalls aber dann mit Vortheil gebraucht werden können, wenn a^2-3b eine Quadratzahl ist.

Ausser den bisher gemachten beiden Annahmen können aber noch mehrere einzelne specielle Fälle entwickelt werden, die ebenfalls zu allgemeinen Auflösungen für die cubischen Gleichungen sich brauchen lassen. Die drei wichtigsten derselben bieten sich fast unmittelbar dar, indem man in den Gleichungen (8) und (10) successiv m, n, k gleich Null setzt. Man erhält dadurch die nachstehenden Formeln, in denen jedoch immer nur diejenige der beiden Wurzelformen (7) und (9) in Anwendung gebracht worden ist, welche im Resultate die grösste Einfachheit gewährt.

Fall 3. Es sei $a^2-3b=k=0$.

In diesem Falle wird $3n=-am$ und in (7) $p^3=3m$, $q^3=0$, $m=9c-\frac{1}{3}a^2$, und daher

$$\left.\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{3}a-\sqrt[3]{c-\tfrac{1}{27}a^3} \\ x &= -\tfrac{1}{3}a+\tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{c-\tfrac{1}{27}a^3} \\ x &= -\tfrac{1}{3}a-\tfrac{1}{2}(1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{c-\tfrac{1}{27}a^3} \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Die Gleichung $x^3+ax^2+\frac{1}{3}a^2x+c=0$ hat daher stets nur eine reelle Wurzel.

Digitized by Google

Fall 4. Es sei $b^2 - 3ac = n = 0$.

Man erhält hier $m = -\frac{b}{a}k$, $p_1^3 = 3mc$, $q_1^3 = 0$, mithin geben die Formeln (9)

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{b}{-a + \sqrt[3]{a(a^2-3b}} \\ x &= \frac{-b}{a + \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{a(a^2-3b)}} \\ x &= \frac{-b}{a + \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{a(a^2-3b)}} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Es hat also die Gleichung $x^3 + ax^2 + \sqrt{3ac}\,.\,x + c = 0$ gleichfalls nur eine reelle Wurzel.

Fall 5. Es sei $9c - ab = m = 0$.

Hier ist $n = -\frac{1}{3}bk$ und $-4nk = +\frac{4}{3}bk^2$. Damit erhält man aus (7)

$$\left.\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{3}a - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{a^2-3b}\,(p+q) \\ x &= -\tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{6}\sqrt[3]{a^2-3b}\,\{(p+q) + (p-q)i\sqrt{3}\} \\ x &= -\tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{6}\sqrt[3]{a^2-3b}\,\{(p+q) - (p-q)i\sqrt{3}\} \\ p &= \sqrt[3]{a + \sqrt{\tfrac{1}{3}b}} \qquad q = \sqrt[3]{a - \sqrt{\tfrac{1}{3}b}} \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Ingleichen ergiebt sich aus (9):

$$\left.\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{3}\,.\,\frac{a\sqrt{3b}}{\sqrt{3b} + \sqrt[3]{a^2-3b}\,(p_1+q_1)} \\ x &= -\tfrac{1}{3}\,.\,\frac{a\sqrt{3b}}{\sqrt{3b} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{a^2-3b}\,\{(p_1+q_1) + (p_1-q_1)i\sqrt{3}\}} \\ x &= -\tfrac{1}{3}\,.\,\frac{a\sqrt{3b}}{\sqrt{3b} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{a^2-3b}\,\{(p_1+q_1) - (p_1-q_1)i\sqrt{3}\}} \\ p_1 &= \sqrt[3]{\sqrt{3b} + a} \qquad q_1 = \sqrt[3]{\sqrt{3b} - a} \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Demnach hat die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + \frac{1}{3}ab = 0$ stets eine reelle Wurzel, wenn b positiv ist, und drei, wenn b negativ ist.

Digitized by Google

Fall 6. Es sei $c - ab = 0$.

Hier wird $m = 8ab$, $p = a + \sqrt{3b}$, $q = a - \sqrt{3b}$, und daher nach (7)

$$\left.\begin{aligned} x &= -a \\ x &= +\sqrt{-b} \\ x &= -\sqrt{-b} \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Demnach hat die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + ab = 0$ stets eine oder drei reelle Wurzeln, je nachdem b positiv oder negativ ist.

Fall 7. Es sei $a^2 - 4b = 0$.

Die Gleichungen (7) geben hier die speciellen Werthe:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{3}a - (p^2 + q^2) \\ x &= -\tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2) + \tfrac{1}{2}(p^2 - q^2)i\sqrt{3} \\ x &= -\tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2) - \tfrac{1}{2}(p^2 - q^2)i\sqrt{3} \\ p &= \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\sqrt{c} + \tfrac{1}{2}\sqrt{c - \tfrac{1}{64}a^3}} \\ q &= \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\sqrt{c} - \tfrac{1}{2}\sqrt{c - \tfrac{1}{64}a^3}} \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Demnach hat die Gleichung $x^3 + ax^2 + \frac{1}{4}a^2x + c = 0$ nur eine reelle Wurzel, wenn entweder c positiv und $c > \frac{1}{64}a^3$, oder wenn c negativ und $c < \frac{1}{64}a^3$ ist. In den entgegengesetzten Fällen kommen ihr drei reelle Wurzeln zu.

Fall 8. Es sei $b^2 - 4ac = 0$.

Die Formeln (9) und (10) geben für diesen Fall:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{c}{\frac{1}{3}b + p_1^2 + q_1^2} \\ x &= -\frac{c}{\frac{1}{3}b - \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) - \frac{1}{2}(p_1^2 - q_1^2)i\sqrt{3}} \\ x &= -\frac{c}{\frac{1}{3}b - \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{1}{2}(p_1^2 - q_1^2)i\sqrt{3}} \\ p_1 &= \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2}\sqrt{c^2 - \tfrac{1}{64}b^3}} \\ q_1 &= \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}\sqrt{c^2 - \tfrac{1}{64}b^3}} \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Hiernach besitzt die Gleichung $x^3 + \frac{b^2}{4c}x^2 + bx + c = 0$ nur eine oder drei reelle Wurzeln, je nachdem $c^2 > \frac{1}{64}b^3$ oder $c^2 < \frac{1}{64}b^3$ ist.

Digitized by Google

Es lohnt nicht der Mühe, noch anderweiten speciellen Lösungen nachzutrachten, da die hier gegebenen ziemlich die einfachsten Resultate liefern. Die beiden zuletzt erwähnten Fälle werden durch die besondere Form der in (8) und (10) gegebenen Endausdrücke dargeboten.

Jeder aber der im Vorstehenden aufgeführten Fälle bietet eine allgemeine Auflösung der cubischen Gleichungen dar, wenn es möglich ist die Gleichung $x^3+ax^2+bx+c=0$ so umzuformen, dass die Coefficienten der neuen Gleichung den Bedingungen entsprechen, welche der zu Grunde gelegte Fall verlangt. Setzt man in vorstehender Gleichung $x=y+z$, so geht dieselbe über in

$$\left.\begin{array}{r} y^3+y^2(3z+a)+y(3z^2+2az+b) \\ +(z^3+az^2+bz+c) \end{array}\right\}=0 \text{ oder } y^3+Ay^2+By+C=0$$

und man kann nun z so bestimmen, dass irgend eine vorgeschriebene Bedingung dadurch erfüllt wird. Setzt man $3z+a=0$ oder $3z^2+2az+b=0$, so bekommt man die schon in Fall 1. und 2. erwähnte Cardanische Auflösung sammt der mit ihr zusammenhängenden inversen. Will man den dritten speciellen Fall zu Grunde legen, so muss der Bedingung $A^2-3B=0$ genügt werden, d. h. es muss

$$(3z+a)^2=3(3z^2+2az+b)$$

sein. Die Entwickelung giebt aber nur die Form $a^2-3b=0$, indem z sich auf beiden Seiten vollständig hebt, mithin kann der Fall 3. einer allgemeinen Auflösung nicht zu Grunde gelegt werden, wenigstens nicht, so lange man für x keine andere Substitution macht.

Um den vierten Fall zu einer allgemeinen Auflösung zu erweitern, muss man B^2-3AC, d. h.

$$(3z^2+2az+b)^2=3(3z+a)(z^3+az^2+bz+c)$$

setzen. Hieraus folgt nach gehöriger Entwickelung:

$$z^2-z\frac{9c-ab}{a^2-3b}+\frac{b^2-3ac}{a^2-3b}=0$$

oder

$$z^2-z\frac{m}{k}+\frac{n}{k}=0$$

und daher

$$z=\frac{m+\sqrt{m^2-4nk}}{2k}.$$

Es ist dies die Auflösung, welche Cockle vor zwei Jahren bekannt gemacht und der Herausgeber dieses Journales im ersten Bande desselben mitgetheilt hat.

Die Anwendung des fünften Falles zu einer allgemeinen Auflösung der cubischen Gleichungen verlangt, dass $9C=AB$ oder

$$9(z^3+az^2+bz+c)=(3z+a)(3z^2+2az+b)$$

Digitized by Google

gesetzt werde. Die Entwickelung giebt $z = \frac{9c-ab}{2(a^2-3b)} = \frac{m}{2k}$, mithin einen recht einfachen Werth dieser Grösse, aus welchem sofort

$$A = \frac{2ak+3m}{2k}, \quad B = \frac{3(m^2-4nk)}{4k^2}$$

folgt. Es würde daher, wenn man statt der Cardanischen Formel irgend eine andere wählen wollte, die vorstehende eine ganz besondere Berücksichtigung verdienen. Der sechste Fall erfordert, wenn er verallgemeinert werden soll, dass $C = AB$, also

$$z^3+az^2+bz+c = (3z+a)(3z^2+2az+b)$$

sein muss. Die Entwickelung giebt jedoch die Gleichung:

$$8z^3+8az^2+2z(a^2+b)-(c+ab) = 0$$

verlangt also abermals die Lösung einer cubischen Gleichung und wird dadurch, wenigstens bei der angewendeten Substitution, zu einer Verallgemeinerung unbrauchbar.

Der siebente Fall würde erfordern, dass $A^2 = 4B$ oder

$$(3z+a)^2 = 4(3z^2+2az+b)$$

sei. Die Entwickelung giebt

$$3z^2+2az-(a^2-4b) = 0,$$

also

$$z = -\tfrac{1}{3}(a+2\sqrt{a^2-3b})$$

$$A = -2\sqrt{a^2-3b}$$

$$C = \tfrac{2}{27}(a^3-(a^2-3b)\sqrt{a^2-3b})-\tfrac{1}{3}ab+c$$

eine Auflösung, die ganz brauchbar ist, wenn $\sqrt{a^2-3b}$ eine rationale Zahl ist.

Der achte Fall endlich verlangt, dass $B^2 = 4AC$ oder

$$(3z^2+2az+b)^2 = 4(3z+a)(z^3+az^2+bz+c)$$

sein soll. Entwickelt giebt dieser Ausdruck die Gleichung:

$$3z^4+4az^3+6bz^2+12cz-(b^2-4ac) = 0$$

die gar vom vierten Grade ist, so dass also dieser Fall eine Verallgemeinerung gleichfalls nicht zulässt.

Das Vorstehende zeigt, dass es weiter keine grosse Schwierigkeit hat, neue Auflösungsweisen der cubischen Gleichungen aufzufinden. Soll jedoch die Wurzel einer unreinen cubischen Gleichung wirklich berechnet werden, so möchte die folgende Methode allen anderen vorzuziehen sein.

Man verwandele die Gleichung $x^3+ax^2+bx+c=0$ durch die Substitution $x = y-\frac{1}{3}a$ in eine andere von der Form y^3+By

Digitized by Google

$+C=0$, setze dann $y=\sqrt{B}\,.\,z$, so ergiebt sich $z^3+z+\frac{C}{B\sqrt{B}}=0$, eine Gleichung, für welche sich mittelst einer Tafel der Cubikzahlen die Wurzel fast ohne Rechnung auf die fünf ersten Ziffern finden lässt. Es wird auch sehr einfach sein, für die Werthe von

$$\frac{C}{B\sqrt{B}}=\frac{(9c-ab)-\frac{2}{3}a(3b-a^2)}{(3b-a^2)\sqrt{3(3b-a^2)}}$$

eine Tafel zu berechnen, mittelst welcher man die zu dieser Grösse gehörigen Werthe von z unmittelbar findet. Vielleicht finde ich in der Folge Zeit, eine solche Tafel zu berechnen.

XLV.

Ueber eine wesentliche Verallgemeinerung des Problems von den, den Kegelschnittten ein- oder umgeschriebenen Polygonen.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

Die allgemeinste Form, welche das bezeichnete Problem zuletzt erhalten hat, ist bekanntlich: *a*) In einen gegebenen Kegelschnitt ein n-Eck zu beschreiben, dessen Seiten in gegebener Ordnung durch n gegebene Punkte gehen; *b*) um einen gegebenen Kegelschnitt ein n-Seit zu beschreiben, dessen Ecken in gegebener Ordnung auf k gegebenen Geraden liegen.

Im Laufe einer systematischen Darstellung der sogenannten Involutionen als eigenthümlicher Beziehungen projectivischer Gebilde auf einander begegnete ich einem Princip, durch welches nicht nur die innere Natur der obigen, sondern auch die einer weit allgemeineren Doppelaufgabe vollständig aufgehellt wird. Und hierbei überraschte mich die Bemerkung, dass zwei Aufgaben, welche beide von den Alten uns überliefert worden und wie keine das Interesse der Neueren in Anspruch genommen haben, nämlich die in Rede stehende des Pappus und die Tactionen des Apollonius, beide, wiewohl in ihrer ursprünglichen Gestalt ganz verschieden von einander,

Digitized by Google

nach einer Reihe von Verwandlungen in einer Weise sich darstellen, dass man versucht wird, sie für die Modifikationen einer und derselben Aussage zu halten.

Um mich kurz zu fassen, werde ich mich auf Steiner's Abhängigkeit geometrischer Gestalten u. s. w. und auf art. 418 und 424 des Traité des propriétés projectives des figures von Poncelet berufen. Ausserdem bemerke ich, dass zwei auf einander gelegte projectivische Gerade A, A_1, so wie zwei concentrische projectivische ebene Strahlbüschel B, B_1 involutorisch heissen, wenn dort die beiden Durchschnitte der Parallelstrahlen sich in einem Punkte vereinigen, hier die ungleichnamigen Schenkel der entsprechenden rechten Winkel zusammenfallen; ferner dass, wie man sich aus §. 16. des Steiner'schen Werkes leicht überzeugen wird, bei zwei involutorischen Gebilden A, A_1 oder B, B_1 je zwei entsprechende Elemente sich in doppeltem Sinne entsprechen, d. h. dass jedem Elemente, wenn es nach einander als beiden Gebilden angehörig betrachtet wird, in dem jedesmaligen andern Gebilde ein und dasselbe Element entspricht; und dass umgekehrt zwei auf einander gelegte oder concentrische projectivische Gebilde involutorisch sind, wenn ein einziges Elementenpaar sich in doppeltem Sinne entspricht. Auch soll der Kürze wegen die Eigenschaft, dass zwei Gebilde, z. B. A, A_1, in Ansehung der entsprechenden Elementenpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ .... und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ .... projectivisch sind, durch

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots.) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots.),$$

sowie, dass sie in Ansehung derselben als zugeordneter Elementenpaare involutorisch sind, durch

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots. \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots.) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots. \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots.)$$

bezeichnet werden.

§. 1.

a) Gehen durch einen beliebigen Punkt p_1 in der Ebene eines Kegelschnittes K zwei beliebige Gerade $B_1 B'_1$, $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2$, welche den letzteren in den Punkten B_1, B'_1, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ schneiden; zieht man die Geraden $B_1\mathfrak{a}_1$, $B'_1\mathfrak{a}_2$; $B_1\mathfrak{a}_2$, $B'_1\mathfrak{a}_1$ oder a_1, a'_1; a_2, a'_2, die sich paarweise in $\mathfrak{a}'_1$, $\mathfrak{a}'_2$ schneiden, und verbindet die Punkte $\mathfrak{a}'_1$, $\mathfrak{a}'_2$ durch eine Gerade A; legt man sodann durch B_1 beliebig viele Strahlen b_1, c_1, d_1 ...., welche den Kegelschnitt in $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ .... und die Gerade A in $\mathfrak{b}'_1$, $\mathfrak{c}'_1$, $\mathfrak{d}'_1$ .... schneiden, verbindet die letzteren Punkte mit B'_1 durch die Strahlen b'_1, c'_1, d'_1 ...., welche K in $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_2$ .... schneiden, diese wieder mit B_1 durch b_2, c_2, d_2 ...., welche die A in $\mathfrak{b}'_2$, $\mathfrak{c}'_2$, $\mathfrak{d}'_2$ ...., und diese mit B'_1 durch b'_2, c'_2, d'_2 ...., welche K in $\mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{c}_3$, $\mathfrak{d}_3$ .... schneiden; und verbindet endlich auch diese Punkte mit B_1 durch die Strahlen b_3, c_3, d_3 ...., so ist erstens, wegen des perspectivischen Durchschnittes A

$$B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots. a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots.) = B'_1(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots. a'_2, b'_2, c'_2, d'_2 \ldots.),$$

und zweitens wegen des Kegelschnittes K, nach Abh. geomet. Gest. §. 38, III. rechts:

$$B'_1(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots . a'_2, b'_2, c'_2, d'_2 \ldots .)$$
$$= B_1(a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots . a_1, b_3, c_3, d_3 \ldots .),$$

also auch, wenn man die Strahlen $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots .$ ursprünglich einem Strahlbüschel B_1, und die Strahlen $a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots .$ nebst a_3(oder a_1), $b_3, c_3, d_3 \ldots .$ einem mit B_1 concentrischen Strahlbüschel B_2 angehörig betrachtet, dann aber die $a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots .$ ebenfalls zu B_1 rechnet:

$$B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots . a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots .)$$
$$= B_2(a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots . a_1, b_3, c_3, d_3 \ldots .).$$

Hier aber sind die Strahlen a_1, a_2 in doppeltem Sinne entsprechend, also gilt dasselbe von je zwei entsprechenden Strahlen, d. h. die Strahlen $b_2, c_2, d_2 \ldots .$ sind mit den Strahlen $b_1, c_1, d_1 \ldots .$, und folglich die Punkte $\mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{d}_2 \ldots .$ mit den Punkten $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots .$ identisch.

Nach einem bekannten Satze schneiden nun die Diagonalen $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2 \ldots .$ der vollständigen Vierseite $a_1a'_1a_2a'_2$, $b_1b'_1b_2b'_2$, $c_1c'_1c_2c'_2$, $d_1d'_1d_2d'_2 \ldots .$ die allen gemeinschaftliche Diagonale $B_1B'_1$ in einem Punkte, welcher der vierte harmonische zu B_1, B'_1 und dem Durchschnitte von $B_1B'_1$ und A, einer ebenfalls gemeinschaftlichen Diagonale, und zwar der dem letzteren zugeordnete Punkt ist; also gehen die ersteren sämmtlich durch einen und denselben Punkt p_1.

Hieraus schliesst man sofort, da die Punkte $p_1, B_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots .$ durchaus beliebig und von einander unabhängig sind, dass, wenn durch einen beliebigen Punkt p_1 die Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2 \ldots .$ beliebig gezogen und sodann um einen beliebigen Punkt (B_1B_2) auf dem Umfange von K die Strahlen $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots . a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots .$ bestimmt werden, die Beziehung

$$B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots . a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots .)$$
$$= B_2(a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots . a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots .)$$

stattfinden muss.

Ferner: da der Punkt p_1 durch zwei Gerade $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$ gegeben, und da das ganze System entsprechender Elementenpaare zweier projectivischen Gebilde B_1, B_2 bestimmt ist, wenn drei dieser Paare a_1, b_1, a_2; a_2, b_2, a_1 beliebig gegeben sind, d. h. im hier betrachteten Falle zwei beliebige Paare zugeordneter Elemente a_1, b_1; a_2, b_2, so muss sich der vorige Schluss auch umkehren lassen.

b) Setzt man in *a*) überall, wo von Punkten und Geraden, Punkten auf dem Umfange von K, Verbindungslinien zweier Punkte, Durchschnitten zweier Geraden, Durchschnitten einer Geraden und des Kegelschnitts, projectivischen Strahlbüscheln, perspectivischem Durchschnitt die Rede ist, resp. Gerade und Punkte, Tangenten an K, Durchschnitte zweier Geraden, Verbindungslinien zweier Punkte, Tangenten von einem Punkte an den Kegelschnitt, pro-

jectivische Gerade, Projectionspunkt, und berücksichtigt Abh. geom. Gest. §. 38. III. links, so ergiebt sich die rechte Seite des folgenden Lehrsatzes:

Sämmtliche Punktenpaare, in welchen ein beliebiger Kegelschnitt von einem beliebigen ebenen Strahlbüschel geschnitten wird, bestimmen, wenn sie mit einem beliebigen Punkte seines Umfanges durch Gerade verbunden werden, die zugeordneten Strahlenpaare zweier involutorischer Strahlbüschel;	Die sämmtlichen Tangentenpaare, welche von den Punkten einer beliebigen Geraden an einen beliebigen Kegelschnitt gezogen werden, schneiden eine beliebige andere Tangente desselben in den zugeordneten Punktenpaaren zweier involutorischer Geraden;

und umgekehrt:

Liegt der gemeinschaftliche Mittelpunkt zweier involutorischer Strahlbüschel auf dem Umfange eines Kegelschnitts, so gehen alle Sehnen desselben, welche durch die zugeordneten Strahlenpaare der ersteren bestimmt werden, durch einen und denselben Punkt.	Liegen auf einer Tangente eines Kegelschnittes zwei involutorische Gerade, so liegen die Durchschnittspunkte aller Tangentenpaare, welche von den zugeordneten Punktenpaaren der ersteren an den Kegelschnitt gezogen werden, auf einer geraden Linie.

Anmerkung 1. Die involutorischen Gebilde zerfallen in zwei wesentlich verschiedene Klassen: entweder sind die beiden Gebilde ungleichliegend, und dann folgen je zwei zugeordnete Elemente unmittelbar auf einander, oder sie sind gleichliegend, und dann wechseln die Elemente jedes Paares mit denen der anderen Paare ab. Im ersten Falle giebt es allemal zwei Elemente (Hauptpunkte, Hauptstrahlen), welche mit je zwei zugeordneten harmonisch sind, im zweiten giebt es deren niemals. In *a*) tritt der erste und zweite Fall ein, jenachdem der Punkt p_1 ausserhalb oder innerhalb K liegt, und in *b*), jenachdem die Gerade P den Kegelschnitt schneidet oder nicht.

Anmerkung 2. Denkt man sich links in der Umkehrung den besonderen Fall einer Involution von lauter rechten Winkeln, so erhält man einen längst bekannten Satz.

Anmerkung 3. Das hier Gesagte giebt zugleich über die innere Natur der Eigenschaften der harmonischen Pole und Polaren, von welcher in §. 45. des Steiner'schen Werkes andeutend gesprochen wird, näheren Aufschluss.

§. 2.

Es ist ein beliebiger Kegelschnitt und in der Ebene desselben sind

Digitized by Google

n beliebige Punkte gegeben; in den ersteren ein einfaches n-Eck zu beschreiben, dessen Seiten in gegebener Ordnung durch die gegebenen Punkte gehen.

n beliebige Gerade gegeben; um den ersteren ein einfaches n-Seit zu beschreiben, dessen Ecken in gegebener Ordnung auf den gegebenen Geraden liegen.

Es sei der Kegelschnitt K und der Reihe nach

die Punkte $p_1, p_2, p_3 \ldots p_k, p_{k+1} \ldots p_n$ gegeben. Man denke sich durch einen beliebigen dieser Punkte, z. B. durch p_1, unzählige Gerade gelegt, welche K in den Punktenpaaren a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2 .... schneiden, sodann einen Punkt jedes Paares, z. B. a_2, b_2, c_2, d_2 ...., mit dem auf p_1 folgenden Punkte p_2 durch Gerade verbunden, welche K zum zweitenmal in a_3, b_3, c_3, d_3 .... schneiden, dann wieder diese letzteren Punkte mit p_3 durch Gerade, welche K in a_4, b_4, c_4, d_4.... schneiden, u. s. f. die Punkte a_k, b_k, c_k, d_k .... mit p_k, die Punkte $a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}, d_{k+1}$.... mit p_{k+1}...., endlich die Punkte a_n, b_n, c_n, d_n.... mit dem letzten gegebenen Punkte p_n verbunden, wodurch man die Punkte $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}$.... erhält. Ferner denke man sich um einen beliebigen Punkt auf dem Umfange von K, als gemeinschaftlichen Mittelpunkt, $n+1$ Strahlenbüschel $B_1, B_2, B_3 \ldots B_k, B_{k+1} \ldots B_n, B_{n+1}$ gebildet, deren Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1 ....; a_2, b_2, c_2, d_2 ...., a_3, b_3, c_3, d_3....; .... a_k, b_k, c_k, d_k....; $a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}, d_{k+1}$....; .... a_n, b_n, c_n, d_n....; $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}$ .... nach den gleichnamigen und gleichmarkirten Punkten des Umfanges von K gerichtet sind, so sind, dem Satze links des §. 1. zufolge, je zwei dieser Strahlbüschel, welche unmittelbar auf einander folgen, z. B. B_k, B_{k+1}, in Ansehung der zugeordneten Strahlenpaare a_k, b_k, c_k, d_k .... und $a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}, d_{k+1}$ .... involutorisch; folglich sind auch der erste und der letzte Strahlbüschel B_1, B_{n+1} in Ansehung der entsprechenden Strahlen

die Geraden $P_1, P_2, P_3 \ldots P_k, P_{k+1} \ldots P_n$ gegeben. Man denke sich von unzähligen Punkten einer beliebigen dieser Geraden, z. B. der P_1, an K die Tangentenpaare a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2 .... gezogen, sodann von den Punkten, wo allemal die eine dieser Tangenten, z. B. a_2, b_2, c_2, d_2 ...., die auf P_1 folgende Gerade P_2 schneidet, die neuen Tangenten a_3, b_3, c_3, d_3...., dann wieder von den Durchschnittspunkten der letzteren mit P_3 die Tangenten a_4, b_4, c_4, d_4...., u. s. f. von den Durchschnittspunkten der Tangenten a_k, b_k, c_k, d_k.... mit P_k, der $a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}, d_{k+1}$ .... mit P_{k+1} ...., endlich der a_n, b_n, c_n, d_n .... mit der letzten gegebenen Geraden P_n die Tangenten $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}$ .... Ferner denke man sich längs einer beliebigen andern Tangente $n+1$ Gerade $A_1, A_2, A_3 \ldots A_k, A_{k+1} \ldots A_n, A_{n+1}$ auf einander gelegt, welche von jenen Tangenten in den gleichnamigen und gleichmarkirten Punkten a_1, b_1, c_1, d_1 ....; a_2, b_2, c_2, d_2 ....; a_3, b_3, c_3, d_3 ....; a_k, b_k, c_k, d_k ....; $a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}, d_{k+1}$ ....; .... a_n, b_n, c_n, d_n ....; $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}$ .... geschnitten werden, so sind, dem Satze rechts des §. 1. zufolge, je zwei dieser Geraden, welche unmittelbar aufeinander folgen, z. B. A_k, A_{k+1}, in Ansehung der zugeordneten Punktenpaare a_k, b_k, c_k, d_k.... und $a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}, d_{k+1}$.... involutorisch; folglich sind auch die erste und die letzte Gerade A_1, A_{n+1} in Ansehung der entsprechenden Punktenpaare a_1, b_1, c_1, d_1.... und $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}$.... projectivisch (Steiner. §. 11. III.).

$a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$ und $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1} \ldots$ projectivisch (Steiner. §. 11. III.). Ist nun $(e_1 e_{n+1})$ ein Strahl, in welchem sich zwei entsprechende e_1, e_{n+1} vereinigen, so enspricht demselben ein Punkt $(\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_{n+1})$, welcher zum Ausgangspunkte $\mathfrak{e}_1$ der Punktenreihe $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3 \ldots \mathfrak{e}_n, \mathfrak{e}_{n+1}$ genommen, mit dem letzten Punkte $\mathfrak{e}_{n+1}$ zusammenfällt. Die Strahlbüschel B_1, B_{n+1} aber sind durch drei beliebige ihrer entsprechenden Strahlenpaare a_1, b_1, c_1 und $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ vollkommen bestimmt. Also ist die Aufgabe gelöst, wenn man auf die oben angegebene Art, von drei beliebigen Punkten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ ausgehend, die Punktenreihen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3 \ldots \mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}_{n+1}$; $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3 \ldots \mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}_{n+1}$; $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3 \ldots \mathfrak{c}_n, \mathfrak{c}_{n+1}$ bildet, die Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{a}_{n+1}, \mathfrak{b}_{n+1}, \mathfrak{c}_{n+1}$ mit einem beliebigen Punkte $(B_1 B_{n+1})$ des Umfanges von K durch die Strahlen a_1, b_1, c_1 und $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ verbindet, und, indem man sich zwei Strahlbüschel B_1, B_{n+1} vorstellt, die in Ansehung dieser drei, als entsprechender Strahlenpaare projectivisch sind, diejenigen zwei Strahlen $(e_1 e_{n+1})$, (f_1, f_{n+1}) construirt, in deren jedem sich zwei entsprechende vereinigen (Steiner. §. 17. II.). Nämlich jeder der Punkte $(\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_{n+1})$, $(\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_{n+1})$, wo diese Strahlen den Kegelschnitt schneiden, ist die mit p_1 zu verbindende Ecke eines der Aufgabe genügenden Polygons.

Ist nun $(\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_{n+1})$ ein Punkt, in welchem sich zwei entsprechende $\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_{n+1}$ vereinigen, so entspricht demselben eine Tangente $(e_1 e_{n+1})$, welche zur ersten e_1 der Tangentenreihe $e_1, e_2, e_3 \ldots e_n, e_{n+1}$ gewählt, mit der letzten Tangente e_{n+1} zusammenfällt. Die Geraden A_1, A_{n+1} aber sind durch drei beliebige ihrer entsprechenden Punktenpaare $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{a}_{n+1}, \mathfrak{b}_{n+1}, \mathfrak{c}_{n+1}$ vollkommen bestimmt. Also ist die Aufgabe gelöst, wenn man auf die oben bezeichnete Weise, von drei beliebigen Tangenten a_1, b_1, c_1 ausgehend, die Tangentenreihen $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n, a_{n+1}$; $b_1, b_2, b_3 \ldots b_n, b_{n+1}$; $c_1, c_2, c_3 \ldots c_n, c_{n+1}$ bildet, sich längs einer beliebigen andern Tangente (A_1, A_{n+1}) zwei projectivische Gerade A_1, A_{n+1} auf einander gelegt denkt, welche von den Tangenten a_1, b_1, c_1 und $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ in entsprechenden Punktenpaaren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{a}_{n+1}, \mathfrak{b}_{n+1}, \mathfrak{c}_{n+1}$ geschnitten werden, und diejenigen zwei Punkte $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_{n+1})$, $(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_{n+1})$ construirt, in deren jedem sich zwei entsprechende vereinigen (Steiner. §. 17. II.). Nämlich jede der Tangenten (e_1, e_{n+1}), (f_1, f_{n+1}), welche von diesen Punkten ausgehen, ist die durch P_1 begrenzte Seite eines der Aufgabe genügenden Polygons.

Anmerkung 1. Lässt man bei der Bildung der Punkten- und der Tangentenreihen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3 \ldots \mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}_{n+1}$, $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n, a_{n+1}$ u. s. w. $\mathfrak{a}_2, a_2$ die Stelle von $\mathfrak{a}_1, a_1$ vertreten, um sofort letztern auf p_2, P_2 zu beziehen, so ändert diess nichts im Resultate, weil die Gebilde $B_1, B_2, B_3 \ldots B_n, B_{n+1}$; $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n, A_{n+1}$ nicht nur projectivisch, sondern involutorisch sind, folglich, wenn z. B. die Strahlen a_1, a_2 beide zu B_1 gerechnet werden, ihnen in B_2 die Strahlen a_2, a_1 entsprechen müssen; die Strahlbüschel B_1, B_{n+1} bleiben also identisch dieselben, nur erscheinen zu ihrer Bestimmung ein, zwei oder drei andere ihrer Strahlenpaare gegeben.

Anmerkung 2. Aus dem eben Bemerkten folgt, dass die Aufgabe links und rechts höchstens zweier Auflösungen fähig ist. Liegt ein einziger der gegebenen n Punkte p_k ausserhalb K, so

Digitized by Google

erzeugt er, wie gesagt, ungleichliegende Strahlbüschel B_k, B_{k+1}, und dadurch müssen auch B_1, B_{n+1} ungleichliegend werden. Wird dagegen zwischen B_1 und B_{n+1} die Lage der Gebilde 2, 4, 6.... mal umgekehrt, so sind B_1, B_{n+1} nothwendig gleichliegend. Dasselbe gilt von A_1, A_{n+1}. Vergleicht man hiermit Steiner. §. 16. II., so folgt:

Die Aufgabe hat allemal zwei Auflösungen, wenn eine ungerade Anzahl

der gegebenen Punkte ausserhalb des Kegelschnittes liegt; und sie hat entweder zwei, oder nur eine oder keine Auflösung, wenn das Gegentheil stattfindet.	der gegebenen Geraden den Kegelschnitt durchschneidet; und sie hat entweder zwei, oder nur eine oder keine Auflösung, wenn das Gegentheil stattfindet.

Anmerkung 3. Führt man die Construction der Punkte $(\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_{n+1})$, $(\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_{n+1})$, sowie der Tangenten (e_1e_{n+1}), (f_1f_{n+1}) wirklich aus, so zeigt es sich, dass man der Strahlbüschel B_1, B_{n+1} und der Geraden A_1, A_{n+1} gar nicht bedarf. Vielmehr hat man links nur die Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_{n+1}$ und $\mathfrak{a}_{n+1}\mathfrak{b}_1$, die sich in $\mathfrak{b}_0$, und die Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_{n+1}$ und $\mathfrak{a}_{n+1}\mathfrak{c}_1$, die sich in $\mathfrak{c}_0$ schneiden, und sofort die Gerade $\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0$ zu ziehen, so schneidet sie K in den genannten Punkten; und rechts hat man den Durchschnitt der Tangenten a_1, b_{n+1} mit dem der Tangenten a_{n+1}, b_1 durch eine Gerade b_0, und den Durchschnitt der Tangenten a_1, c_{n+1} mit dem der Tangenten a_{n+1}, c_1 durch eine Gerade c_0 zu verbinden, so ist der Durchschnitt von b_0, c_0 zugleich der der erstgenannten Tangenten. (Vgl. Poncelet Traité art. 560 und 561.)

§. 3.

a) Hat ein beliebiger Kegelschnitt K mit einem andern beliebigen Kegelschnitte P_1 eine reelle oder ideale doppelte Berührung, und es schneidet eine beliebige Tangente des zweiten den ersteren in den Punkten B_1, B'_1, was aber nur dann möglich ist, wenn entweder P_1 von K umschlossen wird, oder wenn P_1 den K äusserlich berührt, ohne ihn zu umschliessen; wird ausserdem K von beliebig vielen anderen Tangenten des P_1 in den Punktenpaaren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$; $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$; $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$; $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ .... geschnitten, wo die Punkte $\mathfrak{a}_2$. $\mathfrak{b}_2$. $\mathfrak{c}_2$ $\mathfrak{d}_2$ .... 1) übereinstimmend mit den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ .... liegen müssen, 2) aber nach einerlei oder nach entgegengesetzter Richtung auf dem Umfange von K zu nehmen sind, je nachdem P_1 innerhalb oder ausserhalb K liegt; und zieht man die Geraden $B_1\mathfrak{a}_1$, $B_1\mathfrak{a}_2$, $B'_1\mathfrak{a}_1$, $B'_1\mathfrak{a}_2$; $B_1\mathfrak{b}_1$, $B_1\mathfrak{b}_2$, $B'_1\mathfrak{b}_1$, $B'_1\mathfrak{b}_2$; $B_1\mathfrak{c}_1$, $B_1\mathfrak{c}_2$, $B'_1\mathfrak{c}_1$, $B'_1\mathfrak{c}_2$; $B_1\mathfrak{d}_1$, $B_1\mathfrak{d}_2$, $B'_1\mathfrak{d}_1$, $B'_1\mathfrak{d}_2$ .... oder a_1, a_2, a'_1, a'_2; b_1, b_2, b'_1, b'_2; c_1, c_2, c'_1, c'_2; d_1, d_2, d'_1, d'_2 ....; so weiss man aus Poncelet's Traité art. 424, dass entweder die Durchschnitte der Strahlenpaare a_1, a'_2; b_1, b'_2; c_1, c'_2; d_1, d'_2 oder der anderen a_2, a'_1; b_2, b'_1; c_2, c'_1; d_2, d'_1 auf der Berührungssehne A beider Kegelschnitte liegen müssen. Es sei das Letztere der Fall, und man denke sich die Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1 .... einem Strahlbüschel B_1 und die Strahlen a_2, b_2, c_2, d_2 .... einem mit B_1 concentrischen

Digitized by Google

Strahlbüschel B_2 angehörig, so ist erstens wegen des perspectivischen Durchschnitts A

$$B_2(a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots) = B'_1(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots),$$

und zweitens wegen des Kegelschnittes K

$$B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots = B'_1(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots),$$

also auch

$$B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots) = B_2(a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots).$$

Und umgekehrt: bildet man um einen beliebigen Punkt $(B_1 B_2)$ eines Kegelschnittes K zwei concentrische projectivische Strahlbüschel B_1, B_2, so umhüllen die Sehnen des ersteren $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$, welche zunächst von drei bestimmten ihrer entsprechenden Strahlenpaare a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2 begrenzt werden, vier Kegelschnitte, deren jeder K doppelt berührt (Poncelet. art. 424). Die Tangentenschaaren dieser vier Kegelschnitte bestimmen, indem sie K durchschneiden, vier Paar concentrische projectivische Strahlbüschel B_1, B_2, welche, wiewohl jedes die Strahlen $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ enthält, durchaus von einander verschieden sein müssen. Diese Verschiedenheit aber ist nur möglich, wenn je zwei Strahlen a_1, a_2 verschieden unter B_1, B_2 vertheilt werden, wobei z. B. dem B_1 entweder die drei Strahlen a_1, b_1, c_1 oder a_1, b_1, c_2 oder a_1, b_2, c_1 oder a_2, b_1, c_1 zufallen. Also ist nothwendig eines dieser vier Paar Strahlbüschel mit dem von uns angenommenen identisch.

b) Durch dieselben Schlüsse wie in *a*) und durch dasselbe Verfahren wie in §. 1. *b*) wird man sich von der linken Seite des folgenden Satzes überzeugen:

Haben zwei beliebige Kegelschnitte mit einander eine reelle oder ideale doppelte Berührung, so bestimmen

die sämmtlichen Punktenpaare, in welchen die Tangenten des einen den anderen durchschneiden, wenn sie mit einem beliebigen Punkte auf dem Umfange des letzteren durch Gerade verbunden werden, die entsprechenden Strahlenpaare zweier concentrischer projectivischer Strahlbüschel;	**die sämmtlichen Tangentenpaare, welche von den Punkten auf dem Umfange des einen an den anderen gezogen werden, auf einer beliebigen anderen Tangente des letzteren die entsprechenden Punktenpaare zweier aufeinander gelegter projectiviseher Geraden;**

und umgekehrt:

Bildet man um einen beliebigen Punkt auf dem Umfange eines Kegelschnittes zwei concentrische projectivische Strahlbüschel, so	**Legt man längs einer beliebigen Tangente eines Kegelschnittes zwei projectivische Gerade aufeinander, so liegen die Durchschnitte**

Digitized by Google

umhüllen die Sehnen dieses Kegelschnittes, welche durch die entsprechenden Strahlenpaare begrenzt werden, einen zweiten Kegelschnitt, welcher den ersteren doppelt berührt.

der Tangentenpaare, welche von den entsprechenden Punktenpaaren an den Kegelschnitt gezogen werden, auf dem Umfange eines zweiten Kegelschnitts, welcher den ersteren doppelt berührt.

Anmerkung. Haben die beiden Gebilde B_1, B_2 oder A_1, A_2 Elemente e, f oder e, f, in denen sich zwei entsprechende vereinigen, so bestimmen diese resp. die gemeinschaftlichen Punkte oder Tangenten, und somit die Berührungssehne oder den Berührungspol der beiden Kegelschnitte. Also haben diese letzteren allemal einen reellen Contact, wenn die Gebilde B_1, B_2 oder A_1, A_2 ungleichliegend sind.

§. 4.

Es ist ein beliebiger Kegelschnitt und ausserdem sind n beliebige Kegelschnitte, welche den ersteren doppelt berühren, gegeben;

in den ersteren ein einfaches n-Eck zu beschreiben, dessen Seiten in gegebener Ordnung die letzteren berühren.

um den ersteren ein einfaches n-Seit zu beschreiben, dessen Ecken in gegebener Ordnung auf den Umfängen der letzteren liegen.

Die hier behufs der Auflösung anzustellende Betrachtung stimmt beiderseits mit der in §. 2 angestellten überein, nur dass hier die Verbindungslinien der Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3 \ldots \mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}_{n+1}$ u. s. w., statt durch gegebene Punkte zu gehen, gegebene Kegelschnitte $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ berühren, sowie dass die Durchschnitte der Tangenten $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n, a_{n+1}$ auf den Umfängen gegebener Kegelschnitte $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$ statt auf gegebenen Geraden liegen, und dass von jeder Ecke $\mathfrak{a}_k$ zu zwei Ecken $\mathfrak{a}_{k+1}$, sowie von jeder Tangente a_k zu zwei Tangenten a_{k+1} übergegangen werden kann, deren Wahl nur bei der Bildung der ersten Punktenreihe $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3 \ldots \mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}_{n+1}$ oder Tangentenreihe $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n, a_{n+1}$ beliebig, bei der Bildung der übrigen, von $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots$ oder $b_1, c_1, d_1 \ldots$ ausgehenden aber dadurch vollkommen bestimmt ist, dass die Gebilde B_k, B_{k+1} oder A_k, A_{k+1} allemal gleich- oder ungleichliegend werden müssen, jenachdem der Kegelschnitt p_k oder P_k den K innerlich oder äusserlich berührt.

Anmerkung 1. Da also der Ecke $\mathfrak{a}_1$ zwei Ecken $\mathfrak{a}_2$, jeder Ecke $\mathfrak{a}_2$ zwei Ecken $\mathfrak{a}_3$ u. s. f. folgen können, so müssen der Ecke $\mathfrak{a}_1$ 2^n Ecken $\mathfrak{a}_{n+1}$, und dem Strahlbüschel B_1 2^n projectivische Strahlbüschel B_{n+1}, und ebenso der Geraden A_1 2^n projectivische Gerade A_{n+1} entsprechen. Jede Combination des B_1 oder A_1 mit einem B_{n+1} oder A_{n+1} liefert zwei Polygone von einerlei Art, welche die Bedingungen der Aufgabe befriedigen; also ist dieselbe im Allgemeinen einer Anzahl von 2^{n+1} Auflösungen fähig. Statt eines oder mehrerer, z. B. m, Kegelschnitte p_k oder P_k können auch,

Digitized by Google

was aus §. 1. und §. 2. unmittelbar erhellet, m Punkte oder Gerade beliebig gegeben sein, und dann reducirt sich die Anzahl der möglichen Auflösungen auf 2^{n-m+1}.

Anmerkung 2. Ferner lässt sich hier, wie in §. 2. Anm. 2. darthun, dass diese 2^{n+1} Auflösungen alle wirklich statthaben, wenn eine ungerade Anzahl der Kegelschnitte $p_1 \ldots p_n$ oder $P_1 \ldots P_n$ den K äusserlich berühren, und dass sie nur im entgegengesetzten Falle sämmtlich oder zum Theil illusorisch werden können.

Anmerkung 3. Besondere Fälle treten ein, wenn ein Kreis K, m mit K concentrische Kreise und $n-m$ Punkte oder Gerade gegeben sind. Sehr leicht und für den Unterricht ganz besonders anzuempfehlen ist die erste der folgenden Doppelaufgaben:

Aufgaben für Schüler.

1. Es sind n concentrische Kreise und

ein Punkt beliebig gegeben; in den grössten Kreis ein n-Eck zu beschreiben, dessen Seiten in gegebener Ordnung die übrigen Kreise berühren und wovon die letzte durch den gegebenen Punkt geht.

eine Gerade beliebig gegeben; um den kleinsten Kreis ein n-Seit zu beschreiben, dessen Ecken in gegebener Ordnung auf den Umfängen der übrigen Kreise und, die letzte, auf der gegebenen Geraden liegen.

2. Es sind $m+1$ concentrische Kreise und

$n-m$ Punkte beliebig gegeben; in den grössten Kreis ein n-Eck zu beschreiben, von welchem m Seiten in gegebener Ordnung die übrigen Kreise berühren, und die übrigen $n-m$ Seiten in gegebener Ordnung durch die gegebenen Punkte gehen.

$n-m$ Gerade beliebig gegeben, um den kleinsten Kreis ein n-Seit zu beschreiben, von welchem m Ecken in gegebener Ordnung auf den Umfängen der übrigen Kreise, und die übrigen $n-m$ Ecken in gegebener Ordnung auf den gegebenen Geraden liegen.

Anmerkung 4. Denken wir uns in der allgemeinen Aufgabe nur 3 Kegelschnitte p_1, p_2, p_3 gegeben, und statt des n-Ecks oder n-Seits einen Kegelschnitt gesucht, der dem K eingeschrieben oder umschrieben sein, d. h. ihn doppelt berühren, und die drei andern einfach berühren soll, eine Operation, welche freilich noch des leitenden Principes ermangelt, so gelangen wir aus dem Gebiete des Pappusschen Problems in das eines andern, von welchem ich in einer, Seite 108 der No. VII. des literarischen Berichts angezeigten Abhandlung nachgewiesen habe, dass es die Tactionen des Apollonius in ihrer allgemeinsten und wesentlichsten Form darstellt.

Digitized by Google

XLVI.

Entwickelung einer sehr brauchbaren Reihe.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

Es seien folgende zwei Integrale

$$f(p) = \int_0^1 (1-x^n)^p dx,\ f(p+q) = \int_0^1 (1-x^n)^{p+q} dx \quad (1)$$

mit der Forderung gegeben, den Quotienten derselben $\frac{f(p+q)}{f(p)}$ auf irgend eine Weise zu entwickeln.

Der natürlichste Weg, welcher sich zur Lösung dieser Aufgabe darbietet, ist der, $(1-x^n)^{p+q}$ in $(1-x^n)^p (1-x^n)^q$ zu zerlegen und das zweite Binom in eine Reihe zu verwandeln, deren einzelne Glieder integrirt und dann durch $f(p)$ dividirt werden. Bezeichnen wir die Binomialkoeffizienten des Exponenten q mit q_0, q_1, q_2, u.s.w. und die Grösse $1-x^n$ mit X, so ergiebt sich nach dem obigen Verfahren:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{f(p+q)}{f(p)} \\ &= \frac{q_0 \int_0^1 X^p dx - q_1 \int_0^1 X^p x^n dx + q_2 \int_0^1 X^p x^{2n} dx - \ldots .}{\int_0^1 X^p dx} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Es kommt also noch darauf an, die Werthe der Quotienten

$$\frac{\int_0^1 X^p dx}{\int_0^1 X^p dx},\ \frac{\int_0^1 X^p x^n dx}{\int_0^1 X^p dx},\ \frac{\int_0^1 X^p x^{2n} dx}{\int_0^1 X^p dx},\ \ldots .$$

zu bestimmen. Der erste ist $= 1$, die andern finden sich sehr leicht auf folgendem Wege.

Eine bekannte Reduktionsformel sagt:

für

$$a + bx^n = X$$

ist

$$\int X^p x^{m-1} dx = \frac{X^{p+1} x^{m-1}}{(m+np)b} - \frac{(m-n)a}{(m+np)b} \int X^p x^{m-n-1} dx.$$

Nehmen wir $a=1$, $b=-1$, so geht das vorstehende X in unser früheres über; nehmen wir ferner $x=1$, $x=0$ und bemerken, dass X^{p+1} sich für $x=1$ annullirt, so wird

$$\int_0^1 X^p x^{m-1} dx = \frac{m-n}{np+m} \int_0^1 X^p x^{m-n-1} dx.$$

Daraus erhält man, für $m=n+1$, $2n+1$ u. s. w. der Reihe nach

$$\int_0^1 X^p x^n dx = \frac{1}{np+n+1} \int_0^1 X^p dx,$$

$$\int_0^1 X^p x^{2n} dx = \frac{n+1}{np+2n+1} \int_0^1 X^p x^n dx$$

$$= \frac{(n+1)1}{(np+2n+1)(np+n+1)} \int_0^1 X^p dx \text{ u. s. f.,}$$

also:

$$\frac{\int_0^1 X^p x^n dx}{\int_0^1 X^p dx} = \frac{1}{np+n+1},$$

$$\frac{\int_0^1 X^p x^{2n} dx}{\int_0^1 X^p dx} = \frac{1 \cdot (1+n)}{(np+n+1)(np+2n+1)},$$

u. s. w.

Das Gesetz dieser Zahlen ist leicht zu erkennen. Bezeichnet nämlich $\frac{a}{b}$ irgend einen dieser Quotienten, so sind die nächstfolgenden

$$\frac{a(a+n)}{b(b+n)}, \quad \frac{a(a+n)(a+2n)}{b(b+n)(b+2n)}, \text{ u. s. w.}$$

Führen wir jetzt die gefundenen Werthe in die Gleichung (2) ein, so wird

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{f(p+q)}{f(p)} \\ = q_0 - \dfrac{1}{2p+n+1} q_1 + \dfrac{1 \cdot (1+n)}{(2p+n+1)(2p+2n+1)} q_2 - \ldots \end{array} \right\} (3)$$

Unsere Aufgabe ist aber noch einer ganz anderen Ansicht fähig.

Vermittelst der Euler'schen Integrale zweiter Art kennt man nämlich den Werth des Integrales

$$\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

woraus sich für $y=x^n$ ergiebt:

Digitized by Google

$$\int_0^1 (1-x^n)^{\alpha-1} x^{n\beta-1} dx = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

und für den speciellen Fall $\beta = \frac{1}{n}$:

$$\int_0^1 (1-x^n)^{\alpha-1} dx = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{n})}.$$

Hiernach lassen sich die Werthe der Integrale (1) leicht angeben, indem man einmal $\alpha = p+1$, dann $\alpha = p+q+1$ nimmt. Dann wird

$$f(p) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(p+1+\frac{1}{n})}, \quad f(p+q) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma(p+q+1)\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(p+q+1+\frac{1}{n})},$$

$$\frac{f(p+q)}{f(p)} = \frac{\Gamma(p+q+1)}{\Gamma(p+q+1+\frac{1}{n})} \cdot \frac{\Gamma(p+1+\frac{1}{n})}{\Gamma(p+1)}$$

und durch Vergleichung mit Formel (3)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\Gamma(p+q+1)\Gamma(p+1+\frac{1}{n})}{\Gamma(p+q+1+\frac{1}{n})\Gamma(p+1)} \\ &= q_0 - \frac{1}{np+n+1} q_1 + \frac{1 \cdot (1+n)}{(np+n+1)(np+2n+1)} q_2 - \ldots. \end{aligned}\right\} (4)$$

Diese Gleichung gilt für ganz beliebige p, q und $n > 0$, und liefert je nach den speciellen Werthen dieser Grössen bemerkenswerthe Resultate, wie folgende Beispiele zeigen werden.

1) Nimmt man $n = 1$, p, q ganz und positiv, so erhält man unter der Bemerkung, dass für jedes ganze positive m

$$\Gamma(m+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$$

ist,

$$\frac{p}{p+q+1} = q_0 - \frac{1}{p+2} q_1 + \frac{1 \cdot 2}{(p+2)(p+3)} q_2 - \ldots.$$

oder, $p-1$ für p gesetzt:

$$\frac{p-1}{p+q} = q_0 - \frac{1}{p+1} q_1 + \frac{1 \cdot 2}{(p+1)(p+2)} q_2 - \ldots. \quad (5)$$

wobei die Reihe eine endliche ist.

2) Für $q = -1$ giebt die Gleichung (4) unter der Bemerkung, dass für jedes μ, $\Gamma(\mu+1) = \mu\Gamma(\mu)$ ist:

Digitized by Google

$$\frac{p+\frac{1}{n}}{p} = 1 + \frac{1}{np+n+1} + \frac{1.(1+n)}{(np+n+1)(np+2n+1)} + \ldots\ldots,$$

worin p und n ganz beliebig sind.

Für $n = \frac{1}{\alpha}$, $p = \beta - \alpha - 1$ folgt daraus:

$$\frac{\beta-1}{\beta-\alpha-1} = 1 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)} + \ldots. \quad (6)$$

3) Wir nehmen p, q ganz und positiv, $n = 2$. Vermöge der bekannten Eigenschaft der Gammafunktionen, dass

$$\Gamma(m+\tfrac{1}{2}) = \frac{1.3.5\ldots.(2m-1)}{2^m}\sqrt{\pi}$$

ist, ergiebt sich nach leichter Reduktion:

$$\frac{(p+1)(p+2)\ldots.(p+q)}{(p+\frac{3}{2})(p+\frac{5}{2})\ldots.(p+\frac{2q+1}{2})}$$

$$= q_0 - \frac{1}{2p+3}q_1 + \frac{1.3}{(2p+3)(2p+5)}q_2 - \ldots.$$

oder $p-1$ für p gesetzt:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{p(p+1)(p+2)\ldots.(p+q-1)}{(p+\frac{1}{2})(p+\frac{3}{2})(p+\frac{5}{2})\ldots.(p+\frac{2q-1}{2})}\\ &= q_0 - \frac{1}{2p+1}q_1 + \frac{1.3}{(2p+1)(2p+3)}q_2 - \ldots.\end{aligned}\right\} (7)$$

4) Nehmen wir wieder n, p ganz und positiv, aber $q = m - \frac{1}{2}$, wo m ganz und positiv ist, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1.3.5\ldots.(2p+2m-1)}{2.4.6\ldots.(2p+2m)}\cdot\frac{1.3.5\ldots.(2p+1)}{2.4.6\ldots.(2p)}\cdot\frac{\pi}{2}\\ &= (m-\tfrac{1}{2})_0 - \frac{1}{2p+3}(m-\tfrac{1}{2})_1 + \frac{1.3}{(2p+3)(2p+5)}(m-\tfrac{1}{2})_2 - \ldots.\end{aligned}\right\} (8)$$

z. B. für $m = 0$, $m = 1$:

$$\left.\begin{aligned}&(\frac{1.3.5\ldots.(2p-1)}{2.4.6\ldots.(2p)})^2(2p+1)\frac{\pi}{2}\\ &= (-\tfrac{1}{2})_0 - \frac{1}{2p+3}(-\tfrac{1}{2})_1 + \frac{1.3}{(2p+3)(2p+5)}(-\tfrac{1}{2})_2 - \ldots.\end{aligned}\right\} (9)$$

$$\left.\begin{aligned}&(\frac{3.5.7\ldots.(2p+1)}{2.4.6\ldots.(2p)})^2(\frac{1}{2p+2})\frac{\pi}{2}\\ &= (\tfrac{1}{2})_0 - \frac{1}{2p+3}(\tfrac{1}{2})_1 + \frac{1.3}{(2p+3)(2p+5)}(\tfrac{1}{2})_2 - \ldots.\end{aligned}\right\} (10)$$

Digitized by Google

Von den beiden letzten Gleichungen lässt sich noch eine elegante Anwendung machen.

Denkt man sich nämlich die Zahl p von bedeutender Grösse, so kann man

$$\frac{3}{2p+5},\ \frac{5}{2p+7},\ \text{etc.}$$

durch $\frac{1}{2p+3}$ ersetzen. In diesem Falle wird die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (9)

$$(-\tfrac{1}{2})_0 - (-\tfrac{1}{2})_1 (\frac{1}{2p+3}) + (-\tfrac{1}{2})_2 (\frac{1}{2p+3})^2 - \ldots.$$

deren Summe gleich ist

$$(1-\frac{1}{2p+3})^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2p+3}{2p+2}}.$$

Wir haben daher aus (9) für ein sehr grosses p näherungsweise:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2p+1} (\frac{2.4.6....(2p)}{1.3.5....(2p-1)})^2 \sqrt{\frac{2p+3}{2p+2}}. \quad (11)$$

Ebenso leicht ergiebt sich aus (10):

$$\frac{\pi}{2} = (2p+2) (\frac{2.4.6....(2p)}{3.5.7....(2p+1)})^2 \sqrt{\frac{2p+2}{2p+3}} \quad (12)$$

Beide Gleichungen sind um so richtiger, je grösser p genommen wird, für unendliche p fallen sie mit den Ausdrücken (9) und (10) zusammen.

Einige der spezielleren Reihen unter den obigen sind schon bekannt, ohne dass ihre gemeinschaftliche Quelle (4) bemerkt worden ist. Die Näherungsformel (12) giebt ohne Beweis Euler in der Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle.... St. Pétersbourg. 1843. Tome I. p. 47.

XLVII.

Entwickelung der höheren Integrale von $\log x . dx$, nebst einer Anwendung auf die Summirung einer Reihe.

Von dem

Herrn Schulamtscandidaten F. Arndt

zu Greifswald.

Das erste Integral von $\log xdx$ findet man unmittelbar, wenn man auf dasselbe die allgemeinste Reductionsformel anwendet; denn es ist $\int \log xdx = \log x \int dx - \int \frac{dx}{x} \int dx = x \log x - x + c$, wo c die willkührliche Constante bezeichnet. Die Bestimmung des zweiten Integrals kommt hiernach auf die des Integrals $\int x \log xdx$ zurück, welches ebenfalls durch particulare Integration gefunden wird, indem $\int x \log xdx = \log x \int xdx - \int \frac{dx}{x} \int xdx = \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2$ ist, $\int^2 \log xdx = \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{3}{4}x^2 + cx + c_1$, wo c_1 die neue willkührliche Constante. Geht man diese Entwickelung aufmerksam durch, und setzt sie noch weiter fort, so sieht man, dass die Bestimmung von $\int^n \log xdx$ lediglich auf die von $\int x^m \log xdx$ zurückkommt, indem m eine positive ganze Zahl ist.

Nun ist $\int x^m \log xdx = \log x \int x^m dx - \int \frac{dx}{x} \int x^m dx = \frac{x^{m+1} lx}{m+1} - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} + \text{const.}$ Wendet man diese Formel wiederholt an, so entsteht nach und nach, wenn wir allgemein $\int^n \log xdx$ durch I_n bezeichnen:

$$I_1 = x \log x - x + c$$

$$I_2 = \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{3x^2}{2^2} + cx + c_1$$

$$I_3 = \frac{x^3 \log x}{2.3} - \frac{11x^3}{(2.3)^2} + \frac{cx^2}{2} + c_1 x + c_2$$

$$I_4 = \frac{x^4 \log x}{2.3.4} - \frac{50x^4}{(2.3.4)^2} + \frac{cx^3}{2.3} + \frac{c_1 x^2}{2} + c_2 + c_3$$

etc.

Daher ist allgemein

$$1.\quad I_n = \frac{x^n \log x}{1.2....n} - \frac{p_n x^n}{(1.2....n)^2} + \frac{cx^{n-1}}{1....(n-1)} + \frac{c_1 x^{n-2}}{1....(n-2)} \text{ etc.} + \frac{c_{n-2} x}{1} + c_{n-1},$$

indem $c, c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$ die n willkührlichen Constanten sind, und p_n ein von x unabhängiger Coefficient ist, auf dessen Bestimmung es lediglich ankommt. Ich integrire die Gleichung 1. noch einmal, und erhalte:

$$2.\quad I_{n+1} = \frac{x^{n+1} \log x}{1.2....(n+1)} - \frac{\{1.2.3....n+(n+1)p_n\} x^{n+1}}{\{1.2....(n+1)\}^2} + \frac{cx^n}{1....n} + \text{etc.} + c_n$$
$$= \frac{x^{n+1} \log x}{1.2....(n+1)} - \frac{p_{n+1} x^{n+1}}{\{1.2....(n+1)\}^2} + \frac{cx^n}{1....n} + \text{etc.} + c_n.$$

Somit haben wir die Relation $p_{n+1} = (n+1)p_n + 1.2.3....n$, oder es ist

$$3.\quad I_n = \frac{x^n \log x}{1.2.....n} - \frac{p_n x^n}{(1.2...n)^2} + \frac{cx^{n-1}}{1....(n-1)} + \frac{c_1 x^{n-2}}{1....(n-2)} \text{ etc.} + \frac{c_{n-2} x}{1} + c_{n-1},$$

und dabei ist $p_1 = 1$ und

$$4.\quad p_{k+1} - (k+1)p_k = 1.2.3....k.$$

Da nun aber $\frac{p_{k+1}}{\{1.2....(k+1)\}^2} - \frac{(k+1)p_k}{\{1.2....(k+1)\}^2} = \frac{1}{1.2....k.(k+1)^2}$ oder $\frac{p_{k+1}}{\{1....(k+1)\}^2} - \frac{1}{k+1} \cdot \frac{p_k}{(1....k)^2} = \frac{1}{1....k(k+1)^2}$ ist, so findet für $\frac{p_k}{(1....k)^2} = q_k$ die Relation statt $q_{k+1} - \frac{q_k}{k+1} = \frac{1}{1....k(k+1)^2}$.

Stellen wir also den Ausdruck 3. unter der Form dar:

$$5.\quad I_n = \frac{x^n \log x}{1....n} - q_n x^n + \frac{cx^{n-1}}{1....(n-1)} \text{ etc.} + \frac{c_{n-2} x}{1} + c_{n-1},$$

so haben wir zur Bestimmung von q_n die Relationen:

$$q_{k+1} - \frac{q_k}{k+1} = \frac{1}{1....k(k+1)^2}$$

$$q_{k+2} - \frac{q_{k+1}}{k+2} = \frac{1}{1....(k+1)(k+2)^2}$$

u. s. w.

$$q_{k+\mu} - \frac{q_{k+\mu-1}}{k+\mu} = \frac{1}{1....(k+\mu-1)(k+\mu)^2}.$$

Dividirt man die erste dieser Gleichungen durch $(k+2)(k+3)....(k+\mu)$, die zweite durch $(k+3)(k+4)....(k+\mu)$ etc., und addirt dann alle zu einander, so wird

Digitized by Google

$$\frac{q_{k+\mu-1}}{k+\mu} - \frac{q_k}{(k+1)\ldots(k+\mu)} = \frac{1}{1.2\ldots(k+\mu)}\left\{\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{k+\mu-1}\right\},$$

oder für $k = 1$:

$$\frac{q_\mu}{\mu+1} - \frac{q_1}{1.2\ldots(\mu+1)} = \frac{1}{1.2\ldots(\mu+1)}\left\{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\mu}\right\},$$

oder

$$6.\quad q_\mu = \frac{1}{1.2.3\ldots\mu}\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\mu}\right).$$

Daher wird endlich

$$7.\quad I_n = \frac{x^n \log x}{1.2\ldots n} - \sum_{g=1}^{g=n} \frac{1}{g} \cdot \frac{x^n}{1\ldots n} + \frac{cx^{n-1}}{1\ldots(n-1)} \text{ etc.} + c_{n-2}x + c_{n-1}$$

$$= \frac{x^n}{1\ldots n}\left\{\log x - \sum_{g=1}^{g=n} \frac{1}{g}\right\} + \frac{cx^{n-1}}{1\ldots(n-1)} \text{ etc.} + c_{n-2}x + c_{n-1}.$$

Die Constanten sind so lange willkührlich, als nicht angegeben ist, zwischen welchen Grenzen die Integrale genommen werden sollen.

Wir wollen nun sehen, was aus den Constanten wird, wenn alle Integrale für $x = 1$ verschwinden, indem dieser Fall deshalb einer besondern Beachtung werth ist, weil er uns zur Summirung einer Reihe führen wird.

Nehmen wir also das Integral 7. zwischen den Grenzen 1 und x, so wird

$$\frac{c}{1\ldots(n-1)} + \frac{c_1}{1\ldots(n-2)} + \text{etc.} + \frac{c_{n-2}}{1} + c_{n-1} = \frac{1}{1\ldots n}\Sigma_n,$$

wenn wir $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ durch Σ_n bezeichnen, oder für $\gamma_k = 1.2.3\ldots(k+1)c_k$:

$$\Sigma_n = n\gamma + n_2\gamma_1 + n_3\gamma_2 + n_4\gamma_3 \text{ etc.} + n_{n-1}\gamma_{n-2} + \gamma_{n-1},$$

und ebenso

$$\Sigma_{n-1} = (n-1)\gamma + (n-1)_2\gamma_1 + (n-1)_3\gamma_2 + \ldots + (n-1)_{n-2}\gamma_{n-3} + \gamma_{n-2}$$
$$\Sigma_{n-2} = (n-2)\gamma + (n-2)_2\gamma_1 + (n-2)_3\gamma_2 + \ldots + (n-2)_{n-3}\gamma_{n-4} + \gamma_{n-3}$$

u. s. w.

$$\Sigma_2 = 2\gamma + \gamma_1$$
$$\Sigma_1 = \gamma.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $1, -n_1, n_2, -n_3$ etc., und addirt sie nach der Multiplication zu einander, so wird

Digitized by Google

$$\Sigma_n - n_1\Sigma_{n-1} + n_2\Sigma_{n-2} - \text{etc.} + (-1)^{n-1}n_{n-1}\Sigma_1$$
$$= \gamma\{n_1 - n_1(n-1)_1 + n_2(n-2)_1 - \text{etc.} + (-1)^{n-1}n_{n-1}\}$$
$$+ \gamma_1\{n_2 - n_1(n-1)_2 + n_2(n-2)_2 - \text{etc.} + (-1)^{n-2}n_{n-2}\}$$

u. s. w.

$$+ \gamma_{n-1}.$$

Nun behaupte ich, es sei

8. $n_m - n_1(n-1)_m + n_2(n-2)_m - n_3(n-3)_m + \text{etc.} = 0.$

Denn man findet leicht

$$n_1(n-1)_m = n_m(n-m)_1$$
$$n_2(n-2)_m = n_m(n-m)_2$$
$$n_3(n-3)_m = n_m(n-m)_3$$

u. s. w.

$$n_{n-m}\{n-(n-m)\}_m = n_m(n-m)_{n-m},$$

folglich ist obige Summe $n_m\{1-(n-m)_1+(n-m)_2-(n-m)_3 \ldots \pm(n-m)_{n-m}\} = n_m(1-1)^{n-m} = 0$, w. z. b. w.

Somit verschwinden die Coefficienten von $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_{n-2}$ in obiger Relation, und es wird

9. $\gamma_n = \Sigma_{n+1} - (n+1)_1\Sigma_n + (n+1)_2\Sigma_{n-1} - \text{etc.} \pm (n+1)_n\Sigma_1,$

also nach dem Obigen

10. $c_n = \frac{1}{1\ldots(n+1)}\{\Sigma_{n+1} - (n+1)_1\Sigma_n + (n+1)_2\Sigma_{n-1} \text{etc} \pm (n+1)_n\Sigma_1\}$

und $c = \Sigma_1.$

Demnach ist

11. $$I_n = (\log x - \Sigma_n)\cdot\frac{x^n}{1\ldots n} + \frac{\Sigma_1}{1}\cdot\frac{x^{n-1}}{1\ldots(n-1)}$$
$$+ \frac{\Sigma_2 - 2_1\Sigma_1}{1.2}\cdot\frac{x^{n-2}}{1\ldots(n-2)}$$
$$+ \frac{\Sigma_3 - 3_1\Sigma_2 + 3_2\Sigma_1}{1.2.3}\cdot\frac{x^{n-3}}{1\ldots(n-3)}$$

u. s. w.

$$+ \frac{\Sigma_{n-1} - (n-1)_1\Sigma_{n-2} + \ldots \pm (n-1)_{n-2}\Sigma_1}{1.2.3\ldots(n-1)}\cdot\frac{x}{1}$$
$$+ \frac{\Sigma_n - n_1\Sigma_{n-1} + \ldots \mp n_{n-1}\Sigma_1}{1.2.3.4\ldots n},$$

wenn die Integrale $I_1, I_2, I_3 \ldots$ so bestimmt sind, dass sie für $x = 1$ sämmtlich verschwinden.

Geht man nun von der bekannten Grundreihe aus:

$$1 - z + \tfrac{1}{2}(1-z)^2 + \tfrac{1}{3}(1-z)^3 + \tfrac{1}{4}(1-z)^4 + \ldots = -\log z,$$

Digitized by Google

welche für jedes positive x convergirt, das die Einheit nicht übersteigt, und integrirt $n$mal hintereinander, so ist, da alle Integrale für $x = 1$ verschwinden, nach 11:

$$\frac{(1-x)^{n+1}}{1\ldots(n+1)} + \frac{(1-x)^{n+2}}{2\ldots(n+2)} + \frac{(1-x)^{n+3}}{3\ldots(n+3)} \text{ etc.}$$

$$= (-1)^{n-1}\left\{(\log x - \Sigma n)\cdot\frac{x^n}{1\ldots n} + \frac{\Sigma_1}{1}\cdot\frac{x^{n-1}}{1\ldots(n-1)}\right.$$
$$+ \frac{\Sigma_2 - 2_1\Sigma_1}{1.2}\cdot\frac{x^{n-2}}{1\ldots(n-2)}$$
$$\text{u. s. w.}$$
$$\left. + \frac{\Sigma_n - n_1\Sigma_{n-1} + \ldots \mp n_{n-1}\Sigma_1}{1\ldots n}\right\}$$

oder wenn man $1 - x = x$ setzt:

$$12.\quad \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} + \frac{x^{n+2}}{2.3\ldots(n+2)} + \frac{x^{n+3}}{3.4\ldots(n+3)} + \text{in inf.}$$

$$= (-1)^{n-1}\left[\{\log(1-x) - \Sigma_n\}\frac{(1-x)^n}{1\ldots n} + \frac{\Sigma_1}{1}\cdot\frac{(1-x)^{n-1}}{1\ldots(n-1)}\right.$$
$$+ \frac{\Sigma_2 - 2\Sigma_1}{1.2}\cdot\frac{(1-x)^{n-2}}{1\ldots(n-2)}$$
$$+ \ldots.$$
$$\left. + \frac{\Sigma_n - n_1\Sigma_{n-1} + n_2\Sigma_{n-2} - \text{etc.} \mp n_{n-1}\Sigma_1}{1.2.3\ldots n}\right]$$

Der absolute Werth von x darf hier die Einheit nicht übersteigen. Für $x = 1$ wird

$$13.\quad \frac{1}{1.2\ldots(n+1)} + \frac{1}{2.3\ldots(n+2)} + \frac{1}{3.4\ldots(n+3)} + \text{in inf.}$$
$$= (-1)^{n-1}\left[\frac{\Sigma_n - n_1\Sigma_{n-1} + \ldots \mp n_{n-1}\Sigma_1}{1.2.3\ldots n}\right]$$

XLVIII.

Entwickelung der Functionen $\frac{\cos nx}{\cos x^n}$ und $\frac{\sin nx}{\cos x^n}$ in Reihen, die nach den Potenzen von tang x aufsteigen, mit Hülfe des Maclaurinschen Theorems.

Von dem

Herrn Schulamts-Candidaten F. Arndt

zu Greifswald.

Zufolge des Maclaurinschen Lehrsatzes muss man, um $\frac{\cos nx}{\cos x^n}$ und $\frac{\sin nx}{\cos x^n}$ in Reihen, die nach den Potenzen von tang x fortschreiten, zu entwickeln, diese Grössen als Functionen von tang x betrachten, und ihre höhern Differentialquotienten nach jener Veränderlichen bestimmen.

Man setze also:

$$1.\quad f(\text{tang } x) = \frac{\cos nx}{\cos x^n}.$$

Um diese Function nach tang x zu differenziiren, entwickele man zuerst ihren Differentialquotienten nach x, und multiplicire denselben mit dem Differentialquotienten von x nach tang x, d. h. mit $\cos x^2$, so erhält man

$$2.\quad f'(\text{tang } x) = -n \cdot \frac{\sin (n-1)x}{\cos x^{n-1}}.$$

Differenziirt man diese Function auf dieselbe Weise nach tang x, so wird

$$3.\quad f''(\text{tang } x) = -n(n-1) \cdot \frac{\cos (n-2)x}{\cos x^{n-2}}.$$

Da diese Function wieder dieselbe Form wie die Function 1. angenommen hat, so wird man, $f''(\text{tang } x)$ zu finden, in 2. $n-2$ für n setzen, und das Resultat mit $-n(n-1)$ multipliciren; dadurch wird

$$4.\quad f''(\text{tang } x) = n(n-1)(n-2)\,.\,\frac{\sin(n-3)x}{\cos x^{n-3}}.$$

Ferner wird man, diese Gleichung nach tang x zu differenziiren, in 3. $n-2$ für n setzen, und das Resultat mit $-n(n-1)$ multipliciren; dadurch wird

$$5.\quad f^{IV}(\text{tang } x) = n(n-1)(n-2)(n-3)\,.\,\frac{\cos(n-4)x}{\cos x^{n-4}}.$$

Auf diese Weise kann man immer weiter fortschreiten, und erhält allgemein

$$6.\quad f^{2k}(\text{tang } x) = (-1)^k\,.\,n(n-1)\ldots(n-2k+1)\,.\,\frac{\cos(n-2k)x}{\cos x^{n-2k}}$$

$$7.\quad f^{2k-1}(\text{tang } x) = (-1)^k\,.\,n(n-1)\ldots(n-2k+2)\,.\,\frac{\sin(n-2k+1)x}{\cos x^{n-2k+1}}.$$

Behandelt man die Function $\varphi(\text{tang } x) = \frac{\sin nx}{\cos x^n}$ auf ganz ähnliche Art, so entsteht

$$8.\quad \varphi^{2k}(\text{tang } x) = (-1)^k\,.\,n(n-1)\ldots(n-2k+1)\,.\,\frac{\sin(n-2k)x}{\cos x^{n-2k}}$$

$$9.\quad \varphi^{2k+1}(\text{tang } x) = (-1)^k\,.\,n(n-1)\ldots(n-2k)\,.\,\frac{\cos(n-2k-1)x}{\cos x^{n-2k-1}}.$$

Nun muss man die Werthe bestimmen, welche diese Differentialquotienten für tang $x = 0$ oder für $x = \pm\lambda\pi$ annehmen, wo λ eine positive ganze Zahl ist. Für diesen Werth von x ist aber nach 6. 7. 8. 9.

$$\frac{f^{2k}(0)}{1.2\ldots.2k} = (-1)^k\,.\,n_{2k},\quad \frac{f^{2k-1}(0)}{1\ldots(2k-1)} = 0;$$

$$\frac{\varphi^{2k}(0)}{1\ldots.2k} = 0,\quad \frac{\varphi^{2k+1}(0)}{1\ldots.(2k+1)} = (-1)^k\,.\,n_{2k+1}.$$

Daher ist nach Maclaurins Theorem

$$10.\quad \frac{\cos nx}{\cos x^n} = 1 - n_2\,\text{tang}\,x^2 + n_4\,\text{tang}\,x^4 - \ldots \pm n_{2k-2}\,\text{tang}\,x^{2k-2} + R,$$

$$11.\quad \frac{\sin nx}{\cos x^n} = n_1\,\text{tang}\,x - n_3\,\text{tang}\,x^3 + \ldots \pm n_{2k-1}\,\text{tang}\,x^{2k-1} + R',$$

und es ist

$$R = (-1)^k\,.\,n_{2k-1}\,\text{tang}\,x^{2k-1}\,.\,\sin(n-2k+1)\vartheta x\,.\,\cos(\vartheta x)^{2k-n-1}$$
$$R' = (-1)^k\,.\,n_{2k}\,\text{tang}\,x^{2k}\,.\,\sin(n-2k)\vartheta' x\,.\,\cos(\vartheta' x)^{2k-n},$$

wo ϑ, ϑ' zwischen 0 und 1 liegen.

Wenn nun n eine positive ganze Zahl ist, so brechen die Reihen von selbst ab, die Reste verschwinden, und die Gleichungen 10. und 11. gelten für jedes beliebige x.

Wenn aber n keine positive ganze Zahl ist, so darf man die Rei-

hen nur dann ins Unendliche fortgehen lassen, wenn R und R' sich der Null nähern, indem der Index ins Unendliche zunimmt.

Da nun in obigen Resten die Sinusse die Einheit nicht übersteigen, da ferner $\cos(\vartheta x)^{2k-n-1}$ ebenso wie $\cos(\vartheta' x)^{2k-n}$ sich bekanntermaassen der Null nähert, wenn $\cos(\vartheta x)$ oder $\cos(\vartheta' x)$ kleiner als die Einheit und constant bleibt, wenn dieser Cosinus $= 1$, so bleibt $\sin(n-2k+1)\vartheta x . \cos(\vartheta x)^{2k-n-1}$, so wie $\sin(n-2k)\vartheta' x . \cos(\vartheta' x)^{2k-n}$ mindestens endlich, und die Reste werden sich also mit n_{2k-1} tang x^{2k-1} oder n_{2k} tang x^{2k} zugleich der Null nähern.

Nun ist $n_{2k+2\lambda}$ tang $x^{2k+2\lambda}$

$$= n_{2k} \text{ tang } x^{2k} . \frac{(n-2k)(n-2k-1)\ldots(n-2k-2\lambda+1)}{(2k+1)(2k+2)\ldots(2k+2\lambda)} . \text{ tang } x^{2\lambda}$$

$$= n_{2k} \text{ tang } x^{2k} . (1-\frac{n+1}{2k+1})(1-\frac{n+1}{2k+2})\ldots(1-\frac{n+1}{2k+2\lambda}) \text{ tang } x^{2\lambda}.$$

Ist daher $n+1$ positiv, so ist

$$n_{2k+2\lambda} \text{ tang } x^{2k+2\lambda} < n_{2k} \text{ tg } x^{2k} . (1-\frac{n+1}{2k+2\lambda})^{2\lambda} \text{ tg } x^{2\lambda}$$

$$< n_{2k} \text{ tg } x^{2k} \{(1-\frac{n+1}{2k+2\lambda}) \text{tg } x\}^{2\lambda}.$$

Ist aber $n+1$ negativ, so ist

$$n_{2k+2\lambda} \text{ tang } x^{2k+2\lambda} < n_{2k} \text{ tang } x^{2k} \{(1-\frac{n+1}{2k+1}) \text{ tang } x\}^{2\lambda}.$$

Ist endlich $n+1=0$, so hat man

$$n_{2k+2\lambda} \text{ tang } x^{2k+2\lambda} = n_{2k} \text{ tang } x^{2k} . \text{tang } x^{2\lambda}.$$

Im ersten Falle nähert sich $n_{2k+2\lambda}$ tang $x^{2k+2\lambda}$ der Null oder wächst ins Unendliche, jenachdem tang $x \lessgtr 1$ (indem wir nur den absoluten Werth verstehen). Denn wenn tang $x < 1$, so ist auch $(1-\frac{n+1}{2k+2\lambda})$ tang $x < 1$, nachdem k hinlänglich gross geworden; wenn aber tang $x > 1$, so kann man λ so gross nehmen, dass $(1-\frac{n+1}{2k+2\lambda})$ tang x auch > 1, denn diese Bedingung erfordert, dass $\frac{2k+2\lambda}{n+1} > \frac{\text{tang } x}{\text{tang } x - 1}$.

Im zweiten Falle kann man k so gross nehmen, dass, wenn tang $x < 1$, auch $(1-\frac{n+1}{2k+1})$ tang $x < 1$; indem diese Bedingung erfordert, dass $-\frac{n+1}{2k+1} < \frac{1-\text{tang } x}{\text{tang } x}$. Wenn aber tang $x > 1$, so ist auch $(1-\frac{n+1}{2k+1})$ tang $x > 1$, da $n+1$ negativ.

Im dritten Falle nimmt tang $x^{2\lambda}$ mit $\frac{1}{\lambda}$ ins Unendliche ab, wenn tang $x < 1$. Ist tang $x > 1$, so nimmt es ins Unendliche zu.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass die Reihen 10. 11. convergiren oder divergiren, jenachdem der absolute Werth von tang x kleiner oder grösser als die Einheit ist.

Somit bleibt uns noch der Fall zu untersuchen übrig, in welchem der absolute Werth von tang $x = 1$.

Es wird hier auf die Grenze von

$$n_{2k+2\lambda} = n_{2k}(1-\frac{n+1}{2k+1})(1-\frac{n+1}{2k+2})\ldots(1-\frac{n+1}{2k+2\lambda})$$

ankommen für $\lambda = \infty$ und ein constantes k.

1. Wenn $n+1$ positiv, so ist

$$\log(1-\frac{n+1}{2k+1}) < -\frac{n+1}{2k+1}$$

$$\log(1-\frac{n+1}{2k+2}) < -\frac{n+1}{2k+2}$$

u. s. w.,

also

$$\log n_{2k+2\lambda} < \log n_{2k} - (n+1)(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} + \ldots + \frac{1}{2k+2\lambda}).$$

Daher nähert sich der Logarithmus von $n_{2k+2\lambda}$ der Grenze $-\infty$, wenn λ sich dem Unendlichen nähert, folglich hat $n_{2k+2\lambda}$ selbst die Null zur Grenze, und die Reihen 10. 11. convergiren.

2. Wenn $n+1$ negativ, so ist

$$\log(1-\frac{n+1}{2k+1}) > -\frac{n+1}{2k+1} - \tfrac{1}{2}\cdot(\frac{n+1}{2k+1})^2$$

$$\log(1-\frac{n+1}{2k+2}) > -\frac{n+1}{2k+2} - \tfrac{1}{2}\cdot(\frac{n+1}{2k+2})^2$$

u. s. w.

also

$$\log n_{2k+2\lambda} > \log n_{2k} - (n+1)(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} + \ldots + \frac{1}{2k+2\lambda}) - \tfrac{1}{2}(n+1)^2\{\frac{1}{(2k+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(2k+2\lambda)^2}\}.$$

Da aber die Summe $\frac{1}{2k+1} + \ldots + \frac{1}{2k+2\lambda}$ mit λ unendlich wird, und $\frac{1}{(2k+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(2k+2\lambda)^2}$ bekanntermaassen endlich bleibt, so nähert sich der Logarithmus dem Unendlichen, also wird auch $n_{2k+2\lambda}$ mit λ unendlich, und die Reihe 10. oder 11. divergirt.

3. Wenn $n+1=0$, so bleibt der absolute Werth von $n_{2k+2\lambda}$ constant, und die obigen Reihen divergiren wieder.

Somit haben wir das folgende Resultat erhalten:

Die Gleichungen

$$\frac{\cos nx}{\cos x^n} = 1 - n_2 \text{ tang } x^2 + n_4 \text{ tang } x^4 - \text{etc.}$$

$$\frac{\sin nx}{\cos xn} = n_1 \text{ tang } x - n_3 \text{ tang } x_3 + n_5 \text{ tang } x^5 - \text{etc.}$$

gelten für jedes beliebige x, wenn n eine positive ganze Zahl ist, und in diesem Falle brechen die Reihen ab.

Ist aber n keine positive ganze Zahl, so convergiren obige Reihen, wenn der absolute Werth von tang x kleiner als die Einheit; ist der absolute Werth von tang $x = 1$, so convergiren sie auch dann noch, wenn $n + 1 > 0$. In allen übrigen Fällen findet Divergenz statt.

Multiplicirt man mit cos x^n, so nehmen die Gleichungen die Gestalt an:

12. $\cos nx = \cos x^n - n_2 \cos x^{n-2} \sin x^2 + n_4 \cos x^{n-4} \sin x^4 - \text{etc.}$

13. $\sin nx = n_1 \cos x^{n-1} \sin x - n_3 \cos x^{n-3} \sin x^3 + \text{etc.}$

XLIX.

Miscellen.

Eine algebraisch-geometrische Aufgabe.

Von Herrn Albrecht von Graefe zu Berlin.

Es sei am Mittelpunkte O (Taf. VII. Fig. 10.) eines Kreises ein beliebiger Winkel $AOB = \alpha$, und auf der Peripherie ein willkührlicher Punkt P gegeben. Von P sind auf die Schenkel des Winkels AOB die senkrechten PC und PD gefällt. Es soll die Entfernung CD der beiden Fusspunkte C und D dieser Senkrechten von einander bestimmt werden.

Man ziehe den Halbmesser OP, den wir im Folgenden als Einheit annehmen werden, und bezeichne die beiden Winkel AOP und BOP mit β und γ. In dem Dreiecke COD ist

$$CD^2 = CO^2 + DO^2 - 2CO \,.\, DO \,.\, \cos \alpha,$$

und folglich, weil $CO = \cos \beta$, $DO = \cos \gamma$ ist,

$$CD^2 = \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma,$$

also

$$CD^2 = \cos^2 \beta - \sin^2 \gamma + 1 - 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Es ist aber bekanntlich

$$\cos^2 \beta - \sin^2 \gamma = \cos (\beta + \gamma) \cos (\beta - \gamma)$$

und

$$2\cos \beta \cos \gamma = \cos (\beta + \gamma) + \cos (\beta - \gamma).$$

Mithin ist

$$CD^2 = \cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma) + 1 - \cos\alpha\cos(\beta+\gamma) - \cos\alpha\cos(\beta-\gamma),$$

also, weil $\alpha = \beta+\gamma$ ist,

$$CD^2 = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha,$$

und folglich $CD = \sin\alpha$.

Die Länge von CD ist daher unabhängig von der Lage des Punktes P, indem dieselbe lediglich von der Grösse des Winkels α abhängt.

Nehmen wir das Dreieck CDP zu Hülfe, so gelangen wir noch einfacher zu demselben Resultate. Denn in diesem Dreiecke ist

$$CD^2 = \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

da der Winkel $CPD = 180° - \alpha$, und mithin sein Cosinus $= -\cos\alpha$ ist. Addiren wir diese Gleichung zu der aus dem Dreieck CDO sich ergebenden Gleichung

$$CD^2 = \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

so erhalten wir

$$2CD^2 = (\sin^2\beta + \cos^2\beta) + (\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) - 2\cos\alpha(\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma),$$

d. i.

$$2CD^2 = 2 - 2\cos^2\alpha,\quad CD^2 = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha,$$

also $CD = \sin\alpha$.

Auch durch Anwendung des Ptolemäischen Lehrsatzes würden wir unmittelbar zum Resultate gekommen sein. Denn da im Viereck $OCPD$ die gegenüberliegenden Winkel sich einander supplementiren, so kann dasselbe als ein einem Kreise eingeschriebenes betrachtet werden, und der angeführte Satz liefert daher die Gleichung

$$CD \cdot OP = CO \cdot DP + DO \cdot CP,$$

also, weil $OP = 1$, $CO = \cos\beta$, $DO = \cos\gamma$, $CP = \sin\beta$, $DP = \sin\gamma$ ist:

$$CD = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma = \sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha.$$

Endlich ergiebt sich die Gleichheit von CD und $\sin\alpha$ auch leicht durch die Betrachtung, dass die Entfernung der durch Verlängerung der beiden Senkrechten PC und PD bis zur Peripherie entstandenen Durchschnittspunkte E und F (Taf. VII. Fig. 11.) einmal das Doppelte von CD ist, da man die Proportion

$$EF : CD = EP : CP = 2 : 1$$

hat, sodann aber auch durch $2\sin\alpha$ ausgedrückt wird, indem sie als Sehne von $EOF = 2\alpha$ dem doppelten Sinus des einfachen Winkels α gleich ist.

Herr Professor Dr. Sohncke zu Halle hat mir in Bezug auf die Theil II. S. 326. des Archivs von Herrn Director und Professor Strehlke zu Danzig in Betreff des sphärischen Vierecks aufgeworfene Frage die folgenden interessanten Bemerkungen mitzutheilen die Güte gehabt. G.

Denkt man sich ein sphärisches Viereck mit seinen beiden Diagonalen in seinen einzelnen Stücken wie in Taf. VII. Fig. 12. bezeichnet, so wird

die Fläche des Dreiecks $DAB = \frac{A+\beta_1+\delta_2-180^\circ}{180}.r^2\pi = \frac{\mu_1}{180}.r^2\pi$

- - - - $ABC = \frac{B+\gamma_1+\alpha_2-180}{180}.r^2\pi = \frac{\mu_2}{180}.r^2\pi$

- - - - $BCD = \frac{C+\delta_1+\beta_2-180}{180}.r^2\pi = \frac{\mu_3}{180}.r^2\pi$

- - - - $CDA = \frac{D+\alpha_1+\gamma_2-180}{180}.r^2\pi = \frac{\mu_4}{180}.r^2\pi$

- - - Vierecks $ABCD = \frac{A+B+C+D-2.180}{180}.r^2\pi = \frac{\mu}{180}.r^2\pi,$

wo also $\mu = \mu_1+\mu_3 = \mu_2+\mu_4 = A+B+C+D-360^\circ$.

Wendet man nun den bekannten Satz für die Bestimmung des Flächeninhalts eines sphärischen Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel an, so ergiebt sich:

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\mu_1 = \frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}d\,.\operatorname{cotg}\frac{1}{2}a}{\sin A} + \operatorname{cotg} A$$

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\mu_3 = \frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}a\,.\operatorname{cotg}\frac{1}{2}b}{\sin B} + \operatorname{cotg} B$$

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\mu_2 = \frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}b\,.\operatorname{cotg}\frac{1}{2}c}{\sin C} + \operatorname{cotg} C$$

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\mu_4 = \frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}c\,.\operatorname{cotg}\frac{1}{2}d}{\sin D} + \operatorname{cotg} D.$$

Vermöge der goniometrischen Formel $\operatorname{cotg}(x+z) = \frac{\operatorname{cotg}x\,.\operatorname{cotg}z-1}{\operatorname{cotg}z+\operatorname{cotg}x}$ erhält man hieraus:

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\mu_1+\mu_3) = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\mu$$

$$= \frac{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}b\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\cos C+\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\operatorname{tg}\frac{1}{2}d\cos A+\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\operatorname{tg}\frac{1}{2}b\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\operatorname{tg}\frac{1}{2}d\,.\cos(A+C)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}b\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\sin C+\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\operatorname{tg}\frac{1}{2}d\sin A+\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\operatorname{tg}\frac{1}{2}b\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\operatorname{tg}\frac{1}{2}d\sin(A+C)}$$

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\mu_3+\mu_4)=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\mu$$
$$=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\operatorname{tg}\frac{1}{2}d\cos D+\operatorname{tg}\frac{1}{2}b\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\cos B+\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\operatorname{tg}\frac{1}{2}b\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\operatorname{tg}\frac{1}{2}d\cos(B+D)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\operatorname{tg}\frac{1}{2}d\sin D+\operatorname{tg}\frac{1}{2}b\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\sin B+\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\operatorname{tg}\frac{1}{2}b\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\operatorname{tg}\frac{1}{2}d.\sin(B+D)}.$$

Setzt man in beiden Gleichungen $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\mu=\frac{\cos\frac{1}{2}\mu}{\sin\frac{1}{2}\mu}$, schafft dann die Nenner fort und reducirt, so wird:

$$\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}\mu=&\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c\ \{\cos\tfrac{1}{2}\mu\sin C-\sin\tfrac{1}{2}\mu\cos C\}\\&+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}d\ \{\cos\tfrac{1}{2}\mu\sin A-\sin\tfrac{1}{2}\mu\cos A\}\\&+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}d\{\cos\tfrac{1}{2}\mu\sin(A+C)-\sin\tfrac{1}{2}\mu\cos(A+C)\}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}\mu=&\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}d\ \{\cos\tfrac{1}{2}\mu\sin D-\sin\tfrac{1}{2}\mu\cos D\}\\&+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b\ \{\cos\tfrac{1}{2}\mu\sin B-\sin\tfrac{1}{2}\mu\cos B\}\\&+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}d\{\cos\tfrac{1}{2}\mu\sin(B+D)-\sin\tfrac{1}{2}\mu\cos(B+D)\}\end{aligned}$$

Setzt man nun auf der rechten Seite $\mu=A+B+C+D-360°$ und addirt beide Ausdrücke, so wird:

$$\begin{aligned}2\sin\tfrac{1}{2}\mu=&\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}d\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\sin(\tfrac{1}{2}S-A)+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b\sin(\tfrac{1}{2}S-B)\\&+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c\sin(\tfrac{1}{2}S-C)+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}d\sin(\tfrac{1}{2}S-D)\\=&2\sin\left(\frac{F}{r^2\pi}.90°\right)\end{aligned}$$

oder wenn man auf der rechten Seite die Sinus der Differenzen auflöst und beachtet, dass $\sin\frac{1}{2}S=-\sin\frac{1}{2}\mu$ und $\cos\frac{1}{2}S=-\cos\frac{1}{2}\mu$ ist, so wird:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\mu$$
$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}d\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\sin A+\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\operatorname{tg}\frac{1}{2}b\sin B+\operatorname{tg}\frac{1}{2}b\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\sin C+\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\operatorname{tg}\frac{1}{2}d\sin D}{2+\operatorname{tg}\frac{1}{2}d\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\cos A+\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\operatorname{tg}\frac{1}{2}b\cos B+\operatorname{tg}\frac{1}{2}b\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\cos C+\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\operatorname{tg}\frac{1}{2}d\cos D}.$$

Berichtigung.

In der Ueberschrift des Aufsatzes No. XXXVIII. streiche man das erste dem.

XIII.
Literarischer Bericht.

(In dieser Nummer des Literarischen Berichts ist es, wie man finden wird, zuerst möglich gewesen, auch die amerikanische Literatur besonders zu berücksichtigen. Dass dies auch fernerhin möglich ist, sind die nöthigen Einleitungen getroffen.)

Geschichte der Mathematik und Physik.

Newton und die mechanische Naturwissenschaft. Zu Newton's Gedächtniss im zweiten Säcularjahre seiner Geburt. Von K. Snell, Lehrer der Mathematik am Krause'schen Institut zu Dresden. Dresden. 1843. gr. 8. 12 ggr.

Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres gèometres du 18. siècle, précédée d'une notice sur les travaux de L. Euler tant imprimés qu'inédits et publiée sous les auspices de l'acad. imp. des sciences de Saint-Petersbourg, par P. H. Fuss. 2 Vol. gr. in 8. St. Petersbourg. 1843. 6 Thlr.

Von diesem wichtigen Werke ist schon Literarischer Bericht Nr. V. S. 87 ausführlicher die Rede gewesen.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Lehrbuch der Mathematik für die mittlern Klassen höherer Lehranstalten von Joh. Aug. Grunert. Zweiter Theil. Ebene Geometrie. Dritte vermehrte und verbesserte Ausgabe. Brandenburg. 1843. 8.

Ausserdem dass Verbesserungen, wo sie nöthig erschienen,

überall angebracht worden sind, hat diese dritte Ausgabe einen grössern Zusatz über den Nonius oder Vernier erhalten. Sonst ist Zahl und Ordnung der Paragraphen ganz ungeändert geblieben, so dass diese neue Ausgabe neben den frühern ohne die geringste Störung des Unterrichts gebraucht werden kann.

Course of Mathematics for Colleges. By Charles Davies, late Professor in Military Academy. 7 vols. 8. Hartford. (Unit. States).

Course of Mathematics for Colleges, etc. By Jer. Day, D. D. Pres. of Yale College. 2 vols. 8. New Haven. (Unit. States).

The Cambridge Course of Mathematics. By Professor Farrar of Harvard College. 2 vols. 8. Cambridge. (New England).

Course of Pure Mathematics for Colleges etc. viz. Geometry. 7 sh. Algebra 7 sh. Trigonometry 2 vols. 9 sh. Curves, Motions, etc. 8 sh. Sound, 12 sh. By Benjamin Pierce, A. M., Professor, Harvard University. 8 vols. 8. Boston.

Farrar, Calcules, 7 sh. 6 d.; Algebra, 7 sh. 6 d. Astronomy, 16 sh. Natural Philosophy, 14 sh., Geometry, 10 sh. 6 d. Topography 7 sh. 6 d. Trigonometry, 6 sh. Cambridge. (New England).

Encyclopädie oder allgemeine Wissenschaftskunde der angewandten Mathematik im bürgerlichen Leben, von M. Woelfer. 2. Bd. prakt. Anweisung zur Physik, Mechanik und Maschinenkunde, oder Grundsätze der Physik, Mechanik, Statik, Maschinenbaukunst, Rohr- und Wasserleitung, des Planzeichnens und Nivellirens. 8. Mit 28 lithogr. Abbildungen. Quedlinburg. 1843. 1 Thlr. 12 ggr.

Arithmetik.

Proportions-Laera. 8. Skara. 1841.

Lehrbuch der höheren Arithmetik und Algebra, enth. nebst den wichtigsten Lehren der höheren Analysis nach Gräffe's, Budan's, Sturm's, Fourier's, Horner's und Stern's Auflösungen numerischer Gleichungen. Entworfen von D. J. Phil. Kulik, ord. Prof. der höh. Math. an der Prag. Univ. u. s. w. I. Band. Algebra. 2. durchaus umgearb. Aufl. Prag. 1843. gr. 8. 1 Thlr. 16 ggr.

Maximilian Marie Discours sur la nature des grandeurs negatives et imaginaires, et interprétation des solutions imaginaires en géometrie, Paris. 1843. 8. 3 fr.

A Treatise on Algebra: comprising the Developement and Application of the recently discovered Theorem of Sturm, etc. By G. R. Perkins, A. M. 8. Utica, (Unit. States) 1842. 12 s.

Elementary Algebra. By Warren Colburn. 8. Boston. 6 sh.

Elementar-Lärobok i Algebra af E. G. Björling. Ph. Mag. Mechan. Doc. wid Upsala Akad. Förra Delen innefattande läran om 1: a och 2: a gr. aeqnationer. Fjerde Upplagan. Upsala. 1843. 8. med 1 pl. 6. 1 Rdr. 40 sk.

Algebra foer Begynnare af C. A. Forssell, Math. Lector i Gefle. 8. Gefle. 1842. 1 Rdr. 24 sk.

R. Lobatto, (Docteur en Sciences, Chevalier de l'Odre du Lion Néerlandais, Correspond. de l'Institut Royal des Pays-Bas, etc.) Recherches sur la distinction des racines réelles et imaginaires dans les équations numériques, précédées d'une nouvelle démonstration du théorême de M. Sturm. 4. à Amsterdam et la Haye. 1843. f. 1, 25.

M. Ohm, the spirit of mathematical analysis, and its relation to a logical system. Translated from the german by A. J. Ellis. 8. London. 1843. 4 sh.

Specimen analyticum, theoremata quaedam nova de integralibus definitis, summatione serierum earumque in alias series transformatione exhibens. P. I—VIII. P. P. Carolus Johannes Malmsten Math. infer. Docens; Respp. Thure Augustus Almgren, Ericus Selander, Johannes Magnus Alfred Grenander, Georg. Enhard. Ossbahr, Claud. Alb. Lindhagen, Otto Vilhelmus Lemke, Ernestus Leijer et Anders Linderoth. Upsaliae. 4.

Sammlung von Formeln, Lehrsätzen und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra, von Franz Moth, k. k. ordentl. öffentl. Prof. der Mathem. am Lyceum in Linz. I. Abtheilung. Linz. 1843. 8. 1 Thlr. 4 ggr.

Dass diese Sammlung auch eine ziemlich grosse Anzahl von Sätzen und Aufgaben aus der Theorie der Zahlen, namentlich aus der Lehre von der Congruenz der Zahlen enthält, wird ihr vor manchen andern ähnlichen Sammlungen zur Empfehlung dienen, indem auch die übrigen Aufgaben zweckmässig gewählt und gut geordnet scheinen.

Saigey, Problémes d'arithmétique et exercises de calcul. 5. édition. 18. Paris. 1 fr.

Geometrie.

Geometrie. Neunter Cursus. Coordinatenlehre. Vom Professor Dr. G. Paucker. Mitau. 1842. 8.

Diese Darstellung der analytischen Theorie der geraden Linie

in der Ebene und des Kreises enthält manches Eigenthümliche, auch eine ziemlich grosse Anzahl numerischer Aufgaben, und verdient daher recht sehr auch in einem weitern Kreise beachtet zu werden. Eine recht zweckmässige, wenn auch nur kleine, aus drei Theilen: Constructionen des ersten Grades, Constructionen des zweiten Grades, Aufgaben zur Uebung im Gebrauch der Coordinaten — bestehende Sammlung von Uebungsaufgaben ist beigefügt. Besonders angesprochen hat uns der dritte Theil dieser kleinen Sammlung, da der Gebrauch der Coordinaten nicht nur für die gesammte neuere theoretische Mathematik, sondern auch für deren Anwendung in der Praxis, z. B. in der Geodäsie, so überaus wichtig ist. Wir empfehlen daher diese kleine Schrift auch in der letztern Beziehung. Vergl. Literarischer Bericht Nr. X. S. 154 und Nr. XII. S. 180.

Lehrbuch der Planimetrie für Schulen von Dr. G. W. v. Langsdorff. Mannheim. 1843. 8. 8 ggr.

Ausser den gewöhnlichen Sätzen der ebenen Geometrie enthält dieses kleine Buch auch 69 Uebungsaufgaben ohne deren Auflösungen.

Grundriss der Elementar-Geometrie, für Anfänger und Freunde dieser Wissenschaft, bearbeitet von R. F. Hennig, Professor der Mathematik zu Schweinfurt. 2. verm. Aufl. Mit 12 Tafeln. 8. Schweinfurt. 1843. 21 ggr.

Sadebeck, Dr. Moritz, ord. Lehrer am Magdalenäum in Breslau, Elemente der ebenen Geometrie. Leitfaden für den Unterricht an Gymnasien und höhern Bürgerschulen. Mit 3 Figurentafeln. 2. verb. Aufl. 8. Breslau. 1843. 10 ggr.

De Sex Första jemte Elfte och Tolfte Böckerna af Euclidis Elementa eller Grundeliga Inledning till Geometrien, till Swenska Ungdomens tjenst utgifne af Marten Stromer, för detta Astronomiae Professor i Upsala, samt Ledamot af Kongl. Wetensk. Acad. i Stockholm och Societ. R. Lit. et Scient. i Upsala. Sjunde Upplagan. Örebro. 1842. 8. h. 1 Rdr. 32 sk.

Adhémar, J., Traité de Géometrie. Livr. 1. Paris. 1843. 8.

Darstellende Geometrie von J. M. Ziegler. Mit 3 Figurentafeln in Folio. Winterthur. 1843. 4. 7 Thlr. 12 ggr.

Wir glauben dieses Werk der Aufmerksamkeit der Freunde der descriptiven Geometrie empfehlen zu dürfen. Am meisten folgt der Verf. der Géométrie descriptive von Olivier, welche dessen Repetitor zum Behuf der Centralschule für Künste und Manufacturen in Paris als Manuscript drucken liess, und benutzt zugleich die Erfindungen der neuern Géométrie.

Leroy, C. F. A., Traité de Geometrie descriptive, 4. avec Atlas, 2. Edit 1842. 20 fr.

Analytical Geometry, from the French of Biot. By Prof.

Smith of Virginia Military Institution. 8. New York. 1841. 10 sh. 6 d.

Praktische Geometrie.

Burgheim, Dr., Baumeister und Dirigent der Bau-Gewerbe-Schule zu Minden, die Geometrie in ihrer Anwendung auf das Gewerbe der Bauhandwerker, für Bau-, Gewerbe- und Sonntags-Schulen, so wie auch zum Selbstunterricht, namentlich für diejenigen Bauhandwerker, welche sich zur Meisterprüfung vorbereiten wollen. 2. verm. und verb. Aufl. gr. 8. Nebst 15 Tafeln mit 365 Fig. (in 4.) Minden. 1843. Geh. 1 Thlr.

Cours Méthodique de dessin linéaire et de Géométrie usuelle, par M. Lamotte. 2. partie. Cours supérieurs. In 8. — Atlas in 4. en 15 pl. Paris. 1843. 6 fr.

P. Caen: l'ami des arts ou l'art du trait, contenant la géométrie. Nanci. 1843. 12. mit 12 Taf. 6 fr.

Course of Practical Geometry for Mechanics, as Introductory to every Branch of Mathematical Drawing; by W. Pease late of the Royal Laboratory Department, Woolwich. 18. London. 1843. 1 sh. 6 d.

Grundriss der Geodäsie für den Unterricht und zur Selbstbelehrung. Von Dr. G. W. v. Langsdorff, Prof. an der Grossh. höheren Bürgerschule zu Mannheim. Mannheim. 1843. 8.

Dieses kleine Buch enthält die wichtigsten Aufgaben der niedern Geodäsie auf dem geringen Raume von 143 Seiten in deutlicher Darstellung, und kann bei'm Unterrichte auf höheren Bürgerschulen und ähnlichen Lehranstalten in den Händen eines guten, auch im Aufnehmen schon praktisch geübten Lehrers gute Dienste leisten, möchte sich aber zur Selbstbelehrung weniger eignen. Nach einer Einleitung über den Begriff der Geodäsie, den verjüngten Maassstab u. dergl. lehrt der Verf. zuerst die Einrichtung und den Gebrauch der Instrumente im Allgemeinen kennen, sowohl bei Horizontal-, als auch bei Vertikalmessungen, und trägt dann die Rectification, Aufstellung und genauere Einrichtung der Instrumente, und die Correctionen der Resultate der Beobachtungen, nämlich Correctionen wegen physischer Einflüsse, wie z. B. den Einfluss der Temperatur, der Verschiedenheit der Schwere, der Capillarität, der Strahlenbrechung, der Verschiedenheit der Declination der Magnetnadel; und die Correctionen wegen der Fehler der Instrumente und der

Beobachtungen, wie z. B. die Fehler bei'm Messen der geraden Linien und der Winkel, die Lehre von den Fehlern der Dreiecke, erst in den beiden letzten Abschnitten seines Werkchens vor, Alles übrigens nur ganz in der Kürze und in den allgemeinsten Umrissen, jedenfalls zur Erläuterung durch den mündlichen Vortrag des Lehrers bestimmt. Dass eine solche Trennung der allgemeinen Lehren von den feinern Theorieen bei'm Unterrichte erster Anfänger in methodischer Rücksicht ihre Vortheile haben mag, räumen wir gern ein, können aber dieselbe von dem rein wissenschaftlichen Standpunkte aus, nicht gut heissen, indem wir der Meinung sind, dass auch die Geodäsie einer streng wissenschaftlichen und systematischen Darstellung nicht bloss fähig, sondern auch bedürftig sei, wenn der durch mathematische Studien hinreichend vorbereitete und überhaupt schon weiter vorgerückte Schüler eine völlig klare Einsicht in die Natur und den Zweck aller geodätischen Operationen erlangen und dergleichen Arbeiten von grösserem Umfange auf zweckmässige Weise selbst auszuführen in den Stand gesetzt werden soll. Dass das Handwerksmässige immer mehr und mehr auch aus diesem Theile der praktischen Mathematik entfernt werde — welches hier übrigens ganz ohne alle Beziehung auf das vorliegende Werkchen gesagt wird — thut gewiss im höchsten Grade Noth, wenn wahrhaft tüchtige Geodäten gebildet werden sollen. Mancher Feldmesser quält sich lange Zeit ab, wenn er eine gewöhnliche Libelle eines Theodoliten berichtigen soll, weil er die strenge allgemeine Thorie dieses Instruments nicht kennt, und ähnliche Fälle, wo ohne eine strenge Theorie gar nicht auszukommen ist, würden sich noch in grosser Anzahl anführen lassen. Alle diese Bemerkungen wollen wir aber, wie gesagt, auf das vorliegende kleine Werkchen gar nicht angewandt wissen, indem im Gegentheil in demselben vielmehr alle wesentliche Punkte der Theorie hervorgehoben oder wenigstens angedeutet und der weitern Ausführung durch den Vortrag des Lehrers anheim gestellt worden sind.

Gallet: barême trigonométrique ou l'arpentage rendu facile. Montpellier. 1843. 12. 5 Fr.

Regnault, M., Traité de Géométrie pratique, comprenant les opérations graphiques et de nombreuses applications aux travaux de l'art et de construction, 8. avec 11 gr. Pl. Paris. 1842. 5 fr.

V. Croizet: géodésie générale et méthodique considérée sous le rapport de la mesure et des divisions des terres. 2. édit. Perronne. 1843. 8. mit 21 Taf.

Gummere. — Treatise on Surveying. 8. Philadelphia. 12 sh.

Bökmann, neues Nivellir-Instrument zunächst für Wiesenbauer, dann auch, unter angegebenen Verbesserungen, für Geometer, Baukondukteure u. s. w. 8. Münster. 1843. Geh. 10 ggr.

Trigonometrie.

Grieser, F. J., Lehrer der Mathematik am Gymnasium in Mainz, Grundzüge der ebenen und sphärischen Triegonometrie. gr. 12. Mainz. 1843. Geh 14 ggr

Rules in plane and spherical trigonometry: with numerous examples and problems. By H. W. Jeans, royal naval college; formerly mathemat. Master in the r. military academy, Woolwich. London. 1843. (3 sh. 6 d.).

Elements of Trigonometry. By Professor Hackley. 8. New York. 1839. 9 sh.

T. Richard, Table des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes naturels, de minute en minute, le rayon du cercle étant 10000000. Paris. 1843. 8.

Mechanik.

Ausführliches Elementarlehrbuch der Mechanik in ihrer Anwendung auf die Physik, Künste und Gewerbe. Von G. Bresson. Deutsch herausgegeben von Dr. C. H. Schnuse. In vier Bänden. Erster Band. Mechanik fester Körper. Mit 18 Figurentafeln in Folio. Darmstadt. 1843. 8. 4 Thlr.

Wozu die jetzt so oft vorkommenden Uebertragungen ausländischer Werke in's Deutsche unserer Literatur eigentlich nützen sollen, können wir nicht recht begreifen, und wundern uns häufig, dass dieselben einen Verleger finden, oft, wie auch das vorliegende Werk, sehr elegant ausgestattet werden, indem im Gegentheil nicht selten sehr verdienstvolle Originalwerke lange Zeit ungedruckt bleiben müssen, weil sich kein Verleger mit denselben befassen will, und sich meistens mit einem sehr kümmerlichen Druck begnügen müssen. Wir sollten denken, dass Deutschland gegenwärtig auf eignen Füssen stehende Schriftsteller im mathematischen Fache genug besässe, und Uebersetzungen aus fremden Sprachen, namentlich aus dem Französischen, dessen Kenntniss so allgemein verbreitet ist, nur in ganz speciellen Fällen bedürfen möchte.

Renwick, Treatise on Mechanics. 8. New York. 1832. 12 sh.

Praktische Mechanik.

Allgemeine Maschinen-Encyclopädie herausgegeben von J. A. Hülsse. Atlas 11. (2. Bds. 5.) Lief., (Taf. 115—119. 124. 134—137. enthaltend) qu. ½ gr. Fol. Leipzig. 1843. 1⅓ Thlr.

L'ouvrier-mécanicien. Guide de mécanique pratique, par Ch. Armengaud jeune. 2. édition. In 12. Paris. 1843. 4 fr.

The American Mechanic. By Charles Quill. 12. Philadelphia. 1838. 4 sh.

Renwick, Application of the Science of Mechanics to Practical Purposes. 18. Philadelphia. 1842. 4 sh.

A Descriptive and Historical Account of Hydraulic and other Machines for Raising water; Ancient and Modern; with Observations on various Subjects connected with the Mechanic Arts, including the Progressive Development of the Steam-Engine etc. By Th. Ewbank. With nearly 300 Engravings, royal 8. New York. 1842. 18 sh.

The Steam-Engine, its Origin and Gradual Improvement from the time of Hero to the present day, as adapted to Manufactures, Locomotion, and Navigation. Illustrated with 48 Plates in full detail, numerous Woodcuts, etc. By Paul R. Hodge. C. E. 1. vol. folio of Plates, and letter-press 8. New York. 1841. 3 L. 10 sh.

Treatise on the Steam-Engine. By James Renwick, L. L. D. Professor in Col. College. 8. New York. 1832. 12 sh.

Lohmeyer, W., königl. Hann. Hydrotekt, Theorie der Kreisgewölbe. (Nach Petit bearbeitet). (Besonders abgedruckt aus Crelle's Journal für die Baukunst Bd. 18.) Mit 1 Figurentafel. gr. 4. Berlin. 1843. 12 ggr.

Optik.

Bericht über die Ergebnisse einiger dioptrischer Untersuchungen. Vom Prof. Joseph Petzval. Pesth. 1843. 8. 15 ggr.

Bei seinen im Jahre 1840 begonnenen, zuerst von Herrn Professor von Ettingshausen veranlassten, die weitere Ausbildung der Theorie der Dioptrik und die Berechnung von Tafeln be-

zweckenden Untersuchungen, aus denen zuerst das unter dem Namen des Voigtländer'schen Apparates bekannte Objectiv hervorging, ward der Herr Verf. auf das Wesentlichste und Wirksamste durch die Theilnahme unterstützt, welche Seine k. k. Hoheit der Herr Erzherzog Ludwig diesen Untersuchungen schenkte, und insbesondere dadurch auf die thätigste Weise an den Tag legte, dass er, als k. k. General-Artillerie-Director, dem Herrn Verf. zwei durch mathematische Kenntnisse ausgezeichnete Oberfeuerwerker, die Herren Löschner und Hain, nebst acht im Rechnen geübten Bombardieren zur Disposition stellte, um ihm bei seinen Untersuchungen, vorzüglich auch bei der Berechnung der Tafeln behülflich zu sein, welches jedenfalls einen neuen im höchsten Grade erfreulichen, jeden Freund der Mathematik und der Wissenschaften überhaupt wahrhaft erwärmenden Beweis von der kräftigen Unterstützung, welche von je her die exacten Wissenschaften in dem österreichischen Kaiserstaate gefunden haben, und von der Theilnahme, die denselben dort häufig von den höchsten Personen geschenkt worden ist, und fortwährend geschenkt wird, zugleich aber auch einen neuen Beweis von der längst bekannten ausgezeichneten wissenschaftlichen Bildung des k. k. Artillerie-Corps liefert, die unter dessen gegenwärtigem hohen Chef immer mehr erhöhet worden ist. Dem Herrn Erzherzog Ludwig über den Fortgang dieser dioptrischen Untersungen einen ersten Bericht zu erstatten, ist der nächste Zweck der vorliegenden Schrift, auf die wir die Freunde der optischen Wissenschaften aufmerksam zu machen nicht verfehlen, indem wir zugleich bemerken, dass diesem ersten Berichte noch andere von ähnlicher Tendenz folgen sollen.

In dem vorliegenden ersten Berichte giebt der Herr Verf. zuvörderst Nachricht über den theoretischen Theil seiner Arbeit. Auf S. 9 macht er uns mit der Aufgabe bekannt, von welcher er bei allen seinen Untersuchungen ausgegangen ist. Wenn nämlich ein beliebiges System brechender oder auch reflectirender Rotationsflächen mit gemeinschaftlicher Rotations-Axe, die man als Axe der z annehmen kann, gegeben ist; ein Strahl von beliebiger Richtung in einen beliebigen Punkt der ersten dieser Flächen einfällt; an dieser und sodann an allen übrigen Flächen gebrochen oder reflectirt wird; und endlich, nachdem er die letzte verlassen, eine gewisse an derselben Axe gedachte Rotationsfläche in einem gewissen Punkte schneidet; so soll man die Coordinaten (ξ, η), ferner die Winkel (a, b), welche dieser gebrochene Strahl mit den drei Coordinaten-Axen einschliesst, als Functionen ähnlicher, den Einfallspunkt in die erste Fläche, und die Richtung des einfallenden Strahls bestimmender Grössen (x, y und α, β) angeben. Hierauf entwickelt der Herr Verf. die Grössen ξ, η und a, b in nach den Potenzen und Producten von x, y und α, β, unter der Voraussetzung, dass diese Grössen nur klein sind, fortschreitende Reihen, und unterscheidet dann Bilder verschiedener Ordnungen, indem er überhaupt unter einem Bilde der $m$ten Ordnung eines Strahlen aussendenden Punktes ein Bild dieses Punktes auf der letzten Rotationsfläche versteht, in welchem sich die Coordinaten von ξ, η für alle diesem Bilde entsprechende von dem in Rede stehenden Punkte ausgehende Strahlen nur um

Grössen von einander unterscheiden, die in Bezug auf die Grössen x, y, α, β von der $m$ten Ordnung sind, wobei leicht aus der Natur der Grundformeln erhellet, dass m nur eine ungerade Zahl sein kann. Diese bestimmte Unterscheidung von Bildern der 3ten, 5ten, 7ten, 9ten u. s. w. Ordnung scheint uns sehr wesentlich su sein, weil dadurch die Dioptrik gewissermassen aus demselben Gesichtspunkte behandelt und auf denselben Standpunkt gestellt wird, welchen in der Geometrie die Lehre von den Berührungen schon längst mit so grossem Vortheil für ihre vollständige Ausbildung eingenommen hat, und wir glauben, dass ein strenges Festhalten dieses Standpunktes zur Förderung der Wissenschaft beitragen wird. Auf S. 18. und S. 26. hebt der Herr Verf. zwei von ihm gefundene Theoreme heraus, deren zweites folgendermassen lautet: der reciproke Werth des Krümmungshalbmessers des geometrischen Orts eines Bildes am Scheitel ist gleich der Summe der Producte aus den reciproken Werthen der Brennweiten in die reciproken Werthe der Brechungsverhältnisse der einzelnen Bestandlinsen; und geht dann nach verschiedenen andern allgemeinern Bemerkungen zur Berechnung der Correctionen der erhaltenen Bilder über.

Wir sind der Meinung, dass die dioptrischen Untersuchungen, von denen der vorliegende, im Vorhergehenden wegen der Beschränktheit des Raumes nur in ganz allgemeinen Umrissen skizzirte Bericht Nachricht giebt, auf sehr verständige Weise angelegt sind, bekennen gern, dass wir diesen Bericht mit Interesse und eigner Belehrung gelesen haben, und sehen den verheissenen ferneren Berichten, welche vorzüglich den durch die kräftige Unterstützung der Regierung des Verfs. so sehr geförderten mehr praktischen Theil der Untersuchungen betreffen sollen, mit Verlangen entgegen.

Treatise on Optics. By Bartlett, Professor in the United States Military Academy. 8. New York. 1841. 10 sh. 6 d.

Astronomie.

Biot, Traité élémentaire d'Astronomie physique, Tom. 1. 8. avec Atlas de 26 Planches. Paris. 1843.

Dies ist der erste Theil der jetzt erscheinenden neuen Ausgabe von Biots bekanntem trefflichen Traité d'Astronomie physique.

P. J. Baudet, (Maitre de Mathématique au Gymnase d'Utrecht): Aperçu du système planétaire avec un tableau synoptique des principales particularités de ce système. Dédié à la société de physique de la ville d'Utrecht; gr. 8. à Deventer. 1843. f. 10, 50.

Grand secret de l'exagération des calculs copernicians sur les

grosseurs des astres, devoilé par l'auteur de l'Anti-Copernic. Paris. 1843. 8. ½ Fr.

Bradford, Wonders of the Heavens. With numerous Engravings. Royal 4. Boston. 31 sh. 6 d.

Burritt. — The Geography of the Heavens, with a Celestial-Atlas, (coloured) 10. edition. 18mo. and 4to. 2 vols. New York. 10 sh. 6 d.

Astronomy for Schools, on the Basis of Arago's Lectures. By A. W. Haskins. A. M. 12. New York. 1841. 7 sh. 6 d.

An Elementary Treatise on Astronomy: containing a Systematic and Comprehensive Exposition of the Theory, and the more important Practical Problems. With Solar, Lunar and other Astronomical Tables. Designed as a Text-Book for Colleges, etc. By W. A. Norton, late Professor of Ast. University of New York. New York. 8. 15 sh.

Gummere. — Treatise on Astronomy. 8. Philadelphia. 12 s.

Henderson, Treatise on Astronomy; displaying the Arithmetical Architecture of the Solar System, etc. 2. edit., enlarged, and embellished with numerous engravings. 12. London. 1843. 5½ sh.

Astronomi och Allmän Physik, Betraktademed Hänseende till de Bewis, dessa Wetenskaper förete på Guds Allmagt, Wishet och Godhet, af William Whewell: Stockholm. 8. Stockholm. 1842. b. subskr. 1 Rdr. 12 sk., Köp. 1 Rdr. 40 sk.

Beraettelse om Astronomiens Framsteg foer Åren 1837—1841. Af N. H. Selander. Stockholm. 1842. 8. 40 sk.

Oeuvres de Laplace. Tome I., traité de mécanique céleste. I. Paris. 1843. 4.

The Mécanique Céleste of La Place. Translated, with a Commentary, by N. Bowditch, L. L. D. With a Memoir of the Translator. In 4 vols. imper. 4. Boston. 12 L. 12 sh.

Solutions of the Astronomical and other Problems in Jeans Rules in Plane and Spherical Trigonometry; designed as an Introduction to Nautical Astronomy. London. 1843. 3 sh. 6 d.

De longitudine terrestre e stellis una fere cum luna culminantibus determinanda dissertatio. Praes. Thomas Olivecrona Phil. Mag.; Respp. Gustavus Samuel Löwenhielm et Nicanor Hammarén. P. I. II. Upsaliae. 4. med. 1 tab.

Navigation and Nautical Astronomy, for the use of British Seamen. By the Rev. James Inman, D. D. 4. edition. 8. London. 1843. 10 sh.

J. C. Böhme, astronomische Sternscheibe, oder allgemeine Himmelskarte, bis zum 40 Grad südl. Breite, mit beweglichem Horizonte und Höhenquadranten. 8¼ Zoll Durchmesser. 2 grosse Kupfert. und 1 Bg. in gr. 4., Anweisung zum Zusammensetzen und zum Gebrauch. Leipzig. 1843. 1 Thlr. 8 ggr.

Mittlere Oerter von 12000 Fix-Sternen für den Anfang von 1836, abgeleitet aus den Beobachtungen auf der Hamburger Sternwarte von Carl Rümker. Hamburg. 1843. qu. 4. (3 Thl.).

Catalogue de 514 étoiles doubles et multiples découvertes sur l'hémisphère céleste boréal par la grande lunette de l'observatoire central de Poulkova. et: Catalogue de 256 étoiles doubles principales où la distance des composantes est de 32 secondes à 2 minutes et qui se trouvent sur l'hèmisphére boréal. (par W. Struve). Par l'académie impériale des sciences. Folio. St. Petersburg. 1843. 1 Thlr.

J. C. Böhme, das Rad der Zeit mit einer drehbaren Planisphäre von 8 Zoll Durchmesser. Immerwährender Monats-, Namens- und Fest-Kalender, mit bildlicher Darstellung der täglichen Richtung der Erde gegen die Sonne. 11½ Zoll in Quadr. 2 grosse Kupfert. und 1 Bg. in gr. 4. Anweisung zum Zusammensetzen und zum Gebr. Leipzig. 1843. 1 Thlr. 8 ggr.

Horizontal-Sonnenuhr für die wahre und mittlere Zeit, nach mathematischen Gesetzen verfertigt von J. C. Böhme. 11½ Zoll rh. lang, 8½ Zoll breit. Auf zwei grossen Kupfertafeln; mit deutlicher Anweisung zum Zusammensetzen und Benutzen derselben. Leipzig. 1843. 1 Thlr.

Zusammengesetzte, halb horizontale, halb verticale Sonnenuhr für die wahre und mittlere Zeit, von J. C. Böhme. 8¼ Zoll lang, 3¾ Zoll hoch Auf 4 Kupfertafeln. Mit Anweisung u. s. w. Leipzig. 1843. 1 Thlr. 8 ggr.

Beständig Sjö-Kalender, Innehallande Enkla och Säkra Methoder och Tabeller för Latitudens och Longitudens Bestämmande, utan Tillhjelp af Nautikal-Almanakan; om Bruket af Kronometern och Sjobarometern, samten Allmän Tidwattens Tabell, af J. Griffin, Navigations-Lärare i London. Från Andra Engelska Upplagan Oefwersatt och Tillökt af J. J. Å. 12. Götheborg. 1842. 32 sk.

Observationes astronomicae in specula regia Monachiensi institutae et regio jussu publicis impensis editae a J. Lamont. Vol. VI. seu novae seriei Vol. I. (Observationes a. 1828, 1829 et 1830 factas cont.) 4maj. Monachii. 1841. Geh. 1 Thlr. 6 ggr.

— id. Vol. VII. seu novae ser. Vol. II., observ. a. 1831 et 1832 factas cont. 4maj. Ibid. 1842. Geh. 1 Thlr. 6 ggr.

— id. X. seu novae ser. Vol. V., observ. a. 1835, 1836 et 1837 factas cont. 4maj. Ibid. 1842. Geh. 1 Thlr. 6 ggr.

Vol. VIII. IX. sind 1834 und 1836 erschienen und kosten ebenfalls jeder 1 Thlr. 6 ggr.

Connaissance des Temps, à l'usage des Astronomes et des Navigateurs, pour l'année 1843. 8. Paris. 5 fr. avec Additions 7 fr. 50 c.

Physik.

Ueber das academische Studium der Naturwissenschaften, vorzüglich das der Chemie. Ein Beitrag zu zeitgemässen Betrachtungen über Veränderungen im academischen Unterricht (mit Bezugnahme auf die Schrift des Prof. Liebig: Ueber das Studium der Naturwiss. und über den Zustand der Chemie in Preussen. Braunschweig 1840) von F. L. Hünefeld. Greifswald. 1843. 8.

Melos, J. G., Naturlehre für Bürger- und Volksschulen sowie die untern Klassen der Gymnasien. 6. Aufl. Durchgesehen und besonders in Hinsicht auf die physikalischen und astronomischen Elementarkenntnisse berichtigt und vermehrt von Dr. E. F. August, Director des Real-Gymnasiums in Berlin. 8. Leipzig. 1843. 18 ggr.

Leitfaden für den Unterricht in der Physik auf Gymnasien, Gewerbeschulen und höheren Bürgerschulen von Dr. H. A. Brettner. Achte vermehrte und verbesserte Auflage. Breslau. 1842. 8. 18 ggr.

Nach der Vorrede hat der Verf. die neuern Entdeckungen in dieser neuen Auflage überall nachgetragen, ohne die Zahl und Ordnung der Paragraphen zu ändern.

Grundriss der mechanischen Naturlehre. Als Leitfaden für physikalische Vorträge an Handels- und Gewerbschulen entworfen von Christian Albert Weinlig. Leipzig. 1843. 8. 19 ggr.

Wir glauben, dass dieses deutliche Lehrbuch, welches die im praktischen Leben wichtigsten Sätze der Theorie und deren Anwendungen, die wichtigsten Kunstausdrücke und Formeln in klarer und präciser, daher auch die mathematische Form nicht mit unnöthiger Aengstlichkeit ganz vermeidender Form den Schülern der auf den Titel genannten Lehranstalten in die Hände zu geben, alles Andere nur anzudeuten strebt, seinem Zwecke recht wohl entspricht. Guter Druck und die sauber ausgeführten Holzschnitte dienen demselben ausserdem zur Empfehlung.

Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie, für deutsche Verhältnisse frei bearbeitet von J. Müller. In 2 Bänden mit gegen 1000 in den Text eingedruckten Holzschnitten. 5. und 6. Lieferung. gr. 8. Braunschweig. 1843. 1 Thlr.

Marcet, F., Prof. an der Academie zu Genf, die Experimental-Physik. Zum Selbstunterrichte für Gebildete und zum Gebrauch in Real- und polytechnischen Schulen. Nach der 3. Aufl. des Franz. übers. von G. Kissling. Mit 6 Tafeln Figuren. 2. bis 4. Lief. gr. 8. Ludwigsburg. 1843. 18 ggr.

Les phénomènes de la nature. Publié par de Marlès. 2. édit. Paris. 1843. 8. mit 4 Abbildungen. 3 Fr.

Lettres sur la physique, par A. Bertrand. 2 vols. in 8. Paris. 1843. 8 fr.

Carpenter, Mechanical Philosophy, Horology and Astronomy. London. 1843. 8. 9½ sh. (Auch unter dem Titel: Popular Cyclopaedia of Natural Science vol. 2).

Osann, Dr. G. W., Königl. Bayer. Hofrath und ord. Prof. der Physik und allg. Chemie auf der Univ. Würzburg, neue Beiträge zur Chemie und Physik. 1. Beitrag. Mit galvanokaustischen Abbildungen. 1. Lief. 8. Würzburg. 1843. Geh. 8 ggr.

Populäre Vorlesungen über naturwissenschaftliche Gegenstände aus den Gebieten der Geologie, Physik und Chemie, im Jahre 1842 gehalten vor den gebildeten Bewohnern von Bonn, von G. Bischof. gr. 8. Bonn. 1843. 8 ggr.

Figurentafeln zur Physik, nebst ausführlicher Erklärung von Dr. G. Lauteschläger, Grossherz. Hess. Hofrath und Lehrer an dem Gymnasium zu Darmstadt. 6. Hett. Magnetismus und Electricität. Lex. 8. Darmstadt. 1842. 12 ggr.

Sammlung physikalischer Aufgaben nebst ihrer Auflösung. Zum Gebrauch in Schulen und beim Selbstunterricht. Von Friedrich Kries. Jena. 1843. 8.

Diese empfehlenswerthe Sammlung physikalischer Aufgaben betrifft die Bestimmung des specifischen Gewichts, die Bewegung der Körper, den Fall der Körper, den Stoss der Körper, das Gleichgewicht fester Körper, das Gleichgewicht flüssiger Körper, die Verdichtung und Verdünnung elastischer Flüssigkeiten, das Gleichgewicht fester und flüssiger Körper, die Archimedische Aufgabe, die Lehre vom Lichte, die Wärme, Gegenstände der angewandten Naturlehre. Aus der Lehre von der Electricität und dem Magnetismus sind gar keine Aufgaben aufgenommen, weil die Auflösung derselben theils auf Versuchen beruht, die gewöhnlicherweise nicht in den Schulen angestellt werden, theils Kenntnisse erfordert, die bei einem Schüler nicht vorausgesetzt werden können. Zweckmässig sind die Auflösungen von den Aufgaben getrennt. Gewiss wird diese Sammlung den Lehrern der Physik willkommen sein, da überhaupt die Anzahl solcher Sammlungen physikalischer Aufgaben noch sehr gering ist. Benutzt hat der Verf.: Nouveaux Problèmes de Physique etc. Par M. E. Bary. Paris. 1838. 8.

Traité de la chaleur considérée dans ses applications; par E. Péclet. 2. édit. 2 vol. in 4. Paris. 1843. 66 Fr.

Digitized by Google

Dove, H. W., Untersuchungen im Gebiete der Inductionselectricität. Eine in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin gelesene Abhandlung. Mit Holzschnitten und einer Kupfertafel. gr. 4. Berlin. 1842. 1 Thlr. 4 ggr.

Contributions to Electricity and Magnetism. By Professor J. Henry. 4. Philadelphia. 1839. 6 sh.

Haldat, recherches sur la puissance motrice et l'intensité des courans de l'électricité dynamique. Nanci. 1843. 8.

Davis, Manual of Magnetism, Electricity, the Electrotype etc. With 100 original Illustrations. Boston. 1842.

Nahl. Alex. Theod., meteorologische und naturhistorische Chronik des Jahres 1842. Bogen 1—8 mit den Tabellen Januar und Februar. gr. 8. Darmstadt. 1843. Preis des Ganzen 2 Thlr. 12 ggr.
M. vergl. Lit. Ber. Nr. X. S. 165.

Howard, seven lectures on meteorology. London. 1843. 2d. ed. 4½ sh.

Treatise on the Law of Storms; by W. C. Redfield. 8. New York. 1842.

On the Nature of Thunder-Storms, and on the Means of Protecting Buildings and Shipping against the Destructive Effects of Lightning; by W. Snow Harris, T. R. S. 8. London. 1843. 10 sh. 6 d.

The Philosophy of Storms; by James P. Espy. With Maps, Engravings, etc. 8. Boston. 1841. 16 sh.

Notice sur les tremblemens de terre; des tentatives faites pour les prévenir, exposé d'un nouveau mode de construction pour garantir la vie des hommes contre leurs désastreux effets; par Z. Nanci. 1843. 8.

Photographic Manipulation; containing simple and practical Details of the most improved Processes of Photogenic Drawing, the Daguerreotype and Calotype. 8. London. 1843. 1 sh. 6 d.

Vermischte Schriften.

Mémoires de l'Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg. VI série (sciences mathématiques, physiques et naturelles) Tome V. ou Tome III. de la 1. partie (siences math. et physiques). 4. St. Péters-

bourg. 6 Thlr. 18 ggr. Inhalt: Buoniakowsky, solution d'un problême de l'analyse de Diophante. — O. Struve, Bestimmung der Constanten der Präcession mit Berücksichtigung der eignen Bewegung des Sonnensystems.

Det Kongelige danske Videnskabernes Selskabs Naturvidenskabelige og mathematiske Afhandlinger. 9 Deel med 19 Tavler. 4. Kopenhagen. 1842. 2 Thlr. 12 ggr.

Le opere di Galileo Galilei. Prima edizione completa condotta sugli autentici manoscritti palatini et dedicata a S. A. J. e R. Leopoldo II., Gran Duca di Toscana. Tomo I. Florenz. 1843. 8. (Mit 4 Tafeln und Bildniss). $10\frac{1}{2}$ L.

Als Redacteur dieser Ausgabe wird Eugenio Alberi genannt, der von Vinc. Antinori und in mathematischer Beziehung von Coelestino Bianchi, in literarischer Beziehung von Pietro Bigazzi unterstützt wurde. Der Inhalt ist nach dem Stoffe in folgende 6 Klassen getheilt:

I. Delle materie astronomiche.
II. Delle materie meccaniche.
III. Delle materie varie scientifiche.
IV. Delle materie letterarie.
V. Della corrispondenza varia scientifica in quanto non sian lettere che debbono considerarsi piuttosto come trattati a parte di trattati, le quali avranno luogo nelle tre, e specialmente nelle due prime classi.
VI. Della vita e delle opere più propriamente relative alla vita dell' autore.

Die ganze Ausgabe ist auf 12 Bände, von etwa 40 Bogen, berechnet; diese sollen in Zwischenräumen von 3 bis 4 Monaten erscheinen, so dass bis zur Vollendung etwa 4 Jahre verfliessen würden.

XIV.
Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Guil. Libri Storia delle scienze matematiche in Italia. Vers. di Luigi Masieri. Puntata 1. 2. (à 1 1/15 L.) Mailand. 1842. 8. (Das Ganze in 24 solchen Punt., die 4 Bände bilden.)

Schriften über Unterrichtsmethode.

De l'enseignement des mathématiques dans les collèges, considéré sous le double point de vue des prescriptions réglémentaires de l'université et des principes fondamentaux de la science, par F. C. Busset. In-8. Paris. 1843. 6 fr.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Lehrbuch der Mathematik für die obern Classen höherer Lehranstalten, von Johann August Grunert. Dritter Theil. Ebene und sphärische Trigonometrie. Dritte vermehrte und verbesserte Ausgabe. Brandenburg. 1843. 8.

Auch die dritte Ausgabe dieses die ebene und sphärische Trigonometrie enthaltenden dritten Theils meines Lehrbuchs der Mathematik für die obern Classen höherer Lehranstalten ist an mehre-

ren Stellen, überhaupt überall, wo es nöthig schien, verbessert worden, ohne jedoch eine nur einigermassen erhebliche Aenderung seiner ganzen Anlage erfahren zu haben, so dass diese dritte Ausgabe neben den früheren ohne irgend ein Hinderniss in den Lehranstalten, für welche das Buch bestimmt ist, gebraucht werden kann.

G.

Erster Cursus der Planimetrie für Gymnasien, Real- und Bürgerschulen und zum Gebrauch für Hauslehrer und zum Selbstunterricht von Dr. August Wiegand. Mit 2 Kupfertafeln. Halle. 1843. 8. 8 ggr.

De Sinno Corso completo di matematiche pure. Tomo I. Neapel. 1843. 8.

Arithmetik.

A. Steen, Elementair-Arithmetik, som Inledning til den rene Mathematik. 8. Kjoebenhavn. 1843. 20 ſs.

Bourdon Élémens d'algèbre. 9e. édit. Paris. 1843.

Key to the Treatise on Algebra in Chamber's Educational Course, containing Solutions of all the Exercises in that Work. By A. Bell, formerly Mathematical Master in Dollar Institution. 8. London. 1843. 2 sh. 6 d.

Algebraische Uebungsaufgaben nebst Auflösungen, von J. H. D. T. Brandt. Hamburg. 1843. 8. 1 Thlr.

Tafel logistischer Logarithmen. Zugabe zu den Vega-Hülsseschen und anderen Logarithmen-Tafeln. (Aus Callet's „Tables des Logarithmes") Nürnberg. 1843. 6 ggr.

Chr. Jürgensen, Hoiere Algebra og Differentsregning. 2. Udg. Kjobenhavn. 1843. 8. 44 ſs.

C. Ramus, Undersoegelse af Resten af Lagranges Raekke; og om en Egenskab ved de lineaere Differentialligninger med 2 Variable. 4. Kjoebenhavn. 1843. 1. Udg. af Vidensk. Selsk. 32 ſs.

Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale von Dr. Oskar Schlömilch. Jena. 1843. 4.

Diese für die Theorie der bestimmten Integrale jedenfalls wichtige Schrift, welche von Keinem, der sich mit eignen Untersuchungen auf diesem noch reiche Ernten versprechenden Felde der höhern Mathematik beschäftigt, unbeachtet gelassen werden darf, besteht aus vier Theilen, deren drei erste folgende Ueberschriften führen: I. Die Theoreme von Lagrange und Fourier. II. Anwendungen der

Theoreme von Lagrange und Fourier. III. Ueber verschiedene bestimmte Integrale, deren Werthe durch doppelte Integrationen gefunden werden. Der vierte Theil enthält eine Formelsammlung und besteht wieder aus zwei Theilen, nämlich: I. Formeln, welche zu Reihensummirungen benutzt werden können. II. Die Werthe der wichtigsten bestimmten Integrale. Zweck und Inhalt der einzelnen Abschnitte sind durch diese Ueberschriften hinreichend bezeichnet, und ohne uns bei einer Schrift von so reichem Inhalt hier natürlich auf das Einzelne einlassen zu können, wollen wir nur bemerken, dass in dem ersten Abschnitte der Herr Verf. insbesondere beabsichtigt, die bekannten schönen Untersuchungen Dirichlet's über die Convergenz der berühmten Fourier'schen Reihen, welche zuerst in Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik. B. IV. S. 157. mitgetheilt wurden, und auch in den Supplementen zum mathematischen Wörterbuche. Abth. I. S. 239. vollständig entwickelt worden sind, ohne der Strenge Eintrag zu thun, auf eine viel einfachere Weise darzustellen. Der zweite Abschnitt ist durch die in demselben gegebenen Anwendungen der Fourier'schen Theoreme sehr lehrreich und ganz geeignet, die Wichtigkeit dieser Theoreme in ihrer ganzen Grösse zu zeigen. Die dritte Abtheilung enthält zwar die Anwendung eines bekannten Princips, führt aber zu manchen neuen, insbesondere auch die Gammafunctionen betreffenden Resultaten. Ueberhaupt lehrt uns die Schrift den Herrn Verf. von Neuem als einen mit den neuern Fortschritten der Analysis vollkommen vertrauten Mathematiker kennen, und verdient denen, welche sich mit eignen Forschungen in der Theorie der bestimmten Integrale beschäftigen, wiederholt angelegentlichst zu sorgfältiger Beachtung empfohlen zu werden.

Ueber eine auch hierher gehörende Schrift des Herrn Prof. Verdam zu Leiden vergl. m. Geometrie am Ende. Eben so vergl. m. über des Herrn Prof. G. Winkler Edler von Brückenbrand logarithmische und trigonometrische Tafeln Praktische Geometrie am Anfange.

Geometrie.

E. Lyonnet, Elémens de géométrie. 2. édition. Paris. 1843. 6 fr.

Elémens de géométrie, par E. Catalan, répétiteur de géométrie descriptive à l'école polytechnique. Avec planches. In-8. Paris. 1843. 5 fr. 50 c.

Geometri, i Förening med Linearteckning, för Folk-Lärare-Seminarier och Folkscholor af C. M. Lagerhamn, Phil. Mag. Stockholm. 1843. 8., med 7 pl. h. 24 sk.

Sammlung von Formeln und Gleichungen aus der

Elementargeometrie und Trigonometrie. Von G. A. Jahn. Leipzig. 1843. 8. 1 Thlr. 12 ggr.

Diese eine grosse Anzahl von Formeln aus der ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, auch aus der trigonometrischen Fehlerrechnung, und aus der ebenen Polygonometrie enthaltende, zweckmässig zusammengestellte, gut und, wie es scheint, auch correct gedruckte Sammlung wird zugleich beim Unterrichte als eine Sammlung von Uebungsaufgaben vortheilhaft gebraucht werden können. Sehr zweckmässig würde es übrigens nach unserer Meinung gewesen sein, wenn der Herr Verf. in seine Sammlung auch die wichtigsten Formeln und Gleichungen aus der analytischen Theorie der geraden Linie in der Ebene und im Raume, des Kreises, der Ebene und der Kugel aufgenommen hätte, da man diese Formeln auch bei solchen Untersuchungen, die eine mehr praktische Tendenz haben, wie z. B. in der Optik und Astronomie, gegenwärtig so häufig gebraucht, wohl nicht minder häufig als die Formeln der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Jedenfalls würde er dadurch sein Buch überhaupt auch dem neuern Zustande der Mathematik mehr genähert, dessen wissenschaftlichen Werth erhöhet und ihm die Anwendung in einem grösseren Kreise gesichert haben.

G. Schreiber, Geometrisches Portfolio. Blätter über darstellende Geometrie und ihre Anwendungen. Nebst einem erläuternden Text. 2. Heft, krumme Flächen enthaltend. Text in 4. und 22 Tafeln in Folio. Carlsruhe. 1843. 3 Thlr.

César Lambert et J. Picqué, Cours de géométrie descriptive. Paris. 1843. 8. mit 12 Tafeln. $3\frac{1}{4}$ fr.

Développemens de géométrie descriptive, par Théod. Olivier. Texte. Paris 1843. gr. 4. mit 1 Atlas in 24 Blättern. 18 fr.

Leçons de géométrie analytique, précédées des Elémens de la trigonométrie, par P. L. Cirodde. Paris. 1843. In-8. 7 fr. 50 c.

Nieuwe Verhandelingen der eérste Klasse van het Koninklijk-Nederlandsch-Institut. Tiende Deel. Verhandeling over de hyperbolische paraboloïde, door G.J. Verdam, Hoogleraar te Leiden. Te Amsterdam. 1843. 4

Der eigentliche Titel dieser Schrift ist: Bijdrage tot de meetkundige beschouwing van der hyperbolische paraboloïde. Door G. J. Verdam, und dieselbe ist jedenfalls als ein sehr dankenswerther Beitrag zu der auf die Theorie des hyperbolischen Paraboloids angewandten descriptiven Geometrie, so wie zu der Theorie dieser Fläche des zweiten Grades an sich zu betrachten.

Wiskundige bijdrage, inhoudende eene verklaring en beschouwing der Tafelen van elliptische bogen, berekend door den hoogleeraar Schmidt; alsmede eene mededeeling van herleidingen eener reeks van integralformulen tot elliptische functiën. Door G. J. Verdam, hoogleeraar te Leiden, lid der eerste Klasse van het Koninklijk Nederlandsche Instituut.

Der nächste Zweck dieser sehr lesenswerthen Schrift ist eine vollständige Analyse der in Nr. IX. S. 137. des Literarischen Berichts angezeigten elliptischen Tafeln von Schmidt, und wird daher für die des Holländischen hinreichend kundigen Besitzer der Schmidtschen Tafeln um so mehr ein sehr angenehmes Geschenk sein, weil diesen Tafeln nur eine ganz kurze Einleitung beigegeben ist. Ausser dieser Analyse der genannten Tafeln enthält die Schrift aber auch noch mehrere eigenthümliche für die Theorie der elliptischen Functionen nicht unwichtige Formeln, und besteht ausser einer Einleitung eigentlich aus vier Theilen, von denen der erste die Erklärung der Schmidtschen Tafeln enthält, der zweite, dritte und vierte aber die Ueberschriften: A. Ontwikkeling der Formulen van Legendre; B. Ontwikkeling van eenige bijzondere Integraal-Formulen; C. Ontwikkeling van eenige algemeene Integraal-Formulen führen. — Die Schrift ist besonders abgedruckt aus dem ersten Hefte des zweiten Theils der von dem Königlich Niederländischen Institute der Wissenschaften und Künste herausgegebenen Zeitschrift.

Praktische Geometrie.

Systematische Abhandlung über die Pothenot'sche Aufgabe in ihrer einfachsten Anwendung: aus drei gegebenen Punkten den Messtisch in einem vierten Punkte zu orientiren, und zugleich durch das Rückwärtseinschneiden diesen Punkt auf dem Tischblatte zu bestimmen, um dadurch eine Messoperation zu beginnen, fortzusetzen und zu vollenden. Allen deutschen Geometern freundlichst gewidmet von Georg Winkler Edlen von Brückenbrand, Prof. der Mathem. an der k. k. Forstlehranstalt zu Mariabrunn u. s. w. Wien. 1843. 8.

Diese kleine Schrift, welche der Herr Verf. auch der diesjährigen Versammlung der deutschen Naturforscher zu Grätz vorzulegen beabsichtigte, enthält die in der Messtischpraxis am meisten brauchbaren Auflösungen des gewöhnlich nach Pothenot benannten Problems, welche das Gesuchte entweder sogleich direct mit völliger Schärfe oder durch zweckmässige Näherungen nach und nach liefern, in einer sehr einfachen und deutlichen, jedem auch nur mit den ersten Elementarsätzen der Geometrie bekannten Praktiker gewiss völlig verständlichen Darstellung, verbunden mit manchen aus eigner Erfahrung hervorgegangenen Bemerkungen, und verdient daher Praktikern, welche sich mit dem in Rede stehenden Probleme näher bekannt machen wollen, wie in allen Fällen sehr zu wünschen ist, empfohlen zu werden. Am Ende giebt der Herr Verf. auch noch die gewöhnliche Auflösung durch die ebene Trigonometrie, wie sie sich z. B. in Mayer's praktischer

Geometrie findet, erläutert dieselbe durch ein Beispiel, verbreitet sich in der Vorrede auch über die Geschichte des Problems, und verbindet damit u. A. die Bemerkung, dass die directe Auflösung, deren Erfindung Schulz-Montanus in seinem bekanntlich von praktischen Geometern viel gebrauchten Handbuche der gesammten Land- und Erdmessung. B. II. S. 146. sich beilege, schon gegen Ende des vorigen Jahrhunderts von österreichischen Ingenieurs, namentlich von dem bekannten Geographen Freiherrn von Lichtenstern gebraucht worden sei, wie aus einer von demselben der k. k. Grundsteuer-Regulirungs-Hofcommission überreichten Denkschrift, und aus einer späteren Broschüre desselben: Vorschriften zu dem praktischen Verfahren bei der trigonometrischen und geometrischen Aufnahme eines grossen Landes, hervorgehe.

Bei dieser Gelegenheit wollen wir die Leser des Archivs auch noch darauf aufmerksam zu machen uns erlauben, dass den von dem Herrn Verf. der vorhergehenden kleinen Schrift im Jahre 1839 in einer zweiten Ausgabe herausgegebenen, auf gutes Papier sauber und correct gedruckten *sechsstelligen* Logarithmischen und Logarithmisch-trigonometrischen Tafeln. Wien. 1839. In Commission bei J. G. Heubner, deren in Nr. X. S. 154. des Literarischen Berichts nur kurz Erwähnung gethan worden ist, ein Vorzug vor manchen andern kleinen Tafeln dadurch gebühren möchte, dass sie die erforderlichen Differenzen und Proportionaltheile überall wie die grössern Tafeln vollständig berechnet enthalten.

J. B. A. Thorel, Arpentage et Géodésie pratiques. Formerie. 1843. 8. mit 12 Tafeln.

Abrégé de géométrie pratique appliquée au dessin linéaire, par L. C. et F. P. B. 14. édition. 12. Tours. 1843.

Theoret. Praktisk Lärobok i Landtmäteriet. Till Landtmätares, Landtbrukares, Juristers och Kameralisters m. fl. Tjenst Sammandragen och utgifwen af Anders Alreik, Fil. Mag., Öfwer-Ingeniör, R. N. o. W. O. Stockholm. 1843. 8. med 10 pl. h. 4 Rdr. 16 sk.

Enr. Montucci, Geometria e meccanica applicate alle arti ec. di Policarpo Bandini sulle tracce della publica elementare istruzione... dell' accad. Tegea. Disp. 1—3. 1843.

Trigonometrie.

Sammlung von Formeln, Aufgaben und Beispielen aus der Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, nebst Anwendungen auf die Stereometrie und Po-

lygonometrie. Herausgegeben von J. Salomon. Wien. 1843. 8. 2 Thlr.

Diese Schrift enthält eine reiche Sammlung von Formeln und Aufgaben aus den auf dem Titel genannten Theilen der Mathematik, so wie auch aus der Lehre von den goniometrischen und cyclometrischen Reihen, der Kreisrechnung und der goniometrischen Auflösung der Gleichungen, und wird daher für einen Jeden, dem die Erwerbung einer grösseren Gewandtheit im trigonometrischen Calcul Bedürfniss ist, ein erwünschtes Hülfsmittel sein. Denn schwerlich wird Jemandem, der dieses Buch vollständig durchgearbeitet hat, noch ein Fall aufstossen können, in welchem er sich nicht selbst zu helfen wissen sollte, weshalb dasselbe allerdings allgemeiner bekannt zu werden und Eingang zu finden verdient.

R. Lobatto, Leerboek der regtlijnige en spherische driehoeksmeting. 1843. 2½ fl.

Mechanik.

A. Mutel, Cours de statique, à l'usage des aspirans à l'école polytechnique et des écoles d'artillerie et de marine. 8. Paris. 1843.

Praktische Mechanik.

Allgemeine Maschinen-Encyclopädie, herausgegeben von J. A. Hülse. Atlas 12. (2. Bds. 6.) Lief. Taf. 92—95. 97. 105—109. enthaltend. qu. ½ gr. Fol. Leipzig. 1843. 1 Thlr. 16 ggr.

Poppe, Dr. J. H.: die praktische Mechanik und Maschinenlehre unserer Zeit; ein fasslich dargestelltes Lehr-, Lese- und Hülfsbuch zum Nutzen und Vergnügen für alle Stände. Mit 190 Abbildungen. 1. Lieferung. Zürich. 1843. 8. 14 ggr.

Der praktische Maschinenbauer, von A. V. Demme, prakt. Maschinenbauer. 13. Lief., mit 20 Tafeln Abbildungen. 8. Quedlinburg. 1843. 2 Thlr.

Description des Machines et procédés consignés dans les brevets d'invention etc. Tom. 47. avec planches. 4. Paris. 1843. 15 fr.

Werkzeichnungen oder praktische und detaillirte Zeichnungen, Beschreibungen und Erläuterungen der verschiedenen Arten von

ausgeführten Maschinen und Maschinerien. Herausgegeben von C. T. N. Mendelssohn, unter Mitwirkung mehrerer Techniker. 1. Band 6. Heft, enthält die Anlage einer vollständigen Oelfabrik nebst Zubehör. (6 lithogr. Blätter in gr. Folio und 1 Bogen Text in gr. 8.) Berlin. 1843. 1 Thlr. 12 ggr.

Premiers élémens de mécanique appliquée, comprenant: 1) la théorie des machines simples en mouvement; 2) des notions générales sur les machines composées; par H. Sonnet. In 12. Paris. 1843. 4 fr.

Angelo Parocchetti, Manuale di Meccanica pratica per l' ingegnere civile. Mailand. 1843.

Gabrio Piola, Nuove ricerche per una risoluzione più rigorosa di varii problemi sul moto dell' acqua. 4. Mailand. 1843.

Optik.

Albert, Petit traité de perspective pratique. Limoges. Mit 14 Tafeln. Paris. 1843.

L. Salme, Traité de perspective théorique et pratique. 3. édit Mit 6 Tafeln. Paris. 1843.

Astronomie.

Berliner astronomisches Jahrbuch für 1846, herausgegeben von . F. Encke. gr. 8. Berlin. 1843. 3 Thlr. 4 ggr.

Astronomy and Scripture, or some Illustrations of that Science, and of the Solar, Lunar, Stellar and Terrestrial Phenomena of Holy Writ. By the Rev. T. Milner, M. A. Author of „The History of the Seven Churches of Asia etc.“ London. 1843. 7 sh.

C. Rossari, Trattato di astronomia elementare. 16. Mailand. 1843. 1 L.

Handbok i Practiska Astronomien af S. A. Cronstrand. Andra Häftet. Till ledning under föreläsningarna wid det högre Militär Lärowerket på Marieberg. Stockholm. 1843. 8. samt 2¼ ark Ta-

beller. h. 2 Rdr. 40 sk. Man vergl. Literarischer Bericht Nr. I. S. 13.

Kreil, C., Ueber die Natur und Bewegung der Kometen. Mit besonderer Berücksichtigung des grossen Kometen vom Jahre 1843. 8. Prag. 1843. 12 ggr.

E. M. Beima, Verhandelingen over den ring van Saturnus. Leiden. 1843. $2\frac{4}{7}$ fl. Man vergl. Literarischer Bericht Nr. X. S. 162.

Connaissance des tems ou des mouvemens célestes, à l'usage des astronomes et des navigateurs pour l'an 1846. Publié par le bureau des longitudes. 8. Paris. 1843. 7 fr. 50 c.

J. Seidelin, Tabel over Solens Declination til hver Dags Sandmiddag og Maanens ovre Culminations Middelklokkeslet for Kbh. Meridian i 1845. Kjoebenhavn. 1843. 20 fs.

Derselbe: Tabel over Solens Declination og Tid-Equationen til hver Dags Sandmiddag og Middelmiddag, samt Maanens ovre Culminations Middelklokkeslet for Greenvichs Meridian i 1845. Ibid. 1843. 32 fs.

Kerigan's Mathematical and General Navigation Tables. 2 vols. royal 8. London. reduced to 30 sh.

Mappa coelestis, sive tabulae quinque inerrantium septimum ordinem non excedentium et usque ad 30 gradum decl. austr. pertinentium quas pro medio seculo 19 stereographice construxit G. Schwinck. Lips. 1843. Fol. 6 Thlr. 16 ggr.

Diese trefflichen fünf Sternkarten sind in den astronomischen Nachrichten Nr. 482. S. 30. von Bessel mit vollem Rechte sehr empfohlen worden. Am Ende seiner Anzeige sagt Bessel: „Die Karten stellen, wie aus dem Gesagten hervorgeht, den in unseren Gegenden sichtbaren Theil des Himmels dar. Sie leisten dieses nicht nur weit vollständiger, sondern auch in jeder anderen Beziehung weit vollkommener als das umfangreiche Werk von Bode. Sie befriedigen ein Bedürfniss, dessen Befriedigung alle mir bekannt gewordenen ähnlichen Hülfsmittel nicht gewährten."

Uranometria nova. Stellae per mediam Europam solis oculis conspicuae secundum veras lucis magnitudines e coelo ipso descriptae a Dr. Fr. Argelandro (Auch mit deutschem Titel). Berlin. 1843. Mit dem Sternverzeichnisse 4 Thlr.

„Alle Himmelscharten, die wir jetzt besitzen", sagt der Herr Verf. in der Vorrede, „haben zwei wesentliche Mängel: die Grössen der Sterne sind auf denselben nach den Schätzungen angegeben, die die Astronomen in Fernröhren gelegentlich der Bestimmung ihrer Positionen gemacht haben, und die häufig sehr fehlerhaft sind, und es stehen auf ihnen eine Menge hellerer Sterne nicht, während viele schwächere gezeichnet sind. Beide zusammen genommen verändern die am Himmel sich darstellenden Configuratio-

nen oft so bedeutend, dass man sich namentlich in an helleren Sternen ärmern Gegenden desselben kaum zurecht finden kann. Diesen Mängeln für die im mittlern Europa mit blossen Augen sichtbaren Sterne so viel als möglich abzuhelfen, ist der Zweck der gegenwärtigen neuen Himmelscharten." Allerdings glauben wir, dass diese schönen neuen Himmelscharten, in denen die Sterne von der ersten bis zur sechsten Grösse sehr bestimmt und deutlich von einander unterschieden sind, in dieser und in anderer Beziehung einem wesentlichen Bedürfnisse abhelfen, und empfehlen dieselben daher den Astronomen und den Liebhabern der Astronomie angelegentlichst, letzteren auch namentlich deshalb, weil dieselben mit geringen Hülfsmitteln schätzbare Beobachtungen über die verschiedene Grösse und Helligkeit der Sterne anstellen können, und die Vervielfältigung solcher Beobachtungen, zu denen Liebhaber der Astronomie nicht genug ermuntert werden können, jedenfalls sehr zu wünschen ist. Sehr zweckmässig sind auf diesen Charten die Sterne schwarz, die Umrisse der Sternbilder dagegen mit blassen rothen Linien gezeichnet. Auch der verhältnissmässig sehr niedrige Preis von 4 Thlr. für die Charten mit dem Sternverzeichnisse zusammen, gereicht diesem schönen Werke zur Empfehlung, und wird dessen Anschaffung erleichtern, und zu seiner weiteren Verbreitung, die es so sehr verdient, gewiss wesentlich beitragen.

Mittlere Oerter von 12000 Fix-Sternen für den Anfang von 1836, abgeleitet aus den Beobachtungen auf der Hamburger Sternwarte von Carl Rümker. Hamburg. 1843. 4. 3 Thlr.

Das Vorwort des Herrn Conferenzraths Schumacher giebt den Lesern hinreichende Nachricht über das, was dieser treffliche Sterncatalog zu leisten sucht, auf welches wir daher hier uns zu verweisen erlauben.

New Star Tables, adapted to Practical Purposes for Twenty-two Years, commencing January 1843: for the Use of Mariners, Amateur Astronomers, Chronometer Makers etc., with an Appendix, which together contain all the principal Problems for determining the Latitude and Longitude at Sea, with several Tables and Examplifications. By Thomas Lynn. Roy. 8. London. 1843. 10 sh.

S. Janse, Berekening en constructie van zonnewijzers voor den middelbaren tijd, benevens de handelwijze, om dezelve binnen in vertrekken te beschrijven. $2\frac{1}{4}$ fl.

Physik.

Die Experimental-Physik, methodisch dargestellt von Dr. F. Heussi, Oberlehrer am Gymnasium zu Parchim. 1. Cursus. Kennt-

niss der Phänomene. 3. verm. und verb. Aufl. gr. 8. Berlin. 1843. 12 ggr. Man vergleiche Literarischer Bericht Nr. VII. S. 111.

Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie für deutsche Verhältnisse bearbeitet von Dr. Joh. Müller. 7. und 8. Lief. Braunschweig. 1843. 8. 1 Thlr.

Kastner, K. G. W., Handbuch der angewandten Naturlehre. 8. Lieferung. gr. 8. Stuttgart. 1843. 7 ggr.

Populäre Vorlesungen über naturwissenschaftliche Gegenstände, aus den Gebieten der Geologie, Physik und Chemie, im Jahre 1843 gehalten vor den gebildeten Bewohnern von Bonn, von Gustav Bischof. Bonn. 1843. 8. 8 ggr.

Den Inhalt dieser Schrift bilden zwei Vorlesungen, von denen die erste, um uns hier mit einer ganz allgemeinen Angabe zu begnügen, die Lehre von der Verdunstung zum Gegenstande hat. Die zweite kündigt sich an als eine Erklärung der Erscheinungen des Thau's, beschäftigt sich auch etwa auf den ersten fünf Seiten mit diesem Gegenstande, enthält aber nachher lauter Dinge, die zur Lehre vom Thau gar nicht gehören, wie z. B. die mehrfach behauptete bekannte Thatsache, dass durch Oel die Gewalt der Meereswellen gebrochen werden könne, und eine ausführliche Beschreibung des Geysers auf Island, von dem auch eine Abbildung gegeben ist, und dessen Erscheinungen durch einen Versuch nachzuahmen gelehrt wird.

R. F. Addenet, Nouvelle théorie de l'électricité. Nécessité des forêts pour l'agriculture et le bien-être général. Paris. 1843.

Electrical Magazine. Conducted by Mr. Charles V. Walker. No. 1. London. 1843. 8. 2 sh. 6 d.

Zantedeschi: Esperienze sull' origine dell' elettricità voltiana, e descrizione di un elettro-motore, in cui la forza chimico-elettrica è cospirante colla elettro-motrice di contatto. 4. Vicenza. 1843.

Zantedeschi: Sull' induzione dinamica attraverso involucri e diaframmi di ferro. Vicenza. (Aus dem Sept.—Oct.-Hefte des Jahrganges 1841 der Annali delle scienze del regno Lombardo-Veneto besonders abgedruckt.)

Zantedeschi: Dell' azione reciproca di due correnti ellettrichi in un medesimo filo e in fili isolati vicinissimi, delle leggi dell' induzione volta-elettrico dinamica e della identità fra la virtù induttiva elettro-magnetica e magneto-elettrica. Vicenza. 4. (Aus dem Nov.—Dec.-Hefte des Jahrg. 1841 der Annali delle scienze del regno Lombardo-Veneto besonders abgedruckt.)

Zantedeschi: Sopra alcuni fenomeni che presentano i poli di un elettro-motore voltiano. Venedig. 1842. 8.

Gius. Zamboni, Sull' elettro-motore perpetuo, istruzione teor. prat. Verona. 1843.

Zannotti, Elementi di fisica positiva. Fasc. 1—3. Neapel. 1843. 8.

Die hydroelektrische Metallüberziehung oder Vergoldung, Versilberung, Verplatinirung, Verkupferung und Verzinkung auf galvanischem Wege. Ausführlich bearbeitet für den Gewerbsmann von C. F. Hänle. Lahr. 1843. 8. 16 ggr.

Diese Schrift scheint recht deutlich bearbeitet zu sein, und kann daher allen denen, welche sich mit hydroelektrischen Metallüberziehungen beschäftigen wollen, empfohlen werden.

An Account of some remarkable Applications of the Electric Fluid to the Useful Arts. By Mr. Alex. Bain. With a Vindication of his Claim to be the First Inventor of the Electro-Magnetic Telegraph, and also of the Electro-Magnetic Clock, by John Finlaison, Esq. Actuary of the National Debt Office. London. 1843. 8. with 5 diagrams. 4 sh.

Ueber das Licht von Ludwig Moser. Vortrag, gehalten in der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg den 7. April 1843. Königsberg. 1843. 8. 8 sgr.

„Der Wunsch einiger Freunde veranlasst mich", sagt der Herr Verf. in dem Vorwort, „eine in der hiesigen physikalisch-ökonomischen Gesellschaft gehaltene Vorlesung dem Druck zu übergeben. Sie enthält die Resultate meiner Untersuchungen über das Licht, in derjenigen Form, in welcher sie vielleicht ein grösseres Publikum interessiren. Ich glaube nicht, dass wenn man vor das grössere Publikum tritt, es mit den oberflächlichen Ergebnissen gethan sei; ihm gebühren vielmehr die besten, d. h. diejenigen, welche in das Wesen der Sache am meisten eingehen. Das einzige, was man da zurückhalten darf und soll, sind die minutiösen Details, welche das Interesse der Männer von Fach zu bilden pflegen, und ihnen reservirt bleiben müssen." Wir empfehlen diese Schrift allen denjenigen, welche sich in der Kürze mit den Hauptresultaten der merkwürdigen Moser'schen Entdeckung des sogenannten unsichtbaren Lichts bekannt machen wollen, und sind zugleich der Meinung, dass die in derselben angegebenen Gesichtspunkte ganz geeignet sind, die Leser auf den richtigen Standpunkt zu stellen, aus welchem sie diese in neuerer Zeit mehrfach angefochtene Entdeckung zu beurtheilen haben.

Traité de Photographie, derniers perfectionnemens apportés au daguerréotype. 4. édit. Par R. P. Lerebours. In 8. Paris. 1843. 3 fr. 50 c.

Photogenic Manipulation, containing plain Instructions in the Theory and Pratice of the Arts of Photography, Calotype, Cyanotype, Ferrotype, Chrysotype, Anthotype, Daguerreotype, Thermo-

graphy. By Georg Thomas Fischer. 18mo, illustrated by woodcuts. London. 1843. 1 sh.

Meteorology; comprising a Description of the Atmosphere and its Phenomena; the Laws of Climate in general and especially the Climate Features peculiar to the Region of the United States; with some Remarks upon the Climates of the Ancient World, as based on Fossil Geology. By Sam. Forry, M. D. With 13 illustrations, small folio. New York. 1843. 1 sh 6 d.

Annalen für Meteorologie, Erdmagnetismus und verwandte Gegenstände, redigirt von Grunert, Koller, Kreil, Lamont, Plinninger, Quetelet, Stieffel; herausgegeben von Dr. J. Lamont.

Jahrgang 1842. Heft IV. München. 1843. 8. Magnetische Störungen, beobachtet im magnetischen Observatorium der k. Sternwarte bei München. — Relevé des observations météorologiques faites à l'Observatoire Royal à Marseille par M. B. Valz. — Zusammenstellung der meteorologischen Beobachtungen in Schössl, von Herrn A. Bayer. — Auszug aus dem Annuaire magnétique et météorologique du corps des Ingenieurs des Mines de Russie par A. T. Kupffer. — Maxima und Minima der Barometerstände im Jahre 1841. — Resultate der meteorologischen Beobachtungen an der Sternwarte in Dorpat für 1842, mitgetheilt von Herrn Hofrath Mädler. — Bruchstücke aus den meteorologischen Beobachtungen vom Hohenpeissenberge. — Meteorologische Beobachtungen in Labrador und Grönland. — Meteorologische Beobachtungen in Utrecht, mitgetheilt von Herrn Professor van Rees. — Quantité de Pluies tombées à Lyon, par M. Job. — Stündlicher Gang der Temperatur und des Luftdruckes beobachtet im Jahre 1842 in der k. Sternwarte bei München. — Zusammenstellung der täglichen meteorologischen Beobachtungen von Stuttgart, Giengen an der Brenz, Carlsruhe, Wien, Parma. — Zusammenstellung der monatlichen Mittel des Luftdruckes und der Temperatur. — Phénomènes, registré à Parme pendant l'année 1841, par M. Colla. — Ueber die Bestimmung des Gesetzes, nach welchem der Magnetismus in Stahlstäben vertheilt ist, vom Herausgeber. — Vermischte Nachrichten, vom Herausgeber: Annuaire magnétique et météorologique du corps des Ingenieurs des Mines de Russie etc., par A. T. Kupffer, année 1840. Auszug aus einem Schreiben des Herrn Staatsraths und Akademikers Kupffer an den Herausgeber. Auszug aus einem Schreiben des Herrn Professors van Rees. Absolute Intensitätsbestimmung von Herrn Prof. Lloyd. Mittheilung des Herrn Prof. Fournet aus Lyon. Meteorologische Beobachtungen, veranstaltet von Herrn Espy in Washington. Witterungsbericht von Herrn Hofrath Mädler aus Dorpat. Mittheilung von Herrn Colla. Magnetische Wärme-Compensation. Auszug aus einem Briefe des Herrn Koller. Variationen der magnetischen Inclination.

Jahrgang 1843. Heft V. München. 1843. 8. Auszug aus dem Annuaire magnétique et météorologique du corps des Ingenieurs des Mines de Russie, par A. T. Kupffer. Année 1840. — Magnetische Störungen, beobachtet im Observatorium der k. Sternwarte bei München, 1841. — Monatliche Mittel des Barometer- und

Thermometerstandes in Danzig, beobachtet von dem Herrn Regierungsrath Dr. Kleefeld, von 1807 bis 1838. — Zusammenstellung der täglichen meteorologischen Beobachtungen in Wien, Salzburg, Stuttgart, Bensberg und Cronberg 1842. — Vergleichung der meteorologischen und magnetischen Beobachtungen in Brüssel und München 1841. — Mittlere magnetische Declination in München 1841 und 1842. — Magnetische Beobachtungen der russischen Stationen, ausgezogen aus dem Annuaire des Herrn Staatsraths und Akademikers Kupffer. — Magnetische Beobachtungen in München vom August 1842 bis Mai 1843. — Bemerkungen zu den vorhergehenden Beobachtungen. — Vermischte Nachrichten, vom Herausgeber: Magnetische Bestimmungen in Böhmen, von Herrn Kreil. Tiefer Barometerstand am Ende Februar 1843. Auszüge aus Briefen des Herrn Colla. Magnetisches Observatorium in Washington. Bemerkungen über magnetische Beobachtungen.

Bestimmung der Horizontal-Intensität des Erdmagnetismus nach absolutem Maasse. Von Dr. J. Lamont. München. 1842. 4.

Resultate der magnetischen Beobachtungen in München während der dreijährigen Periode 1840, 1841, 1842. Von J. Lamont. München. 1843. 4.

In den Gelehrten Anzeigen, herausgegeben von Mitgliedern der k. bayer. Akademie der Wissenschaften, 3. März 1843. Nr. 44. 45. S. 358—366, hat Herr Dr. Lamont der k. Akademie einen Bericht über Die magnetischen Beobachtungen in der dreijährigen Periode 1840—41—42. erstattet. In denselben Anzeigen, 26. Juli 1843. Nr. 147. 148. 149. S. 148—164, findet sich ein Bericht desselben Herrn Verfs. über die von ihm eingeschlagene Methode zur Messung der magnetischen Inclination. Auch berichtet in Nr. 149. ff. Herr Akademiker Dr. Schafhäutl über die Resultate seiner Beobachtungen mittels eines von ihm construirten Photometers.

Der Urzustand der Erde und die Hypothese von einer stattgehabten Aenderung der Pole, erklärt durch Uebereinstimmung mit Sagen und Nachrichten aus ältester Zeit. Eine geolog. histor. Untersuchung über die sogenannte Sündfluthskatastrophe von Fred. Klee. Nach der dänischen Handschrift des Verfassers von Maj. G. F. von Jenssen-Tusch. gr. 8. Stuttgart. 1843. 1 Thlr. 18 ggr.

W. C. Redfield, On Whirlwind Storms: with Replies to the Objections and Strictures of Dr. Hare. New York. 1843. 6 sh.

Sammlung physikalischer und hydrographischer Beobachtungen, welche an Bord der k. preussischen Seehandlungs-Schiffe auf ihren Reisen um die Erde und nach Amerika angestellt worden sind. Geordnet und herausgegeben von Dr. H. Berghaus. Erste Abtheilung: Reisen um die Welt. Breslau. 1842. 4. 5 Thlr.

Philosophical Diagrams, illustrating the various Branches of Natural Philosophy. By Fred. J. Minasi, Lecturer on Nat. Philo-

sophy. 1. Series. Mechanics (15 Blätter mit Figuren). London 1843. 15 sh.

Vermischte Schriften.

The Cambridge mathematical Journal. No. XV. May, 1842. I. On the General Problem of Intercalations. II. Note on the Theory of the Solutions of Cubic and Biquadratic Equations. III. Exposition of a General Theory of Linear Transformations. Part. II. IV. A Method of obtaining any Root of a Number in the Form of a Continued Fraction. V. Notes on some Points in Formal Optics. VI. On Elliptic Functions. VII. On the Solution of Functional Differential Equations. VIII. On Certain Definite Integrals. XI. Demonstrations of some Geometrical Theorems. X. On the motion of a Solid Body about its Centre of Gravity. XI. Mathematical Notes: 1. Demonstration of the principle of virtual velocities. 2. Problem from the Papers of 1842. — If $F(x, y, z) = \varphi(u, v, w)$, where F is homogeneous of the nth degree in x, y, z and $u = \frac{dF}{dx}$, $v = \frac{dF}{dy}$, $w = \frac{dF}{dz}$; then $x = (n-1)\frac{d\varphi}{du}$, $y = (n-1)\frac{d\varphi}{dv}$, $z = (n-1)\frac{d\varphi}{dw}$.

No. XVIII. May, 1843. I. On certain Formulae made use of in Physical Astronomy. II. Note on vibrating Cords. III. On the Integration of certain Equations of Finite Differences. IV. On a Class of Differential Equations, and on the Lines of Curvature of an Ellipsoid. V. Note on a Problem in Dynamics. VI. On the Integration of Linear Partial Differential Equations by the Methods of Monge and Lagrange. VII. On the Attractions of Conducting and Non-Conducting Electrified Bodies. IX. On Lagranges Theorem. X. Note on Orthogonal Isothermal Surfaces. XI. On Fourier's Theorem. XII. Mathematical Notes: 1. Stability of Eccentricities and Inclinations. 2. Mnemonic Rule. (Für die Formel:

$$\cos c \cos B = \sin c \cot a - \sin B \cot A$$

der sphärischen Trigonometrie). 3. To shew that the greatest and least radii of any plane section of the surface of elasticity are at right angles. 4. Problem in the Papers of 1842. A quadrilateral, composed of four unequal beams jointed together at the extremities, is compressed by a given force in the direction of one diagonal: find the force in the direction of the other diagonal which will resist the compression.

Mémoires présentés par divers savants à l'Académie royale des sciences de l'Institut de France et imprimés

par son ordre. Sciences mathématiques. Tome VIII. Paris. 1843. 4.

Aus diesem Bande sind folgende Abhandlungen auszuzeichnen: E. Becquerel, mémoire sur le rayonnement chimique qui accompagne la lumière solaire et la lumière électrique. — G. Lamé, mémoire sur la démonstration d'un nouveau cas du dernier théorème de Fermat. — G. Delafosse, récherches sur la cristallisation considerées sous les rapports physiques et mathématiques.

XV.
Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Alberi, Eug.: De Galilei Galileii circa Jovis satellites lucubrationibus quae in i. et r. pittiana palatina bibliotheca adservantur. Florenz. 1843.

Derselbe: Dei Lavori di G. Galilei intorno i satelliti di Giove esistenti nell i. r. bibliotheca Palatina de' Pitti. 4to. Florenz. 1843. (Wahrscheinlich aus der neuen Ausgabe der Opere di G. Galilei besonders abgedruckt.)

M. s. Literar. Bericht No. XIII. S. 208. und unten unter den Vermischten Schriften.

Wilde's Geschichte der Optik. Zweiter Theil. s. m. unter Optik.

Schriften über Unterrichtsmethode.

Gérono et Roguet, Programme détaillé des connaissances mathématiques exigées pour l'admission aux écoles polytechnique, navale, militaire, forestière etc. 2 édit. 8. Paris. 1843. 2 fr. 50 c.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Reber, Peter, Herzogl. Leuchtenberg. Oberadministrationsrath zu Eichstädt, Handbuch der Arithmetik, Geometrie, Stereometrie, Trigonometrie und deren praktische Anwendung für Forstmänner, Militairs, Beamte, Geometer und Alle, welche sich in dieser Wissenschaft selbst unterrichten wollen. 2. Abth.: Geometrie, Trigonometrie und Polygonometrie. gr. 8. nebst 5 lith. Tafeln in ½ Folio, 1 Tafel in 4. und 1 Karte in Folio. Kempten. 1843. 2 thlr. 12 ggr.

Bordes, L., Leçons de mathématiques. 2de. édit. Part. 1. 2. Avec 8 planches. Paris. 1843. 8 fr.

Francoeur, Corso completo di matematiche pure. 2 Tomi. Con 10 Tav. Neapel. 1841. 21 L. 25 c.

Arithmetik.

Fiebag, demonstrative Rechnenkunst für die unteren Gymnasial-Klassen, für Seminarien und höhere Bürgerschulen. 2te vermehrte und verbesserte Auflage. Breslau. 1843 8. ⅓ thlr.

Bernhardt, J. B., Lehrer in Fleischwangen, Verfahren, die Verhältnissrechnungen durch Vernunftschlüsse anschaulich und zugleich bequem, leicht und schnell aufzulösen. Eine Zugabe zur gewöhnlichen Schlussform und zunächst ein methodischer Leitfaden für die Hand des Lehrers. Ulm. 1843. gr. 8. 8 ggr.

Frisch, Friedr., Lehrer in Basel, Aufgaben zum Zifferrechnen, für schweizerische Elementarschulen. Nach einem stufenmässigen, vom Leichtern zum Schwerern fortschreitendem Gange und mit besonderer Berücksichtigung der schweizerischen Münzen und der neueren Maasse und Gewichte. 2. Abth.: das Rechnen mit Sorten, Brüche, Dreisatzrechnung, Zinsrechnung und Gesellschaftsrechnung. Basel. 1842. 8. Geb. 11 ggr.

Derselbe: Schlüssel zur ersten Abtheilung der Aufgaben zum Zifferrechnen. Ebend. 8. Geh. 4 ggr.

Lochmann, Fr., neue arithmetische Uebungsbeispiele für Deutschlands Gymnasien und Bürgerschulen, sowie für Berg-, Forst-, Militair- und andere Institute bearbeitet. 1stes Heft; die 4 Rechnungsarten mit ganzen gleich und ungleich benannten Zahlen. 2te vermehrte Aufl. Leipzig. 1843. 8. 9 ggr.

Derselbe. 2tes Heft: die 4 Rechnungsarten gleich und ungleich benannter Zahlen mit gemeinen Brüchen. 2te vermehrte Auflage. Ebend. 1843. 8. 6 ggr.

Anweisung zum Gebrauche des englischen Rechenschiebers (Sliding rule - Règle à calcul), eines Instruments, mittelst dessen man den grössten Theil der im technischen Leben vorkommenden Rechnungen sehr schnell und sicher vollführen kann; zunächst für Maschinenbauer, Ingenieure, Architecten, Zimmermeister, Steinhauer, Fabrikanten und jeden im technischen Betriebe Beschäftigten, wie nicht minder für Astronomen, Physiker, Optiker, zur grossen Erleichterung und Sicherstellung ihrer Rechnungen. Von Dr. L. C. Schulz v. Strassnicki, ö. o. Prof. der Mathem. am k. k. polytechnischen Institute zu Wien. Wien. 1843. 8. 1 Thlr. 12 ggr.

So wie das hier beschriebene Instrument selbst ist auch die vorliegende Schrift wegen der grossen Sorgfalt und Gründlichkeit, mit welcher dieselbe im Allgemeinen verfasst ist, und den vielen zur Erläuterung beigebrachten Beispielen, die nicht der geringsten Undeutlichkeit Raum lassen, hauptsächlich Lehrern an höhern Bürgerschulen, Realschulen und Gewerbeschulen in jeder Beziehung sehr zur Beachtung zu empfehlen, und der Herr Verf. hat sich durch deren Ausarbeitung sowohl um diese Schulen, als auch um die auf dem Titel genannten Personen gewiss ein sehr dankbar anzuerkennendes Verdienst erworben. Durch die Rohrmann'sche Buchhandlung zu Wien kann der von Lenoir in Paris aus Buxbaum verfertigte, an Genauigkeit keinem englischen Instrumente nachstehende Sliding rule um den sehr geringen Preis von 2 fl. 30 kr. Conv.-Münze = 3 fl. Reichswährung von ganz Deutschland bezogen werden. In den bekanntlich ungemein reichen Sammlungen des k. k. polytechnischen Instituts zu Wien befinden sich eilf Sliding rule's von verschiedener Einrichtung, die auf S. 184—198 der vorliegenden Schrift, der am Ende auch noch Tabellen der Divisoren für die vorzüglichsten Maasse und Gewichte beigegeben sind, sämmtlich beschrieben werden.

Sammlung von Lehrsätzen, Formeln und Aufgaben aus der gewöhnlichen Rechenkunst, Mathematik und Physik von Dr. J. Götz, Prof. der Mathematik (am Gymnasium zu Dessau). Berlin. 1843. 8.

Drei Theile sind erschienen. Erster Theil. Sammlung von Aufgaben aus der gewöhnlichen Rechenkunst. 8 ggr. — Zweiter Theil. Sammlung von Lehrsätzen, Formeln und Aufgaben aus der Arithmetik, Algebra und allgemeinen Grössenlehre. 10 ggr. — Dritter Theil. Sammlung von Lehrsätzen, Formeln und Aufgaben aus der ebenen Geometrie, analytischen und ebenen Trigonometrie, ebenen Polygonometrie, Stereometrie, sphärischen Trigonometrie und sphärischen Polygonometrie. 1 Thlr. 6 ggr. — Die jedem Kapitel vorausgeschickten Fragen und die in das System gehörenden Sätze hätten nach unserer Ueberzeugung weggelassen werden sollen.

Reber, Tabellen über Längen-, Flächen- und Körpermaasse, über den inneren und gangbaren Werth der Münzen, über Verglei-

chung verschiedener Handelsgewichte, Ellen-, Getreide- und Getränkemaasse aller Länder, dann über das spezifische Gewicht und die Verhältnisszahlen bei Flüssigkeiten, Metall, Mineralien, Holz u.s.w. nach bayerschem Kubikschuh und Gewicht berechnet. Mit 1 lithogr. Tafel in kl. Fol. Kempten. 1843. gr. 8. 12 ggr.

Derbois: cahier ou programme détaillé d'arithmétique théorique et pratique. 8. St. Lô. 1843.

Knapp, Fl., Théorie des proportions composées et ses applications, à l'usage des maisons d'éducation. 18mo. Bruxelles. 1843.

Bergery, C. L., Complemens de calcul des écoles primaires. Seconde édition. Paris. 1843. 18 ggr.

Arithmetic, designed for the Use of Schools. By the Rev. J. W. Colenso, M. A. Fellow of St. John's College. Cambridge. 1843. 12mo. 4 sh. 6 d.

François, Gius., Trattato teorico-pratico d'aritmetica. Florenz. 1843. 5 L. 88 c.

Fiebag, die allgemeine Grössenlehre und niedere Algebra für die oberen Gymnasialklassen und Realschulen. gr. 8. Breslau. 1843. 8 ggr.

Sass, Buchstaben-Rechnung und Algebra. Mit 1 Logarithmen-Tafel. II. Abth. der Fortsetzung des „Rechenbuches für Volksschulen". gr. 8. Altona. 1843. 1 Thlr.

Derselbe: Resultate dazu. gr. 8. 6 ggr.

Fiedler, Dr. J., Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik zum Gebrauch für Gymnasien und höhere Bürgerschulen. gr. 8. Breslau. 1843. 1 Thlr.

Gräfe, Dr. H., Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra zum Gebrauch in Real- und Bürgerschulen. 1. Heft. 8. Jena. 1843. 9 ggr.

Derselbe: Resultate zu vorstehender Sammlung. 8. Ebend. 9 ggr.

Blaser, C., Allgemeine Behandlung der Reihenumkehrung nebst Anwendung derselben zur Darstellung der Wurzeln algebraischer Gleichungen in unendlichen Reihen. 4. Bern. 1842. 10 ggr.

Wenn der Verf. dieser Schrift klagt, dass die Reihenumkehrung, die bekanntlich längere Zeit einen Hauptgegenstand der Untersuchungen der Bearbeiter der combinatorischen Analysis, namentlich Hindenburg's, Rothe's, Eschenbach's, Pfaff's ausmachte, gegenwärtig von den Mathematikern vernachlässigt und eher umgangen als angewandt werde, so hätte er bedenken sollen, dass die gegenwärtige Theorie dieser analytischen Operation in so fern als

eine im höchsten Grade unvollkommene bezeichnet werden muss, weil sie uns in völliger Ungewissheit über die Convergenz oder Divergenz der betreffenden Reihen lässt, und dass daher die Mathematiker, welche statt der Reihenumkehrung zu andern Methoden ihre Zuflucht uehmen, jedenfalls viel eher zu loben als zu tadeln sind. Hätte er seine Untersuchungen auf den vorher in Anregung gebrachten Punkt gerichtet, so würde er der Wissenschaft einen wesentlichen Dienst zu leisten im Stande gewesen sein; er hat diesen Hauptpunkt in der Theorie der Umkehrung der Reihen aber ganz unbeachtet gelassen.

Elementär Afhandling om Seriers Convergens. Praes. Carl Johan Hill, Mathem. Prof.; Resp. Theodor Ihrmann. I. Lund. 1843. 8.

Mundt, C. A., de accuratione, qua possit quantitas per tabulas determinari et quidem cum per tabulas in Universum, tum singulatim per tabulas logarithmicas et trigonometricas. 4. Hauniae. 1842 2 Thlr.

Geometrie.

Bolzano, Dr. Bern. Versuch einer objectiven Begründung der Lehre von den drei Dimensionen des Raumes (aus den Abhandlungen der königl. böhm. Gesellschaft der Wiss., V. Folge. 3. Band, besonders abgedruckt). gr. 4. Prag. 1843. 4 ggr.

Türk, Wilh. v., Leitfaden für den Unterricht in der Formen- und Grössenlehre. 5. Aufl. mit 120 Kupfertafeln. gr. 8. Potsdam. 1843. 1 Thlr. 18 ggr.

Raumlehre oder Geometrie, nach den jetzigen Anforderungen der Didaktik für Lehrende und Lernende bearbeitet von Dr. F. A. W. Diesterweg, Director des Seminars für Stadtschulen in Berlin. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 9 Steintafeln. gr. 8. Bonn. 1843. 1 Thlr.

Gruber, Dr., die Formen- und Raumgrössenlehre in der Volks- und Fortbildungsschule, für Lehrer bearbeitet. gr. 8. Karlsruhe. 1843. 12 ggr.

Hablützel, J. G., Lehrer und Geometer, die Elemente der Geometrie, nebst einem geordneten Stufengange von 80 Aufgaben aus der Constructions-, Verwandlungs- und Theilungslehre. Für Schulen und zum Privatunterricht. Nach einem neuen und erleichternden Systeme bearbeitet. gr. 12. mit 33 lith. Tafeln. Schaffhausen. 1843. 16 ggr.

Leitfaden bei dem Unterrichte in der Längen-, Flächen- und Körperlehre, für Volksschulen bearbeitet von F. L. Schöne. Leipzig. 1843. 8 ggr.

Wiegand, Aug., Zweiter Cursus der Planimetrie für Gymnasien und Realschulen. Mit 2 Kupfertafeln. 8. Halle. 1843. 8 ggr. (M. vergl. Liter. Bericht No. XIV. S. 210.)

Dr. Georg Recht, Lehrer der Mathematik und Privatdocent an der Universität München. Die Elemente der Geometrie. gr. 8. mit 7 Steintafeln in qu. ½ Fol. München. 1844. 1½ Thlr.

Sammlung von 120 Aufgaben aus dem Gebiete der Elementargeometrie mit ihren Auflösungen und Beweisen ohne Anwendung der Proportionen, nebst einem Anhange von Formeln zur Berechnung der Flächen und Körper, für Elementarklassen der Geometrie, sowie zum Selbstunterricht und zur Vorbereitung auf Prüfungen, herausgegeben von K. Schulz, Conrector zu Fürstenwalde. Mit 5 Kupfertafeln. 8. Leipzig. 1844. 8 ggr.

Die Aufgabensammlung von Götz s. unter Arithmetik.

Théorèmes et problèmes de géometrie élémentaire, par H. Ch. de la Fremoire. In-8. Paris. 1843. 6 fr.

Die Lehre von den Transversalen in ihrer Anwendung auf die Planimetrie. Eine Erweiterung der Euklidischen Geometrie von C. Adams, Lehrer der Mathematik an der Gewerbschule in Winterthur. Winterthur. 1843. 8. 1 Thlr. 12 ggr.

Lehrer finden in dieser Schrift eine sehr deutliche und ziemlich vollständige Zusammenstellung der Elementarsätze der Lehre von den Transversalen, deren Aufnahme in den geometrischen Elementarunterricht jedenfalls sehr zu wünschen ist, worin wir dem Verf. völlig beistimmen. Dass die wichtigsten Anwendungen der Lehre von den Transversalen, insbesondere auf die Lehre vom Kreise, die im vierten Abschnitte in ziemlicher Vollständigkeit behandelt ist, nicht fehlen, braucht wohl nicht erst besonders bemerkt zu werden. Auf die Kegelschnitte hat der Verf. seine Untersuchungen nicht ausgedehnt, was aber wohl auch nicht in seinem Plane liegen konnte, da sein nächster Zweck die Abfassung eines Elementarlehrbuches war. Dagegen sind im fünften Abschnitte mehrere Anwendungen der Lehre von den Transversalen auf die Auflösung verschiedener zweckmässig gewählter Aufgaben der praktischen Geometrie zusammengestellt. Schülern, welche einen Cursus der ebenen Geometrie durchgemacht haben, wird diese Schrift wegen ihrer Deutlichkeit und Klarheit mit Nutzen für ihre weitere Ausbildung zum eignen Studium in die Hände gegeben werden können.

Zwahr, J. G., die Quadratur des Zirkels auf ihre einfachen Grundregeln zurückgeführt. 1 Tabelle und 1 Holzschnitt. Spremberg. 1843. 8. 10 ggr.

Leitfaden für den ersten Unterricht in der descriptiven Geome-

trie von Dr. Bernhard Gugler (aus dem grössern „Lehrbuch" etc. des Verfassers ausgehoben, vorzugsweise für den Gebrauch der Gewerbeschulen). Mit 2 Kupfertafeln. Nürnberg. 1844. 21 ggr.

Die Kegelschnitte für den Gebrauch in Gymnasien und Realschulen, bearbeitet von K. H. Schellbach, Profess. der Mathematik und Physik am Friedrich Wilhelms-Gymnasium in Berlin. 8. mit 7 Figurentafeln. Berlin. 1843. 1 Thlr. 8 ggr.

Praktische Geometrie.

Die Geometrie in ihrer Anwendung auf das Gewerbe der Bauhandwerker für Bau-Gewerbe- und Sonntagsschulen u. s. w., von Dr. Burgheim. Minden und Leipzig. 1843. 8. 1 Thlr.

Jahn, Dr. G. A., Berechnungstafeln für den Inhalt vierkantiger, walzen- und kegelförmiger Hölzer und für die Kostenpreise derselben. kl. 4. Leipzig. 1843. 1 Thlr.

Bergery, C. L., Géométrie des courbes appliquées aux arts. 2 édit. In-8. Paris. 1843. 6 fr.

Symon, Fr. T., Vorlagen zur praktisch-mathematischen Zeichnungslehre. Gründliche Anweisung zur Selbsterlernung und Uebung im geometrischen Zeichnen, als Vorbereitung zur topographischen, Situations-, Fortifikations-, taktischen, Artillerie- und Maschinen-Zeichnung für Geometer, Forstmänner, Regiments-, Gewerksschulen und andere Erziehungs-Institute. 2 Hefte. München. 1843. 1 Thlr. 4 ggr.

Fuchs, Dr., Ueber den Einfluss der Gestalt des Terrains auf die Resultate barometrischer und trigonometrischer Höhenmessung, so wie auf die Bestimmung der geographischen Lage eines Punktes auf der Oberfläche der Erde. 8. Wien. 1843. 12 ggr.

Versuch einer neuen Methode zur Bestimmung der Polhöhe bei geodätischen Messungen. Von Joh. August Grunert. Leipzig. 1844. 8. 9 ggr.

Ich beabsichtige mit dieser kleinen Schrift dem Geodäten eine Methode zur Bestimmung der Polhöhe oder geographischen Breite an die Hand zu geben, mittelst welcher er dieses wichtige Element bloss mit Hülfe des Instruments, mit welchem er überhaupt alle seine Messungen ausführt, nämlich des Azimuthaltheodoliten, also namentlich ganz ohne Uhr, und zugleich ohne Voraussetzung vieler astronomischen Kenntnisse und Fertigkeiten, zu bestimmen

im Stande ist. Die Fehler dieser Methode sind in der Schrift einer sorgfältigen analytischen Untersuchung unterworfen worden. Vorzüglich wünsche ich, dass diese Methode vielleicht Veranlassung geben möge, dass künftig öfter als bisher auch mit kleinern praktischen Messungen Polhöhenbestimmungen verbunden werden, wodurch, wie es mir scheint, der Geographie mancher dankenswerthe, wenn auch allerdings hin und wieder noch spätere Berichtigungen bedürfende Beitrag geliefert werden kann. G.

Trigonometrie.

Mazure & Bellinault, Tables trigonométriques, donnant pour tous les angles du quart de cercle calculés de cinq minutes centésimales et appliqués à toutes les hypoténuses possibles, les sinus, cosinus ou segmens des bases avec des décimales etc. In-8. Montmirail. 1843. 6 fr.

Mechanik.

Treatise on Mechanics, by S. D. Poisson. Translated from the French, and elucidated with Explanatory Notes by the Rev. H. H. Harte. 2 vols. 8. with 8 Plates. cloth. London. 1843. 28 s.

Praktische Mechanik.

Bresson, Carl, Lehrbuch der Mechanik in ihrer Anwendung auf die physischen Wissenschaften, die Künste und Gewerbe. Aus dem Franz. 3. — 5. Lief. gr. 4. Nebst lith. Tafeln in ½ Fol. Leipzig. 1843. à Lief. 12 ggr. M. vergl. Literar. Ber. No. X. S. 159.

Poppe, Dr. Joh. Heinr. Mor. v., Hofrath und Prof. zu Tübingen, die praktische Mechanik und Maschinenlehre unserer Zeit; ein fasslich dargestelltes Lehr-, Lese- und Hülfsbuch zum Nutzen und Vergnügen für alle Stände. Mit 190 Abbildungen auf 24 Taf. 2. — 4. Lief. gr. 8. Zürich. 1843. 1 Thlr. 18 ggr. (M. vergl. Literar. Bericht. No. XIV. S. 215.)

Haindl, S., die Maschinenkunde und Maschinenzeichnung. 4 Lief. (Schluss). Text gr. 4. mit Tafeln in Fol. München. 1843. 5 Thlr. 8 ggr. (M. vergl. Liter. Bericht. No. III. S. 57.)

Demme, A. V., der praktische Maschinenbauer. 14. u. 15. Lieferung. 8. Mit 50 Tafeln Abbildungen in ½ Folio. Quedlinburg. 1843. 4 Thlr. 20 ggr. (M. vergl. Liter. Ber. No. XIV. S. 215.)

Taffe, A., Application de la mécanique aux machines le plus en usage, mues par l'eau, la vapeur, le vent et les animaux, et à diverses constructions. 3 édit. 8. Paris. 1843. 10 fr.

Hoffmann, Ludw, Baumeister in Berlin, die Sägemühle mit den neuesten Constructionen, in den Hauptansichten, Profilen und einzelnen Theilen nach dem Maasstabe gezeichnet und beschrieben. Folio. Leipzig. 1843. 1½ Thlr.

Das Eisenbahnwesen, oder Abbildungen und Beschreibungen von den vorzüglichsten Dampf-, Munitions-, Transport- und Personenwagen, von Schienen, Stühlen, Drehscheiben, Ausweich- oder Radlenkschienen und sonstigen Vorrichtungen und Maschinen, die auf den Eisenbahnen Englands, Deutschlands, Frankreichs, Belgiens in Anwendung stehen. Auf Veranlassung des königl. franz. Ministeriums des Handels und der öffentlichen Arbeiten herausgegeben von Armengaud d. A., Ingenieur und Professor am Conservatorium der Künste und Gewerbe, und von C. Armengaud, Zeichner und Prof. des Maschinenwesens. 6te Lieferung oder 1s Supplementheft. In Folio. Weimar. 1843. 2 Thlr.

Stahel: Die rollende Kugel. Ein Bewegungssystem als Versuch zu einer theilweisen Ersparung der Dampfkraft. Deutsch u. französisch. Mit 1 lithogr. Tafel. Brünn. 1843. 11 ggr.

Optik.

Geschichte der Optik, vom Ursprunge dieser Wissenschaft bis auf die gegenwärtige Zeit, von Dr. Emil Wilde, Prof. der Mathem. und Physik am Berlinischen Gymnasium zum grauen Kloster. Zweiter Theil. Von Newton bis Euler. Berlin. 1843. 8. 2 Thlr. 8 ggr.

Der vorliegende zweite Theil dieses Werks, welches wir gleich bei dem Erscheinen des ersten Theils als ein sehr verdienstliches Unternehmen begrüsst haben, umfasst, wie auch der Titel angiebt, den Zeitraum von Newton bis Euler, und schildert insbesondere auf eine sehr ansprechende Weise die Verdienste, welche sich Newton, Huygens, Mariotte, Bouguer und Lambert — die letzteren beiden vorzüglich in Bezug auf Photometrie — um die optischen Wissenschaften erworben haben, wobei überall von dem Verfasser selbstständig

bearbeitete Auszüge aus den Werken dieser berühmten Männer mitgetheilt werden, welches besonders sehr verdienstlich ist, weil man auf diese Weise eine sehr deutliche Anschauung von deren wichtigsten Entdeckungen gewinnt, und das vorliegende Werk in gewisser Rücksicht zugleich den Charakter eines ziemlich vollständigen Lehrbuchs der Optik annimmt. Gegen Göthe hat der Verfasser, wie es Recht war, Newton kräftig in Schutz genommen. Bei Huygens unterwirft der Verfasser in diesem Theile bloss dessen Verdienste um die doppelte Brechung, die Undulationstheorie und die meteorologische Optik einer ausführlichern Betrachtung, ohne der „Dioptrica", welche nach unserer Ueberzeugung auch in geometrischer Rücksicht jetzt immer noch sorgfältig studirt zu werden verdient und der „Commentarii de formandis poliendisque vitris ad telescopia" irgendwo Erwähnung zu thun, auch nicht unter den biographischen Notizen. Leider ist uns der erste Theil des vorliegenden Werks in diesem Augenblicke nicht zur Hand, so dass wir nicht nachsehen können, was der Verfasser etwa dort über die genannten Werke des berühmten holländischen Geometers gesagt hat. Der Schluss dieses zweiten Theils handelt von den phosphorescirenden Körpern. Wir empfehlen diese Geschichte der Optik wiederholt insbesondere allen denen, welche den Gebrauch einer grössern Bibliothek entbehren müssen, und sich, ohne auf die Quellen selbst zurückzugehen, eine hinreichende Kenntniss von der Ausbildung, welche dieser wichtige und so höchst interessante Theil der Mathematik und Physik nach und nach erhalten hat, verschaffen wollen, und sehen deren weiteren Fortsetzung mit Verlangen entgegen.

Die Gesetze der Doppelbrechung des Lichts in comprimirten oder ungleichförmig erwärmten unkrystallinischen Körpern. Eine am 8. November 1841 in der königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin gelesene Abhandlung von F. E. Neumann, Prof. der Physik zu Königsberg. Berlin. 1843. 4. 2 Thlr. 8 ggr.

Der wesentliche Inhalt dieser wichtigen Schrift lässt sich hier nur ganz in der Kürze angeben. Dieselbe zerfällt in drei Abschnitte. In dem ersten Abschnitte beschäftigt sich der Verf. mit dem Gesetze der Doppelbrechung des Lichts in gleichförmig dilatirten oder comprimirten unkrystallinischen Körpern, wobei er die Dilation (oder Contraktion) eines Körpers dann gleichförmig nennt, wenn dieselbe an jeder Stelle desselben sowohl in Beziehung auf Richtung als Grösse gleich ist, wiewohl sie in den verschiedenen Richtungen verschieden ist. Im zweiten Abschnitte werden die allgemeinen Formeln für die Farben-Erscheinungen entwickelt, welche ein ungleichförmig dilatirter Körper unter den bekannten Bedingungen im polarisirten Lichte zeigt. Diese beiden Abschnitte bilden die Grundlage des dritten Abschnitts, in welchem der Verf. die Theorie der Farben entwickelt, welche in durchsichtigen unkrystallinischen Körpern im polarisirten Lichte aus der ungleichen Temperatur-Vertheilung entstehen.

Lectures on Polarised Light, delivered before the Pharmaceutical Society of Great Britain, and in the Medical School of the London Hospital. By Jonathan Pereira. 8., illustrated by above 50 woodcuts. cloth. London. 1843. 5 sh. 6 d.

A Manual of Perspective; being a Familiar Explanation of the Science, including the Rules necessary for the correct Representation of Objects. the Principles of Shadows, Reflections in Water etc. B. J. Wood. Jun. 2 edit. with additions, royal 8. 7 plates. cl. London. 1843. 4 sh. 6 d.

Astronomie.

Himmel und Erde, beschrieben und im Modell dargestellt von F. G. L. Gressler. Vierte Aufl. Langensalza. 1842. 8. 8 ggr.

Des Herausgebers Schrift über eine neue Methode zur Bestimmung der Polhöhe oder geographischen Breite bei praktischen Messungen s. m. unter Praktische Geometrie.

De differentia meridianorum ex observatis fixarum occultationibus determinanda dissertatio. P. P. Christianus Fr. Lindman, Phil. Mag.; Resp. Andreas Wiemer. Upsaliae. 4. 1 Tafel.

Ad Theoriam Cometarum Additamenta. P. P. Andr. Jon. Ångström, Phys. Exper. Doc.. ad Obs. Astron. Holm. Adj.; Respp. Daniel Haquinus Forssberg, Andreas Nordenstam et Abrahamus Neusén. Upsaliae. 4. 1843.

Die Elemente der Mechanik des Himmels, auf neuem Wege ohne Hülfe höherer Rechnungsarten dargestellt von August Ferdinand Möbius, Prof. der Astronomie zu Leipzig u. s. w. Leipzig. 1843. 8. 2 Thlr.

Ueber diese Schrift, welche wir mit besonderer Freude begrüsst haben, glauben wir den Lesern des Archivs am besten mit den folgenden eignen Worten des Verfassers einen kurzen Bericht erstatten zu können. „Die vorliegende Schrift hat die fortschreitende Bewegung der Himmelskörper und die Kräfte, durch welche diese Bewegung erzeugt wird, zu ihrem Gegenstande, und behandelt somit den durch Newton begründeten und von den vorzüglichsten Mathematikern und Astronomen der spätern Zeit bis in das feinste Detail ausgebildeten Theil der Naturforschung. Gewiss war es jederzeit vielen Freunden der Astronomie und der Naturwissenschaften wünschenswerth, nicht bloss die höchst interessanten Resultate dieser Untersuchungen, sondern auch ihren innern Zusammenhang und ihre Entwickelung aus den ersten Principien, und diese Entwickelung nicht bloss durch eine übersichtliche Erläuterung, sondern streng mathematisch begründet, kennen zu lernen. Allein nur Wenigen unter ihnen war es möglich, diesen Wunsch zu befriedigen, weil das Studium der Werke, in denen die gedachten Forschungen niedergelegt sind, nicht wenig Zeit und beträchtliche Vorkenntnisse aus der höheren Analysis erfordert. Ich glaube da-

her vielen einen angenehmen Dienst zu erweisen, wenn ich ihnen in dieser Schrift einen Weg zeige, auf welchem sie, ohne andere Kenntnisse, als die, welche schon auf den Schulen erlernt werden, zu besitzen, mit den Geheimnissen der planetarischen Bewegungen sich in Kurzem vertraut machen können.

Die Schrift zerfällt in vier Abschnitte.

Der erste enthält die zum Verständnisse des Folgenden erforderlichen Lehren der Dynamik, und dürfte sich von den bisherigen Darstellungsweisen dieser Wissenschaft besonders dadurch unterscheiden, dass ich mehr als gewönlich nach Veranschaulichung der Begriffe und Sätze mit Hülfe einfacher geometrischer Betrachtungen gestrebt habe; und nächstdem dadurch, dass ich die in der Dynamik unentbehrlichen Elemente der Differentialrechnung so weit, als es für den nächsten Zweck nöthig war, aus dem Begriffe der Bewegung selbst erst entwickelt und sie demgemäss als eine Rechnung mit den Geschwindigkeiten hingestellt habe, mit denen sich von der Zeit abhängige Grössen ändern. Bei dieser Darstellung der Dynamik spielt besonders die gleich zu Anfange behandelte Lehre von der Zusammensetzung gerader Linien eine wichtige Rolle. Weil Geschwindigkeiten und Kräfte ihrer Richtung und Grösse nach als gerade Linien sich darstellen lassen, so ist mit der Zusammensetzung gerader Linien zugleich die von Geschwindigkeiten und Kräften erklärt; auch die Zusammensetzung irgend welcher Bewegungen von Punkten wird sehr einfach auf die von geraden Linien zurückgeführt; späterhin wird auf dieselbe Lehre die Theorie des Schwerpunktes gegründet, und endlich wird eben daraus noch die Zusammensetzung ebener Flächen abgeleitet.

Als Vorbereitung zu der Lehre von der Planetenbewegung habe ich am Ende des ersten Abschnittes die — obwohl nur dem Scheine nach — in der Astronomie veraltete und verachtete Theorie der Epicyklen wieder ins Leben gerufen, und, wie ich glaube, nicht ohne guten Erfolg.

Im zweiten Abschnitte werden die im ersten entwickelten Grundlehren der Dynamik auf den nach Kepler's Gesetzen geregelten Lauf der Planeten um die Sonne und der Nebenplaneten um ihre Hauptplaneten angewendet und die Kräfte bestimmt, durch welche diese Bewegungen hervorgebracht werden. Das Newton'sche Gesetz der allgemeinen Anziehung ist das endliche Resultat dieser Untersuchung. Den Beschluss dieses Abschnitts bilden die drei für jedes System sich anziehender oder abstossender Körper geltenden Principien der Erhaltung des Schwerpunkts, der Flächen und der lebendigen Kräfte.

Die noch folgenden zwei Abschnitte enthalten den interessantesten Theil der physischen Astronomie, die Theorie der Störungen oder der kleinen von den Kepler'schen Gesetzen sich zeigenden und dadurch erklärbaren Abweichungen, dass jeder Planet nicht bloss von der Sonne und jeder Trabant nicht bloss von seinem Hauptplaneten, sondern zugleich von allen übrigen Körpern des Systems angezogen wird. Im vierten Abschnitte werden die von den ersten Potenzen der störenden Masse, der Excentricitäten und der Neigung abhängigen Störungen, welche die Planeten auf einander ausüben, ganz auf dieselbe Art, wie die Störungen des Mondes durch die Sonne, entwickelt, nur dass ich hier nicht länger Anstand genom-

men habe, von der Differentialrechnung in ihrer gewöhnlichen Form Gebrauch zu machen.

In einem Anhange sind zwei Aufsätze über das Theorem Lagrange's von der Unveränderlichkeit der grossen Axen und über die Berechnung der sogenannten speziellen Störungen hinzugefügt worden."

Gewiss wird diese in vielen Beziehungen ausgezeichnete Schrift zur weitern Verbreitung der Lehren der physischen Astronomie wesentlich beitragen.

L. de Gerin-Roze: Manuel du navigateur anglais-français, en 5 parties. Paris. 1843. 12 fr.

Physik.

Frick, Dr. J., Prof. der Naturlehre zu Freiburg, Anfangsgründe der Naturlehre. Freiburg. 1843. 8. $\frac{3}{4}$ Thlr.

Die Experimental-Physik. Zum Selbstunterrichte für Gebildete und zum Gebrauche in Real- und polytechnischen Schulen. Nach der dritten Auflage des Französischen des J. Marcet, Prof. an der Akademie zu Genf, übersetzt von G. Kissling, Professor, Lehrer der mathematischen und physikalischen Wissenschaften und der neueren Sprachen. Mit 6 Tafeln Figuren. Lief. 5. 6. gr. 8. Ludwigsburg. 1843. 12 gr. (M. vgl. Liter. Bericht. No. XIII. S. 206.)

Anfangsgründe der Physik. Vom Prof. A. v. Ettingshausen. Erste Lieferung. Preis des ganzen Werkes 3 Thlr. 8 ggr.

Wenngleich nur erst die erste Lieferung dieses neuen Lehrbuchs der Physik uns vorliegt, so glauben wir doch die Leser des Archivs schon jetzt auf dasselbe aufmerksam machen zu müssen, insbesondere wegen der grossen Gründlichkeit, mit welcher es augenscheinlich bearbeitet ist, so dass kein Satz, wie dies wohl in vielen andern physikalischen Lehrbüchern geschieht, ohne Beweis hingestellt wird, wobei der Verf. natürlich einen fortwährenden, jedoch sich nirgends über die gewöhnlichen Elemente ersteckenden Gebrauch von den Lehren der Mathematik machen musste, was jedenfalls im höchsten Grade zu loben ist, weil nur auf diese Weise eine Darstellung der Physik möglich wird, die mit Recht auf den Namen einer streng wissenschaftlichen Anspruch machen kann, wenn auch, wie dies bei dieser bloss die elementaren Lehren der Mathematik in Anspruch nehmenden Art des Vortrags nicht anders sein kann, allerdings manche Sätze für's Erste nur in annäherungsweiser Richtigkeit aufgestellt werden können. Dass aber neben dieser mehr mathematischen Seite des vorliegenden Werks auch die rein physikalischen Lehren keineswegs in den Schatten gestellt

worden sind und werden sollen, zeigen schon die drei ersten Hauptstücke, welche die Grundlehren der Chemie, insbesondere auch der Stöchiometrie enthalten, mit hinreichender Deutlichkeit. Zugleich erweckt dieses Werk einen sehr vortheilhaften Begriff von der mathematischen Vorbildung der Zuhörer des Verfassers. Auf vielen andern deutschen Universitäten würde man freilich sehr bald nur leere Bänke vor sich sehen, wenn man seinen Vortrag streng an ein solches Lehrbuch wie das vorliegende anschliessen wollte. Jedenfalls ist übrigens, wie es uns wenigstens immer geschienen hat, bei dem Vortrage der Physik der Gymnasiallehrer gegen den Universitätslehrer im Vortheil, weil ersterer eine bis zu einem bestimmten Grade gehende mathematische Vorbildung seiner Schüler voraussetzen und verlangen kann, wenn auch freilich hiebei immer noch einige nicht leicht zu beseitigende Hindernisse übrig bleiben *). Deshalb sollte aber auch der physikalische Unterricht auf Gymnasien und ähnlichen höheren Lehranstalten, ohne die rein physikalische Seite zu vernachlässigen, immer vorzugsweise die mathematische hervorzuheben sich angelegen sein lassen, aus welchem Grunde wir denn das vorliegende Werk der Aufmerksamkeit der Lehrer an den genannten Lehranstalten glauben empfehlen zu dürfen.

Grundzüge der Experimentalphysik, mit Rücksicht auf Chemie und Pharmacie, zum Gebrauche bei Vorlesungen und zum Selbstunterrichte. Von Dr. H. Buff, Professor an der Universität zu Giessen. Mit zahlreichen Holzschnitten und ausgeführten Tafeln. 1. Lief. 8. Heidelberg. 1843. 16 ggr.

Dieses Buch hebt, so weit sich aus dem bis jetzt vorliegenden ersten Hefte urtheilen lässt, mehr die experimentelle als die mathematische Seite der Physik heraus, scheint aber seinem auf dem Titel angegebenen speciellen Zwecke recht wohl zu entsprechen. Es ist deutlich verfasst und gute Holzschnitte und Figurentafeln dienen zur Erläuterung. Auch die am Ende beigefügten Tafeln zum Gebrauche des Physikers und Chemikers sind empfehlenswerth.

Stein, Traité élémentaire de physique à la portée des enfants, seconde édition revue, corrigée et augmentée de notions sur l'ouie et sur la daguerréotypie. In-18. Bruxelles. 1843. 12 ggr.

Lectures on the Principles and Practice of Physic, delivered at King's College. By Thomas Watson, M. D. Fellow of the Royal College of Physicians. 2 vols. 8. cloth. London. 1843. 34s.

Fizyka. Physik von Jozef Zochowski. Warschau. 1842. 2 Thle. Soll ein sehr werthvolles Buch sein.

Mémoire sur les phénomènes que présente une masse liquide libre et soustraite à l'action de la pesanteur, par J. Plateau, Professeur à l'université de Gand etc. Première partie. (Extrait du Tome XVI. des mémoires de l'Academie royale de Bruxelles.) 4.

Eine sehr lesenswerthe, viele schöne nur einfache Apparate, die

*) M. s. Literarischer Bericht. No. VII. S. 112.

sich ein Jeder leicht wird zusammenstellen lassen können, erfordernde Experimente enthaltende Schrift, die wir der Aufmerksamkeit der Physiker empfehlen.

Grandvoinet, J. A., Esquisse d'une théorie des phénomènes magnétiques. Paris. 1843.

A Course of twelve Elementary Lectures on Galvanism; illustrated with upwards of 100 engravings of Experiments and Apparatus. Bg. W. Sturgeon. 12mo. cloth. London. 1843. 5 sh.

Walker, Manipulation électrotypique, ou traité de galvanoplastie. 2e édit. 18. Paris. 1843. 15 ggr.

Praktische Anweisung zum Daguerreotypiren zur Erzeugung schön colorirter Lichtbilder nach den neuesten Methoden. Mit Beschreibung und Abbildung der dazu gehörigen Apparate. Nebst Andeutungen über galvanoplastische Versuche im Bereiche der Daguerreotypie. 2te verbesserte und vermehrte Auflage. gr. 16. nebst 2 lith. Tafeln in 4. Leipzig. 1843. 12 ggr.

A Treatise on Photography; containing the latest Discoveries and Improvements appertaining to the Daguerréotype. By N. P. Lerebours, Optician to the Observatory. Paris etc. Translated from the French by Egerton. Post 8. with Plate. London. 1843. 7 s. 6 d.

Traité de cristallographie, par W. H. Miller, traduit de l'anglais par H. de Senarmont, Ingénieur des Mines. 1 vol. 8. Paris. 1842. avec 12 planches. 5 fr.

Cours complet de météorologie de L. F. Kaemtz, traduit et annoté par Ch. Martins, avec un appendice contenant la représentation graphique des tableaux numériques, par L. Lalanne. Mit 10 Tafeln. gr. 12. Paris. 1843. 8 fr.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen zu Prag, in Verbindung mit mehreren Mitarbeitern ausgeführt und auf öffentl. Kosten herausgegeben von Karl Kreil, Adjunct an der k. k. Sternwarte. 3ter Jahrg. vom 1. August 1841 bis 31. Juli 1842. gr. 4. nebst 2 lith. Tafeln in Fol. Prag. 1843. 3 Thlr. 4 ggr. (M. s. Liter. Bericht. No. X. S. 164.)

Lehrbuch der physikalischen Geographie und Geologie von B. Studer, Prof. in Bern. 1 Cap., enthaltend: Die Erde im Verhältniss zur Schwere. Mit eingedruckten Abbildungen und 4 lith. Tafeln. gr. 8. Bern. 1843. 2 Thlr. 21 ggr.

Nowak, Dr. Al. Fr. P. Die Lehre vom tellurischen Dampfe und von der Circulation des Wassers unserer Erde. — Ein Schritt vorwärts in der Erkenntniss unseres Planeten. Mit einer lith. Tafel. gr. 8. Prag. 1843. 2 thlr.

Wunderbüchlein, oder enthüllte Geheimnisse aus dem Gebiete

der Sympathie, Naturlehre und natürlichen Magie, Mathematik, Gewerbskunde, Haus- und Landwirthschaft. 3te Aufl. 12. Ulm. 1843. 6 ggr.

Vermischte Schriften.

Transactions of the Royal Irish Academy. Vol. XIX. part 2. sect. „Science". Tho. Romney Robinson on the Constant of Refraction, determined by Observations with the Mural Circle of the Armagh Observatory. — Humphrey Lloyd Supplement to a Paper „on the mutual Action of Permanent Magnets, considered chiefly in reference to their best relative position in an Observatory". — George J. Knox Supplementary Researches on the Direction and Mode of Propagation of the Electric Force, and on the Source of Electric Development. — Sir Will. Rowan Hamilton: On Fluctuating. — Derselbe: On Equation of the Fifth Degree; and especially on a certain System of Expression connected with those Equations, which Prof. Badano has lately proposed. Th. Andrews: On the Heat, developped during the Combination of Acids and Bases. — Sir D. Brewster: On the Compensation of Polarized Light, with the Description of a Polarimeter for Measuring Degrees of Polarization. — Th. Andrews: On the Heat, developped during the Formation of the Metallic Compounds of Chlorine, Bromine and Jodine.

Le opere di Galileo Galilei. Prima edizione completa condotta sugli autentici manoscritti palatini. Firenze. 1843. 8. Tomo I. e II. 7½ L.

Diese beiden Bände enthalten: I. Dialogo intorno ai due massimi sistemi del mondo, ptolemaico e copernicano. — II. Lettere intorno al sistema copernicano. Esercitazioni filosofiche di d. Ant. Rocco contro il dialogo dei mass. sistemi. — Postille di Galilei alle Esercitazioni del Rocco. — Discorso di Lodov. Delle Colombe contro il moto della terra. — Postille di Galilei al Discorso di Lodov. Delle Colombe. — Discorso a mons. Gino intorno al flusso e reflusso. (M. vergl. Liter. Bericht. No. XIII. S. 208.)

Physikalische Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1843. Berlin. 1843. 4. 4 Thlr. 16 ggr. — Magnus, Ueber die Ausdehnung der Gase durch die Wärme, mit 1 Kupfertafel. — Dove, Ueber Induction durch electromagnetisches Eisen. (Auszug aus verschiedenen, in den Jahren 1838, 1839, 1841 und 1842 gelesenen Abhandlungen.) Mit 1 Kupfertafel. — Weiss, Ueber das Krystallsystem des Euklases. Mit einem Kupfer.

XVI.
Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Beha-eddin's Essenz der Rechenkunst. Arabisch und deutsch herausgegeben von Dr. G. H. F. Nesselmann. Berlin. 1843. 8. 20 ggr.

Der Herausgeber sagt in derVorrede: „Beha-eddin lebte in der spätesten Blüthe der arabischen Cultur, sein Werk ist gewissermaassen der letzte Blick, den ein Scheidender auf den Glanz früherer Jahre zurückwirft, um davon dem Gedächtnisse noch zu erhalten, was sich retten lässt. Insofern ist gegenwärtiges Werkchen interessant für die Geschichte der Mathematik, und bildet ein zweckdienliches Seitenstück zu der von Friedrich Rosen herausgegebenen Algebra des Mohammed ben Musa; wenn uns nämlich der letztgenannte Mathematiker die Algebra der Araber in den ältesten Zeiten der Literatur dieses Volkes vor die Augen führt, so zeigt uns Beha-eddin's Werk, was dieses Volk in dem Zeitraume von achthundert Jahren aus dieser seiner Pflegebefohlenen gemacht hat; wir haben in beiden Werken den Anfang und das Ende der arabischen Algebra vor Augen."

Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik. Zum Gebrauch für Gymnasien und höhere Bürgerschulen. Von Dr. J. Fiedler, Lehrer am königl. kathol. Gymnasium zu Leobschütz. Breslau. 1843. 8. 1 Thlr.

Dieses deutlich geschriebene, ziemlich vollständige, mit einer grossen Anzahl von Beispielen versehene Lehrbuch enthält auch manche literarische und historische Notizen.

Tafeln der sechsstelligen Logarithmen für die Zahlen von 1 bis 100000, für die Sinus und Tangenten von Sekunde zu Sekunde des ersten Grades, und für die Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten von 3 zu 3 Sekunden aller Grade des Quadranten. Entworfen von Gustav Adolph Jahn. Zwei Theile. Leipzig. 1844. 4.

Was diese Tafeln leisten giebt ihr Titel vollständig an. Der Preis von 1 Thlr. 4 ggr. für beide Theile ist ungeachtet des etwas grauen, aber ziemlich starken Papiers, doch sehr mässig gestellt.

Kulik, Dr. Jak. Phil.: Lehrbuch der höheren Analysis. 2te durchaus umgearbeitete Auflage. 2. Bd. Die Integralrechnung und die analytische Geometrie. gr. 8. Mit 5 Steintafeln in gr. 4. Prag. 1844. 1 Thlr. 16 ggr.

Sammlung ausgewählter allgemeiner Formeln, Beispiele und Aufgaben aus der Differenzialrechnung und deren Anwendung auf Geometrie. Ein Hülfsbuch für Lehrer und Schüler an höheren Unterrichtsanstalten. Herausgegeben von Dr. C. H. Schnuse. Mit einer Figurentafel. Braunschweig. 1844. 8.

Die vorliegende erste Lieferung (Preis 16 ggr. Das Ganze soll aus zwei Lieferungen bestehen) dieser Beispielsammlung enthält Aufgaben zu folgenden Kapiteln der Differenzialrechnung und deren Anwendung. I. Differenzirung algebraischer Functionen. *A.* Allgemeine Formeln (welche übrigens für alle Arten von Functionen, nicht bloss für die algebraischen, gelten). *B.* Wirklich berechnete Beispiele. *C.* Uebungsbeispiele. II. Differenzirung exponentieller und logarithmischer Functionen. *A.* Allgemeine Formeln. *B.* Wirklich berechnete Beispiele. *C.* Uebungsbeispiele. III. Differenzirung trigonometrischer Functionen. *A.* Allgemeine Formeln. *B.* Wirklich berechnete Beispiele. *C.* Uebungsbeispiele. IV. Successive Differenzirungen. V. Elimination der Constanten, der irrationalen und transcendenten Functionen. *A.* Wirklich berechnete Beispiele. *B.* Uebungsbeispiele. VI. Entwickelung der Functionen in Reihen. *A.* Allgemeine Formeln (Taylorsche und Maclaurinsche Formel). *B.* Wirklich berechnete Beispiele. *C.* Uebungsbeispiele. VII. Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen. *A.* Allgemeine Formeln. *B.* Wirklich berechnete Beispiele. *C.* Uebungsbeispiele. VIII. Bestimmung des wahren Werthes der Functionen, welche unter einer unbestimmten Form erscheinen. *A.* Allgemeine Formeln. *B.* Wirklich berechnete Beispiele. *C.* Uebungsbeispiele. IX. Ueber die Maxima und Minima der Functionen mit einer unabhängigen Veränderlichen. *A.* Wirklich berechnete Beispiele. *B.* Uebungsbeispiele. X. Tangenten. XI. Normalen. XII. Asymptoten. XIII. Sinn oder Richtung der Krümmung. XIV. Krümmungskreis. XV. Evoluten und Evolventen. Dieser ganze geometrische Theil ist in zwei Abtheilungen, nämlich *A.* Wirklich berechnete Aufgaben und *B.* Uebungsaufgaben getheilt.

Hiernach werden die Leser des Archivs sich selbst ein Urtheil über Umfang und Anordnung dieser Aufgabensammlung, so weit dieselbe in der ersten Lieferung jetzt vorliegt, bilden können. Besondere Eigenthümlichkeiten hat dieselbe durchaus nicht; dessen ungeachtet glauben wir dieselbe immerhin Lehrern der Differenzialrechnung zum Gebrauch empfehlen zu können, weil man Bücher dieser Art beim Unterrichte eigentlich nicht genug haben kann, und das vorliegende einen ziemlichen Reichthum im Ganzen zweckmässig gewählter Aufgaben, namentlich auch in dem geometrischen Theile enthält. Was wir freilich in derselben gesucht haben, und manche andere Lehrer der Differenzialrechnung mit uns in ihr suchen wer-

den, haben wir leider nicht gefunden. Wir suchten nämlich nach einer recht grossen Anzahl von Beispielen für die Bestimmung des Restes der Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe, fanden aber nicht ein einziges, ja nicht einmal eine Erwähnung dieses höchst wichtigen Gegenstandes, und eben so wenig natürlich die allgemeinen, diese Bestimmung bezweckenden Formeln. Der Verfasser hat also diese Seite in der neuern Gestaltung der Theorie der Differenzialrechnung ganz unberücksichtigt gelassen, was jedenfalls sehr tadelnswerth ist, und wie nothwendig und wichtig es ist, die Schüler in der Bestimmung der Reste der beiden genannten Reihen so vielfach wie möglich zu üben, werden gewiss wahrhaft gründliche Lehrer der Differenzialrechnung schon häufig mit uns gefühlt haben. Durch Aufnahme recht vieler sorgfältig gewählter und zum Theil wenigstens vollständig entwickelter Beispiele von der erwähnten Art würde der Verfasser einem wesentlichen Bedürfnisse abgeholfen, seinem Buche einen bleibenden Werth gegeben, und einen Vorzug vor allen bereits erschienenen Schriften ähnlicher Art gesichert haben.

Geometrie.

Vincent, A. J. H.: Cours de géométrie élémentaire; revu conjointement par l'auteur et par Bourdon. Ouvrage adopté par l'université. 5e édition. Paris. 1843. 7 fr.

Sonnet, H.: Géométrie théorique et pratique. 2e édition. Paris. 1843. 5 fr.

Sammlung von Beispielen aus der praktischen Stereometrie für Real- und Sonntagsgewerbschulen. Von Johann Leonhard Wünsch. Nördlingen. 1844. 8. 6 ggr.

Enthält ausser einer Sammlung stereometrischer Formeln 335, und in einem Anhange noch 166 Aufgaben ohne Auflösungen.

Cours de Géométrie descriptive. Première Partie. Du point, de la droite et du plan. Par M. Théodore Olivier. Paris. 1844. 4. Avec Atlas 6 Thlr.

Der zweite Theil dieses sehr vollständigen, alle Empfehlung zu verdienen scheinenden Lehrbuchs wird die krummen Linien und Flächen enthalten.

Hamilton, H. P.: An Analytical System of Conic Sections, designed for the use of Students. 5th edition. 8vo. Cambridge. 1843. 10 sh. 6 d.

Versuch einer Erweiterung der analytischen Geometrie auf Grundlage eines neu einzuführenden Algorithmus. Von Christian Doppler. (Aus den Abhandlungen

der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften.) Prag. 1843. 4.

Die Anzeige dieser jedenfalls sehr zu beachtenden Schrift, welche als eine weitere Ausführung des früher von demselben Herrn Verfasser herausgegebenen Versuchs einer analytischen Behandlung beliebig begrenzter und zusammengesetzter Linien, Flächen und Körper, nebst einer Anwendung davon auf verschiedene Probleme der Geometrie descriptive und Perspective. Prag. 1839. 4. betrachtet werden kann, ist durch zufällige Umstände verspätet worden.

Der eigentlichen Hauptgedanken, sagt der Verf. in der Vorrede, die sich durch das ganze vorliegende Werk in innigster Verknüpfung durchziehen, und die gleichsam die Basis unsers neu zu begründenden Algorithmus bilden, sind vier. — Der erste dieser vier Begriffe ist jener der völlig willkührlichen, von der Natur und Beschaffenheit der Functionen ganz und gar unabhängigen Begrenzung der verschiedenen Objecte und ihrer analytischen Repräsentanten. Die analytische Geometrie als solche hat bekanntlich bisher bloss unbegrenzte oder sich selbst begrenzende Linien und Flächen zum Gegenstande ihrer Untersuchungen gemacht und alle sogenannten discontinuirlichen, alle gebrochenen oder zusammengesetzten Linien, Figuren und Körper davon ausgeschlossen. Berücksichtigt man aber, dass bei Weitem die meisten geometrischen Objecte, die uns sowohl in der Wissenschaft als im praktischen Leben fast alltäglich entgegentreten, völlig willkürlich begrenzte, mannigfaltig zusammengesetzte, gerade oder krumme gebrochene Linien, Figuren, Flächen und Körper sind: so wird man wohl ohne Bedenken anerkennen müssen, dass Betrachtungen, welche auch diese wichtigen geometrischen Objecte für analytische Behandlung zugänglich zu machen beabsichtigen, nicht für unnütze mathematische Speculationen füglich gehalten werden können. Bei Gelegenheit der dabei angestellten Voruntersuchungen gelangt man noch nebenher zu dem wichtigen Resultate, dass man bisher zwei wichtige Klassen von geometrischen Objecten durch Gleichungen zu repräsentiren ausser Acht liess. Es sind dieses nämlich die Flächen- und Körperräume. Man hat sich unter den Gleichungen der erstern jedoch weder die Formeln für den Flächeninhalt zu denken, noch auch beziehen sich jene der zweiten auf den körperlichen Inhalt eines geometrischen Objectes. Sie sind vielmehr die allgemeinen Repräsentanten für sämmtliche Punkte, aus denen man sich sowohl die Fläche als den Körperraum mit Rücksicht auf ihre bestimmte Begrenzung zusammengesetzt vorzustellen pflegt. — Der zweite der vier oben erwähnten Grundgedanken ist jener der gleichzeitigen Darstellung mehrerer als zusammengehörig betrachteter Punkte, Linien, Figuren u. s. w., d. h. ganzer Systeme von geometrischen Objecten mittelst Gleichungen. — Der dritte unserer Begriffe ist jener eines absolut unbeweglichen und unter allen Verhältnissen unveränderlichen Coordinatensystems sowohl in der Ebene wie im Raume. — Der vierte der erwähnten Begriffe ist endlich jener der Formänderung geometrischer Objecte oder der geometrischen Metamorphose. Die Ideen, welche den Verf. in Bezug auf die beiden letzten Begriffe geleitet haben, den Lesern mit einiger Deutlichkeit vor die Augen zu führen, ist ohne tiefer in die Sache einzugehen nicht wohl möglich, und wir bemerken daher nur, dass sich der

Verf. über diesen Gegenstand S. 54. auf folgende Weise äussert: Sehr häufig kommt man in die Lage, mehrere Punkte, Linien, Flächen, Figuren und Körper als gleichzeitig im Coordinaten-Raume bestehend, d. h. als ein System betrachten zu müssen. Im Verlaufe der weitern Betrachtungen stellt sich sodann öfters die Nothwendigkeit ein, entweder die Objecte eines Systems gleichmässig zu verlegen, und ihnen als System eine andere Stelle im Raume anzuweisen, oder aber nur einzelne aus ihnen oder gar nur einzelne Theile derselben, oder endlich wohl auch alle, jedoch nicht auf eine gleichartige Weise ihre Lage ändern zu lassen. Die erstere Veränderung werden wir schlechtweg die Ortsveränderung oder Dislocation, die zweite dagegen, da mit ihr in der That eine Formänderung wenigstens des Systems verknüpft ist, die Transformation nennen. Sowohl die eine als die andere Veränderung kann an verschiedenen Objecten gedacht und mit ihnen vorgenommen werden, ohne auch nur im Geringsten eine Aenderung in der Lage der Coordinaten gegen einander und zu den besagten Ebenen nothwendig voraussetzen zu müssen. Von diesem Standpunkte aus betrachtet, halten wir es für eine unabweisbare Forderung der Consequenz, uns jeder cumulativen Behandlungsweise der beiden so heterogenen Probleme, nämlich jenes der Dislocation und der ihr verwandten Transfiguration einerseits, und der Transformation der Coordinaten anderseits, durchaus und in jeder Beziehung strenge zu enthalten.

Der Grund- und Hauptgedanke, aus welchem die vorliegende Schrift hervorgegangen ist, bleibt nach unserer Ueberzeugung immer der: auch begränzte geometrische Objecte einer analytischen Behandlung zu unterwerfen; und in dieser Beziehung fasst sie die Wissenschaft allerdings von einer neuen Seite auf, die man bisher völlig unbeachtet gelassen hat. Die übrigen der vier von dem Verf. erwähnten Begriffe mussten aus diesem Hauptgedanken von selbst hervorgehen. Möge der Schrift die Aufmerksamkeit, welche sie wegen der Neuheit ihres Inhalts verdient, zu Theil, und der in ihr behandelte Gegenstand weiter bearbeitet werden, wodurch sich gewiss noch manche Vereinfachungen des von dem scharfsinnigen Verf. eingeführten neuen Algorithmus werden auffinden lassen, und derselbe am besten für seine Bemühungen, der analytischen Geometrie eine neue Seite abzugewinnen, belohnt werden wird.

In No. 494. der astronomischen Nachrichten findet sich eine Abhandlung des Herrn Observators T. Clausen zu Dorpat: „De linearum tertii ordinis proprietatibus," in welcher der Herr Verfasser einen in Neutons Enumeratio linearum tertii ordinis vorkommenden Satz, von dem Chasles in seiner Histoire de Géometrie sagt, dass er den Beweis vergeblich gesucht habe, beweist, und ausserdem einige andere Sätze mittheilt.

Ausserdem stellt der Herr Verfasser ohne Beweis das folgende Theorem auf: „Die Anzahl aller Verbindungen zu vier einer ungeraden Anzahl von Punkten, von denen keine drei in einer geraden Linie liegen, und von denen ein Punkt innerhalb des Dreiecks liegt, dessen Spitzen von den übrigen dreien gebildet werden, ist immer gerade.

Trigonometrie.

Köcher, Fr. A.: Grundzüge der ebenen Trigonometrie. Ein Leitfaden beim Unterricht. gr. 8. Breslau. 1843. 6 ggr.

Praktische Geometrie.

Kompas Polski. Polnischer Kompass, oder Instrument, das die Stelle eines gewöhnlichen Kompasses, eines Gnomonographs, eines tragbaren Observatoriums und eines Instruments zum Zeichnen von Kegelschnitten vertritt. Construirt und beschrieben von Wojciech Jastrzębowski.

Dieses von dem Verfasser bereits 1827 erfundene und durch öfteren Gebrauch als zweckmässig bestätigte Instrument scheint von Interesse für die Wissenschaft. (Aus den Jahrb. für Slav. Literatur.)

Schenkl, Dr. Konr.: Anleitung zum Feldmessen ohne mathematische Kenntnisse durch rein praktisches Verfahren; zum landwirthschaftlichen Gebrauch. gr. 4. Brünn. 1844. 5 ggr.

Lehmann, J. G.: Die Lehre der Situation-Zeichnung, oder Anweisung zum richtigen Erkennen und genauen Abbilden der Erdoberfläche in Karten und Planen. Herausgegeben und mit Erläuterungen versehen von R. A. Becker und G. A. Fischer. 2 Theile. 5te unveränderte Auflage. Mit 25 Kupfertafeln in einem Bande (in Royal-Folio). gr. 8. Dresden und Leipzig. 1843. cart. 10 Thlr.

Тригонометрическая съемка. Trigonometrischer Abriss der Gubernien Petersburg, Pskow, Witebsk und eines Theils von Nowgorod, vollzogen von Schubert. Petersburg. 1842. 3 Bände.

Mechanik.

Perfecta solutio problematis de principio virtualis celeritatis. Auctore Ferd. Schweins, Phil. Doct. magno

Duci Badarum a consiliis aulae, Prof. publ. ord. Heidelbergae. 1843. 4. 16 ggr.

Der Verfasser dieser Abhandlung beabsichtigt in derselben nicht bloss einen neuen Beweis des mechanischen Princips, welches man gewöhnlich das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten nennt, zu geben, sondern dasselbe zugleich auf einen neuen Ausdruck zu bringen, weil ihm der gewöhnliche der so nöthigen mathematischen Strenge und Evidenz nicht gehörig zu entsprechen scheint. Letzteres sucht er vorzüglich dadurch zu erreichen, dass er mit dem Ausdrucke virtuelle Geschwindigkeit (p. 1.) einen von dem bisherigen verschiedenen Begriff verbindet, indem er darunter die den bei einer Drehung des Systems von dessen einzelnen Punkten beschriebenen Kreisbogen entsprechenden (trigonometrischen) Tangenten versteht, und überhaupt nicht sogenannte unendlich kleine Drehungen, sondern Drehungen von ganz beliebiger Grösse betrachtet, welche Andeutung über diesen Punkt, auf den es uns bei der von dem Verf. angestellten Untersuchung hauptsächlich anzukommen scheint, hier genügen muss. Allerdings gelangt der Verfasser auf diese Weise mittelst ganz elementarer Betrachtungen zu in aller Strenge gültigen Sätzen zwischen endlichen Grössen, die er selbst p. VIII. in folgendem Theoreme zusammenfasst: Summa productorum e viribus in suis virtualibus celeritatibus tam in plano quam in spatio aequalis est momento rotationis totius virium systematis, multiplicato tangente arguli, qui a vectoribus describitur. So verdienstlich uns nun auch die übrigens ganz elementaren Untersuchungen des Verfassers von dieser Seite scheinen, und so sehr wir deshalb die Schrift zu weiterer Beachtung empfehlen, so lässt sich doch aus dem bis jetzt Mitgetheilten nicht mit Sicherheit übersehen, in wie fern die von dem Verfasser aufgestellten Sätze mit derselben ungemeinen Leichtigkeit zur Entwickelung der Lehren der ganzen Mechanik gebraucht werden können, wie das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in seiner gewöhnlichen Gestalt; und gerade diese grosse Fruchtbarkeit der Anwendung wird nach unserer Meinung dem genannten Princip immer seine hohe Wichtigkeit für die ganze Wissenschaft sichern. Auch wir selbst haben in einer früheren Abhandlung (Beiträge zur reinen und angewandten Mathematik. Zweiter Theil. Brandenburg. 1840. 4. S. 225.) für das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten einen völlig evidenten Beweis zu geben, und dasselbe zugleich auf einen völlig strengen Ausdruck zu bringen versucht, haben Letzteres aber auf einem andern Wege als der Verfasser zu erreichen gestrebt, indem wir nämlich dieses Princip als eine Gleichung zwischen den Gränzen gewisser Grössen dargestellt haben, wodurch, wie es uns scheint, der Strenge nichts vergeben, die wirkliche Natur des Gegenstandes nicht aus dem Auge verloren wird, und dem Principe die grosse Fruchtbarkeit seiner Anwendung, worauf hierbei zuletzt Alles ankommen dürfte, völlig gesichert bleibt. Indess hat der Verfasser selbst am Ende seiner Abhandlung, die ja überhaupt nur den Inhalt eines Programms zu einer akademischen Feierlichkeit bildet, mit derselben seine Untersuchungen über das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten keinesweges als abgeschlossen betrachtet, und wir dürfen daher weitern Arbeiten aus seiner Feder über diesen wichtigen Gegenstand entgegensehen, in denen wir ihn uns na-

mentlich die Anwendung der von ihm aufgestellten Sätze zur möglichst einfachen und leichten Entwickelung der Lehren der Mechanik, und zwar zunächst und vorzüglich die Herleitung der bekannten allgemeinen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts eines beliebigen Systems aus denselben, zu welchen bekanntlich das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten so leicht führt (m. s. u. A. v. Ettinghausens höhere Mechanik), zu zeigen bitten. G.

Otto, F.: Bemerkungen über den Einfluss der Umdrehung der Artillerie-Geschosse auf ihre Bahn im Allgemeinen, so wie über die Unzulänglichkeit der desfallsigen Untersuchungen des Herrn Poisson ins Besondere. 4. Berlin. 1844. geh. 1 Thlr. 12 ggr.

Praktische Mechanik.

Salzenberg, W.: Vorträge über Maschinenbau. Im Auftrage des Finanzministerii für den Unterricht in der Königl. Allgemeinen Bauschule und im Königl. Gewerbe-Institut bearbeitet. 4. Berlin. 1842. geh. 5 Thlr.

Experimentaluntersuchungen über die Gesetze des Widerstandes der Flüssigkeiten. Von Colonel Duchemin. Deutsch herausgegeben von Dr. H. C. Schnuse. Mit 4 Figurentafeln. Braunschweig. 1844. 8. 1 Thlr. 12 ggr.

Unter den vielen Uebersetzungen ausländischer Werke, die jetzt erscheinen, scheint uns die Verpflanzung der vorliegenden, einen sehr wichtigen praktischen Gegenstand, den in neuerer Zeit zwei berühmte gelehrte Gesellschaften zu Preisaufgaben gewählt haben, betreffenden Schrift, welche denselben sehr vollständig behandelt, und nicht bloss alle früher angestellten Untersuchungen mit Umsicht und Kritik benutzt, sondern auch von neu angestellten Versuchen Kenntniss giebt, auf deutschen Boden recht verdienstlich zu sein.

Astronomie.

Johann Keppler, kaiserlicher Mathematiker. Denkschrift des historischen Vereins der Oberpfalz und von Regensburg. Mit Kepplers Bildniss, Wappen und Facsimile der Handschrift. Gr. Imper. 4. Regensburg. 1842. 1 Thlr. 3 ggr.

In den Jahrbüchern für Slav. Literatur befindet sich ein Aufsatz unter dem Titel: Kopernik gehört nicht in die Walhalla.

Geschichte der Astronomie vom Anfange des neunzehnten Jahrhunderts bis zu Ende des Jahres 1842, von G. A. Jahn. Erster Band. Leipzig 1844. 8. Beide Bände 4 Thlr.

Der Verfasser hat in diesem Werke, dessen erster die vier neuen Planeten, die ältern Planeten, die Sonne, die achtzehn Nebenplaneten und die Kometen betreffender Band uns jedoch für jetzt nur vorliegt, eine Aufzählung alles dessen geliefert, was in dem auf dem Titel genannten Zeitraume in der Astronomie geleistet worden ist, und wir haben in dieser Beziehung nichts Wesentliches vermisst, so viel sich aus einer für jetzt natürlich nur flüchtigen Durchsicht urtheilen lässt, glauben dasselbe daher auch allen denen, welche sich, ohne eine grössere Bibliothek benutzen zu können, mit dem grossen Aufschwunge, den die Astronomie in dem gegenwärtigen Jahrhunderte genommen hat, auf bequeme Weise in möglichst kurzer Zeit bekannt machen wollen, aus Ueberzeugung empfehlen zu dürfen. Bei Weitem die meiste Ausbeute haben dem Verfasser, wie der flüchtigste Blick auf jede Seite lehrt, die astronomischen Nachrichten geliefert, und die grosse wissenschaftliche Bedeutung dieser Zeitschrift, die in ähnlicher Weise keine andere Nation aufzuweisen im Stande ist, und die längst gehegte hohe Achtung vor dem würdigen Herausgeber derselben, ist uns bei der Lectüre des vorliegenden Werks wieder recht lebhaft vor die Seele getreten. Dass man dabei aber auch der monatlichen Correspondenz, der Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, der correspondance astronomique, die sämmtlich nur von Deutschen redigirt wurden, und des astronomischen Jahrbuchs, das in seinen Anhängen, wenigstens in den frühern Jahrgängen, auch den Charakter einer Zeitschrift hatte, nie vergessen darf und in keiner Epoche der weitern Entwickelung der Wissenschaft vergessen wird, zeigt das vorliegende Werk, dessen zweitem Bande, der wahrscheinlich vorzugsweise die Fixsterne und die mehr praktische Seite der Wissenschaft, nämlich die neueren so vervielfachten Methoden zur Bestimmung der Polhöhe, der Länge und der Zeit, die Gradmessungen, die Theorie der Refraction u. dgl. betreffen wird, wir mit Verlangen entgegen sehen, ebenfalls auf das Deutlichste. In der mit grosser Bescheidenheit geschriebenen Vorrede bezeichnet der Verfasser selbst sein Buch sehr richtig weniger als eine Geschichte der Wissenschaft in eigentlich strengem Sinne, sondern mehr als ein möglichst vollständiges Repertorium, und gerade in diesem Sinne wünschen wir auch unsere obige Empfehlung von den Lesern des Archivs vorzugsweise aufgefasst zu sehen. Dass der Verfasser hauptsächlich die Arbeiten deutscher Astronomen berücksichtigte und berücksichtigen musste, ist ganz in der Natur der Sache begründet.

Nürnberger, Dr. Jos. Emil.: Populäres astronomisches Handwörterbuch, oder Versuch einer Erklärung der vornehmsten Begriffe und Kunstwörter der Astronomie u. s. w. 3s Heft. gr. 8. Mit 1 Figurentafel und 2 Karten. Kempten. 1843. geh. 12 ggr.

Pontécoulant, G. de: Théorie analytique du système du monde, Tome IV. 1 livr. 8. Paris. 1843.

Bremiker, C.: Verzeichniss der von Bradley, Piazzi, Lalande und Bessel beobachteten Sterne. Academ. Sternkarten. Zone XIII. Uhr. Blatt 14 und Zone XVI. Uhr. Blatt 17. Fol. (in Comm.). Berlin. 1843. 2 Thlr.

Graphische Darstellung des Laufes der Planeten und Kometen für das Jahr 1844, nebst ausführlicher Anleitung zu deren Gebrauche für Freunde und Lehrer der Himmelskunde. Entworfen von J. S. Schlimbach. Hamburg und Gotha. 1843. 12 ggr.

Besteht aus fünf Tafeln und scheint Liebhabern der beschauenden Astronomie zu empfehlen zu sein.

Groening, Alb. de: quaestiones et controversiae de die intercalari. 4to. Goettingae. 1843. 12 ggr.

Naturwissenschaftlich-astronomisches Jahrbuch für physische und naturhistorische Himmelsforscher und Geologen mit den für das Jahr 1845 vorausbestimmten Erscheinungen am Himmel. Herausgegeben von Fr. v. P. Gruithuisen. Sechstes Jahr. Stuttgart. 1843. 8. 2 Thlr. 18 ggr.

Auch dieser Jahrgang des naturwissenschaftlich-astronomischen Jahrbuchs, in welchem die Einrichtung der frühern Jahrgänge unverändert beibehalten worden ist, fährt in seiner Richtung Verdienstliches zu leisten fort, enthält wieder eine grosse Menge allgemein interessanter naturwissenschaftlicher Notizen, und verschmäht es zugleich auch nicht, die streng genommen nicht auf seinem Wege liegenden wichtigern neuern Arbeiten in der mathematischen Astronomie zu besprechen, so wie denn die sich nicht häufig findende Verbindung hinreichender mathematischer Kenntnisse mit sehr ausgebreiteten naturwissenschaftlichen, namentlich auch naturhistorischen Kenntnissen dem Herausgeber bei der Bearbeitung dieses Jahrbuchs gewiss sehr zu Statten kommt. Möge daher das Jahrbuch fortfahren, die Richtung in der Bearbeitung der Astronomie, die es zu vertreten sich nun einmal vorgenommen hat, auch fernerhin zu vertreten.

Schriften der Sternwarte Seeberg. Ermittelung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität und Neigung. Von P. A. Hansen, Director der Sternwarte Seeberg. Erster Theil, welcher als Beispiel die Berechnung der absoluten, vom Saturn erzeugten Störungen des Enckeschen Kometen enthält. Gotha. 1843. 4. 3 Thlr. 8 ggr.

Diese für physische Astronomie höchst wichtige Schrift enthält vorzüglich in §. IV. auch verschiedene für die Integralrechnung wichtige Untersuchungen, insbesondere über eine eigne Art von Transcendenten, welche der Verfasser durch F'_λ bezeichnet. Entwickelt man nämlich, wenn e wie gewöhnlich die Basis der na-

türlichen Logarithmen bezeichnet, $e^{\lambda(x-\frac{1}{x})}$ und $e^{-\lambda(x-\frac{1}{x})}$ in Reihen, so erhält man

$$e^{\lambda(x-\frac{1}{x})} = I^0\lambda + I^1\lambda x + I^2\lambda x^2 + I^3\lambda x^3 + \ldots.$$
$$- I^1\lambda\frac{1}{x} + I^2\lambda\frac{1}{x^2} - I^3\lambda\frac{1}{x^3} + \ldots.$$

und

$$e^{-\lambda(x-\frac{1}{x})} = I^0\lambda - I^1\lambda x + I^2\lambda x^2 - I^3\lambda x^3 + \ldots.$$
$$+ I^1\lambda\frac{1}{x} + I^2\lambda\frac{1}{x^2} + I^3\lambda\frac{1}{x^3} + \ldots.$$

woraus die Entstehung der in Rede stehenden Transcendenten, und die Art, wie dieselben zu definiren sein dürften, erhellet. Der Verfasser findet folgende Reihen:

$$I^0\lambda = 1 - \lambda^2 + \frac{1}{2^2}\lambda^4 - \frac{1}{2^2.3^2}\lambda^6 + \ldots.,$$

$$I^1\lambda = \lambda - \frac{1}{2}\lambda^3 + \frac{1}{2^3.3}\lambda^5 - \frac{1}{2^2.3^2.4}\lambda^7 + \ldots.,$$

$$I^2\lambda = \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2.3}\lambda^4 + \frac{1}{2^2.3.4}\lambda^6 - \frac{1}{2^2.3^2.4.5}\lambda^8 + \ldots.,$$

$$I^3\lambda = \frac{1}{2.3}\lambda^3 - \frac{1}{2.3.4}\lambda^5 + \frac{1}{2^2.3.4.5}\lambda^7 - \frac{1}{2^2.3^2.4.5.6}\lambda^9 + \ldots.$$

u. s. w.

Auf S. 101. giebt derselbe die Gleichung

$$1 = (I^0\lambda)^2 + 2(I^1\lambda)^2 + 2(I^2\lambda)^2 + 2(I^3\lambda)^2 + \ldots.$$

und auf S. 105. wird gezeigt, dass für ein ungerades i

$$I^i\lambda . \sqrt{-1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2\lambda\sqrt{-1}\cdot\sin x}\sin ix\,dx$$

und für ein gerades i

$$I^i\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2\lambda\sqrt{-1}\cdot\sin x}\cos ix\,dx$$

ist, woraus dann ferner die bemerkenswerthe für jedes ungerade und gerade i geltende Gleichung

$$0 = \lambda\{I^{i+1}_\lambda + I^{i-1}_\lambda\} - iI^i\lambda$$

gefolgert wird. Für $i = 0$ ergiebt sich aus dem Vorhergehenden

$$I^0\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2\lambda\sqrt{-1}\cdot\sin x}\,dx,$$

oder, wenn statt der imaginären Exponentialgrösse ihr Ausdruck durch Sinus und Cosinus eingeführt wird:

$$I^0\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\lambda \sin x)\, dx.$$

Auf S. 107. giebt der Verfasser die folgenden Reihen:

$$I^0{}_{2\lambda} = (I^0\lambda)^2 - 2(I^1\lambda)^2 + 2(I^2\lambda)^2 - 2(I^3\lambda)^2 + \ldots,$$
$$I^1{}_{2\lambda} = 2I^0\lambda I^1\lambda - 2I^1\lambda I^2\lambda + 2I^2\lambda I^3\lambda - 2I^3\lambda I^4\lambda + \ldots$$

und

$$I^0{}_{2\lambda} = -1 + 2(I^0\lambda)^2 + 4(I^2\lambda)^2 + 4(I^4\lambda)^2 + \ldots,$$
$$I^0{}_{2\lambda} = 1 - 4(I^1\lambda)^2 - 4(I^3\lambda)^2 - 4(I^5\lambda)^2 - \ldots,$$

welche letztere Gleichungen aus den beiden vorhergehenden mit Hülfe der aus dem Obigen bekannten Gleichung

$$1 = (I^0\lambda)^2 + 2(I^1\lambda)^2 + 2(I^2\lambda)^2 + 2(I^3\lambda)^2 + \ldots$$

abgeleitet werden. Auf S. 109. und S. 110. findet man die bemerkenswerthen Differentialformeln

$$\frac{dI^0\lambda}{d\lambda} = -2I^1\lambda,$$

$$\frac{d^2I^0\lambda}{d\lambda^2} = 2I^2\lambda - 2I^0\lambda$$

und die sich hieraus ergebende Differentialgleichung

$$\frac{d^2I^0\lambda}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{dI^0\lambda}{d\lambda} + 4I^0\lambda = 0,$$

und am Ende des Werks sind Tafeln für diese Transcendenten gegeben. Ausser den vorher namhaft gemachten Relationen finden sich noch manche andere bemerkenswerthe Ausdrücke, die sich aber hier natürlich nicht alle mittheilen lassen. Jedenfalls scheinen diese Transcendenten einer ausführlichen Untersuchung sehr werth zu sein, zu welcher wir wohl die Leser des Archivs auffordern möchten, da der Verfasser des vorliegenden wichtigen Werks, wie er selbst S. 10. sagt, nur das auf seinen nächsten Zweck Bezügliche in demselben entwickelt hat.

Physik.

Mossotti, O. F.: Lezioni elementari di fisica matematica, date nell' universita di Corfu 1840 — 41. Tomo I. Florenz. 1843. 6 L. 72 Cent.

In Nummer 52. des Jahrgangs 1843. Seite 820 — 837 der Heidelberger Jahrbücher hat Herr Professor Gerling zu Marburg eine Recension über F. von Driebergs höchst seltsame Schrift: Beweisführung. dass die Lehre der neuern Physiker von dem Drucke des Wassers und der Luft falsch ist, nebst dem Versuche, die Erscheinungen an flüssigen Körpern ohne atmosphärischen Luftdruck zu erklären. Mit einer Tafel Abbildungen. Zweite Auflage. Tausend Ducaten dem, der es vermag, des Verfassers Beweise zu widerlegen. Berlin. 1843. 8. geliefert, welche wir vorzüglich wegen mancher in derselben vorkommender, den physikalischen Unterricht betreffender Bemerkungen, die augenscheinlich aus vieljähriger Erfahrung geschöpft sind, für Lehrer der Physik lehrreich halten, und deshalb besonders auf dieselbe aufmerksam machen. Dass Herr v. Drieberg gern den alten Horror vacui wieder heraufbeschwören möchte, ist eine Erscheinung, die vielleicht mit gewissen allgemeinern Zeitrichtungen in einiger Verbindung steht. Sapienti sat!

Vermischte Schriften.

Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale. Rédigé par MM. Terquem, Officier de l'Université, Docteur ès sciences, Professeur aux Écoles royales d'artillerie et Gerono, Professeur de Mathématiques. Paris. 8.

Von diesem neuen mathematischen Journal, welches in monatlichen Heften herauskommt und, wie sich auch schon aus dem Titel entnehmen lässt, fast nur allein die weitere Ausbildung der elemenmentaren Theile zum Zwecke hat, und dabei zugleich die Bedürfnisse des Elementarunterrichts zu berücksichtigen sucht, sind bis jetzt zwei Bände (1842 und 1843) erschienen. Dass dessen Inhalt von jetzt an in dem Archive besonders berücksichtigt werden und aus ihm in demselben alles vorzüglich Wissenswerthe mitgetheilt werden wird, versteht sich von selbst. Namentlich dürfte der Artikel Uebungsaufgaben aus demselben künftig bereichert werden können, denn einigermaassen hervorstechende eigne Untersuchungen haben wir in den beiden vorliegenden Bänden nicht eben gefunden. Das Meiste betrifft die Elemente der analytischen Geome-

trie und deren Anwendung auf die Theorie der Linien des zweiten Grades.

The Cambridge mathematical Journal. No. XIX. November. 1843. I. On the evaluation of definite multiple integrals. By R. L. Ellis. II. On the equations of motion of rotation. By Andrew Bell. III. On a method of finding the greatest common measure of two polynomials. By A. Q. G. Craufurd. IV. On the symmetrical investigation of points of inflection. By W. Walton. V. Demonstration of Pascal's theorem. By A. Cayley. VI. On the transformation of multiple integrals. By G. Boole. VII. On the motion of a piston and of the air in a cylinder. By G. G. Stokes. VIII. On the equations of the motion of heat referred to curvilinear coordinates. IX. Of asymptotes to algebraic curves. By D. F. Gregory. X. Mathematical notes. 1. If a plane passes through any point of a surface, and makes any function of the intercepts it cuts of from the axes, a maximum or a minimum when it touches the surface, this maximum or minimum value is constant for all points of the surface; and, conversely, if for every point of a surface, a given function of the intercepts of the tangent plane is constant, this function is, with reference to any single point of the surface, a maximum or minimum for the tangent plane. 2. To find the value of

$$\frac{fa_1}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1)}+\frac{fa_2}{(a_1-a_2)(a_3-a_2)\ldots(a_n-a_2)}+\ldots=A,$$

when $a_1=a_2=\ldots=a$.

Rendiconto delle adunanze e de' lavori dell' accademia delle scienze, sezione della società reale borbonica di Napoli. Tomo I. Napoli. 1842. 4.

Es ist sehr erfreulich, dass nach Art mehrerer anderer Akademien der Wissenschaften nun auch die Società reale borbonica zu Neapel über ihre Arbeiten einen regelmässigen Bericht zu erstatten angefangen hat, welches gewiss zu der sehr zu wünschenden engern literarischen Verbindung zwischen Deutschland und Italien beitragen wird. Aus dem vorliegenden Bande machen wir nur auf folgende Abhandlungen aufmerksam. Flauti: Analytischer Beweis des V. euclidischen Postulats und desselben Abhandlung über eine neue und zweckmässigere Bezeichnung der krummen Flächen zweiter Ordnung. Fortun. Padula: Betrachtungen über den Widerstand der Stützpfeiler und andere Abhandlungen aus der angewandten Mathematik. Capocci: über die Finsterniss vom 8. Juli 1842 und über das Funkeln der Sterne. De Vico: über den Ring und die Satelliten des Saturns. De Luca: neues System der Tonometrie.

Digitized by Go

Physikalische Abhandlungen in den Förhandlingar vid de skandinaviske Naturforskarnes 3dje möte, i Stockholm, 1842.

S. 68—80. Historische Darstellung dessen, was seit dem Anfange des vorigen Jahrhunderts bis zu unserer Zeit für die Theorie des Erdmagnetismus geleistet worden ist; vom Prof. Hansteen.

S. 283—302. Ueber die Gesetze der Fortpflanzung des Lichts in isophanen und einachsig krystallisirten Medien; von O. J. Broch.

S. 315—318. Ueber ein neues Lufthermometer; von C. Holten.

S. 319—349. Ueber die Variation der Dichtigkeit in ein und derselben Abtheilung einer Flüssigkeit in Bewegung; von P. Lagerhjelm.

S. 351—356. Ueber die Ausdehnung prismatischer Körper vermittelst wirkender Kräfte, zunächst mit Rücksicht auf den Einfluss der Zeit; von C. G. Hummel.

S. 399—432. Kritische und experimentelle Prüfung von Faraday's „Abhandlung über die Quelle der Kraft in der Voltaischen Säule", und Rechtfertigung der Contacttheorie gegen die Einwendungen in dieser Abhandlung; von C. M. Poulsen.

S. 433—438. Einige Beobachtungen, betreffend den Wärmestoff und dessen Theorie; von A. J. Angström.

S. 439—447. Versuche mit der Electricität, welche sich beim Uebergange verschiedener flüssiger Körper in Dampf entwickelt, mit besonderer Berücksichtigung von deren Verhalten zur Contactelectricität; von P. S. Munck von Rosenshöld.

S. 477—482. Ueber die Anwendung von Quellentemperaturbeobachtungen zur Bestimmung der Erdwärme; von P. A. Siljeström.

S. 487—492. Versuche mit einem lebenden Zitteraale in London 1841; von Carl Palmstedt.

Physikalische und mathematische Abhandlungen in den Kongl. (Svensk) Vetenskaps-Academiens Handlingar.

För 1839, Stockh. 1841:

S. 139—154. Ueber die Bewegung der Flüssigkeiten; von A. F. Svanberg.

För 1840, Stockh. 1842:

Nichts.

För 1841, Stockh. 1842:

S. 65—74. Ueber die Integrale $\int_0^\infty \frac{\cos axdx}{(1+x^2)^n}$; von C. J. Malmsten.

S. 89—179. Beobachtungen über das Nordlicht und die Veränderungen, welche die erdmagnetischen Verhältnisse durch den Einfluss dieses Phänomenes erleiden; von A. Siljeström.

S. 187—196. Ueber eine Methode, sich bei Barometerbeobachtungen unabhängig von der Unvollkommenheit des Vacuums im Barometer zu machen; von N. G. Sefström.

Physikalische und mathematische Abhandlungen in Det Kongel. Danske Videnskabernes Selskabs naturvidenskabelige og mathematiske Afhandlinger. Kopenhagen. 1841. 4. Band VIII.

S. XIX—XXIV. Auszug aus einer Abhandlung des Prof. Ramus über die periodischen Kettenbrüche.

S. XXXI—IV. Etatsr. Oersted legte eine Abhandlung über die Wasserhosen vor.

S. XLIV—V. Mathematisches vom Prof. Jürgensen.

S. LXXII—IV. Derselbe legte eine Abhandlung vor über die allgemeinen Principien einer Theorie der Integrale, deren Differentiale algebraisch sind.

S. LXXXVIII—IX. Hansteen, Abhandlung über die von der Stellung des Mondes abhängigen Veränderungen in der magnetischen Intensität der Erde.

S. 1—15. Ueber die Zerlegung einer Classe von Functionen; von Chr. Jürgensen.

S. 17—26. Ueber die Summation der transcendenten Functionen, deren Differentiale algebraische sind; von demselben.

Anzeige.

Der systematisch geordnete mathematische Katalog meines antiquarischen Lagers ist im September d. J. erschienen und sowohl vom Unterzeichneten als auch durch alle Buchhandlungen und Antiquariats-Geschäfte zu beziehen.

Halle im November 1843.

J. F. Lippert.

Druckfehler.

Im dritten Hefte muss S. 251. Z. 2. perspectivischen statt projectivischen gelesen werden.

Fig. 1.

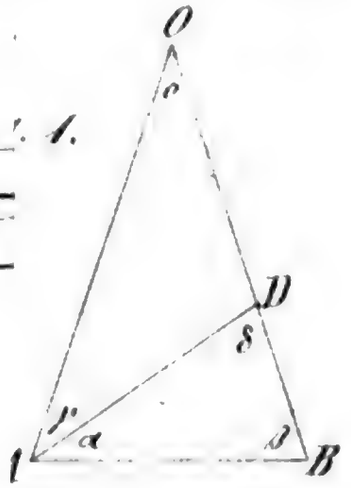


Fig. 5.

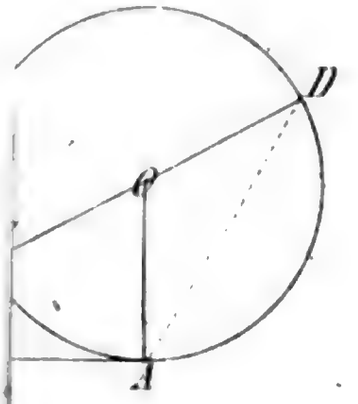


Fig. 11.

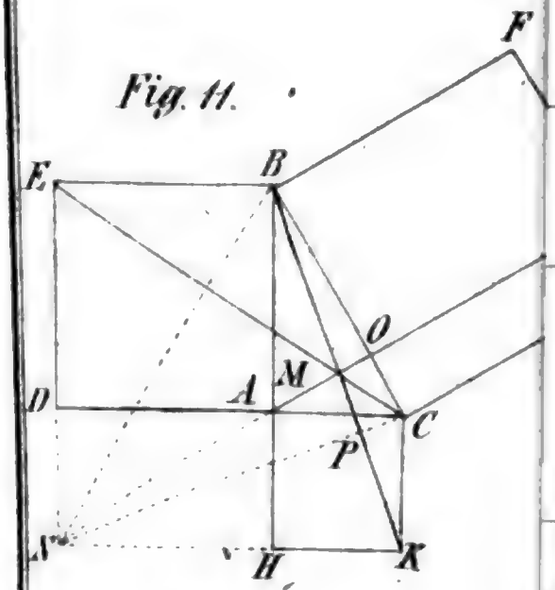
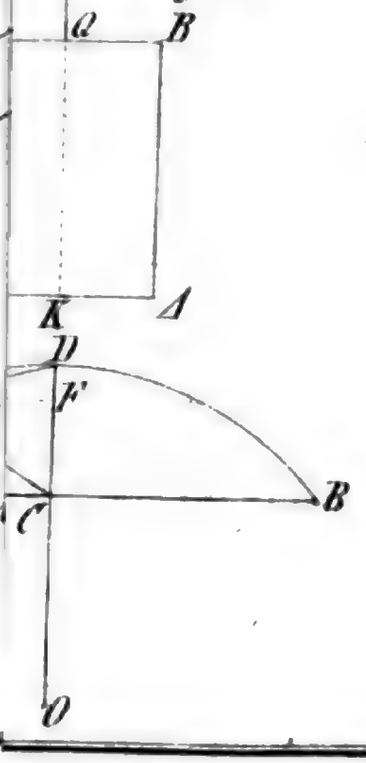


Fig. 2.



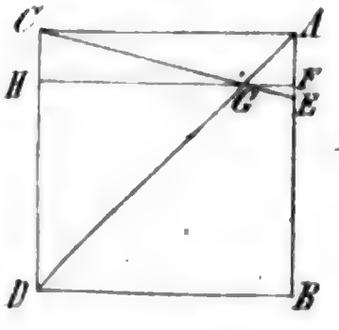


Fig.

Grunert Archiv.

Fig. 1.

4.

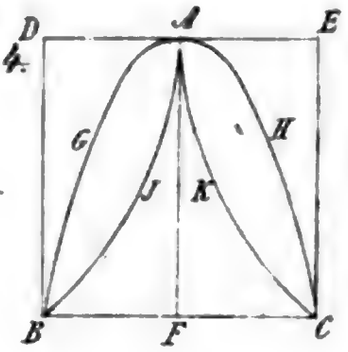
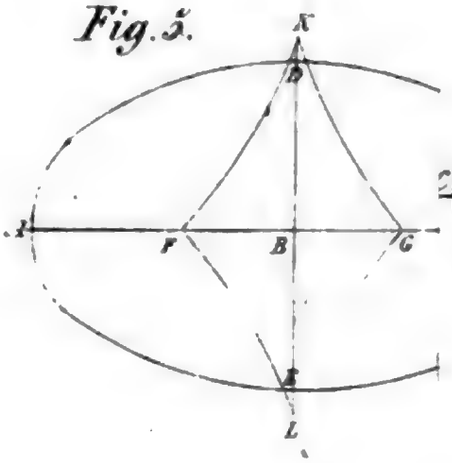


Fig. 5.



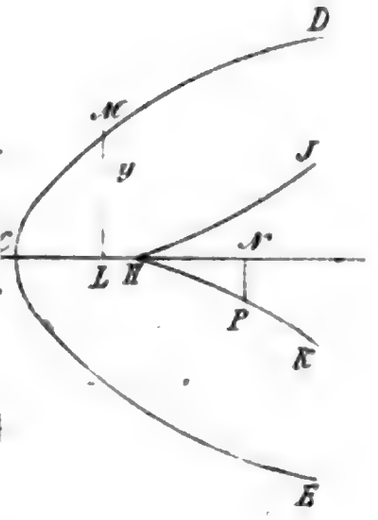


Fig. 8.

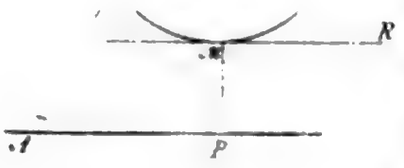


Fig. 11.

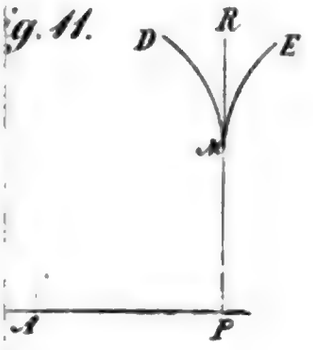
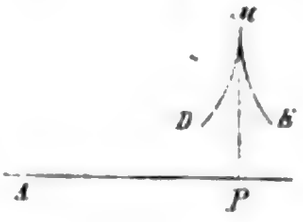
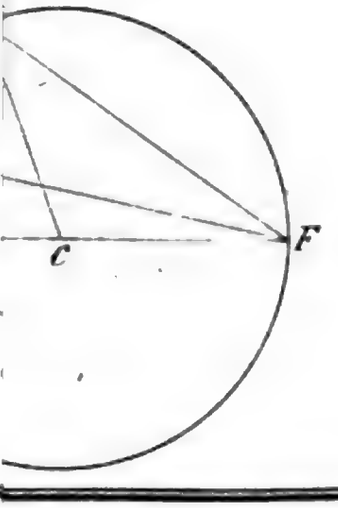


Fig. 12.





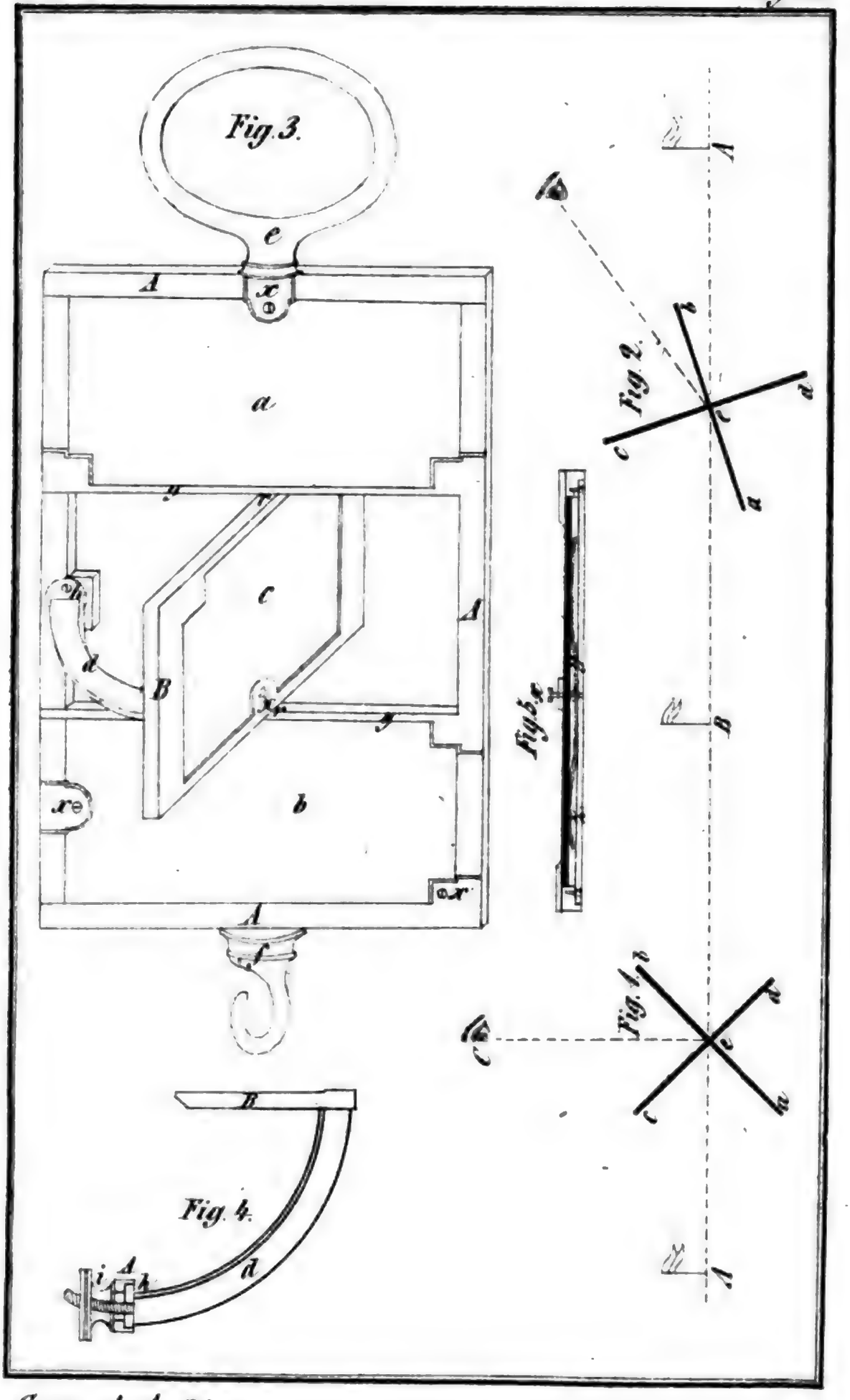


Fig. 3.
Fig. 2.
Fig. 5.
Fig. 1.
Fig. 4.

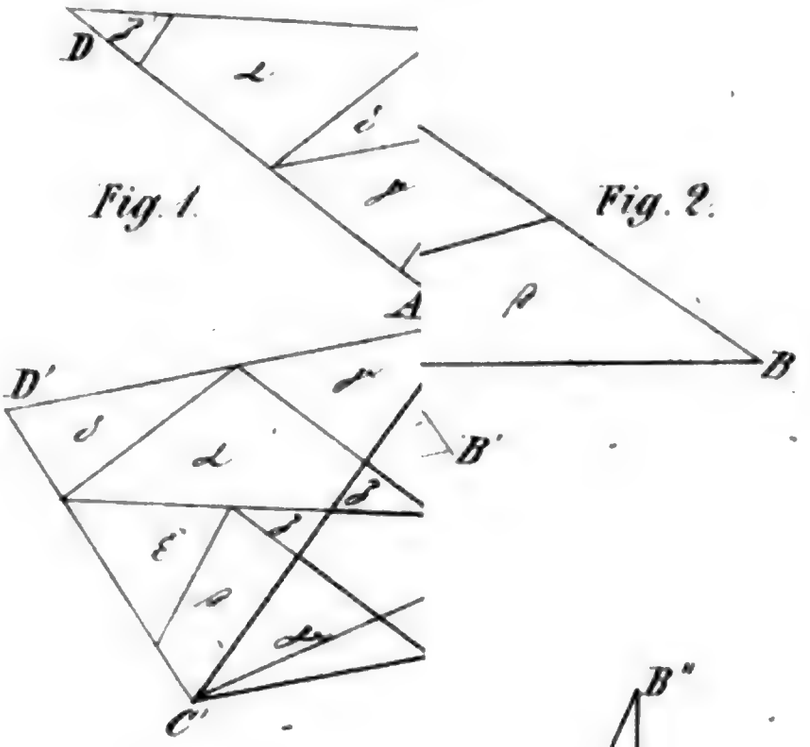


Fig. 1. Fig. 2.

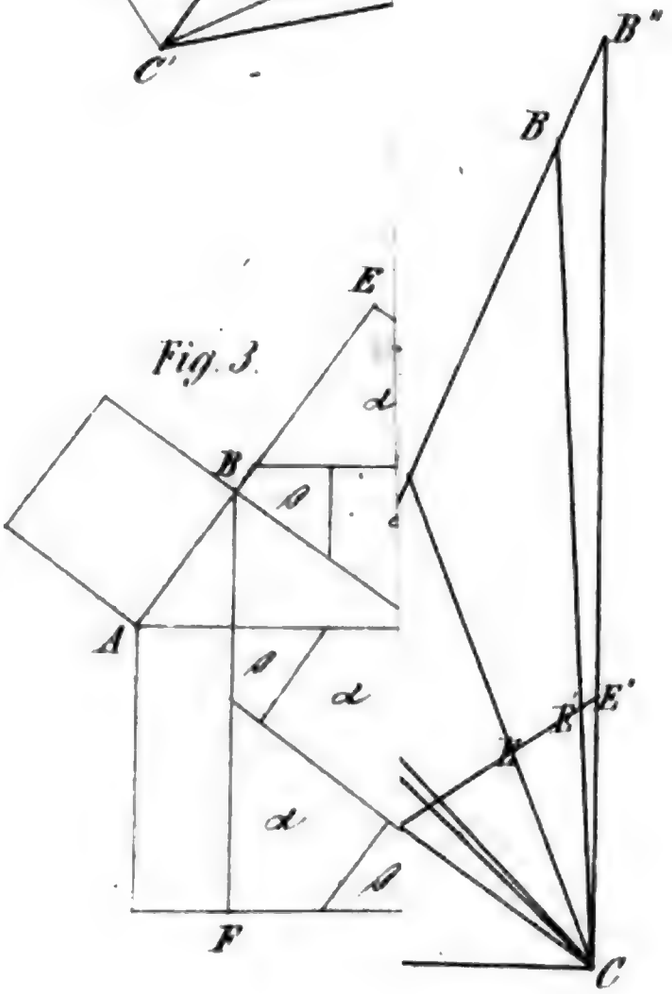


Fig. 3.

Fig. 5.

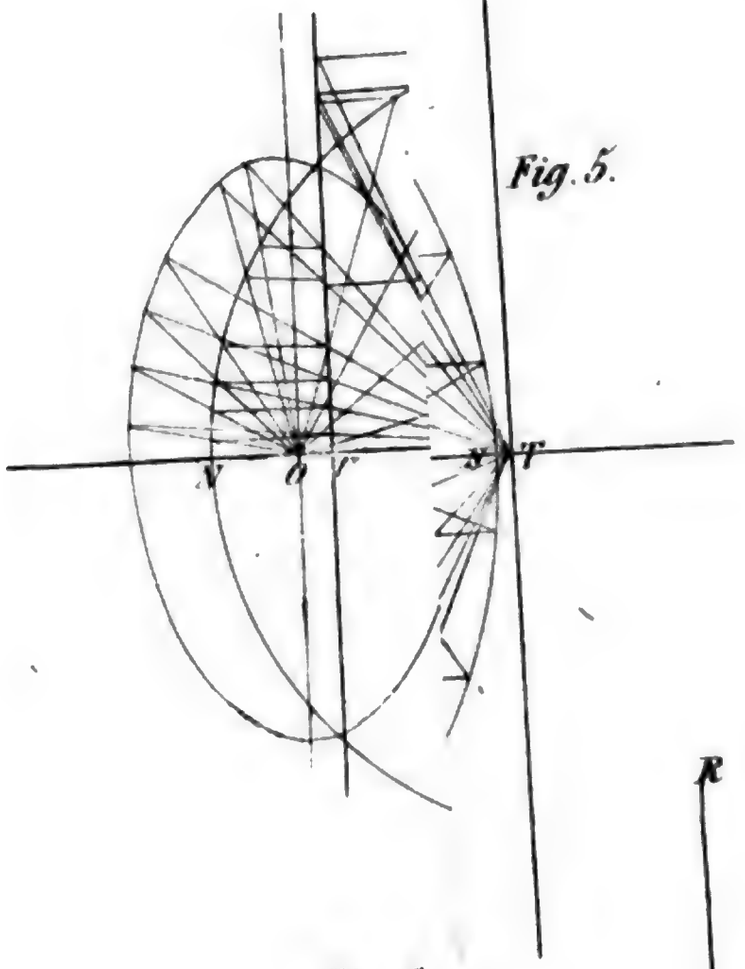


Fig. 6.

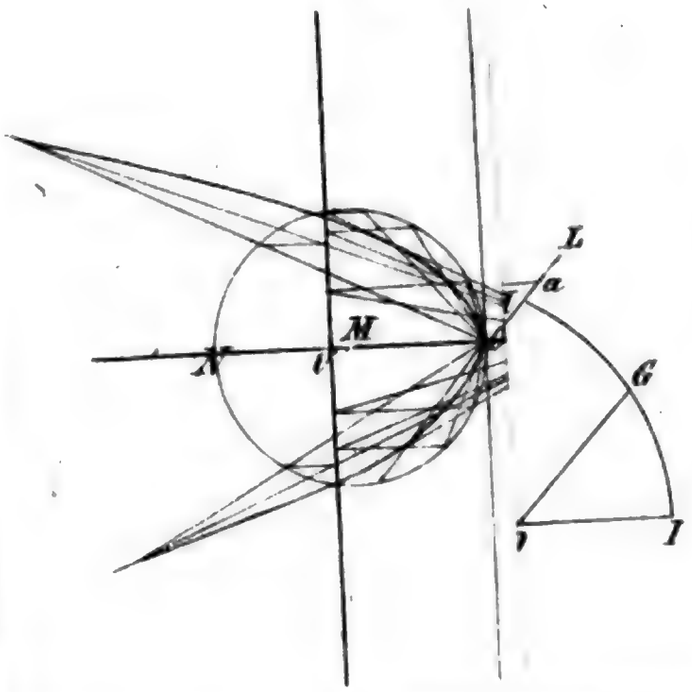
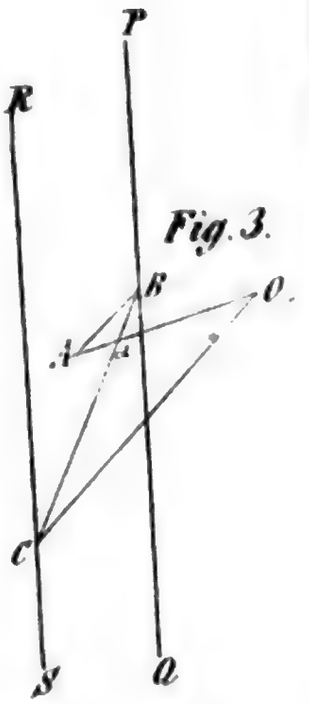


Fig. 3.



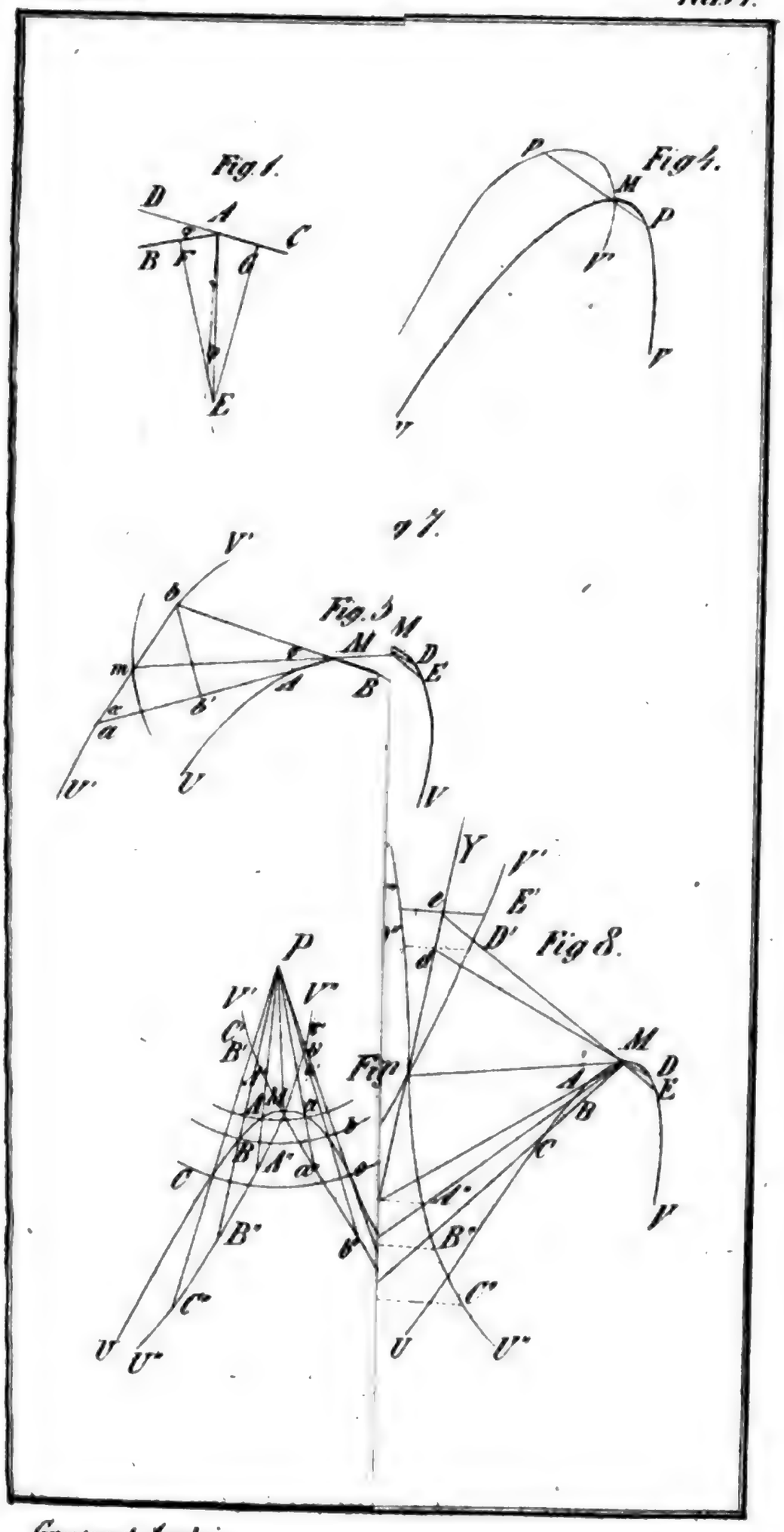
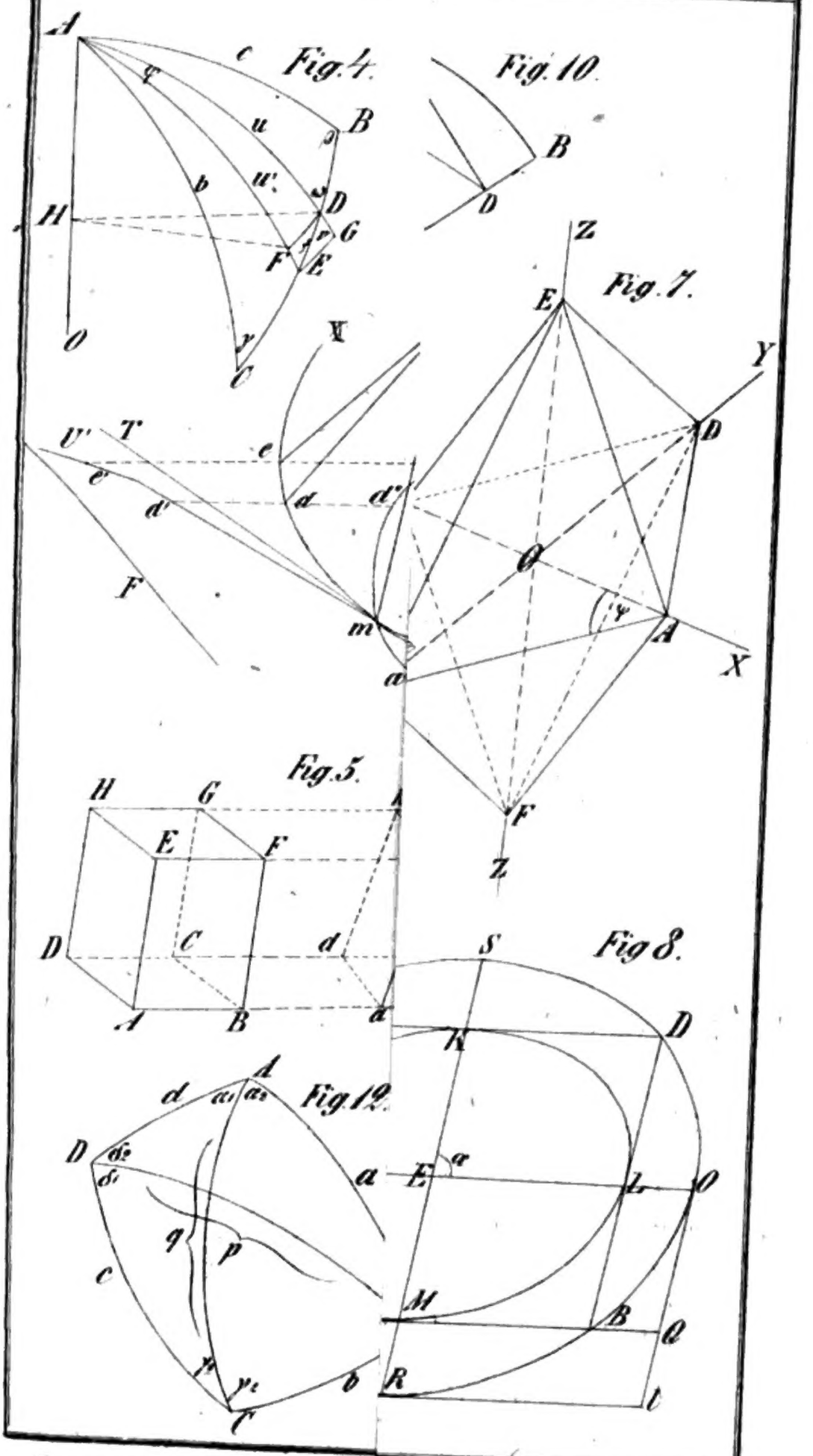


Fig. 1.
Fig. 4.
Fig. 3
Fig. 8.



Grunert Archiv.

Digitized by Google

Digitized by Google

To renew the charge, book must be brought to the desk.

TWO WEEK BOOK

DO NOT RETURN BOOKS ON SUNDAY

DATE DUE

Form 7079 3-50 30M 8

Digitized by Google

Digitized by Google